arXiv:2301.03851v1 [math.CV] 10 Jan 2023

多个变量中有理Nevanlinna函数的达林顿定理

M. F. Bessmertnyĭ

2023年1月11日

摘要。每个含 n 个变量的有理Nevanlinna函数，都是含 $n+1$ 个变量的Cayley内函数，其中一个变量固定在上半平面中。达林顿定理将有损系统的综合问题归结为无损系统的综合问题。

2010年数学学科分类。32A08，47N70。

关键词。Nevanlinna 函数，Darlington 综合。

引言

设 $\Pi^d = \{z \in \mathbb{C}^d \,|\, \mathrm{Im}\ z_1 > 0, \dots, \mathrm{Im}\ z_d > 0\}$ 为一个开上多半平面。Nevanlinna 类 $\mathcal{N}_d^{m\times m}$ 由 $\mathbb{C}^{m\times m}$ 值函数 $f(z_1, \dots, z_d)$ 构成，这些函数在 Π^d 上全纯且满足条件

$$\mathrm{Im}\, f(z) = (f(z) - f(z)^*)/2i \geq 0 \quad \text{for} \quad z \in \Pi^d, \tag{0.1}$$

其中 * 表示转置为厄米共轭矩阵。我们只考虑 Nevanlinna 类中的有理函数，以及 Nevanlinna 有理函数的一个子类 $\mathcal{IN}_d^{m\times m}$，即 Cayley 内函数。对于这类函数

$$(f(x) - f(x)^*)/2i = 0 \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{0.2}$$

后者表示这类函数是单位多圆盘 $\mathbb{D}^d = \{z \in \mathbb{C}^d \mid |z_1| < 1, \dots, |z_d| < 1\}$ 上某个内函数的双重 Cayley 变换（分别作用于变量和矩阵值）。文献 [10] 讨论了多圆盘中标量有理内函数的结构。

我们可以考虑满足以下条件的正实（$\mathbb{R}^{m\times m}$值）函数类 $\mathcal{R}_d^{m\times m}$ $z(\lambda)$

$$\mathrm{Re}\, z(\lambda) \geq 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{Re}\, \lambda_1 > 0, \dots, \mathrm{Re}\, \lambda_d > 0$$

以及相应的 Cayley 内正实函数子类 $\mathcal{IR}_d^{m\times m}$。

无源电路的阻抗是单变量有理正实函数。人们已知多种方法，可将此类函数实现为电路的阻抗。特别是，著名的达林顿定理（[8], 另见 [9]）可等价地表述为以下数学形式。

对于任意单变量标量有理正实函数 $z(\lambda)$，存在一个有理正实凯莱内二阶矩阵函数

$$Z(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

使得

$$z(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda)\,[\,d(\lambda) + r\,]^{-1}\,c(\lambda), \tag{0.4}$$

其中， r 是一个非负常数。

容易看出

$$g(\lambda, \mu) = a(\lambda) - b(\lambda)\,[\,d(\lambda) + \mu\,]^{-1}\,c(\lambda) \tag{0.5}$$

是右双半平面 $\Omega^2 = \{\lambda, \mu \in \mathbb{C}^d \mid \mathrm{Re}\,\lambda > 0、\ \mathrm{Re}\ \mu > 0\}$ 中的正实凯莱内函数，并且

$$z(\lambda) = g(\lambda, r), \quad \text{where} \quad r > 0. \tag{0.6}$$

我们将这一结果推广到多个变量的 Nevanlinna 类有理函数。

主定理（广义达林顿定理）。对于任意有理的 $\mathbb{C}^{m\times m}$ 值函数 $f(z) \in \mathcal{N}_d^{m\times m}$，都存在一个有理 Cayley 内函数 $g(z, z_{d+1}) \in \mathcal{IN}_{d+1}^{m\times m}$，使得

$$f(z) = g(z, i). \tag{0.7}$$

该定理使我们能够根据 Nevanlinna 类 Cayley 内函数的表示，得到 Nevanlinna 类中任意有理函数的表示（见 [1]– [5]）。

1 预备知识与主定理的证明

设 $f(z) = \{f_{ij}(z)\}_{i,j=1}^m$ 是一个取值于 $\mathbb{C}^{m\times m}$ 的有理函数，且 $q(z)$ 是函数 $f_{ij}(z)$ 的公分母。那么 $f_{ij}(z) = p_{ij}(z)/q(z)$，其中 $p_{ij}(z)$ 是多项式。函数 $f(z)$ 将

写成 $f(z) = P(z)/q(z)$ 的形式，其中 $P(z) = \{p_{ij}(z)\}_{i,j=1}^{m}$ 是一个取值于 $\mathbb{C}^{m\times m}$ 的多项式，而 $q(z)$ 是一个标量多项式。事实上，除法 $P(z)/q(z)$ 是将矩阵 $P(z)$ 乘以数 $q(z)^{-1}$ 的标准运算。

我们称具有复系数的多项式 $p(z)$ 为稳定的[1]，如果它对任意 $z \in \Pi^d$ 都非零。具有实系数的稳定多项式称为实稳定多项式。实系数多项式构成的环记为 $\mathbb{R}[z_1, \dots, z_d]$。

为证明主定理，我们需要两个引理。

引理 1.1。（[7], 推论 5.5）。设 $p(z)+iq(z) \neq 0$，其中 $p(z)$ $q(z) \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_d]$，并设 z_{d+1} 是一个新的不定元。则以下命题等价。

(i) $p(z) + iq(z)$ 是稳定的，(ii) $p(z) + z_{d+1}q(z)$ 是关于 $d+1$ 个变量的实稳定多项式，(iii) 铅笔中的所有非零多项式

$$\{\alpha p(z) + \beta q(z) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

都是实稳定的。

引理 1.2。（[6], 引理 2.2 和 [7], 定理 5.4）。设 $p(z)$ $q(z) \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_d]$ 互素，且 $p(z) \not\equiv 0$、$q(z) \not\equiv 0$。则铅笔中的所有非零多项式

$$\{\alpha p(z) + \beta q(z) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

为实稳定，当且仅当

$$\operatorname{Im} p(z)/q(z) \geq 0 \quad or \quad \operatorname{Im} p(z)/q(z) \leq 0$$

当 $\operatorname{Im} z_k > 0$ 时，对所有 $1 \leq k \leq d$ 均成立。

主定理的证明。设 $f(z) = P(z)/q(z) \in \mathcal{N}_d^{m\times m}$ 是一个有理函数，并设 $P(z)$、$q(z)$ 是互素多项式。那么

$$f_\eta(z) = \frac{\eta P(z) \eta^*}{q(z)}$$

对每个行向量 $\eta \in \mathbb{C}^m$，它都是 Nevanlinna 类的标量函数。对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，函数 $f_\eta(z) + \alpha$ 也属于 $\mathcal{N}_d^{1\times 1}$。由于 $P(z)$ 和 $q(z)$ 是互素多项式，因此 $f_\eta(z)$ 的分子 $\alpha q(z) + \eta P(z) \eta^*$ 是复系数稳定多项式。

[1]这种术语可能与其他作者采用的称谓不同。

令

$$P_1(z) = [P(z) - P(\overline{z})^*]/2i, \quad P_2(z) = [P(z) + P(\overline{z})^*]/2, \tag{1.1}$$

$$q_1(z) = [q(z) - \overline{q(\overline{z})}]/2i, \quad q_2(z) = [q(z) + \overline{q(\overline{z})}]/2. \tag{1.2}$$

显然， $\mathbb{C}^{m\times m}$值多项式 $P_1(z)$ $P_2(z)$ 具有厄米系数。因此，多项式 $\eta P_1(z)\eta^*, \eta P_2(z)\eta^*$ 和 $q_1(z)$ $q_2(z)$ 具有实系数。

利用 (1.1)、(1.2)，我们得到

$$\alpha q(z) + \eta P(z)\eta^* = \alpha(iq_1(z) + q_2(z)) + \eta(iP_1(z) + P_2(z))\eta^* = i(\alpha q_1(z) + \eta P_1(z)\eta^*) + (\alpha q_2(z) + \eta P_2(z)\eta^*).$$

设 z_{d+1} 是一个新的不定元。由引理 1.1，对于每个 $\eta \in \mathbb{C}^m$

$$z_{d+1}(\alpha q_1(z) + \eta P_1(z)\eta^*) + (\alpha q_2(z) + \eta P_2(z)\eta^*) = \alpha(z_{d+1}q_1(z) + q_2(z)) + \eta(z_{d+1}P_1(z) + P_2(z))\eta^*$$

是关于 $d+1$ 个变量的实稳定多项式。由于 η 是任意向量，铅笔中所有非零多项式

$$\alpha(z_{d+1}q_1(z) + q_2(z)) + \beta(\eta(z_{d+1}P_1(z) + P_2(z))\eta^*), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

都是实稳定的。由条件

$$\operatorname{Im} \frac{\eta(z_{d+1}P_1(z) + P_2(z))\eta^*}{z_{d+1}q_1(z) + q_2(z)}\bigg|_{z_{d+1}=i} = \operatorname{Im} \eta f(z)\eta^* \geq 0 \quad \text{for all} \quad z \in \Pi^d.$$

因此，由引理 1.2,

$$\operatorname{Im} \frac{\eta(z_{d+1}P_1(z) + P_2(z))\eta^*}{z_{d+1}q_1(z) + q_2(z)} \geq 0 \quad \text{for} \quad (z, z_{d+1}) \in \Pi^{d+1}.$$

由于 $\eta \in \mathbb{C}^m$ 是任意向量，并且

$$\operatorname{Im} \frac{x_{d+1}P_1(x) + P_2(x)}{x_{d+1}q_1(x) + q_2(x)} = 0 \quad \text{for} \quad (x, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

then

$$g(z, z_{n+1}) = \frac{z_{d+1}P_1(z) + P_2(z))}{z_{d+1}q_1(z) + q_2(z)} \in \mathcal{IN}_{d+1}^{m\times m}.$$

此外，由 (1.1)、(1.2) 可得 $g(z, i) = f(z)$，这正是所需结果。 □

参考文献

[1] J. Agler、R. Tully-Doyle 和 N. J. Young, 《多个变量中的 Nevanlinna 表示》//《泛函分析杂志》，第 270 卷（2016），3000–3046。[2]J. A. Ball、D. S. Kaliuzhnyĭ-Verbovetskiĭ, 《有理 Cayley 内 Herglotz-Agler 函数：正核分解与传递函数实现》//《线性代数及其应用》，第 456 卷（2014），138–156。[3] M. F. Bessmertnyĭ, 《多个变量的有理矩阵函数的实现》//《算子理论：进展与应用》，第 134 卷（2002），157–185，Birkhauser 出版社，巴塞尔。[4] M. F. Bessmertnyĭ, 《多个变量的有理矩阵值 Pick 函数》// arXiv:2111.14216v1 [math. CV] 282021 年 11 月。[5] M. F. Bessmertnyĭ, 《有理实函数的平方和多项式与矩阵表示》// arXiv:2211.13946v1 [math. CV] 252022年11月。[6] J. Borcea、P. Br¨and´en, 《Weyl 代数中的多变量 P´olya-Schur 分类问题》// arXiv:math/0606360v6[math.CA] 62009年11月。[7] P. Br¨and´en, 《具有半平面性质的多项式与拟阵理论》//《数学进展》，第 216 卷（2007），302–320。[8] S. Darlington, 《产生预定插入损耗特性的电抗四端网络综合》//《数学物理杂志》第 18 卷（1939），257–355。[9] A. V. Efimov、V. P. Potapov, 《J-扩张矩阵函数及其在电路解析理论中的作用》//《俄罗斯数学调查》，28:1（1973），69–140。[10] W. Rudin, 《多圆盘中的函数论》//Benjamin，纽约–阿姆斯特丹，1969。