arXiv:2301.03813v1 [math.AG] 10 Jan 2023

曲线的联络与真正分歧映射

Indranil Biswas、Francois-Xavier Machu 和 A. J. Parameswaran

Abstract. 设 X是定义在代数闭域上的不可约光滑射影曲线， E 是其上的向量丛， D 是 E 上的一个奇异联络。我们证明，存在唯一的极大子层，使得 D 在其上诱导出一个非奇异联络。设 ϕ： $Y \longrightarrow X$ 是不可约光滑射影曲线之间的一般光滑映射，且 Y上有一个奇异联络（V， D），则直接像 $\phi_* V$ 带有一个奇异联络。令 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 为唯一的极大子层，在该子层上， $\phi_*\mathcal{O}_Y$上的奇异联络（对应于 $\mathcal{O}_Y$ 上的平凡联络）诱导出一个非奇异联络。我们证明，由 ϕ 诱导的 ´étale 基本群同态 ϕ_*： $\pi_1^{\text{et}}(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1^{\text{et}}(X, \phi(y_0))$ 是满射，当且仅当 $\mathcal{O}_X \subset$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 是唯一的极大半稳定子层。

当基域的特征为零时，同态 ϕ_* 是满射，当且仅当 $\mathcal{O}_X =$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)。对于 X 上向量丛V 上的任意非奇异联络 D，都有一个自然映射 $V \hookrightarrow$ R($\phi_*\phi^*V$)。当基域的特征为零时，我们证明映射 ϕ 是真正分歧的，当且仅当 $V =$ R($\phi_*\phi^*V$)。

1. Introduction

设 X 和 Y 是定义在代数闭域 k 上的不可约光滑射影曲线，且 ϕ： $Y \longrightarrow X$ 是一个一般光滑的态射（换言之， ϕ 是满射且可分的）。固定一个基点 $y_0 \in Y$，并考虑由 ϕ 诱导的 ´êtale 基本群同态 ϕ_*： $\pi_1^{\text{et}}(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1^{\text{et}}(X, \phi(y_0))$。若映射 ϕ 满足 ϕ_* 是满射 [BP]，则称其为真正分歧。真正分歧这一性质有许多等价表述，我们将在下文回顾。

如上所述的映射 ϕ 是真正分歧的，当且仅当以下等价条件之一（因而全部）成立（见 [BP]）：

(1) 映射 ϕ 不通过某个非平凡的 ´etale 覆盖因子分解 X（特别是，ϕ 不是非平凡的 ´etale）。(2) 纤维积 $Y \times_X Y$ 是连通的。(3) $\dim H^0(Y, \phi^*\phi_*\mathcal{O}_Y) = 1$。(4) 直接像 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 的极大半稳定子丛是 $\mathcal{O}_X$。(5) 对于 X 上的每个稳定向量丛 E，拉回到 Y 上的向量丛 ϕ^*E 也是稳定的。

[BP] 的主要定理表明，当且仅当上述列表中的第五条陈述成立时，上述列表中的第三条陈述对 ϕ 成立。

2010年数学主题分类：14H30、14H60、53B15。关键词与短语：真正分歧映射、联络、奇点。1

我们的目标是理解联络的直接像，并利用某个特定联络的直接像来阐释真正分歧映射。

设 E 是 X 上配备奇异联络 D 的向量丛。我们证明，存在唯一的极大子层

$$\mathbf{R}(E) \subset E$$

其上 的 D 诱导出一个非奇异联络（见引理 2.1 和定义 2.3 ）.

若 V 是 Y 上配备奇异联络 D 的向量丛，则其直接像 $\phi_* V$ 在 X 上配备一个自然的奇异联络（见引理 2.5）。现在令 (V, D) 表示配备由德拉姆微分 d 给出的平凡联络的 $\mathcal{O}_Y$。令 d_ϕ 表示 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上由 $\mathcal{O}_Y$ 上的平凡联络给出的奇异联络。我们证明如下结论（见命题 2.7）：

映射 ϕ 是 ´étale 的，当且仅当联络 d_ϕ 是非奇异的。

Let

$$\mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \subset \phi_*\mathcal{O}_Y$$

是使 d_ϕ 诱导出非奇异联络的唯一极大子层。于是我们有

$$\mathcal{O}_X \subset \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \subset \phi_*\mathcal{O}_Y\,. \tag{1.1}$$

我们证明如下结论（见推论 3.4）：

映射 ϕ 是真正分歧的，当且仅当其中的子层 $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y)$ 是（唯一的） (1.1) 极大半稳定子层。

接下来我们证明如下结论（见定理 3.5）：

假设基域 k 的特征为零。态射 ϕ 是真正分歧的，当且仅当包含映射

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y)$$

（1.1）中的包含映射实际上是一个同构。

我们注意到，当基域 k 的特征为正时，定理 3.5 实际上并不成立（见注 3.6）。

取一个定义在 X 上、配备非奇异联络 D 的向量丛 V。则 $\phi^*V\widehat{\ }$ 带有拉回的非奇异联络 ϕ^*D。记由 ϕ^*D 诱导的 $\phi_*\phi^*V$ 上的奇异联络为 D。令

$$\mathbf{R}(\phi_*\phi^*V) \subset \phi_*\phi^*V$$

为其上的唯一极大子层，使得 $\widehat{D}$ 诱导一个非奇异联络。

我们证明如下结论（见命题 4.1 和命题 4.2）：

假设基域 k 的特征为零。存在一个自然映射 $V \hookrightarrow \mathbf{R}(\phi_*\phi^*V)$。映射 ϕ 是真正分歧的，当且仅当 $V = \mathbf{R}(\phi_*\phi^*V)$。

命题 4.2 是审稿人友好地指出的。

2. Singular connection on direct image

假设基域 k 是代数闭的。设 X 是定义在 k 上的不可约光滑射影曲线。固定一个有限子集

$$S := \{x_1, \cdots, x_n\} \subset X\,.$$

X 上的约化有效除子 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 也记作 S。X 的余切丛记作 K_X。

设 E 是 X 上的一个向量丛。E 上的联络是一个一阶微分算子

$$D : E \longrightarrow E \otimes K_X$$

使得

$$D(fs) = fD(s) + s \otimes df \tag{2.1}$$

对于 X 上任意局部定义的函数 f，以及 E 的任意局部定义的截面 s，均成立。E 上在 S 的点处具有 m 阶极点的奇异联络是一个一阶微分算子

$$D : E \longrightarrow E \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(mS)$$

使得 (2.1) 成立。E 上的对数联络是指在 S上具有一阶极点的、E 上的奇异联络。对于某个 m，E 上在 S处具有极点的奇异联络，是指 E 上在 S 处具有 m 阶极点的奇异联络。

现在我们给出一些联络的例子。当 k 的特征为零时，X 上的向量丛 E 存在一个（非奇异）联络，当且仅当 E 的每个直和项（包括 E）的次数都为零 [。我们], [在]（在 [中，在] 和 [中]，这一点是在基域为复数的假设下证明的；一般情形见 [BS，第 145 页，命题 3.1]）。若 k 的特征为 $p > 0$，且 X上的向量丛 E 存在一个联络，则 E 的每个直和项的次数都是 p的倍数[（BS，第 145 页，命题 3.1]）。若 k 的特征为正，且 $X \longrightarrow X$：X是 X的绝对 Frobenius 态射，那么对于 X上的任意向量丛 E，拉回的向量丛 F_X^*E具有一个自然联络（见 [Ka], [Gi]）。此外，子层$V \subset F_X^*E$是 E的某个子层的拉回，当且仅当 V在 F_X^*E上的这个自然联络下保持不变。

引理 2.1. 设 E 是 X 上的一个向量丛，D 是 E 上具有 S 上 m 阶极点的奇异联络。则存在唯一的 E 的极大子层 F，使得 D 在其上诱导一个（非奇异）联络。

证明. 取凝聚子层 F_1、$F_2 \subset E$，使得

$$D(F_i) \subset F_i \otimes K_X \subset E \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(mS)$$

对 $i = 1$，2. 那么由 F_1 和 F_2 生成的凝聚子层 $F_1 + F_2 \subset E$ 显然满足以下条件:

$$D(F_1 + F_2) \subset (F_1 + F_2) \otimes K_X \subset E \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(mS)\,.$$

该引理可由此观察立即得出。 □

注 2.2. 引理 2.1 中的极大子层 $F \subset E$，在其上 D 诱导一个（非奇异）联络，不一定是子丛；换言之，E/F 不一定无挠。举例来说，考虑配备如下对数联络的 $\mathcal{O}_X(S)$：德拉姆微分 d。那么，$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(S)$ 是该对数联络诱导非奇异联络的极大子层。商 $\mathcal{O}_X(S)/\mathcal{O}_X$ 是一个非零挠层。

定义 2.3. 设 E 是 X 上的一个向量丛，且 D 是 E 上的一个奇异联络，其在 S 上有 m 阶极点。子层

$$\mathbf{R}(E) := F \subset E$$

引理 2.1 中的子层称为极大正则子层。

注记 2.4. 设 E 是 X 上的一个向量丛，且 D 是 E 上的一个奇异联络，其在 S 上有 m 阶极点。可能不存在满足以下条件的非零子层 F：

$$D(F) \subset F \otimes K_X.$$

此类例子见命题 4.1 的证明。若不存在满足 $D(F) \subset F \otimes K_X$ 的非零子层 $F \subset E$，则定义 2.3 中的 $\mathbf{R}(E)$ 是 E 的零子层。

设 X 和 Y 是定义在 k 上的不可约光滑射影曲线，并设

$$\phi : Y \longrightarrow X \tag{2.2}$$

是一个一般光滑态射。令 $S \subset X$ 为满足以下条件的最小子集：ϕ 在补子空间 $X \setminus S$ 上是 ´etale。约化逆像 $\phi^{-1}(S)_{\rm red}$ 记为 S_Y。

引理 2.5. 设 E 是 Y 上的一个向量丛，且 D 是 E 上具有 S_Y 上 m 阶极点的奇异联络。那么 D 在直接像 $\phi_* E$ 上诱导出一个奇异联络，其极点位于 S 上。

证明. 分别用 X' 和 Y' 表示补子空间 $X \setminus S$ 和 $Y \setminus S_Y$。ϕ 在 Y' 上的限制记为 ϕ。注意，$\phi^* K_{X'} = K_{Y'}$。D（分别为 E）在 $Y' \subset Y$ 上的限制记为 D'（分别为 E'）。对算子取直接像

$$D' : E' \longrightarrow E' \otimes K_{Y'}$$

我们得到

$$\widehat{\phi}_* D' : \widehat{\phi}_* E' \longrightarrow \widehat{\phi}_*(E' \otimes K_{Y'}) = \widehat{\phi}_*(E' \otimes \widehat{\phi}^* K_{X'}) .$$

投影公式（见 [Ha，第 124 页，例 5.1(d)]）给出 $\phi_*(E' \otimes \phi^* K_{X'}) = (\phi_* E') \otimes K_{X'}$，因此我们有

$$\widehat{\phi}_* D' : \widehat{\phi}_* E' \longrightarrow (\widehat{\phi}_* E') \otimes K_{X'} .$$

容易验证，$\phi_* D'$ 是 $\phi_* E'$ 上的一个联络。这个联络 $\phi_* D'$ 定义在 $\phi_* E'$ 上，并可延拓为 $\phi_* E$ 上的一个奇异联络，其极点位于 S 之上。事实上，这立即由微分算子 $\phi_* D'$ 是代数的这一事实得出。该联络在任意 $x \in S$ 处的极点阶数上界为 $d'(r'+1)$，其中 d' 是

D' 在 $\phi^{-1}(x)$各点处极点阶数的最大值，而 r' 是 ϕ 在 $\phi^{-1}(x)$各点处的分歧阶的最大值。□

推论 2.6。直接像 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 具有自然的奇异联络，其极点位于S之上。

证明。考虑由德拉姆微分给出的 $\mathcal{O}_Y$ 上的平凡联络 $f \longmapsto df$ 。根据引理 2.5，该联络在 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上产生一个奇异联络，其极点位于 S之上。□

命题 2.7。(2.2) 中的映射 ϕ 是 ´étale，当且仅当推论 2.6 中得到的 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的（可能是奇异的）联络实际上是非奇异的。

证明。令 d_ϕ 表示推论 2.6 中得到的 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的奇异联络。

若映射 ϕ 是 ´étale，则推论 2.6 中的 S 是零除子。因此，在这种情况下， d_ϕ 实际上是非奇异的。

为证明逆命题，假设 ϕ 并非 ´etale。取一点 $y \in Y$ ，使得 ϕ 的微分在此处消失。固定 $\phi(y)$的一个 Zariski开邻域 $U \subsetneq X$ 。设 f 是定义在 $\phi^{-1}(U)$上的函数，满足 $df(y) \neq 0$。若 ω是 U上的一个 1-形式，则

$$\phi^*\omega \in H^0(\phi^{-1}(U),\, K_{\phi^{-1}(U)})$$

在 y处消失，因为 ϕ 的微分在 y处消失。因此， df 不属于同态的像

$$H^0(U,\, K_U) \longrightarrow H^0(\phi^{-1}(U),\, K_{\phi^{-1}(U)}), \quad \omega \longmapsto \phi^*\omega\,. \tag{2.3}$$

Let

$$\widehat{f} \in H^0\left(U,\, \phi_*\mathcal{O}_Y\big|_U\right)$$

是与 f对应的截面。由于 df 不属于 (2.3) 中同态的像，我们得出

$$d_\phi(\widehat{f}) \notin H^0\left(U,\, (\phi_*\mathcal{O}_Y)\,\big|_U \otimes K_U\right)\,.$$

因此，联络 d_ϕ 在点 $\phi(y)$处确实是奇异的。□

3. Characterization of the genuinely ramified maps

取 (2.2) 中的 X、 Y 和 ϕ 。对于推论 2.6 中 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的奇异联络，设

$$\mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \subset \phi_*\mathcal{O}_Y \tag{3.1}$$

是极大正则子层（参见定义 2.3）。

由于

$$H^0(Y,\, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y,\, \mathcal{O}_Y)) = H^0(Y,\, \mathrm{Hom}(\phi^*\mathcal{O}_X,\, \mathcal{O}_Y)) = H^0(X,\, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,\, \phi_*\mathcal{O}_Y))$$

（参见 [Ha，第 110] 页）， $\mathcal{O}_Y$ 的恒等映射产生一个非零同态

$$\iota : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \phi_*\mathcal{O}_Y\,. \tag{3.2}$$

注 3.1。

（1）(3.2) 中的凝聚子层 $\mathcal{O}_X \subset \phi_*\mathcal{O}_Y$ 实际上是一个子丛。事实上，这直接由以下事实得出：对于任意 $x \in X$ 的 Zariski开邻域$U \subset X$，以及任意满足 $f(x) \neq 0$ 的 $f \in H^0(U, \mathcal{O}_U)$，截面$f \circ \phi \in H^0(\phi^{-1}(U)\ \mathcal{O}_{\phi^{-1}(U)})\ \mathcal{O}_{\phi^{-1}}$在 $\phi^{-1}(x)$ 的任何点上都不为零。

(2) 当基域 k 的特征为零时，$\phi_*\mathcal{O}_Y$ 实际上可分裂为 $\mathcal{O}_X \oplus T^*_\phi$，其中 T_ϕ 称为 Tschirnhausen丛（见 [CLV]）。我们注意到，当 k 的特征为正时，$\phi_*\mathcal{O}_Y$ 一般不会分裂。例如，设 k 的特征为二，并取一个次数为二的非平凡 ´étale 覆盖 ϕ。那么，$\phi_*\mathcal{O}_Y$ 是一个次数为零的线丛被 $\mathcal{O}_X$ 扩张所得的非平凡扩张。事实上，这直接源于群环 $k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 作为一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 模并非完全可约；子模

$$\{\lambda \cdot 1 + \lambda \cdot g \mid \lambda \in k\} \subset k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}],$$

其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, g\}$ 没有补子空间。

命题 3.2。(3.2) 中的子层 $\mathcal{O}_X$ 包含于 (3.1) 中的子层 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)。

证明。设 d_X（分别为 d_Y）表示由 X（分别为 Y）上的德拉姆微分给出的 $\mathcal{O}_X$（分别为 $\mathcal{O}_Y$）上的联络。自然同构 $\phi^*\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y$ 将拉回联络 ϕ^*d_X（定义在 $\phi^*\mathcal{O}_X$ 上）映到 $\mathcal{O}_Y$ 上的联络 d_Y。由此可知，下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\iota} & \phi_*\mathcal{O}_Y \\ \downarrow d_X & & \downarrow \widetilde{d}_Y \\ K_X & \xrightarrow{\iota\otimes\xi} & (\phi_*\mathcal{O}_Y) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta) \end{array} \tag{3.3}$$

其中

- ι 是 (3.2) 中的同态，$\sim$
- d_Y 是 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的（奇异）联络，由推论 2.6 从 $\mathcal{O}_Y$ 上的非奇异联络 d_Y 得到，$\sim$
- Δ 是 d_Y 的极除子，并且
- ξ： $K_X \longrightarrow K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta)$ 是自然同态。

鉴于 (3.3) 的交换性，根据极大正则子层 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 的定义，可立即得出 $\mathcal{O}_X \subset$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)。□

Let

$$0 \subsetneq H_1 \subset \cdots \subset H_{b-1} \subset H_b = \phi_*\mathcal{O}_Y \tag{3.4}$$

是 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 的 Harder–Narasimhan 滤过（参见 [HL，第 1.3] 节）。注意，H_1 是 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 的唯一极大半稳定（亦称极大不稳定）子丛。

Let

$$0 \subsetneq G_1 \subset \cdots \subset G_{c-1} \subset G_c = \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \tag{3.5}$$

是 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 的 Harder–Narasimhan 滤过。与之前一样， G_1 是 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 的唯一极大半稳定子丛。

命题 3.3. (3.5) 中的子层 $G_1 \subset$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) $\subset \phi_*\mathcal{O}_Y$ 与 (3.4) 中的子层 H_1 相同。

证明. 我们知道

$$\text{degree}(H_1) = 0 \tag{3.6}$$

（见 [BP，第 12825 页，(2.7)]）。因此 degree(G_1) ≤ 0，因为 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) $\subset \phi_*\mathcal{O}_Y$。另一方面，degree($G_1$) ≥ 0，因为 $\mathcal{O}_X \subset$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)（见命题 3.2）。由此可得

$$\text{degree}(G_1) = 0. \tag{3.7}$$

鉴于 (3.6) 和 (3.7)，根据 Harder–Narasimhan 滤过的性质，我们得出

$$G_1 \subset H_1. \tag{3.8}$$

现在我们将证明

$$H_1 \subset G_1. \tag{3.9}$$

回忆一下， $\mathcal{O}_X \subset H_1 \subset \phi_*\mathcal{O}_Y$。首先假设 $H_1 = \mathcal{O}_X$。但我们有 $\mathcal{O}_X \subset G_1$，因为 $\mathcal{O}_X \subset$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)（见命题 3.2），且（3.7）成立。因此，在这种情况下，（3.9）成立。

接下来假设 $\mathcal{O}_X \subsetneq H_1$。于是存在一个非平凡的 ´étale 覆盖

$$g : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

~以及一个态射 $h:\ Y \longrightarrow X$，使得

（1） $g \circ h = \phi$,

以及（2）子层

$$\iota : g_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \hookrightarrow \phi_*\mathcal{O}_Y, \tag{3.10}$$

由（1）中 ϕ 的分解所给出的子层，与 H_1重合。

（参见 [BP 的证明中（2） $\Longrightarrow$ （1）的证明，命题 2.6]。）由于 g 是 ´étale，根据命题 2.7，由推论 2.6 得到的 $g_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ 上的联络是非奇异的。另一方面，（3.10）中的同态 ι 显然保持联络。换言之，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} g_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \xrightarrow{\iota} & \phi_*\mathcal{O}_Y \\ \downarrow & & \downarrow d_\phi \\ (g_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \otimes K_X & \xrightarrow{\iota\otimes\xi} & (\phi_*\mathcal{O}_Y) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta) \end{array}$$

~其中， Δ 是奇异联络 d_Y 的极除子（见（3.3））， 而 ξ 是（3.3）中的同态。因此，我们得出

$$g_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \subset \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y).$$

这再次推出（3.9）。 □

固定一个基点 $y_0 \in Y$。如果（2.2）中的态射 ϕ 所对应的 ´étale 基本群同态

$$\phi_* \ : \ \pi_1^{\rm et}(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1^{\rm et}(X, \phi(y_0))$$

是满射的 [BP]。

由 (3.7) 和命题 3.2 可知

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow G_1. \tag{3.11}$$

推论 3.4。映射 ϕ 真正分歧，当且仅当 (3.11) 中的包含映射 $\mathcal{O}_X \hookrightarrow G_1$ 是同构。

证明。由 [BP，第 12828 页，命题 2.6]，我们知道 ϕ 真正分歧，当且仅当 $H_1 = \mathcal{O}_X$，其中 H_1 是 (3.4) 中的子层。因此该结果立即由命题 3.3 得出。□

定理 3.5。假设基域的特征 k 为零。(2.2) 中的态射ϕ 真正分歧，当且仅当包含映射

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y)$$

是命题 3.2 中的一个同构。

证明。首先假设 ϕ 不是一个真正分歧映射。这意味着存在一个非平凡的 ´etale 覆盖

$$\gamma \ : \ Z \longrightarrow X$$

以及一个态射 β: $Y \longrightarrow Z$，使得 $\phi = \gamma \circ \beta$ [BP，命题 2.6]。由于 $\phi = \gamma \circ \beta$，我们有

$$\iota \ : \ \gamma_*\mathcal{O}_Z \hookrightarrow \phi_*\mathcal{O}_Y \, . \tag{3.12}$$

由推论 2.6 给出的 $\gamma_*\mathcal{O}_Z$（分别为 $\phi_*\mathcal{O}_Y$）上的可能为奇异的联络记为 d_γ（分别为 d_ϕ）。由于根据命题 2.7，γ 是 ´etale 的，我们知道 d_γ 是非奇异的。另一方面，(3.12) 中的同态 ι 交织了 d_γ 和 d_ϕ，这意味着下图是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_*\mathcal{O}_Z & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & \phi_*\mathcal{O}_Y \\ \big\downarrow d_\gamma & & \big\downarrow d_\phi \\ K_X & \stackrel{\iota\otimes\xi}{\longrightarrow} & (\phi_*\mathcal{O}_Y) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta) \end{array}$$

其中 Δ 是 d_ϕ 的极除子，而 ξ: $K_X \longrightarrow K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta)$ 是自然同态。因此我们有

$$\iota(\gamma_*\mathcal{O}_Z) \subset \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \, .$$

由于 rank($\iota(\gamma_*\mathcal{O}_Z)$) = degree($\gamma$) > 1（请回想，γ 是一个非平凡的 ´étale 覆盖），因此可得 rank($\mathcal{O}_X$) $<$ rank(R($\phi_*\mathcal{O}_Y$))。

现在我们将证明，如果 ϕ 是真正分歧映射，那么 $\mathcal{O}_X$ = R($\phi_*\mathcal{O}_Y$)。

和之前一样，令 d_ϕ 表示由推论 2.6 给出的 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上可能奇异的联络。由于 d_ϕ 在 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) 上诱导出非奇异联络，且 k 的特征为零，我们得出

$$\text{degree}(\mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y)) \,=\, 0 \tag{3.13}$$

（见 [BS，第 145 页，命题 3.1]）。如同（3.4）中所述，令

$$H_1 \,\subset\, \phi_*\mathcal{O}_Y$$

为极大半稳定子丛。由于 $\mu(H_1) \,=\, 0$ [BP，第 12825 页，（2.7）], 由此立即得到 (3.13)

$$\mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y) \,\subset\, H_1\,. \tag{3.14}$$

但是，$H_1 \,=\, \mathcal{O}_X$ 若 ϕ 是一个真正分歧映射 [BP，第 12828 页，定义 2.5]。因此，（3.14）表明 R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) $\subset\, \mathcal{O}_X$ 是 ϕ 是一个真正分歧映射。利用这一点和命题 3.2，可推出 $\mathcal{O}_X \,=$ R($\phi_*\mathcal{O}_Y$) if ϕ 是一个真正分歧映射。□

注 3.6。若去掉 k 的特征为零这一假设，定理 3.5 不再成立。为说明这一点，假设 k 的特征为正，并令

$$F_Y \,:\, Y \,\longrightarrow\, Y$$

是 Y 的绝对 Frobenius 态射。考虑子层

$$F_Y^{-1}\mathcal{O}_Y \,\hookrightarrow\, \mathcal{O}_Y;$$

注意它　　不是凝聚子层。这个包含映射产生了一个包含映　　p

$$\phi_*F_Y^{-1}\mathcal{O}_Y \,\hookrightarrow\, \phi_*\mathcal{O}_Y\,.$$

令 $\mathcal{W} \,\subset\, \phi_*\mathcal{O}_Y$ 表示由 $\phi_*F_Y^{-1}\mathcal{O}_Y$ 生成的凝聚子层。显然可以验证，$\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的（奇异）联络 d_ϕ 保持 $\mathcal{W}$，而且由此得到的 $\mathcal{W}$ 上的联络是非奇异的。这意味着

$$\mathcal{W} \,\subset\, \mathbf{R}(\phi_*\mathcal{O}_Y)\,.$$

但显然,

$$\mathcal{O}_X \,\subsetneq\, \mathcal{W}.$$

为了完成这个例子，若取 $X \,=\, \mathbb{P}^1_k$，那么 ϕ 是真正分歧的　　ed.

4. Pullback of irreducible connections

取 (2.2) 中的 X、Y 和 ϕ。设 E 是 X 上配备了非奇异联络 D 的向量丛。联络 D 在 ϕ^*E 上诱导出一个联络；这个诱导联络记为 ϕ^*D。引理 2.5 中由 ϕ^*D 在 $\phi_*\phi^*E$ 上得到的奇异联络记为

$$\widehat{D}. \tag{4.1}$$

Let

$$\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E) \,\hookrightarrow\, \phi_*\phi^*E \tag{4.2}$$

$\widehat{\ }$为该奇异联络的极大正则子层 D。

利用投影公式，[Ha，第124页，习题5.1(d)]，我们得到

$$\phi_*\phi^*E \,=\, E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y\,. \tag{4.3}$$

包含 映射 $\iota\colon\, \mathcal{O}_X \,\hookrightarrow\, \phi_*\mathcal{O}_Y$ in (3.2) 产生一个单射同态

$$H \,:=\, \mathrm{Id}_E\otimes\iota \,:\, E \,=\, E\otimes\mathcal{O}_X \,\longrightarrow\, E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y \,=\, \phi_*\phi^*E\,. \tag{4.4}$$

由注 3.1(1) 可知，$H(E)$ 是 $\phi_*\phi^*E$ 的子丛。

命题 4.1. 假设基域 k 的特征为零。假设映射 ϕ in (2.2) 真正分歧。那么

$$\boldsymbol{R}(\phi_*\phi^*E) \,=\, H(E)$$

作为 $\phi_*\phi^*E$ 的子层（见 (4.2) 和 (4.4)）。

证明。与之前一样，令 d_ϕ 表示推论 2.6 中得到的 $\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的奇异联络。E 上的联络 D 与此奇异联络 d_ϕ 共同在 $E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上诱导出一个奇异联络；将 $E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的这个奇异联络记为 D_ϕ。(4.3) 中的同一化 $E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y \,=\, \phi_*\phi^*E$ 将 D_ϕ 映到 D（见 (4.1)）。事实上，这由 D 的构造可知（见引理 2.5）。子层 $\iota(\mathcal{O}_X) \,\subset\, \phi_*\mathcal{O}_Y$（见 (4.4)）在奇异联络 d_ϕ 下保持不变（见命题 3.2 及其证明）。这一点，加上如下事实：(4.3) 中的同一化 $E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y \,=\, \phi_*\phi^*E$ 将由 D 和 d_ϕ 诱导的 $E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y$ 上的奇异联络映到 $\phi_*\phi^*E$ 上的奇异联络 D，共同推出 (4.4) 中的同态 H 将联络 D（在 E 上）映到 (4.1) 中的 D。换言之，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & \phi_*\phi^*E \\ \big\downarrow D & & \big\downarrow \widehat{D} \\ E\otimes K_X & \xrightarrow{H\otimes\xi} & E\otimes K_X\otimes\mathcal{O}_X(\Delta) \end{array} \tag{4.5}$$

其中 Δ 是 D 和 ξ 的极除子：$K_X \,\longrightarrow\, K_X\otimes\mathcal{O}_X(\Delta)$ 是自然同态；回想一下，D 是一个非奇异联络。现在，(4.5) 的交换性意味着

- 子层
$$H(E) \,\subset\, \phi_*\phi^*E$$
在 $\phi_*\phi^*E$ 上的奇异联络 D 作用下保持不变，并且
- $\widehat{D}$ 在 $H(E)$ 上诱导出一个非奇异联络。

因此，我们有

$$H(E) \,\subset\, \mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)\,. \tag{4.6}$$

注意，

$$(\phi_*\phi^*E)/H(E) \,=\, (E\otimes\phi_*\mathcal{O}_Y)/E \,=\, E\otimes(\phi_*\mathcal{O}_Y/\iota(\mathcal{O}_X))\,.$$

由于 $\phi_*\mathcal{O}_Y/\iota(\mathcal{O}_X)$ 是局部自由的（见注 3.1(1)），子层 $H(E) \subset \phi_*\phi^*E$ 是一个子丛。考虑商映射

$$\mathbf{q} \,:\, \mathbf{R}(\phi_*\phi^*E) \longrightarrow (\phi_*\phi^*E)/H(E) \,=\, E \otimes (\phi_*\mathcal{O}_Y/\iota(\mathcal{O}_X))\,. \tag{4.7}$$

鉴于 (4.6)，要证明该命题，只需证明 $\mathbf{q} = 0$。

$\widehat{\ }$由于 $H(E)$ 和 $\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 均在 $\phi_*\phi^*E$ 上的奇异联络 D 下保持不变，

$\widehat{\ }$(1) D 在 $(\phi_*\phi^*E)/H(E)$ 上诱导一个奇异联络（请注意，$(\phi_*\phi^*E)/H(E)$ 是局部自由的）；并且 (2) (4.7) 中的同态 $\mathbf{q}$ 将 $\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上的非奇异联络（由 D 给出$\widehat{\ }$）映到

$$(\phi_*\phi^*E)/H(E) \,=\, E \otimes ((\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X))$$

$\widehat{\ }$由 D诱导。

Let

$$\mathbf{q}' \,:\, E^* \otimes \mathbf{R}(\phi_*\phi^*E) \longrightarrow (\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X) \tag{4.8}$$

为通过复合得到的同态

$$\mathrm{Id}_{E^*} \otimes \mathbf{q} \,:\, E^* \otimes \mathbf{R}(\phi_*\phi^*E) \longrightarrow E^* \otimes E \otimes ((\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X))$$

（见 (4.7)），其中的同态 $E^* \otimes E \otimes((\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 是利用自然配对 $E^* \otimes E \longrightarrow \mathcal{O}_X$ 构造的。

令 D^* 表示由 E 上的非奇异联络 $D\widehat{\ }$ 所给出的 E^* 上的非奇异联络。联络 D^* 与由 D 给出的 $\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上的联络共同在 $E^*\otimes\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上诱导一个联络；这个 $E^*\otimes\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上的联络记作 $\mathcal{D}_1$。如前所述，子丛 $\iota(\mathcal{O}_X) \subset \phi_*\mathcal{O}_Y$（见 (4.4) 和注 3.1(1)）在奇异联络 d_ϕ 下保持不变。因此，d_ϕ 在商丛 $(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 上诱导一个奇异联络；这个 $(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 上的奇异联络记作 $\mathcal{D}_2$。$\widehat{\ }$由于 (4.7) 中的 $\mathbf{q}$ 将 $\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上（由 D 给出的）非奇异联络映到 $(\phi_*\phi^*E)/H(E) \,=\, E \otimes ((\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X))$ 上的奇异联络，因此立即可知，(4.8) 中的 $\mathbf{q}'$ 将上述在 $E^* \otimes\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$ 上定义的奇异联络 $\mathcal{D}_1$ 映到 $(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 上的奇异联络 $\mathcal{D}_2$。

现在注意到 $\mathcal{D}_1$ 是一个非奇异联络，因为 D^*和$\widehat{\ }\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)$上的联络 D都是非奇异的。另一方面，由于 ϕ 是真正分歧的，可以证明$(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$不包含任何使$\mathcal{D}_2$ 诱导出非奇异联络的非零子层。事实上，如果 $\mathcal{D}_2$ 在$\widetilde{\ }$上诱导出一个非奇异联络 $\mathcal{V} \subset (\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 上的联络，那么考虑商映射 $\phi_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow (\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$下 $\mathcal{V}$的逆像 $\mathcal{V} \subset \phi_*\mathcal{O}_Y$。$\phi_*\mathcal{O}_Y$上的奇异联络 d_ϕ 在 $\mathcal{V}$上诱导出一个非奇异联络$\widetilde{\ }$，因为 $\mathcal{D}_2$ 在 $\mathcal{V}$上诱导出一个非奇异联络$\widetilde{\ }$。由定理 3.5可知 $\mathcal{V} = \iota(\mathcal{O}_X)$，因此 $\mathcal{V} = 0$。所以$(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$不包含任何使 $\mathcal{D}_2$ 诱导出非奇异联络的非零子层。

由于 (4.8) 中的 $\mathbf{q}'$ 将 $\mathcal{D}_1$ 映至 $\mathcal{D}_2$，且 $\mathcal{D}_1$ 是非奇异联络，而 $(\phi_*\mathcal{O}_Y)/\iota(\mathcal{O}_X)$ 不包含任何能使 $\mathcal{D}_2$ 诱导出非奇异联络的非零子层，

考察 q' 的像可得

$$\mathbf{q}' \,=\, 0\,.$$

This 这意味着 (4.7) 中的 q 恒等为零，因此 $H(E) \,=\, \mathbf{R}(\phi_*\phi^* \qquad E).$ □

审稿人指出了命题 4.1 的以下逆命题。

命题 4.2. 假设基域 k 的特征为零。假设 tha t

$$\boldsymbol{R}(\phi_*\phi^*E) \,=\, H(E)$$

作为 $\phi_*\phi^*E$ 的子层（参见 (4.2) 和 (4.4)）。那么 (2.2) 中的映射 ϕ 是真正分歧的。

证明。为反证该命题，假设映射 ϕ 不是真正分歧的。然后，正如命题 3.3 的证明中所指出的，存在一个非平凡的 ´étale 覆盖

$$g \,:\, \widetilde{X} \,\longrightarrow\, X$$

~以及一个态射 $h\colon\, Y \,\longrightarrow\, X$，使得

$$g \circ h \,=\, \phi. \tag{4.9}$$

由 (4.9) 可立即推出

$$\iota \,:\, g_*g^*E \,\hookrightarrow\, \phi_*\phi^*E. \tag{4.10}$$

~考虑 g^*E 上由 D 给出的非奇异联络 g^*D。令 g_*g^*E 上由引理 2.5 从 g^*D得到的联络记为 D。注意，这个定义在 g_*g^*E 上的联络 D 是非奇异的。事实上，这可由以下观察得出：$g^*K_X \,=\, K_{\widetilde{X}}$，因为映射 g 是 ´étale 的，因此

$$g_*((g^*E) \otimes K_{\widetilde{X}}) \,=\, (g_*g^*E) \otimes K_X$$

（投影公式）。

^ ~(4.10) 中的映射将 $\phi_*\phi^*E$ 和 g_*g^*E 上的联络 D（见 (4.1)）与 D（见上文）分别相互交织，即以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} g_*g^*E & \xrightarrow{\iota} & \phi_*\phi^*E \\ \big\downarrow \widetilde{D} & & \big\downarrow \widehat{D} \\ (g_*g^*E) \otimes K_X & \xrightarrow{\iota\otimes\xi} & (\phi_*\phi^*E) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta) \end{array}$$

^其中 Δ 是 D 的极除子，而 $\xi\colon\, K_X \,\longrightarrow\, K_X \otimes \mathcal{O}_X(\Delta)$ 是自然同态。因此，我们有

$$g_*g^*E \,\subset\, \mathbf{R}(\phi_*\phi^*E).$$

这意味着

$$\mathrm{rank}(\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E)) \,\geq\, \mathrm{rank}(g_*g^*E) \,=\, \mathrm{rank}(E)\cdot \mathrm{degree}(g) \,>\, \mathrm{rank}(E) \,=\, \mathrm{rank}(H(E))$$

因为 g 是一个非平凡的 ´étale 覆盖。特别地，我们有

$$\mathbf{R}(\phi_*\phi^*E) \,\neq\, H(E).$$

证明至此完成。 □

Acknowledgements

我们非常感谢审稿人提出命题 4.2，并感谢其提供有助于改进稿件的意见。

References

[At] M. F. Atiyah, 《纤维丛中的复解析联络》, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181–207.[BS] I. Biswas 和 S. Subramanian, 《存在联络的曲线上的向量丛》, Q. J. Math. 57 (2006), 143–150.[BP] I. Biswas 和 A. J. Parameswaran, 《分歧覆盖映射与拉回丛的稳定性》, Int. Math. Res. Not. (即将发表), arXiv:2102.08744.[CLV] I. Coskun 、 E. Larson 和 I. Vogt, 《 Tschirnhausen 丛的稳定性》, arXiv:2207.07257.[Gi] D. Gieseker, 《非零特征下的平坦向量丛与基本群》, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1975), 1–31.[Ha] R. Hartshorne, 《代数几何》, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.[HL] D. Huybrechts 和 M. Lehn, 《层模空间的几何》, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.[Ka] N. M. Katz, 《幂零联络与单值化定理：Turrittin 结果的应用》, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 39 (1970), 175–232.[Se] J.-P. Serre, 《代数几何与解析几何》, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1–42.[We] A. Weil, 《阿贝尔函数的推广》, Jour. Math. Pures Appl. 17 (1938), 47–87.

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
电子邮箱：indranil@math.tifr.res.in

ESIEA, 74 bis Av. Maurice Thorez, 94200 Ivry-sur-Seine, France
电子邮箱：fx.machu@gmail.com

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
电子邮箱：param@math.tifr.res.in