arXiv:2301.03823v1 [math.NT] 10 Jan 2023

满足某些特殊条件的塞尔伯格类相关函数的一些解析性质

by

Hideto IWATA

摘要。2001年，M. Reko´s 模仿 [1] 和 [3]先前的研究，描述了当 Im z >0 （见（1.2））时，与欧拉函数相关的函数 f (z) 的解析行为。本文中，我们描述当 Im z >0 时广义函数 f (z, F)（见（2.1））的解析行为，其中函数 F 属于塞尔伯格类的一个子类，该子类具有多项式欧拉乘积并满足某些特殊条件。

1. 引言

J. Kaczorowski 为一类广义L函数定义了相应的欧拉函数，这类函数包括黎曼ζ函数、狄利克雷L函数，并得到了一个渐近公式（见 [4]）：所谓多项式欧拉乘积，是指关于复变量 s 的函数 F(s)，当 s $=\sigma+$it 时，对于 $\sigma>1$，它由如下形式的乘积定义

$$F(s)=\prod_p F_p(s)=\prod_p\prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.1}$$

其中 p 遍历素数，且对于所有 p 和 $1\le$ j $\le$ d，$|\alpha_j(\mathrm{p})|\le 1$。我们假设 d 尽可能小，即存在至少一个素数 p_0，使得

$$\prod_{j=1}^{d}\alpha_j(p_0)\neq 0.$$

于是称 d 为 F 的欧拉次数。注意，数论中的 L函数，包括黎曼ζ函数、狄利克雷L函数、代数数域的戴德金ζ函数和赫克L函数，以及全纯模形式的（归一化）L函数，还有猜想上许多其他 L函数，都是多项式欧拉乘积。

M. Reko´s 描述了一个与欧拉函数相关的函数的解析性质（见 [9]）：我们描述如下函数 f(z) 的基本解析性质，该函数在 Im z >0 时定义：

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{\rho\\ 0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}}\frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{\zeta'(\rho)}, \tag{1.2}$$

其中 T_n 表示一个实数序列，它能够对零点进行适当分组。求和遍历黎曼ζ函数虚部为正的非平凡零点。为简单起见，我们在此假设这些零点均为单零点。M. Reko´s 证明了 f (z) 在

2010数学主题分类。主要分类号：33C15、11M06、11M41 关键词：多项式欧拉乘积、惠特克函数、塞尔伯格类。1

Im z > 0时的正则性、到整个复平面的亚纯延拓、某个函数方程以及有关奇点的信息。f (z) 的函数方程将函数 f 在点 z 和 ¯z 处的值联系起来。设 l 表示一条光滑曲线 τ: [0, 1] ⟶ ℂ，满足 $\tau(0) = -\frac{1}{4}$、$\tau(1) = \frac{5}{2}$，且当 t ∈(0, 1) 时，0 < Im τ < 1。f (z) 的解析性质由以下定理描述:

定理 1.1（ [9]中的定理 1）。函数 f (z) 在上半平面 ℍ 上解析，且对于 z ∈ ℍ，有

$$2\pi i f(z) = f_1(z) + f_2(z) - e^{\frac{5}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\frac{5}{2}}(z - \log n)} \tag{1.3}$$

其中右侧最后一项是整个复平面上的亚纯函数，其极点为 z = log n, n = 1, 2, ... 函数

$$f_1(z) = \int_{-\frac{1}{4}+i\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} e^{sz} ds \tag{1.4}$$

在 ℍ 上解析，并且

$$f_2(z) = \int_{\ell(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2})} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} e^{sz} ds \tag{1.5}$$

在整个复平面上解析。

定理 1.2（ [9]中的定理 2）。函数 f (z) 可解析延拓为整个复平面上的亚纯函数，并满足函数方程

$$f(z) + \overline{f(\bar{z})} = B(z) \tag{1.6}$$

and

(1.7)

$$B(z) = -\frac{6}{\pi^2} e^{2z} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{n^2 k} \left[\frac{1}{(nke^z - 1)^2} + \frac{2}{nke^z - 1} + \frac{1}{(nke^z + 1)^2} - \frac{2}{nke^z + 1} \right],$$

其中 B(z) 是定义在整个复平面上的亚纯函数，在 z = − log nk, n, k = 1, 2, . . . 处有二阶极点，且 μ(n) 是莫比乌斯函数。

我们看到，函数 f (z) 在 z = log n (n = 1, 2, . . .) 处有简单极点，其留数为

$$-\frac{\varphi(n)}{2\pi i},$$

其中 φ(n) 是欧拉函数。

现在我们如下定义塞尔伯格类 $\mathcal{S}$：若 F ∈ $\mathcal{S}$，则

(i)（普通狄利克雷级数）$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_F(n) n^{-s}$，在 $\sigma > 1$处绝对收敛；(ii)（解析延拓）存在一个整数 m ≥ 0，使得 $(s-1)^m \cdot F(s)$ 是有限阶整函数；

(iii)（函数方程）F(s) 满足如下形式的函数方程$\Phi(s) = \omega\Phi(1-s)$，其中

$$\Phi(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) F(s) = \gamma(s) F(s), \tag{1.8}$$

例如，$r \geq 0$、$Q > 0, \lambda_j > 0$、$\mathrm{Re}\,\mu_j \geq 0$和 $|\omega| = 1$;

(iv)（拉马努金猜想）对每个 $\varepsilon > 0$，$a_F(n) \ll n^{\epsilon}$

(v)（欧拉乘积）$F(s) = \prod_p \exp\left(\sum_{\ell=0} \frac{b_F(p^{\ell})}{p^{\ell s}}\right)$，其中 $b_F(n) = 0$ unless $n = p^m$ with $m \geq 1$，且 $b_F(n) \ll n^{\vartheta}$ for some $\vartheta < \frac{1}{2}$。

注意，我们约定空乘积等于 1。

2. 将 f(z) 扩展到 $\mathcal{S}$ 的子类

若函数 $F \in \mathcal{S}$ 具有多项式欧拉乘积 (1.1)，则将 $\mathcal{S}$ 中具有多项式欧拉乘积的函数子类记为 $\mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$。本文旨在为属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$ 的函数 F 得到类似于定理 1.4.1 和定理 1.4.2 的结果。现在假设，对于函数方程 (1.8) 中的所有 j，$(r, \lambda_j) = (1, 1)$。当 (1.8) 中 $r = 1$ 时，复数 μ_1 此后称为 μ。令 ρ 表示 F 的虚部为正的非平凡零点。假设 ρ 的阶数为单。进一步，令 T_n 表示一列实数，它将对零点进行适当分组，具体将在后文给出。对于 $\mathrm{Im}\, z > 0$，我们考虑如下定义的函数

$$f(z, F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho - 1)}{F'(\rho)}. \tag{2.1}$$

若 F(s) 在 $\mathbb{H}$的虚轴上有平凡零点，则将它们纳入求和。右端分子取黎曼ζ函数的原因是，在假设 $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ 对 (1.8) 中所有 j 均成立时，我们便可以使用惠特克函数的巴恩斯型积分（见定理 5.1 和第 7节）。

事实 2.1。(2.1) 中的级数收敛。

我们将在下一节证明事实 2.1。

3. 事实 2.1 的证明。

我们证明事实 2.1。我们使用以下引理。

引理 3.1（ [11] 中的引理 4）。设 $F \in \mathcal{S}$，且 T 充分大。此外，设 $H = D \log\log T$ 为固定值，其中 D 是一个大的正数常量。在 $[T - H, T + H]$ 中任意长度为 1 的子区间内，都存在满足以下条件的直线 $t = t_0$

$$|F(\sigma + it_0)|^{-1} = O(\exp(C(\log T)^2)), \tag{3.1}$$

关于 $\sigma \geq -2$ 一致，其中 C 是一个正数常量。

设 T 充分大。取 H = D log log T，其中 D 是一个大的正数常量。任取子区间 [n, n + 1]，其中 n 是 [T − H, T + H] 中的正整数。于是，由引理 3.1 可知，存在直线 t = T_n，使得

$$|F(\sigma + iT_n)|^{-1} = O(\exp(C_1(\log T)^2)) \tag{3.2}$$

对 $\sigma \geq -2$ 一致成立，其中 C_1 是一个正数常数。由于 T_n 包含在区间 [T − H 内，T + H],，我们可以看出，当 n 趋于无穷大时，$T_n \sim T$。令 $\alpha = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{Im}\ \rho;\ \mathrm{Im}\ \rho > 0\}$，并令 $\mathscr{L}$ 表示由线段组成的围道

$$[b, b+iT_n], [b+iT_n, a+iT_n], [a+iT_n, a], \left[a, \frac{a+b}{2}+i\alpha\right], \left[\frac{a+b}{2}+i\alpha, b\right],$$

其中 max n $-\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$max {Re ρ; Re $\rho < 0$}o < a < 0、b > $\frac{5}{2}$。我们假设 s 的实部 = a+it(t ∈ ℝ) 不与 Γ(s+μ)Γ(s−μ) 的极点重合。我们考虑围绕 $\mathscr{L}$ 的如下围道积分：

$$\int_{\mathscr{L}} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds. \tag{3.3}$$

由于我们假设 ρ 的阶数为单阶，根据留数定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{L}} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds &= \int_{a+iT_n}^{a} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{L} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &\quad + \int_{b}^{b+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{b+iT_n}^{a+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中积分路径 L 由两条线段 ha, $_{a+b\ 2}$ $^{+}$iαi 和 h$\frac{a+b}{2}$ + iα, bi 组成。我们估计沿线段 [b+iT_n, a+iT_n] 的积分。由 (3.2)，对于 a ≤ σ ≤ b，有如下估计

$$|F(\sigma + iT_n)|^{-1} = O(\exp(C(\log T)^2)).$$

对于 z = x + iy（y > 0），

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a+iT_n}^{b+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds\right| \\ &\leq \int_{a+iT_n}^{b+iT_n} \left|\frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs}\right| |ds| \\ &\ll \int_{a}^{b} |\zeta(\sigma - 1 + iT_n)| \exp(C(\log T)^2 + x\sigma - yT_n) d\sigma \\ &\ll (b-a)\exp\{C(\log T)^2 - yT_n + |x|(|a|+|b|)\} T_n^c, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中常数 c 可能依赖于 a、b。上式右端的最后一项在 n 趋于无穷时趋于零。由定理 4.1 可知，(3.4) 中其他积分的收敛性得以保证（见 (4.5)-(4.7)）。因此，(2.1) 中的级数收敛。 □

4. 主要定理

在 (3.4) 中，当 n 趋于无穷时，我们有

(4.1)
$$\int_{a+i\infty}^{a}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds+\int_{L}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds+\int_{b}^{b+i\infty}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds=2\pi i f(z,F),$$

其中函数 f (z, F) 定义于 (2.1) 中。为了计算沿竖直直线 s = b + it (t ≥ 0) 的积分，我们准备 ζ(s − 1)/F(s) 在 $\sigma>2$ 时的狄利克雷级数展开。

定义4.1（ [4]第34页）。对于 $\sigma>1$ 和 F ∈ $\mathcal{S}^{\text{poly}}$，我们将函数 μ_F 定义如下:

$$\frac{1}{F(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_F(n)}{n^s}=\prod_{p}\prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right). \tag{4.2}$$

注4.2（ [4]第34页）。由 (4.2)， $|\mu_F(n)|\le\tau_d(n)$，其中 $\tau_d(n)$ 是 d 阶约数函数，因此 $\zeta^d(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_d(n)/n^s$，当 $\sigma>1$ 时。特别地，对所有 n， $\tau_1(n)=1$。

利用 (4.2)，对于 $\sigma>2$

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}&=\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mu_F(l)}{l^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s},\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu_F(d)\frac{n}{d}. \tag{4.4}$$

定理 4.1. 函数 (2.1) 在 $\mathbb{H}$ 上解析，且对于 z ∈ $\mathbb{H}$，有

$$2\pi i f(z,F)=f_1(z,F)+f_2(z,F)-e^{bz}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^b(z-\log n)}, \tag{4.5}$$

其中右侧最后一项是定义在整个复平面上的亚纯函数，其极点位于 z = log n， n = 1, 2, ... 函数

$$f_1(z,F)=\int_{a+i\infty}^{a}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{sz}ds \tag{4.6}$$

在 $\mathbb{H}$ 上解析，且

$$f_2(z,F)=\int_{L}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{sz}ds \tag{4.7}$$

在整个复平面上解析。

定理4.2. 对于属于 $\mathcal{S}^{poly}$ 的F，若其(r, λ_j) = (1, 1)对(1.8)中的所有j均成立，且 0 ≤ μ < 1，则函数(2.1)可亚纯延拓至y > $-\pi$。

与全纯尖点形式以及虚二次域的Dedekind ζ函数相关联的L函数，是定理4.2中所考虑的F的例子。令

$$\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}. \tag{4.8}$$

我们考虑 $z \in \mathbb{H}^-$ 时的函数

$$f^-(z, F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ -T_n < \operatorname{Im}\rho < 0}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho - 1)}{F'(\rho)}. \tag{4.9}$$

如果 F(s) 在 $\mathbb{H}^-$ 的虚轴上存在平凡零点，则将其纳入求和中。右侧 (4.9) 中级数的收敛性可用与事实 2.1 相同的方法证明。

推论 4.3. 对于属于 $\mathcal{S}^{poly}$ 且满足与定理4.2相同条件的 F，函数 (4.9) 可亚纯延拓至 $y < \pi$。

定理4.4. 对于属于 $\mathcal{S}^{poly}$ 且满足与定理4.2相同条件的 F，函数 (2.1) 可在整个复平面上解析延拓。除定理4.2中的条件外，我们还假设狄利克雷级数中的系数 $a_F(n)$ 对所有 n 均为实值。于是，函数 (2.1) 满足函数方程

$$f(z, F) + \overline{f(\overline{z}, F)} = B(z, F), \tag{4.10}$$

其中

$$B(z, F) = \frac{1}{2\pi i}(f_1(z, F) + f_1^-(z, F)) - \frac{e^{2z}}{F(2)}. \tag{4.11}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$。$f_1^-(z, F)$ 的定义将在后文（9.4）中提及。

若函数 $F \in \mathcal{S}$ 满足 $\mathcal{S}$ 上的条件 (i)-(iii)，则将这一类记作 $\mathcal{S}^{\#}$，并称其为扩展塞尔伯格类。已知满足某些特殊条件的 $F \in \mathcal{S}^{\#}$ 的狄利克雷系数 $a_F(n)$ 为实数（见 [5]）。

5. 惠特克函数的一些辅助结果

首先，我们回顾惠特克函数的定义，该定义对于证明主要定理是必要的。为此，我们引入一些相关函数。其次，我们准备一些辅助结果，例如积分表达式和渐近展开。

定义 5.1（合流超几何函数（ [6]））。设 z 为复变量，α 和 γ 为参数，可以取任意实数值和复数值，但 γ、0、−1、−2、.....除外。此外，

$$(\lambda)_0 = 1, \quad (\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1)\cdots(\lambda + k - 1) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5.1}$$

我们将合流超几何函数（库默尔函数）定义如下：

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty). \tag{5.2}$$

由比值判别法可知，对于所有 α、γ 和 z，级数 (5.2) 均绝对收敛，但 γ、0、−1、−2、..... 除外。因此，对于所有 z，(5.2) 都是解析的单值函数。还应注意，(5.2) 是线性微分方程（库默尔方程）的一个特解。

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{du}{dz} - \alpha u = 0, \tag{5.3}$$

其中 α、γ 与（5.2）中的相同。

定义 5.2（第二类合流超几何函数（ [6]））。我们引入一个新函数

$$\Psi(\alpha,\gamma;z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\Phi(\alpha,\gamma;z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}\Phi(1+\alpha-\gamma,2-\gamma;z), \tag{5.4}$$
$$(|\arg z| < \pi, \gamma \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

称为第二类合流超几何函数。（5.4）中的条件 γ、0、±1、±2、.....来自（5.4）右侧分子中 Γ 因子的条件： Φ（α、γ；z）和 Φ（$1+\alpha-\gamma$、$2-\gamma$；z）。

由于当 α 和 γ 为实数或复数时，函数（5.4）是 z 的多值函数，我们取其在沿负实轴切开的 z 平面上的分支。此外，对于除 γ 、0、−1、−2、.....之外的所有 α、γ 和 z，（5.4）都是解析函数。

定义 5.3（惠特克函数（ [6]））。一类与合流超几何函数有关且常见于应用中的函数是惠特克函数，其定义公式如下:

$$W_{k,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\Psi\left(\frac{1}{2}-k+\mu, 2\mu+1; z\right) \quad (|\arg z| < \pi). \tag{5.5}$$

由 (5.4) 或 (5.5) 可知，(5.5) 是 z 的多值函数。因此，我们也取与 (5.4) 中相同的分支。

定理 5.1（惠特克函数的巴恩斯型积分（ [10], [12]））。$W_{k,\mu}(z)$ 的巴恩斯积分为

(5.6)
$$W_{k,\mu}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^k}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+\mu+\frac{1}{2}\right)}z^s ds,$$

对于 $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$，且 $k \pm \mu + \frac{1}{2}$，0, 1, 2, . . .；必要时，围道可带有环路，使得 Γ(s) 的极点与 $\Gamma\left(-s-k-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+\mu+\frac{1}{2}\right)$的极点位于围道两侧。

在（5.6）中，只要积分围道始终可以变形，以便将极点 Γ(s) 与其他 Γ 因子的极点分开，该式对 c 的所有有限值都成立。根据斯特林公式，（5.6）中的积分表示一个关于 z 的函数，该函数在定义域 $|\arg z| \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha$ 内的所有点上解析，其中 α 是任意正数。

定理 5.2（ Ψ(a; b; z)（ [10]）关于 z 的渐近展开）。当 z $\to 0$ 时，我们有:

(5.7)
$$\Psi(a;b;z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(|z|^{Reb-2}) \quad (Re\, b \geq 2, b \neq 2),$$

(5.8)
$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(|\log z|) \quad (b = 2),$$

(5.9)
$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(1) \quad (1 < Re\, b < 2),$$

(5.10)
$$= \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(|z|) \quad (Re\, b = 1, b \neq 1),$$

(5.11)
$$= -\frac{1}{\Gamma(a)} \left\{ \log z + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + 2C_0 \right\} + O(|z \log z|) \quad (b = 1),$$

其中 C_0 是欧拉常数。

根据定义 (5.5) 和定理 5.2，我们得到 $W_{k,\mu}(z)$ 关于 z $\to 0$ 的如下渐近展开。

定理 5.3（$W_{k,\mu}(z)$ 关于 z $\to 0$ 的渐近展开）。

(5.12)
$$W_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} z^{\frac{1}{2}-\mu} + O(z^{\frac{3}{2}-Re\mu}) \quad \left(Re\, \mu \geq \frac{1}{2}, \mu \neq \frac{1}{2}\right),$$

(5.13)
$$= \frac{1}{\Gamma(1-k)} + O(|z \log z|) \quad \left(\mu = \frac{1}{2}\right),$$

(5.14)
$$= \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} z^{\frac{1}{2}-\mu} + O(|z|^{Re\mu+\frac{1}{2}}) \quad \left(0 < Re\, \mu < \frac{1}{2}\right),$$

(5.15)
$$= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} z^{\mu+\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-k\right)} z^{-\mu+\frac{1}{2}} + O(|z|^{Re\mu+\frac{3}{2}}) \quad (Re\, \mu = 0, \mu \neq 0),$$

(5.16)
$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \left(\log z + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}-k\right) + 2C_0 \right) + O(|z|^{\frac{3}{2}} |\log z|) \quad (\mu = 0).$$

6. 定理 4.1 的证明。

由 (4.1)，对于 z $\in \mathbb{H}$，我们有

$$f_1(z,F) + f_2(z,F) + f_3(z,F) = 2\pi i f(z,F),$$

其中，f_1(z, F)、f_2(z, F)、f_3(z, F) 分别表示式 (4.1) 中相应的积分。首先，我们计算该积分

$$f_3(z,F) = \int_b^{b+i\infty} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds.$$

利用狄利克雷级数展开 (4.3)，我们得到

$$\begin{aligned} f_3(z,F) &= \int_b^{b+i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \right) e^{zs} ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \int_b^{b+i\infty} e^{s(z-\log n)} ds \\ &= -e^{bz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^b (z-\log n)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

由(6.1)第三行级数的绝对一致收敛性可知，对 $z \in \mathbb{H}$，交换积分与求和的次序是合理的。

其次，我们证明函数(4.7)在整个复平面上解析。由于 L 的长度有限，$\zeta(s-1) = O(1)$。此外，L 上没有零点，因此函数 $\{F(s)\}^{-1}$ 有界。因此，对于 $z = x + iy$ 和 $s = \sigma + it$ $(a \le \sigma \le b, 0 \le t \le \alpha)$,

$$\begin{aligned} \int_L \left| \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} \right| |ds| &\ll \int_L \exp(x\sigma - yt) |\zeta(s-1)| |ds| \\ &= O\left(\int_L \exp(x\sigma - yt) |ds| \right). \end{aligned}$$

当 $y \ge 0$ 时，

$$\int_L \exp(x\sigma - yt)|ds| \ll \int_L \exp(x\sigma)|ds| \ll_x 1.$$

当 $y < 0$ 时，

$$\int_L \exp(x\sigma - yt)|ds| \ll_{x,y} 1.$$

因此，函数(4.7)在整个复平面上解析。

最后，我们证明函数 (4.6) 在 $\mathbb{H}$ 上解析。这里我们使用以下两个与塞尔伯格类相关的引理。

定义 6.1（ [8] 中第 29 页）。设 $F \in \mathcal{S}$,

$$d_F = 2 \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \tag{6.2}$$

是 F(s) 的次数。

引理 6.1（ [2] 中的定理 3.1）。若 $F \in \mathcal{S}$，则 $F = 1$ 或 $d_F \ge 1$。

引理 6.2（ [7].(8)，第 423 页）。对于 $\sigma < 0$,

$$|F(\sigma + it)| \asymp t^{d_F(\frac{1}{2}-\sigma)} |F(1-\sigma+it)| \tag{6.3}$$

当 $t \to \infty$ 时。

利用引理 6.2，我们得到

$$t^{(\frac{1}{2}-a)d_F} |F(1-a+it)| \ll |F(a+it)| \ll t^{(\frac{1}{2}-a)d_F} |F(1-a+it)|.$$

由于 $\max n - \frac{1}{2}, 12 \max\{\mathrm{Re}\ \rho; \mathrm{Re}\ \rho < 0\} o < a < 0$，因此 $\{F(1-a+it)\}^{-1}$ 有界。于是我们有

$$|F(a+it)|^{-1} \ll t^{-(\frac{1}{2}-a)d_F}.$$

此外，根据 ζ(s) 的函数方程，

$$\begin{aligned}\zeta(s-1) &= -\frac{1}{\pi}(2\pi)^{s-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(2-s)\zeta(2-s)\\ &\ll |t|^{\frac{3}{2}-a}.\end{aligned}$$

当 F = 1 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{a+i\infty}^{a}\left|\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}\right||ds| &\ll \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-a}e^{ax-yt}dt\\ &\ll_{x,y} 1\\ &\ll 1.\end{aligned}$$

接下来考虑 F , 1 的情形。现在，F(s) 属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，因此 F(s) 除点 s = 1 外均解析。由于 max n–$\frac{3}{2}$, 12max{Re ρ;-Re ρ < 0}o < a < 0,|F(a +it)|$^{-1}$ 在 t = 0 附近有界。此外，由引理 6.1 得，

$$\begin{aligned}\int_{a+i\infty}^{a}\left|\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}\right||ds| &\ll \int_0^\infty \frac{e^{ax-yt}}{|F(a+it)|}t^{\frac{3}{2}-a}dt\\ &\ll \int_0^\infty t^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)d_F+\frac{3}{2}-a}e^{ax-yt}dt\\ &< \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}d_F+\frac{3}{2}-a}e^{ax-yt}dt.\end{aligned}$$

因此，上述第三行中的积分在 $\mathbb{H}$ 的每个紧子集上绝对且一致收敛。于是，当 y = Im z > 0 时，函数 (4.6) 是解析的。 □

7. 定理4.2的证明

我们证明函数 f (z, F) (z = x +iy) 可亚纯延拓至 y > $-\pi$。由定理 4.1，函数

$$\begin{aligned}f_1(z,F) &= \int_{a+i\infty}^{a}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds\\ &= -\int_a^{a+i\infty}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds\end{aligned}$$

当 y > 0 时收敛。我们回顾一下假设：对于 (1.8) 中所有的 j，(r, λ_j) = (1, 1)，且 0 ≤ μ < 1。在这些假设下，我们将函数方程 (1.8) 改写如下：

$$\begin{aligned}Q^s\Gamma(s+\mu)F(s) &= \omega\overline{Q^{1-\overline{s}}\Gamma(1-\overline{s}+\mu)F(1-\overline{s})}\\ &= \omega Q^{1-s}\Gamma(1-s+\mu)\overline{F(1-\overline{s})},\end{aligned}$$

其中，Q 和 ω 的条件与 (1.8) 中所述相同。因此

$$\frac{1}{F(s)} = \overline{\omega}Q^{2s-1}\frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(1-s+\mu)}\frac{1}{\overline{F(1-\overline{s})}}. \tag{7.1}$$

利用以下关于 Γ 函数的初等公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s},$$

（7.1）可得

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{\overline{\omega}}{\pi} Q^{2s-1} \sin\pi(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\frac{1}{\overline{F(1-\overline{s})}}. \tag{7.2}$$

由（7.2）以及 ζ(s) 的函数方程，得

$$\begin{aligned}
&f_1(z,F)\\
&= -\int_a^{a+i\infty} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds\\
&= \frac{\overline{\omega}}{2\pi^3 Q}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \cos\left(\frac{s}{2}\pi\right)\Gamma(2-s)\zeta(2-s)\sin\pi(s-\mu)\\
&\times\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\frac{e^{zs}}{\overline{F(1-\overline{s})}} ds\\
&= \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s} ds\\
&- \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)s} ds\\
&+ \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)s} ds\\
&- \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s} ds
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$= f_{11}(z,F) + f_{12}(z,F) + f_{13}(z,F) + f_{14}(z,F),$$

其中，f_{11}(z, F)、f_{12}(z, F)、f_{13}(z, F)、f_{14}(z, F) 分别表示（7.3）中相应的积分。由斯特林公式

$$\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) \asymp e^{-\frac{3}{2}\pi|t|}|t|^{a+\frac{1}{2}}$$

当 t 趋于无穷大且 max n $-\frac{3}{2}$, 12max{Re ρ; Re $\rho < 0$}o < a < 0 时，f_{11}(z, F) 在 y $> -3\pi$ 上解析，f_{12}(z, F) 在 $\overline{y} > -\pi$ 上解析，f_{13}(z, F) 在 y $> -2\pi$ 上解析，f_{14}(z, F) 在 y > 0 上解析。将 f_{14}(z, F) 中的积分拆分，得

$$\begin{aligned}
f_{14}(z,F) &= -\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s} ds\\
&= \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i} i}{(2\pi)^3 Q}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \int_{a-i\infty}^{a}\right\}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\\
&\times\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s} ds.
\end{aligned}$$

我们考虑

$$I_1(z,F) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s} ds \tag{7.4}$$

and

$$I_2(z,F) = \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s} ds. \tag{7.5}$$

这里，我们回顾一下这一假设：s 的实部 = a +it（t ∈ ℝ）不与 Γ(s +μ)Γ(s − μ) 的极点重合。由斯特林公式可知，当 y < 3π 时，积分 $I_2(z, F)$ 收敛。由于函数 $f_{14}(z, F)$ 在 y > 0 时解析，积分 $I_1(z, F)$ 在 0 < y < 3π 时收敛。利用狄利克雷级数展开（4.2），形式上有

$$I_1(z,F)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-s}}\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_F(k)}{k^{1-\bar{s}}}\right)}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)s}ds$$

(7.6)

$$=\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{s\{\log(2\pi nkQ^2)-\frac{3}{2}\pi i+z\}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)ds.$$

积分与求和次序互换的合理性可由下述论证保证：对于 0 < y < 3π，有

$$\begin{aligned}
&\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left|e^{s\{\log(2nk\pi Q^2)+z-\frac{3}{2}\pi i\}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)\right||ds|\\
&\quad\ll(nk)^a\cdot e^{ax}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-\frac{3}{2}\pi)t-\frac{3}{2}\pi|t|}|t|^{a+\frac{1}{2}}dt\\
&\quad=(nk)^a\cdot e^{ax}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{-(y-\frac{3}{2}\pi)t+\frac{3}{2}\pi t}(-t)^{a+\frac{1}{2}}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(y-\frac{3}{2}\pi)t-\frac{3}{2}\pi t}t^{a+\frac{1}{2}}dt\right\}\\
&\quad\ll_{a,x,y}(nk)^a\\
&\quad\ll_a(nk)^a.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}\left|\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{s\{\log(2nk\pi Q^2)+z-\frac{3}{2}\pi i\}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)ds\right|\ll_a\sum_{k,n=1}^{\infty}\left|\frac{\overline{\mu_F(k)}}{k^{1-a}n^{2-a}}\right|.$$

由 (4.2) 可知，关于 k 的级数绝对收敛，因此左端的上述级数绝对且一致收敛。因此，对于 0 <y < 3π，积分与求和的次序可以互换。设 m_1,m_2 为非负整数。(7.6) 中被积函数在 s = μ − m_1 处的留数为

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)&=\lim_{s\to\mu-m_1}\{s-(\mu-m_1)\}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\{\log(2\pi nkQ^2)-\frac{3}{2}\pi i+z\}s}\\
&=\frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\Gamma(2\mu-m_1)\Gamma(2-\mu+m_1)(2\pi nkQ^2)^{\mu-m_1}e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)(\mu-m_1)}.
\end{aligned}\tag{7.7}$$

类似地，(7.6) 中被积函数在 s = –μ –m_2 处的留数为

(7.8)

$$R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)=\frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\Gamma(-2\mu-m_2)\Gamma(2+\mu+m_2)(2\pi nkQ^2)^{-\mu-m_2}e^{(z-\frac{3}{2}\pi i)(-\mu-m_2)}.$$

当 μ = 0, $\{\Gamma(s)\}^2$ 在 s = –m 处有二阶极点时，其中 m 为非负整数。对于每个正数ϱ，在 s = –m +ϱ 处对（7.6）中的被积函数的每个因子作泰勒展开，其在（7.6）中的留数

at $s = -m$ is

(7.9)

$$R^{(1)}_{k,n,m,0}(z) = \frac{m+1}{m!}\frac{e^{-\left(z-\frac{3}{2}\pi i\right)m}}{(2\pi nkQ^2)^m}\left\{\log(2\pi nkQ^2) + z - \frac{3}{2}\pi i + \sum_{k_1=1}^{m}\frac{1}{k_1} - C_0 - \frac{1}{m+1}\right\}.$$

类似地，当 $\mu = \frac{1}{2}, \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \left(s-\frac{1}{2}\right)n\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)o^2$ 在 $s = \frac{1}{2} - m$ 处有二阶极点时。同理，被积函数（7.6）在 $s = \frac{1}{2} - m$ 处的留数为

$$R^{(1)}_{k,n,m,\frac{1}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{(m!)^2}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(z-\frac{3}{2}\pi i\right)}}{(2\pi nkQ^2)^{m-\frac{1}{2}}}\left\{m\left(\psi\left(\frac{3}{2}+m\right) - 2\psi(m+1)\right)\right.$$

(7.10)
$$\left. - m\left(\log(2\pi nkQ^2) + z - \frac{3}{2}\pi i\right) + 1\right\},$$

其中，$\psi(s)$ 是 $\Gamma(s)$ 的对数导数，即

(7.11)
$$\psi(s) := \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s).$$

由于对于 $0 < y < 3\pi$，沿围道上侧和下侧的积分趋于 0，因此当 $\mu \neq 0, \frac{1}{2}$ 时，根据留数定理，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{s\left\{\log(2nk\pi Q^2)+z-\frac{3}{2}\pi i\right\}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)ds\\ &= -\int_C e^{s\left\{\log(2nk\pi Q^2)+z-\frac{3}{2}\pi i\right\}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)ds\\ &\quad - 2\pi i\left\{\sum_{m_1=0}^{M} R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu) + \sum_{m_2=0}^{M'} R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\},\end{aligned} \tag{7.12}$$

其中，C 是这样的围道：$\Gamma(2-s)$ 的极点与 $\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)$ 的极点分别位于其两侧。当然，当 $\mu = 0, \frac{1}{2}$ 时，(7.12) 中的留数项替换为

(7.13)
$$\sum_{m=0}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,0}(z), \quad \sum_{m=0}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,\frac{1}{2}}(z).$$

以下我们采用相同的约定。在右端 (7.12) 中沿围道 C 的积分内令 $w = 2 - s$，并对惠特克函数 (5.6) 使用巴恩斯型积分，则当 μ 不是整数（除 0 外）且 $|y - \frac{3}{2}\pi| < \frac{3}{2}\pi$ 时，(7.12) 中沿围道 C 的积分为

(7.14)
$$2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2} + \frac{z}{2} - \frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right).$$

因此，我们有

$$I_1(z,F) = \sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\left\{2\pi i\cdot(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2} + \frac{z}{2} - \frac{3}{4}\pi i\right)\right.$$

(7.15)
$$\left.\times\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right) - 2\pi i\left(\sum_{m_1=0}^{M} R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu) + \sum_{m_2=0}^{M'} R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right)\right\}.$$

下面的引理保证了 (7.15) 右端级数的收敛性。

引理 7.1. (7.15) 右端的级数在整个复平面的每个紧子集上都绝对且一致收敛。

我们将在下一节证明引理 7.1。由引理 7.1，对于 $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，其 $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ 对于 (1.8) 中的所有 j 以及 $0 \le \mu < 1$，我们得到 $f_1(z, F)$ 在 $y > -\pi$ 下的如下解析延拓：

$$
\begin{aligned}
f_1(z,F) &= \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s}ds \\
&\quad - \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)s}ds \\
&\quad + \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_a^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)s}ds \\
&\quad + \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}i}{(2\pi)^3 Q}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}+\frac{z}{2}-\frac{3}{4}\pi i\right)\right. \\
&\quad \left.\times\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\} \\
&\quad + \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a-i\infty}^{a}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s-\mu)\Gamma(s+\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z-\frac{3}{2}\pi i\right)s}ds. \qquad (7.16)
\end{aligned}
$$

第一项在 $y > -3\pi$ 时解析，第二项在 $y > -\pi$ 时解析，第三项在 $y > -2\pi$ 时解析，第四项根据引理 7.1 在整个复平面上解析，下一项在 $y < 3\pi$ 时解析。因此，(7.16) 完成了将 $f(z, F)$ 延拓到区域 $y > -\pi$ 的证明。 □

8. 引理 7.1 的证明

我们证明引理 7.1。首先考虑 $\mu > \frac{1}{2}$ 的情形。根据渐近展开式 (5.12),

$$
W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2+\mu)}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)^{\frac{1}{2}-\mu}+O\left(\frac{|e^{\left(\frac{3}{2}\pi i-z\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)}|}{(2\pi nkQ^2)^{\frac{3}{2}-\mu}}\right).
$$

因此，(7.15) 右侧花括号内的内容为

$$
\begin{aligned}
&2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}+\frac{z}{2}-\frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right) \\
&-2\pi i\left\{\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)+\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\} \\
&=2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\mu}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}-\frac{3}{2}\mu\pi i+\mu z\right)\Gamma(2-\mu)\Gamma(2\mu) \\
&+O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(2\pi nkQ^2)^{1-\mu}}\exp\left(\frac{e^{-x}}{4\pi nkQ^2}\right)\right) \\
&-2\pi i\left\{\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)+\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}.
\end{aligned}
$$

现在，根据泰勒展开

$$
\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)=1+O\left(\left|\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right|\right)
$$

$$= 1 + O\left(\frac{e^{-x}}{4\pi nkQ^2}\right) \tag{8.1}$$

当 n、k 趋于无穷大时，结合 (7.7)、(7.8)，可得

$$\begin{aligned}
&2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2} + \frac{z}{2} - \frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right)\\
&-2\pi i\left\{\sum_{m_1=0}^{M} R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu) + \sum_{m_2=0}^{M'} R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}\\
&= O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right) + O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}} + \frac{1}{(nk)^{2-\mu}}\right)\\
&-2\pi i\left\{\sum_{m_1=1}^{M} R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu) + \sum_{m_2=0}^{M'} R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}\\
&\ll O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right) + \left\{\sum_{m_1=1}^{M} \left|R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)\right| + \sum_{m_2=0}^{M'} \left|R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right|\right\}\\
&\ll_{Q,\mu,x} O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right) + \sum_{m_1=1}^{M} \frac{1}{(nk)^{m_1-\mu}} + \sum_{m_2=0}^{M'} \frac{1}{(nk)^{m_2+\mu}}\\
&= O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right)
\end{aligned}$$

因此，$I_1(z, F)$ 计算如下：

$$\begin{aligned}
I_1(z,F) &\ll_{Q,\mu,x} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{|\overline{\mu_F(k)}|}{kn^2} \cdot O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right)\\
&= O_{Q,\mu,x}\left(\sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{|\overline{\mu_F(k)}|}{k^{2-\mu}n^{3-\mu}}\right).
\end{aligned}$$

因此，(7.15) 右端的级数在 $\frac{1}{2} < \mu < 1$ 时收敛。

其次，当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时，由 (5.13) 得，

$$\begin{aligned}
W_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + O_y\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\log\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + O_y\left(\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)^{1-\delta}\right),
\end{aligned}$$

其中 δ 是任意正实数。按照第一种情形中的相同计算，并利用 (7.10)，可得 (7.15) 右侧花括号内的表达式如下：

$$\begin{aligned}
&2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2} + \frac{z}{2} - \frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)W_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right)\\
&-2\pi i\sum_{m=0}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,\frac{1}{2}}(z)
\end{aligned}$$

$$\ll O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{(nk)^{\frac{1}{2}-\delta}}\right)+\sum_{m=1}^{M''}\frac{\log nk}{(nk)^{m-\frac{1}{2}}}$$
$$=O_{Q,x,y,M''}\left(\frac{1}{(nk)^{\frac{1}{2}-\delta}}\right).$$

因此，$I_1(z,F)$ 的计算结果如下：

$$I_1(z,F)\ll\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{|\mu_F(k)|}{kn^2}\cdot O_{Q,x,y,M''}\left(\frac{1}{(nk)^{\frac{1}{2}-\delta}}\right)$$
$$=O_{Q,x,y,M''}\left(\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{|\mu_F(k)|}{k^{\frac{3}{2}-\delta}n^{\frac{5}{2}-\delta}}\right).$$

因此，(7.15) 右侧的级数在 $\mu=\frac{1}{2}$ 时收敛。第三，在 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 的情形下，由 (5.14),

$$W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2+\mu)}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)^{\frac{1}{2}-\mu}+O\left(\frac{e^{-x\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}}{(2\pi nkQ^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right)$$

and

$$2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}+\frac{z}{2}-\frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma(2-\mu)\Gamma(2+\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)$$
$$-2\pi i\left\{\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)+\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}$$
$$\ll_{Q,\mu,x}O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right)+\sum_{m_1=1}^{M}\frac{1}{(nk)^{m_1-\mu}}+\sum_{m_2=0}^{M'}\frac{1}{(nk)^{m_2+\mu}}$$
$$=O_{Q,\mu,x}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}\right).$$

因此，(7.15) 右侧的级数在 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 时收敛。

最后，在 $\mu=0$ 的情形下，由 (5.16),

$$W_{-\frac{3}{2},0}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)=-\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i-\frac{z}{2}}}{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\log\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)+\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)i+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2)+2C_0\right\}$$
$$+O_{Q,x}\left(\frac{1}{(nk)^{\frac{3}{2}}}\log\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)\right).$$

利用递推公式

$$\psi(s+1)=\frac{1}{s}+\psi(s)\tag{8.2}$$

（见 [6]）并结合（7.9），（7.15）右侧花括号内的部分可计算如下：

$$2\pi i(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}+\frac{z}{2}-\frac{3}{4}\pi i\right)\Gamma(2)^2W_{-\frac{3}{2},0}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-2\pi i\sum_{m=0}^{M''}R^{(1)}_{k,n,m,0}(z)$$

$$= -2\pi i\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2) + C_0 - 1\right) + O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{nk}\log\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)\right) - 2\pi i\sum_{m=1}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,0}(z)$$

$$= O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{nk}\log\left(\frac{e^{-x}}{2\pi nkQ^2}\right)\right) - 2\pi i\sum_{m=1}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,0}(z)$$

$$= O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{nk}\cdot\frac{1}{(nk)^{1-\delta}}\right) - 2\pi i\sum_{m=1}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,0}(z)$$

$$= O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{(nk)^{2-\delta}}\right) - 2\pi i\sum_{m=1}^{M''} R^{(1)}_{k,n,m,0}(z)$$

$$\ll_{Q,x,y} O_{Q,x,y}\left(\frac{1}{(nk)^{2-\delta}}\right) + \sum_{m=1}^{M''}\frac{\log nk}{(nk)^m}$$

$$\ll O_{M''}\left(\frac{1}{(nk)^{1-\delta}}\right),$$

其中 δ 是任意正实数。因此，$I_1(z, F)$ 可计算如下：

$$I_1(z,F) \ll_{M''} \sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{|\overline{\mu_F(k)}|}{kn^2}\cdot\frac{1}{(nk)^{1-\delta}}$$

$$= \sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{|\overline{\mu_F(k)}|}{k^{2-\delta}n^{3-\delta}}.$$

因此，对于 $\mu = 0$，(7.15) 右端的级数是收敛的。总之，

$$I_1(z,F) \le \sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{|\overline{\mu_F(k)}|}{kn^2}\cdot\max\left\{\frac{1}{(nk)^{1-\mu}}, \frac{1}{(nk)^{\frac{1}{2}-\delta}}\right\}. \tag{8.3}$$

由 (5.2)、(5.3) 和 (5.4)，惠特克函数 $W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(e^{\frac{3}{2}\pi i - z}2\pi nkQ^2\right)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均为解析函数。因此，我们得到了所需结果。 □

9. 推论4.3的证明及另一种证明

我们证明推论 4.3。我们使用以下与引理 3.1 类似的引理。通过修改引理 3.1 的证明，我们可以证明此引理。

引理 9.1. 设 $F \in \mathcal{S}$，且 T 充分大。此外，设 $H = D\log\log T$ 为固定值，其中 D 是一个大的正数常量。在 $[-T - H, -T + H]$ 中任意长度为 1 的子区间内，都存在满足以下条件的直线 $t = t_0$

$$|F(\sigma + it_0)|^{-1} = O(\exp(C(\log T)^2)) \tag{9.1}$$

关于 $\sigma \ge -2$ 一致。

我们考虑积分

$$\int_{\mathscr{L}'}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs}ds, \tag{9.2}$$

其中，$\mathscr{L}'$ 是关于实轴与（3.3）中的 $\mathscr{L}$ 对称的围道。由引理 9.1，当

n 趋于无穷大时，z $\in \mathbb{H}^-$。于是，与（4.1）类似，根据留数定理和定义（4.9），我们有：

$$2\pi i f^-(z,F) = f_1^-(z,F) + f_2^-(z,F) + f_3^-(z,F), \tag{9.3}$$

其中

$$f_1^-(z,F) = \int_a^{a-i\infty} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds \tag{9.4}$$

在 $\mathbb{H}^-$ 上解析，

$$f_2^-(z,F) = \int_{\overline{L}} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds \tag{9.5}$$

在整个复平面上解析。对于曲线 L，我们采用与 L 中相同的设定。与推导 (6.1) 的方法相同，

$$\begin{aligned} f_3^-(z,F) &= \int_{b-i\infty}^{b} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \right) e^{zs} ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \int_{b-i\infty}^{b} e^{s(z-\log n)} ds \\ &= e^{bz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^b (z - \log n)} \end{aligned} \tag{9.6}$$

在整个复平面上亚纯。现在我们已经知道，当 y < 0 时，$f_1^-(z,F)$ 是解析的，并且必须像 $f_1(z,F)$ 的情形那样，将其延拓到 y $< \pi$（参见第7节）。由 $\zeta(s)$ 和 $F(s)$ 的函数方程可得

$$\begin{aligned} f_1^-(z,F) &= \int_a^{a-i\infty} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &= -\int_{a-i\infty}^{a} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &= f_{11}^-(z,F) + f_{12}^-(z,F) + f_{13}^-(z,F) + f_{14}^-(z,F), \end{aligned} \tag{9.7}$$

其中

$$f_{11}^-(z,F) = \frac{\overline{\omega} e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Q i} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{F(1-\overline{s})} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s} ds \tag{9.8}$$

在 y < 0 时解析，

$$f_{12}^-(z,F) = -\frac{\overline{\omega} e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Q i} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{F(1-\overline{s})} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)s} ds \tag{9.9}$$

for $y < 2\pi$,

$$f_{13}^-(z,F) = \frac{\overline{\omega} e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Q i} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{F(1-\overline{s})} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)s} ds \tag{9.10}$$

for $y < \pi$,
(9.11)

$$f_{14}^{-}(z,F) = -\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a-i\infty}^{a}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z-\frac{3}{2}\pi i\right)s}ds$$

对于 $y < 3\pi$。与 $f_{14}(z, F)$ 的情形一样，将 (8.8) 右侧的积分拆分后，我们得到

$$f_{11}^{-}(z,F) = I_1^{-}(z,F) + I_2^{-}(z,F),$$

其中
(9.12)

$$I_1^{-}(z,F) = \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s}ds$$

and
(9.13)

$$I_2^{-}(z,F) = -\frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a}^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s}ds.$$

我们可以像在（7.5）中那样，得出积分 $I_2^{-}(z, F)$ 在 $y > -3\pi$ 时收敛。由于 $f_{11}^{-}(z, F)$ 在 $y < 0$ 时解析，因此积分 $I_1^{-}(z, F)$ 在 $-3\pi < y < 0$ 时收敛，并且我们可以用类似于（7.4）（第7节）的方法计算 $-3\pi < y < 0$ 时的 $I_1^{-}(z, F)$。设 m_1,m_2 和 m 为非负整数。取（7.12）中的积分路径 C，对于不为零整数的 μ 以及 $|y + \frac{3}{2}\pi| < \frac{3}{2}\pi$，我们有

$$I_1^{-}(z,F) = \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{3}{4}\pi i + \frac{z}{2} + \frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.$$

$$\times\,\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2}\right) - \sum_{m_1=0}^{M}R_{k,n,m_1}^{(2)}(z,\mu) - \sum_{m_2=0}^{M'}R_{k,n,m_2}^{(2)}(z,\mu)\left.\right\}, \tag{9.14}$$

其中
(9.15)

$$R_{k,n,m_1}^{(2)}(z,\mu) = \frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\Gamma(2\mu - m_1)\Gamma(2-\mu+m_1)(2\pi nkQ^2)^{\mu-m_1}e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)(\mu-m_1)},$$

(9.16)

$$R_{k,n,m_2}^{(2)}(z,\mu) = \frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\Gamma(-2\mu - m_2)\Gamma(2+\mu+m_2)(2\pi nkQ^2)^{-\mu-m_2}e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)(-\mu-m_2)},$$

(9.17)

$$R_{k,n,m,0}^{(2)}(z) = \frac{m+1}{m!}\frac{e^{-\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)m}}{(2\pi nkQ^2)^m}\left\{\log(2\pi nkQ^2) + z + \frac{3}{2}\pi i + \sum_{k_1=1}^{m}\frac{1}{k_1} - C_0 - \frac{1}{m+1}\right\}$$

and

$$R_{k,n,m,\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{(m!)^2}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)}}{(2\pi nkQ^2)^{m-\frac{1}{2}}}\left\{m\left(\psi\left(\frac{3}{2}+m\right) - 2\psi(m+1)\right)\right.$$

$$\left. - m\left(\log(2\pi nkQ^2) + z + \frac{3}{2}\pi i\right) + 1\right\} \tag{9.18}$$

分别是在 $s = \mu - m_1$、$-\mu - m_2$、$-m$ 和 $\frac{1}{2} - m$ 处（9.12）中被积函数的留数。（9.14）右端级数的收敛性可按与（7.15）中类似的方式得到。最后，

由（9.7）—（9.18），我们得到 $f_1^-(z,F)$ 到 $y < \pi$ 的如下延拓：对于 $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，其所有 $j \in (1.8)$ 均满足 $(r, \lambda_j) = (1,1)$，且 $0 \le \mu < 1$，

$$
\begin{aligned}
f_1^-(z,F) = {} & \frac{\overline{\omega} e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2} \times 2\pi i \left\{ (2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{3}{4}\pi i + \frac{z}{2} + \frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i - z}}{4\pi nkQ^2} \right) \right. \\
& \left. \times \Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu) W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i - z}}{2\pi nkQ^2} \right) - \sum_{m_1=0}^{M} R^{(2)}_{k,n,m_1}(z,\mu) - \sum_{m_2=0}^{M'} R^{(2)}_{k,n,m_2}(z,\mu) \right\} \\
& - \frac{\overline{\omega} e^{-\overline{\mu}\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} \int_a^{a+i\infty} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z+\frac{3}{2}\pi i\right)s} ds \\
& - \frac{\overline{\omega} e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)s} ds \\
& + \frac{\overline{\omega} e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)s} ds \\
& - \frac{\overline{\omega} e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} \int_{a-i\infty}^{a} (2\pi Q^2)^s \frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}} \Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s) e^{\left(z-\frac{3}{2}\pi i\right)s} ds. \qquad (9.19)
\end{aligned}
$$

由于（9.19）右侧的级数也满足一个类似于引理7.1的引理，因此我们现在考虑的级数在整个复平面的每个紧子集上也绝对且一致收敛。因此，我们完成了将 $f^-(z,F)$ 从 $y < 0$ 解析延拓至区域 $y < \pi$。

此外，推论4.3也可直接由定理4.2和定义（4.9）证明如下：对于 $z \in \mathbb{H}^-$ 和 ρ，且 $\mathrm{Im}\ \rho < 0$，

$$
\begin{aligned}
f^-(z,F) &= \sum_{\rho} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)} \\
&= \overline{\sum_{\rho} \frac{\overline{\zeta(\rho-1)}}{\overline{F'(\rho)}} e^{\overline{\rho}\overline{z}}} \\
&= \overline{\sum_{\rho'} \frac{\zeta(\rho'-1)}{\overline{F'\left(\overline{\rho'}\right)}} e^{\rho'\overline{z}}},
\end{aligned}
$$

其中 $\rho' = \overline{\rho}$。我们回顾 $F(s) = F(s)$ 对于 $F \in \overline{\mathcal{S}}$ 的定义。因此，第三行右侧的和为

$$
\overline{\sum_{\rho'} \frac{\zeta(\rho'-1)}{\overline{F'}(\rho')} e^{\rho'\overline{z}}} = f(\overline{z}, \overline{F}).
$$

这里，我们利用了如下事实：若 $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，则 $\overline{F} \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$ 亦然。当然，$\mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$ 可以替换为 $\mathcal{S}$。根据定理4.2，函数 $\underline{f}(z,F)$ 可亚纯延拓至 $y > -\pi$。因此，$f(z,F)$ 可亚纯延拓至 $y < \pi$。

10. 定理4.4的证明

将 (7.16) 与 (9.19) 相加。由于一些积分相互抵消，对于 $|y| < \pi$，我们有

$$
\begin{aligned}
f_1(z,F) + f_1^-(z,F) = {} & f_{11}(z,F) + f_{12}(z,F) + f_{13}(z,F) + \frac{\overline{\omega} e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} I_1(z,F) + \frac{\overline{\omega} e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi} I_2(z,F) \\
& + I_1^-(z,F) + I_2^-(z,F) + f_{12}^-(z,F) + f_{13}^-(z,F) + f_{14}^-(z,F)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}i}{(2\pi)^3 Q}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{3}{4}\pi i+\frac{z}{2}+\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.$$

$$\times\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\Bigg\}$$

$$+\frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{3}{4}\pi i+\frac{z}{2}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.$$

$$\times\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(2)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(2)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\Bigg\}$$

$$+A_1(z,F)+A_2(z,F),$$

where

(10.1)

$$A_1(z,F)=-\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s\frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)s}ds$$

and

(10.2)

$$A_2(z,F)=\frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(2\pi Q^2)^s\frac{\zeta(2-s)}{\overline{F(1-\overline{s})}}\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)\Gamma(2-s)e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)s}ds.$$

积分 $A_1(z, F)$ 和 $A_2(z, F)$ 在 $|y| < \pi$ 时收敛，并且我们可以用与 $I_1(z, F)$ 和 $I_1^-(z, F)$ 类似的方式，得到涉及惠特克函数的级数表达式。对于 $|y| < \pi$，$F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，其 $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ 对 (1.8) 中的所有 j 都成立，且 $0 \le \mu < 1$

$$A_1(z,F)=-\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i+\frac{z}{2}+\frac{e^{\frac{\pi}{2}i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.$$

$$\left.\times\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(3)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(3)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\},$$

其中

(10.3)

$$R^{(3)}_{k,n,m_1}(z,\mu)=\frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\Gamma(2\mu-m_1)\Gamma(2-\mu+m_1)(2\pi nkQ^2)^{\mu-m_1}e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)(\mu-m_1)},$$

(10.4)

$$R^{(3)}_{k,n,m_2}(z,\mu)=\frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\Gamma(-2\mu-m_2)\Gamma(2+\mu+m_2)(2\pi nkQ^2)^{-\mu-m_2}e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)(-\mu-m_2)},$$

(10.5)

$$R^{(3)}_{k,n,m,0}(z)=\frac{m+1}{m!}\frac{e^{-\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)m}}{(2\pi nkQ^2)^m}\left\{\log(2\pi nkQ^2)+z-\frac{\pi}{2}i+\sum_{k_1=1}^{m}\frac{1}{k_1}-C_0-\frac{1}{m+1}\right\}$$

and

$$R^{(3)}_{k,n,m,\frac{1}{2}}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{(m!)^2}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)}}{(2\pi nkQ^2)^{m-\frac{1}{2}}}\left\{m\left(\psi\left(\frac{3}{2}+m\right)-2\psi(m+1)\right)\right.$$

(10.6)

$$\left.-m\left(\log(2\pi nkQ^2)+z-\frac{\pi}{2}i\right)+1\right\}$$

分别是被积函数 $A_1(z, F)$ 在 $s = \mu - m_1$、$-\mu - m_2$、$-m$ 和 $\frac{1}{2} - m$ 处的留数。同样，对于 $|y| < \pi$，$F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$ 其 $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ 对 (1.8) 中的所有 j 均成立，且 $0 \le \mu < 1$

$$A_2(z,F) = \frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{4}i+\frac{z}{2}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(4)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(4)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\},$$

其中

(10.7)

$$R^{(4)}_{k,n,m_1}(z,\mu)=\frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\Gamma(2\mu-m_1)\Gamma(2-\mu+m_1)(2\pi nkQ^2)^{\mu-m_1}e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)(\mu-m_1)},$$

(10.8)

$$R^{(4)}_{k,n,m_2}(z,\mu)=\frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\Gamma(-2\mu-m_2)\Gamma(2+\mu+m_2)(2\pi nkQ^2)^{-\mu-m_2}e^{\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)(-\mu-m_2)},$$

(10.9)

$$R^{(4)}_{k,n,m,0}(z)=\frac{m+1}{m!}\frac{e^{-\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)m}}{(2\pi nkQ^2)^m}\left\{\log(2\pi nkQ^2)+z+\frac{\pi}{2}i+\sum_{k_1=1}^{m}\frac{1}{k_1}-C_0-\frac{1}{m+1}\right\}$$

and

$$R^{(4)}_{k,n,m,\frac{1}{2}}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{(m!)^2}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)}}{(2\pi nkQ^2)^{m-\frac{1}{2}}}\left\{m\left(\psi\left(\frac{3}{2}+m\right)-2\psi(m+1)\right)\right.$$
$$\left.-\,m\left(\log(2\pi nkQ^2)+z+\frac{\pi}{2}i\right)+1\right\}\tag{10.10}$$

分别是在 $s = \mu - m_1$、$-\mu - m_2$、$-m$ 和 $\frac{1}{2} - m$ 处，被积函数在 $A_2(z, F)$ 中的留数。最后，对于 $|y| < \pi$、满足 (1.8) 中所有 j 均有 $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ 且 $0 \le \mu < 1$ 的 $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$，我们有 $f_1(z, F) + f_1^-(z, F)$ 的级数表达式

$$\begin{aligned}
f_1(z,F)+f_1^-(z,F)=&\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}i}{(2\pi)^3 Q}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{3}{4}\pi i+\frac{z}{2}+\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.\\
&\left.\times\,\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(1)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(1)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}\\
&+\frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{3}{4}\pi i+\frac{z}{2}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.\\
&\left.\times\,\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(2)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(2)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}\\
&-\frac{\overline{\omega}e^{\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i+\frac{z}{2}+\frac{e^{\frac{\pi}{2}i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.\\
&\left.\times\,\Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(3)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(3)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\right\}\\
&+\frac{\overline{\omega}e^{-\mu\pi i}}{(2\pi)^3 Qi}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mu_F(k)}}{kn^2}\times 2\pi i\left\{(2\pi nkQ^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{4}i+\frac{z}{2}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i-z}}{4\pi nkQ^2}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$\times \Gamma(2+\mu)\Gamma(2-\mu)W_{-\frac{3}{2},\mu}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i-z}}{2\pi nkQ^2}\right)-\sum_{m_1=0}^{M}R^{(4)}_{k,n,m_1}(z,\mu)-\sum_{m_2=0}^{M'}R^{(4)}_{k,n,m_2}(z,\mu)\Bigg\}. \tag{10.11}$$

由于类似于引理 7.1 的引理同样成立，(10.11) 右侧的第三个和第四个级数在整个复平面上的每个紧子集上都绝对且一致收敛。

接下来，由留数定理以及 (4.7) 和 (9.5)，我们得到

$$\begin{aligned} f_2(z,F)+f_2^-(z,F) &= \int_L \frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{sz}ds-\int_{\overline{L}}\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{sz}ds \\ &= -2\pi i\lim_{s\to 2}(s-2)\frac{\zeta(s-1)}{F(s)}e^{zs} \\ &= -2\pi i\frac{e^{2z}}{F(2)}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

最后，由 (6.1) 和 (9.6)

$$f_3(z,F)+f_3^-(z,F)=0. \tag{10.13}$$

因此，对于 $|y|<\pi$，我们有

$$\begin{aligned} 2\pi i(f(z,F)+f^-(z,F)) &= 2\pi i\left\{\frac{1}{2\pi i}(f_1(z,F)+f_1^-(z,F))-\frac{e^{2z}}{F(2)}\right\} \\ &= 2\pi i B(z,F), \end{aligned} \tag{10.14}$$

其中

$$B(z,F)=\frac{1}{2\pi i}(f_1(z,F)+f_1^-(z,F))-\frac{e^{2z}}{F(2)}.n \tag{10.15}$$

根据 (10.11)，函数 $f_1(z,F)+f_1^-(z,F)$ 在整个复平面的每个紧子集上一致绝对收敛。因此，函数 B(z, F) 是整函数。由于函数 $f^-(z,F)$ 根据推论 4.3 对 $y<\pi$ 有亚纯延拓，函数

$$f(z,F)=B(z,F)-f^-(z,F)$$

对所有 $y<\pi$均为解析函数。由于函数 f (z, F) 对 $z\in\mathbb{H}$ 和 $y<\pi$均为解析函数，因此 f (z, F) 可解析延拓至整个复平面。类似地，$f^-(z,F)$ 也可解析延拓至整个复平面。因此，对所有 $z\in\mathbb{C}$，我们有

$$f(z,F)+f^-(z,F)=B(z,F). \tag{10.16}$$

最后，我们证明函数方程 (4.10)。回顾一下这个假设：F 的狄利克雷级数中的系数 $a_F(n)$ 对所有 n 都是实数。因此，如果 ρ 是 F 的一个非平凡零点，那么 $\overline{\rho}$ 也同样是。对于 $z\in\mathbb{H}$，我们有

$$\begin{aligned} \overline{f(z,F)} &= \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{\substack{\rho\\ 0<\mathrm{Im}\rho<T_n}}\frac{\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)}e^{\rho z}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{\substack{\rho\\ 0<\mathrm{Im}\rho<T_n}}\left(\lim_{s\to\rho}\frac{s-\rho}{F(s)-F(\rho)}\zeta(s-1)e^{zs}\right)}. \end{aligned}$$

由于 $a_F(n) \in \mathbb{R}$，因此 $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$ 成立。利用这一点，我们有

$$\begin{aligned}
f^-(\overline{z}, F) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ -T_n<\mathrm{Im}\rho<0}} \frac{\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)} e^{\rho\overline{z}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\substack{\rho \\ -T_n<\mathrm{Im}\rho<0}} \left(\lim_{s\to\rho} \frac{\overline{s}-\overline{\rho}}{\overline{F(s)}-\overline{F(\rho)}} \overline{\zeta(s-1)} e^{z\overline{s}} \right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\substack{\rho \\ -T_n<\mathrm{Im}\rho<0}} \left(\lim_{s\to\rho} \frac{\overline{s}-\overline{\rho}}{F(\overline{s})-F(\overline{\rho})} \zeta(\overline{s}-1) e^{z\overline{s}} \right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\rho<T_n}} \left(\lim_{\overline{s}\to\overline{\rho}} \frac{s-\rho}{F(s)-F(\rho)} \zeta(s-1) e^{zs} \right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\rho<T_n}} \left(\lim_{s\to\rho} \frac{s-\rho}{F(s)-F(\rho)} \zeta(s-1) e^{zs} \right)} \\
&= \overline{f(z, F)}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $z \in \mathbb{H}$，有

$$f(z, F) = \overline{f^-(\overline{z}, F)}. \tag{10.17}$$

利用（10.17），由（10.16）可得

$$\begin{aligned}
\overline{B(\overline{z}, F)} &= \overline{f(\overline{z}, F) + f^-(\overline{z}, F)} \\
&= \overline{f(\overline{z}, F)} + \overline{f^-(\overline{z}, F)} \\
&= \overline{f(\overline{z}, F)} + f(z, F).
\end{aligned}$$

再次利用（10.17）和（10.16），对于 $z \in \mathbb{H}$，有

$$\overline{f(\overline{z}, F)} + f(z, F) = f^-(z, F) + f(z, F) = B(z, F). \tag{10.18}$$

由于 $f(z, F)$、$f^-(z, F)$ 和 $B(z, F)$ 都是整函数，且（10.18）对所有 $z \in \mathbb{H}$成立，根据解析延拓，（10.18）对所有 $z \in \mathbb{C}$ 成立。因此，函数方程（4.10）对所有 $z \in \mathbb{C}$ 成立，从而得到定理4.4。□

致谢。作者衷心感谢 Kohji Matsumoto 教授和 Sh¯ota Inoue 博士在撰写本文过程中给予的各种建议。此外，作者还感谢实验室成员，尤其是硕士生 Keita Nakai 对第 3 节中积分路径 $\mathscr{L}$ 提出的意见。

参考文献

[1] K. M. Bartz，关于与莫比乌斯函数相关的某些复显式公式。I，Acta Arith.，57 (1991)，283-305。[2] J. B. Conrey，A. Ghosh，关于狄利克雷级数的塞尔伯格类：低次数，《Duke Math. J.》，72 (1993)，673-693。[3] J. Kaczorowski，乘法数论中的 k 函数，Acta Arith.，56 (1990)，195-211。

[4] J. Kaczorowski，关于欧拉函数的一种推广，Monatsh. Math，170 (2013)，27-48。[5] J. Kaczorowski，A. Perelli，导子为 1 的二阶 L 函数的一个弱逆定理，京都大学数理解析研究所，53 (2017)，337-347。[6] N. N. Lebedev，《特殊函数及其应用》，Dover 出版公司，米尼奥拉，纽约，1972。[7] Med-Ta¨ıb Jakhlouti，Kamel Mazhouda，Joern Steuding，塞尔伯格类 L 函数的 a 点模 1 分布，Arch. Math，104 (2015)，419-429。[8] A. Perelli，塞尔伯格类 L 函数综述，第一部分，Milan J. Math. 73 (2005)，19-52。[9] M. Reko´s，关于与欧拉函数相关的某些复显式公式。I，Funct. Approx. Comment. Math. 29 (2001)，113-124。[10] L. J. Slater，《合流超几何函数》，剑桥大学出版社，1960。[11] K. Srinivas，塞尔伯格类函数的互异零点，Acta Arith.，103.3 (2002)，201-207。[12] E. T. Whittaker 和 G. N. Watson，《现代分析教程》，第 4 版，剑桥大学出版社，1927。

Hideto Iwata 名古屋大学数学研究
生院 日本名古屋市千种区不老町，
邮编 464-8602。电子邮件：
d18001q@math.nagoya-u.ac.jp