arXiv:2301.03874v1 [math.OA] 10 Jan 2023

到非交换对称空间的导子是否为内导子由交换情形决定

黄景浩和费奥多尔·苏科切夫

摘要。设 $E = E(0, \infty)$ 是一个对称函数空间， $E(\mathrm{M}, \tau)$ 是与带有忠实正规半有限迹的半有限冯·诺依曼代数相关联的对称算子空间。我们的主要结果确定了这样的空间 E 类：对于所有具有 Levi 性质的半有限冯·诺依曼代数 M 中的每个 C^*-子代数 A，任何导子 $\delta : \mathrm{A} \to E(\mathrm{M}, \tau)$ 必然是内导子。

1. 引言

设 A 是一个 C^*-代数， J 是一个 A-双模 [80]。导子 $\delta : \mathrm{A} \to J$ 是满足 $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$， $x, y \in \mathrm{A}$ 的线性映射。特别地，若 $a \in J$，则 $\delta_a(x) := xa - ax$ 是一个导子。由 J 中元素实现的此类导子称为内导子。算子代数理论中的一个经典问题是：从 A 到 J 的每个导子是否自动为内导子。

著名的 Kadison–Sakai定理 [50, 76] 指出，当 A 是冯·诺依曼代数，且 A-双模 J 与代数 A 本身相同时，导子总是内导子。此外，已有证明表明，从冯·诺依曼代数到其任意理想的每个导子都自动是内导子 [15, 16]。然而，考虑更一般的 C^*-代数 A 和 A-双模 J时，对于某些特定的 A 和 J，存在非内导子的例子（例如参见 [8, 11, 36–38, 72, 77]）。我们引用 Johnson [47, 第 10.11] 节回忆录中的如下内容："理想上，应当确定那些空间 $\mathfrak{X}$ 满足 $H^1(G, \mathfrak{X}^*) = 0$ 对所有 G 都成立。"类似的说法也见于 [43]（另见 [80, 第60]页）："这里同样可以问，这类导子是否为内导子；也就是说，它们是否由 J 中的某个元素像上文那样诱导？用更专业的说法，这个问题是在问上同调群 $H^1(\mathfrak{A}, J)$ 是否平凡。"过去几十年来，已有许多重要的特殊情形得到研究（例如参见 [5, 13, 21, 22, 26, 47, 48, 53, 54, 63, 69, 71, 74]）。

由于非交换分析的迅速发展，以及 Johnson 等人提出的问题所带来的启发，已有许多论文探讨以下问题的各种版本 [5, 7, 10, 18, 83]:

问题1. 假设 $\mathcal{M}$ 是一个赋有忠实正规半有限迹 τ 的冯·诺依曼代数。设 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个由从属于 $\mathcal{M}$ 的 τ-紧算子构成的对称空间。如何确定那些 $E(\mathcal{M}, \tau)$，使得从 $\mathcal{M}$ 的任意 C^*-子代数 $\mathcal{A}$ 到 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 的导子必然都是内导子？

算子理论领域的专家可能更熟悉 $B(\mathcal{H})$ 中的对称赋范理想，它们是非交换对称空间的一种特殊情形。关于取值于冯·诺依曼代数理想中的导子，问题1 的各种版本曾在 [11, 12, 43, 44, 48, 55, 71, 72] 中被提出并讨论。

每个导子是否都是内导子——对于半有限冯·诺伊曼代数的一个 C^*-子代数 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_*$ 上的情形——一直是一个悬而未决的问题（例如参见 [18, 第247]页）。在我们的设定中，这等价于问题 1 在 $E = L_1$条件下的特殊版本。Bader、Gelander 和 Monod 在 2012 [5] 中彻底解决了这个问题（另见 [70]，其中给出了一种略有不同的证明

2010年 数学主题分类。 46L57, 47A56, 46L52, 46L10, 46E30.关键词与短语。 导子；对称空间；可测算子。J. Huang 得到了国家自然科学基金（编号：12031004）的资助。F. Sukochev 的研究得到了澳大利亚研究理事会（FL170100052）的资助。

（归功于 Pfitzner）。 [5] （或 [70]）中使用的方法不可能给出问题 1的完整答案。这一点在 [5, 第 3], 节中得到了强调，其中提出了以下几点：

> a. 与经典不动点定理形成鲜明对比的是，我们无法指望在 L^1 的一般有界闭凸子集中找到不动点……弱紧性……似乎几乎不可或缺…… b. ……规范范数一投影 $V^{**} \to V$还不够。 c. 若能找到该命题的纯几何版本，将会很有意思
>
> ……

在 [5] 中得到的“ 不动点”并不位于 L^1 的一般有界闭凸子集中，这一事实给一般情形带来了额外的困难。

本文彻底解决了上述问题 1 ，见下文定理 4.8 和推论5.4 。我们证明，对称空间的 Levi 性质 [1] 是上述问题 1 对每个半有限冯·诺伊曼代数均有肯定答案的充要条件$\mathcal{M}$。因此，文献 [5] 中关于冯·诺依曼代数预对偶的导子定理（在半有限情形下）成为我们定理 4.8的一个直接推论。

本文提出的新方法回应了 [5], 针对 Bunce 和 Paschke 提出的问题给出的另一种解决证明 [18], 中提出的上述 (a)、(b) 和 (c) 点，且无需涉及 L嵌入空间中子集的弱紧性，而 [5]和 [70] 则需要这样做。这使我们能够从非交换对称空间的一个闭凸子集中找到一个“定点”（实现该导子）；该子集不一定是弱紧的，而此非交换对称空间是其二重对偶的 1-补子空间，但不一定是一个 L嵌入的 Banach 空间（即具有 Levi 性质的对称空间 [30, 31][2]），见定理 4.8。另一方面，空间 $E(\mathcal{M}\ \tau)$ 的 Levi 性质意味着 $E(\mathcal{M}\ \tau)$ 与其第二 K¨othe 对偶相同，而这一几何条件是定理 4.8 所需的唯一条件，因此（至少在精神层面上）回应了 [5, 上文的评注 c] 中提出的问题。我们相信，本文所发展的方法本身就很有意义。

需要强调的是，法图／列维性质起源于巴拿赫格理论 [1, 17], ，甚至被纳入了最初对定义在σ-有限测度空间上的巴拿赫函数空间的定义（见 [6, 65]）。该性质与所谓的“对偶正规”性质有些类似[3]。法图／列维性质在巴拿赫函数空间和对称算子空间理论中的重要性怎么强调都不为过 [29——31]。这里不妨回顾一下：从超有限冯·诺依曼代数$\mathcal{A}$ 到其对偶正规$\mathcal{A}$-双模的每个导子都是内的（例如参见 [80, 定理 2.43], [23] 和 [49]）。还要回顾的是，从核 C^*-代数$\mathcal{A}$ 到对偶巴拿赫$\mathcal{A}$-模的导子都是内的[24, 42]。然而，下文的定理4.8适用于任意的 C^*-子代数$\mathcal{A}$ 以及$\mathcal{M}$ 的对称空间，即使这些空间可能没有预对偶空间。

自反门类型结果（参见例如 [68, 推论 3.2。3]）鲜为人知，但在我们的方法中发挥着重要作用。在第 3 节中，我们建立了这一结果的非交换版本，并为其应用于导子问题奠定基础。在第 4 节中，利用 [28,35], 中得到的非交换对称空间弱紧性判据，我们证明里尔-纳德泽夫斯基不动点定理适用于任何非交换强对称KB空间（或 Kantorovich–Banach 空间，见第 2.2 节），只要其有界部分不等于 $C_1(\mathcal{M}\ \tau) = L_1(\mathcal{M}\ \tau) \cap \mathcal{M}$。这是证明本文主要结果定理 4.8 的关键技术步骤。在第 5 节中，我们说明了为何该空间的法图／列维性质

[1]具有 Levi 性质的对称函数空间 $E(0,\infty)$拥有一个等价对称范数，使得 $E(0,\infty)$具有 Fatou 性质，参见注 4.7。苏联学派在巴拿赫格中使用“单调完备范数”或性质 (B) [58, 第 X 章。4], 另见 [1, 第 89] 页。在算子代数理论中，类似的性质称为“单调闭” [81, 第 III 章，定义 3。13][2]事实上，定理 4.8 对投影常数不必为 1 的情形同样成立。[3]设 M 为冯·诺依曼代数。若一个 M-双模 X 是对偶正规 X-双模，则称其为对偶正规 X-双模；如果 X 是对偶空间，并且对于每个固定元素 $x \in X$ [80, p.6], 映射 $m \mapsto mx$ 和 $m \mapsto xm$ 都是从 M 到 X 的超弱-弱* 连续映射。

是 $E(\mathcal{M}\ \tau)$ 对问题 1 在所有半有限冯·诺伊曼代数这一类中的肯定回答而言的必要条件。

2. 预备知识

本节回顾非交换积分理论中的一些概念。

下文中，H 是一个希尔伯特空间， B(H) 是 H 上所有有界线性算子构成的 $*$-代数，并赋予一致范数 k·k$_\infty$，而 **1** 是 H 上的恒等算子。设 M 是 H 上的冯·诺依曼代数。我们用 P(M) 表示 M 中所有投影的集合，用 M′表示 M 的交换子，并用 Z(M) 表示 M 的中心。关于冯·诺依曼代数理论的详细内容，请参阅例如 [51, 52] 或 [81]。关于可测算子的一般事实，可参见 [67], [78]（另见第 IX 章 [82, 以及即将出版的著作 [34]）。为方便读者，现回顾一些基本定义。

2.1. **τ-可测算子与广义奇异值函数。** 设闭稠密定义算子 $x\colon \mathfrak{D}(x) \to$ H 的定义域为 $\mathfrak{D}(x)$。若对所有 $y \in$ M′，均有 $yx \subseteq xy$，则称其从属于 M，其中 M′ 是 M 的交换子。若闭稠密定义算子 $x\colon \mathfrak{D}(x) \to$ H 从属于 M，且存在序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ P (M)，使得$p_n \uparrow$ **1**, p_n(H) $\subseteq \mathfrak{D}(\{$v27), 并且对所有 n， **1**$-p_n$ 是有限投影（相对于 M），则称该算子是可测的。所有相对于 M 的可测算子构成的集合记为 S(M)。对于强和与乘积（对所有 x、 $y \in S$ (M)，分别简记为 $x+y$ 和 xy），该集合是一个含幺 $*$-代数。

设 x 是从属於 M 的自伴算子。我们用 $\{e^x\}$ 表示它的谱测度。众所周知，若 x 是从属于 M 的算子，且其极分解为 $x = u|x|$，则对于所有投影 $e \in \{e^{|x|}\}$，有 $u \in$ M 和 $e \in$ M。此外，$x \in S$(M) 当且仅当对于某个 $\lambda > 0$， $e^{|x|}(\lambda,\ \infty)$ 是有限投影。由此立即可知，当 M 是 III 型冯·诺依曼代数或 I 型因子时，有 S(M) = M。对于 II 型冯·诺依曼代数，这一结论不再成立。从现在起，设 M 是配备忠实正规半有限迹 τ 的半有限冯·诺伊曼代数。

若存在序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 P(M)，使得 $p_n \uparrow$ **1**, p_n(H) $\subseteq \mathfrak{D}(x)$ 且 τ(**1** $- p_n$) $< \infty$ 对所有 n 均成立，则称算子 $x \in S$ (M) 为 τ-可测。所有 τ-可测算子构成的集合 S(M τ) 是 S (M) 的含幺 $*$-子代数。众所周知，线性算子 x 属于 S(M τ) 当且仅当 $x \in S$(M)，且存在 $\lambda > 0$ 使得 τ ($e^{|x|}(\lambda,\ \infty)$) $< \infty$。或者，从属于 M 的无界算子 x 是 τ-可测的（见 [39]），当且仅当

$$\tau\left(e^{|x|}(n, \infty)\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

为方便读者，我们也回顾代数 S(M τ) 上测度拓扑 t_τ 的定义。对于每个 $\varepsilon,\ \delta > 0$，我们定义集合

$$V(\varepsilon, \delta) = \{x \in S(\mathcal{M}, \tau)\colon\ \exists p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ such that } \|x(\mathbf{1} - p)\|_\infty \le \varepsilon,\ \tau(p) \le \delta\}.$$

由集合 $V(\varepsilon,\ \delta)$、 $\varepsilon,\ \delta > 0$，生成的拓扑称为 S(M τ)[34, 39, 67] 上的测度拓扑 t_τ。众所周知，赋予测度拓扑的代数 S(M τ) 是一个完备可度量拓扑代数。序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$(M τ) 关于测度拓扑 t_τ收敛到零，当且仅当 $\tau\left(e^{|x_n|}(\varepsilon,\ \infty)\right) \to 0$，其中 $n \to \infty$ 对所有 $\varepsilon > 0$ [34] 均成立。

S(M τ) 上另一种重要的向量拓扑是局部测度拓扑。为方便起见，我们用 P_f(M) 表示 M 中所有 τ-有限投影的集合，即满足 $\tau(e) < \infty$ 的所有 $e \in$P(M) 的集合。该拓扑的一个邻域基由集合 $V(\varepsilon,\ \delta;\ e)$、 $\varepsilon,\ \delta > 0$,$e \in P_f$(M) 给出，其中

$$V(\varepsilon, \delta; e) = \{x \in S(\mathcal{M}, \tau)\ :\ exe \in V(\varepsilon, \delta)\}.$$

显然，局部测度拓扑弱于测度拓扑 [32]。这里需要指出，本文所采用的局部测度拓扑不同于例如 [9, 10] 中定义的局部测度拓扑。

定义 2.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备忠实正规半有限迹 τ的冯·诺依曼代数，并令 $x \in S(\mathcal{M}\ \tau)$。算子 $\mu(x)\colon t \mapsto \mu(t; x)$ 的广义奇异值函数

算子 x定义为

$$\mu(s;x)=\inf\{\|xp\|_\infty:\ p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})\ with\ \tau(\mathbf{1}-p)\le s\},\forall s\in(0,\infty).$$

关于算子分布函数的一个等价定义 $|x|$ 如下。对于每个算子 $x\in S(\mathcal{M},\tau)$，令 $d_{|x|}(t)=\tau(e^{|x|}(t,\infty))\quad t>0$，则有（例如参见 [39]）

$$\mu(t;x)=\inf\{s\ge 0:\ d_{|x|}(s)\le t\}. \tag{1}$$

注意，即使迹 τ 有限，$\mu(x)$ 仍是定义在 $(0,\infty)$ 上的函数。特别地，当 $s\ge\tau(\mathbf{1})$ 时，$\mu(s;x)=0$。

考虑代数 $\mathrm{M}=L^\infty(0,\infty)$，它由区间 $(0,\infty)$ 上所有勒贝格可测的本质有界函数构成。代数 M 可视为一个阿贝尔冯·诺伊曼代数，它通过乘法作用于希尔伯特空间 $\mathrm{H}=L^2(0,\infty)$，其迹由关于勒贝格测度 $m.$ 的积分给出。容易看出，从属于 M 的所有 τ-可测算子可识别为代数勒贝格可测函数 $L_0(0,\infty)$ 的子代数 $S(0,\infty)$；该子代数由所有满足对某个 $s>0$，$m(\{|x|>s\})$ 有限的函数 x 组成。还应指出，广义奇异值函数 $\mu(x)$ 正是函数 $|x|$ 的递减重排 $\mu(x)$（例如参见 [60]），其定义如下：

$$\mu(t;x)=\inf\{s\ge 0:\ m(\{|x|\ge s\})\le t\}.$$

若 $\mathrm{M}=B(\mathrm{H})$（分别地，ℓ_∞），且 τ 为标准迹 Tr（分别地，为 $\mathbb{N}$ 上的计数测度），则不难看出 $S(\mathrm{M})=S(\mathrm{M},\tau)=\mathrm{M}$。在这种情况下，对于$x\in S(\mathrm{M},\tau)$，我们有

$$\mu(n;x)=\mu(t;x),\quad t\in[n,n+1),\quad n\ge 0.$$

序列 $\{\mu(n;x)\}_{n\ge0}$ 正是算子 $x.$的奇异值序列

若 $x,\ y\in S(\mathrm{M},\tau)$，则称 x 被 y 次主化，记作 $x\prec\prec y$，如果

$$\int_0^t\mu(s;x)ds\le\int_0^t\mu(s;y)ds\ \text{for all}\ t\ge 0.$$

特别地，对于 $x,\ y\in S(0,\infty)$，$x\prec\prec y$ 当且仅当 $\int_0^t\mu(s;x)ds\le\int_0^t\mu(s;y)ds,\ t\ge0$。

2.2. **对称空间**。

定义 2.2. 设 E 是 $S(\mathcal{M},\tau)$ 的线性子空间，赋予完备范数 $\|\cdot\|_E$，若满足以下条件，则称其为（τ-可测算子的）对称空间：$x\in S(\mathcal{M},\tau)$，$y\in E$且 $\mu(x)\le\mu(y)$蕴含$x\in E$ 且 $\|x\|_E\le\|y\|_E$。

众所周知，任意对称空间 E 都是赋范 M-双模，即对于任意$x\in E,\ a,b\in\mathrm{M}$，均有 $axb\in E$ $\|axb\|_E\le\|a\|_\infty\|b\|_\infty\|x\|_E$ [32,34]。若对称空间 $E(\mathrm{M},\tau)\subset S(\mathrm{M},\tau)$ 的范数 $\|\cdot\|_E$ 还满足以下性质：只要 $x,y\in E(\mathrm{M},\tau)$ 满足 $x\prec\prec y$，就有 $\|x\|_E\le\|y\|_E$，则称其为强对称空间。此外，如果 $x\in S(\mathrm{M},\tau)$，$y\in E(\mathrm{M},\tau)$ 且 $x\prec\prec y$蕴含 $x\in E(\mathrm{M},\tau)$ 和 $\|x\|_E\le\|y\|_E$，则称 $E(\mathrm{M},\tau)$ 为全对称空间（由τ-可测算子构成）。

若 $E\subset S(\mathrm{M},\tau)$ 是对称空间，则称其范数 $\|\cdot\|_E$为序连续，如果当 $\{x_\alpha\}$ 是 E^+ 中满足 $x_\alpha\downarrow 0.$ 的向下有向网时，$\|x_\alpha\|_E\to0$。若对称空间 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有*Fatou* 性质，则对于 $E(\mathrm{M},\tau)^+$ 中任意满足 $\sup_\beta\|x_\beta\|_E<\infty$ 的向上有向网 $\{x_\beta\}$，存在元素 $x\in E(\mathrm{M},\tau)^+$，使得 $x_\beta\uparrow x$ 属于 $E(\mathrm{M},\tau)$，且 $\|x\|_E=\sup_\beta\|x_\beta\|_E$。Schatten–von Neumann算子理想、Lorentz算子理想等例子都具有满足 Fatou 性质 [34,60,61] 的对称范数。如果 E 具有 Fatou 性质且范数序连续，则称其为KB-空间（或 Kantorovich–Banach空间） [32]。

如果 $E(\mathrm{M},\tau)$ 是一个对称空间，那么载体投影 $c_E\in\mathrm{P}(\mathrm{M})$ 定义为

$$c_E=\bigvee\{p:p\in\mathcal{P}(\mathcal{M}),\ p\in E(\mathcal{M},\tau)\}.$$

我们指出，将冯·诺依曼代数 M 替换为约化冯·诺依曼代数 $\mathrm{M}c_E$（注意，$E(\mathrm{M},\tau)=c_EE(\mathrm{M},\tau)c_E$，例如参见 [32,推论 6]），通常假设 $E(\mathrm{M},\tau)$ 的载体投影等于 $\mathbf{1}$。

If $E(\mathrm{M},\tau)$ 是一个对称空间，则 $E(\mathrm{M},\tau)$ 的 K¨othe 对偶 $E(\mathrm{M},\tau)^{\times}$ 定义为 y

$$E(\mathcal{M},\tau)^{\times}=\{x\in S(\mathcal{M},\tau):\sup_{\|y\|_E\le 1,y\in E}\tau(|xy|)<\infty\},$$

对于每个 $x\in E(\mathrm{M},\tau)^{\times}$，我们定义 $\|x\|_{E^{\times}}=\sup\{\tau(|yx|):\ y\in E(\mathrm{M},\tau),\|y\|_E\le 1\}$（例如参见 [32,第 5 节。2],另见 [28,62]）。众所周知，$\|\cdot\|_{E^{\times}}$ 是 $E(\mathrm{M},\tau)^{\times}$ 上的范数，当且仅当 $E(\mathrm{M},\tau)$ 的载体投影 c_E 等于 1。此时，对于强对称空间$E(\mathrm{M},\tau)$，以下命题等价 [31,32]。

- $E(\mathrm{M},\tau)$具有 Fatou 性质。
- $E(\mathrm{M},\tau)^{\times\times}=E(\mathrm{M},\tau)$，且对所有 $X\in E(\mathrm{M},\tau)$，$\|x\|_E=\|x\|_{E^{\times\times}}$。
- $E(\mathrm{M},\tau)$的范数闭单位球 B_E在局部测度拓扑下于 $S(\mathrm{M},\tau)$ 中是闭的。

如果 $E(\mathrm{M},\tau)$ 是一个强对称空间，且满足 $c_E=\mathbf{1}$（或者是从属于某个半有限冯·诺伊曼代数的对称空间，而该代数要么是无原子的，要么是原子型且所有极小投影的迹相等），那么 [32, 引理 30]（另见 [34, 定理 IV.5.7] 和 [60]）

$$\|x\|_E=\|x\|_{E^{\times\times}},\ x\in(L_1\cap L_\infty)(\mathcal{M},\tau),\tag{2}$$

and

$$L_1\cap L_\infty(\mathcal{M},\tau)\subset E(\mathcal{M},\tau)\subset(L_1+L_\infty)(\mathcal{M},\tau).\tag{3}$$

冯·诺依曼代数 M 的一大类对称算子空间，可以由具体的对称函数空间构造而成；例如，[60] 中就对这类空间进行了深入研究。设 $(E(0,\infty),\|\cdot\|_{E(0,\infty)})$ 是定义在半轴 $(0,\infty)$ 上的对称函数空间。这一对

$$E(\mathcal{M},\tau)=\{x\in S(\mathcal{M},\tau):\mu(x)\in E(0,\infty)\},\quad \|x\|_{E(\mathcal{M},\tau)}:=\|\mu(x)\|_{E(0,\infty)}$$

是从属于 M 的对称算子空间，且满足 $c_E=\mathbf{1}$ [56]（另见 [62]）。为方便起见，我们将 $\|\cdot\|_{E(\mathcal{M},\tau)}$ 记为 $\|\cdot\|_E$。

设 $E(0,\infty)$ 是一个对称函数空间。我们定义一个对称空间 [60, 第 I 章。3]

$$(L_1+E)(0,\infty):=\{f\in S(0,\infty):\|f\|_{L_1+E}:=\inf_{x=u+v,u\in L_1(0,\infty),v\in E(0,\infty)}\{\|u\|_1+\|v\|_E\}<\infty\}.$$

2.3. 紧算子的理想 τ-紧算子。 对于自伴算子 $x\in S(\mathrm{M},\tau)$，我们用 $s(x)$ 表示其支撑。M 中由所有 τ-有限值域元素构成的双边理想 $\mathrm{F}(\mathrm{M},\tau)$ 定义如下：

$$\mathcal{F}(\mathcal{M},\tau)=\{x\in\mathcal{M}\ :\ \tau(s(|x|))<\infty\}.$$

由所有 τ-紧有界算子构成的 C^*-代数 $C_0(\mathrm{M},\tau)$，可描述为所有 τ-有限投影 [62, Definition 2.6.8] 的线性张成在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的闭包。等价地，$C_0(\mathrm{M},\tau)$ 是所有满足以下条件的元素 $x\in\mathrm{M}$ 的集合：对于每个 $\lambda>0$，均有 $\tau(E^{|x|}(\lambda,\infty))<\infty$（例如参见 [34, 第 II 章第 4] 节）。空间 $C_0(\mathrm{M},\tau)$ 与在无穷远处消失的本质有界函数理想相关（见 [62, 引理 2.6.9]），即

$$C_0(\mathcal{M},\tau)=\left\{a\in S(\mathcal{M},\tau):\mu(a)\in L_\infty(0,\infty),\ \mu(\infty;a):=\lim_{t\to\infty}\mu(t;a)=0\right\}.$$

特别地，如果 τ 是有限的，那么 $\mathrm{M}=C_0(\mathrm{M},\tau)$（例如参见 [62, 第 64] 页）。$S_0(\mathrm{M},\tau)$ 中的τ-紧算子空间是与函数代数相关联的空间，这些函数定义在 $S(0,\infty)$ 上并在无穷远处消失，即

$$S_0(\mathcal{M},\tau)=\{x\in S(\mathcal{M},\tau):\ \mu(\infty;x)=0\}.$$

这是 $S(\mathrm{M},\tau)$ 中的一个双边理想，并且显然，$C_0(\mathrm{M},\tau)=S_0(\mathrm{M},\tau)\cap\mathrm{M}$。

我们记

$$C_0(0,\infty):=\{f\in L_\infty(0,\infty):\mu(\infty;f)=0\},$$

and

$$(L_1+C_0)(0,\infty):=\{f\in L_1+L_\infty(0,\infty):\mu(\infty;f)=0\}.$$

3. 非交换自反闸型定理

回顾对称函数空间 $E(0,1)$ 的自反门类型结果 [68, 推论 3.2.3],即，若 $E(0,1) \neq L_1(0,1)$ 且 $E(0,1) \neq L_\infty(0,1)$，则存在两个自反对称空间 $F_1(0,1)$ 和 $F_2(0,1)$，使得 $F_2(0,1) \subset E(0,1) \subset F_1(0,1)$。对于满足 $\ell_E \subsetneqq c_0$ 的对称序列空间ℓ_E，由著名的 Davis–Figiel–Johnson–Pe l czy´nski [27]构造（详见 [4, 定理 5.37], [25, 第 VI 章，引理 5.3] 或 [57, 第 255] 页），存在一个自反序列空间 $\ell_F \subsetneqq \ell_E$，例如参见 [57, 命题 3.4] 的证明。在下文的引理中，我们证明这个自反序列空间实际上是对称的，这是单位区间上对称函数空间自反门结果 [68, 推论 3.2.3] 的离散类比。

引理 3.1. 设 ℓ_E 是一个与 ℓ_1 不相同（在等价范数意义下）的对称序列空间。那么，存在一个自反对称序列空间 ℓ_F，使得 $\ell_F \subset \ell_E$。

证明. 证明依赖于 Davis–Figiel–Johnson–Pe lczy´nski [27, p.313] 的构造。

设 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是 ℓ_E的标准对称基。由于 $\ell_E \neq \ell_1$，可知 $\{e_n\}_{n\geq 1}$是弱零列。根据 Krein–Smulian 定理 [4, 定理 3.42], ，$\{e_n\}_{n\geq 1}$ 的凸圆盘[4] 包 W 是弱紧的。

设 $U_n = 2^n W + 2^{-n} U$，其中 U表示 ℓ_E的单位球，而 $\|\cdot\|_n$ 表示 Minkowsk i 泛函 o f U_n，即，

$$\|x\|_n := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U_n\}.$$

令 $\ell_F := \left\{x \in \ell_E : \|x\|_F := \left[\sum_{n=1}^\infty \|x\|_n^2\right]^{1/2} < \infty\right\}$。根据 [27, 引理 1]（另见 [4, 定理 5.37]），ℓ_F 是自反的。

ℓ_F 的理想性质已在 [57, 命题 3.4]中断言。为完整起见，我们在下面给出一个简短的证明。设 $y = (y(k))_{k\geq 1} \in \ell_F$ 且 $x = (x(k))_{k\geq 1} \in \ell_\infty$，满足 $|x| \leq |y|$。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有 $y \in (\|y\|_n + \varepsilon)U_n$，即，

$$y = \sum_{k=1}^N s_k e_k + y_{n,\varepsilon},$$

其中 $\sum_{k=1}^N |s_k| \leq 2^n (\|y\|_n + \varepsilon)$ $1 \leq N < \infty$ 和 $(y_{n,\ \varepsilon}(k))_{k\geq 1} \in \frac{\|y\|_n + \varepsilon}{2^n} U$ 注意到

$$x = \sum_{y_k \neq 0} s_k \frac{x_k}{y_k} e_k + \left(\frac{x_k}{y_k} y_{n,\varepsilon}(k)\right)_{k\geq 1},$$

$\sum_{y_k\neq 0} \left|s_k \frac{x_k}{y_k}\right| \leq \sum_{y_k\neq 0} |s_k| \leq 2^n (\|y\|_n + \varepsilon)$ 和 $\left(\frac{x_k}{y_k} y_{n,\varepsilon}(k)\right)_{k\geq 1} \in \|y\|_{2^n}^{n+\varepsilon} U$。因此，对于每个 $n \geq 1$，都有 $\|x\|_n \leq \|y\|_n$，并且 $x \in \ell_F$ 满足 $\|x\|_F \leq \|y\|_F$。

要证明 ℓ_F 是对称的，只需注意，对于任意置换 π 和 $n \geq 1$，都有 $\pi(W) = W$以及 $\pi(U) = U$。因此，对于任意 $y \in \ell_F$和任意置换 π，都有 $\left\|(y(k))_{k\geq 1}\right\|_n = \left\|(y(\pi(k)))_{k\geq 1}\right\|_n$。□

推论 3.2。 设 ℓ_E 是一个对称序列空间，它与 c_0 和 ℓ_∞ 不相同（相差不超过等价范数）。那么，存在一个自反对称序列空间 ℓ_F，使得$\ell_F \supset \ell_E$。

[4]向量空间的一个非空子集 A 称为圆盘（或平衡），当且仅当 $x \in A$ 和 $0 \leq \lambda \leq 1$ 蕴含 $\lambda x \in A$) [4, p.134]。A 的凸圆盘包为

$$\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A \text{ for each } i \text{ and } \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1\right\}.$$

证明。由于 $\ell_E \neq c_0,\ \ell_\infty$，可得 $\ell_E^{\times} \neq \ell_1$（例如参见 [46, 命题 11] 和 [59]）。由引理 3.1，可知存在一个自反对称序列空间 $\ell_G \subset \ell_E^{\times}$。因此，令 $\ell_F := \ell_G^{\times}$，它是一个自反对称序列空间 [32, 第 8 节。3]（另见 [34, 60, 66]），我们有

$$\ell_F = \ell_G^{\times} \supset \ell_E^{\times\times} \supset \ell_E,$$

从而完成证明。 □

现在，我们证明本节的主要定理，它是 [68, 推论 3.2.3] 的无限测度版本。

定理 3.3. 设 $E(0,\infty)$ 是一个对称函数空间，满足

$$E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty) \subsetneqq C_0(0,\infty).$$

那么，存在一个对称 KB-函数空间，使得 $F(0,\infty)$ 包含于其中。如果此外，$E(0,1) := \Big\{ f \in L_1(0,1) : g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (0,1); \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \in E(0,\infty),\ \|f\|_{E(0,1)} = \|g\|_{E(0,\infty)} \Big\}$ 满足

$$E(0,1) \neq L_1(0,1),$$

那么 $F(0,\infty)$ 可以选为一个自反对称空间。

证明。令 ℓ_E 为由 $E(0,\infty)$ 生成的对称序列空间，定义为

$$\ell_E := \left\{ (\alpha_n)_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 1} \alpha_n \chi_{(n-1,n]} \in E(0,\infty) \right\},\ \|(\alpha_n)_{n\geq 1}\|_{\ell_E} := \left\| \sum_{n\geq 1} \alpha_n \chi_{(n-1,n]} \right\|_{E(0,\infty)}. \tag{4}$$

由条件 $E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty) \subsetneqq C_0(0,\infty)$ 可得 $\ell_E \subsetneqq c_0$。确实，$E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty) \subsetneqq C_0(0,\infty)$ 意味着存在 $z = \mu(z) \in C_0(0,\infty)$，使得 $\mu(z) \notin E(0,\infty)$，因此，由 (4) 可得 $(\mu(n;z))_{n\geq 1} \in c_0$，但 $(\mu(n;z))_{n\geq 1} \notin \ell_E$。

由推论 3.2，存在一个自反对称序列空间 $\ell_G \supset \ell_E$。注意到 ℓ_G 是全对称的 [34, 60, 61]。

现在，我们通过如下定义对称函数空间 $F_1(0,\infty)$：

$$F_1(0,\infty) := \left\{ f \in (L_1 + L_\infty)(0,\infty) : \left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;f)dt \right)_{n\geq 1} \in \ell_G \right\} \tag{5}$$

赋予范数 [62, 定理 3.6.6]

$$\|f\|_{F_1(0,\infty)} := \left\| \left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;f)dt \right)_{n\geq 1} \right\|_{\ell_G},\ f \in F_1(0,\infty),$$

该空间还具有 Fatou 性质和序连续范数，即 $F_1(0,\infty)$ 是一个对称 KB-空间。事实上，设 $\{x_\beta\}$ 是 $F_1(0,\infty)$ 中的一个向上有向网$^+$，满足 $\sup_\beta \|x_\beta\|_{F_1(0,\infty)} < \infty$。根据 $F_1(0,\infty)$ 的定义，$\left(\left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;x_\beta)dt \right)_{n\geq 1} \right)_\beta$ 是 ℓ_G^+ 中的一个向上有向网，且 $\sup_\beta \left\| \left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;x_\beta)dt \right)_{n\geq 1} \right\|_{\ell_G} < \infty$. 设 $x \in S(0,\infty)$ 满足 $x_\beta \uparrow x$。那么，我们有 $\mu(x_\beta) \uparrow x$，并且对每个 $n \geq 1$，$\int_{n-1}^{n} \mu(t;x_\beta)dt \uparrow \int_{n-1}^{n} \mu(t;x)dt$。由 ℓ_G 的 Fatou 性质可得，$\left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;x)dt \right)_{n\geq 1} \in \ell_G$，且 $\left\| \left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;x)dt \right)_{n\geq 1} \right\|_{\ell_G} = \sup_\beta \left\| \left(\int_{n-1}^{n} \mu(t;x_\beta)dt \right)_{n\geq 1} \right\|_{\ell_G}$，也就是说，$x \in F_1(0,\infty)$，且 $\|x\|_{F_1(0,\infty)} = \sup_\beta \|x_\beta\|_{F_1(0,\infty)} = \sup_\beta \|x_\beta\|_{F_1(0,\infty)}$。因此，$F_1(0,\infty)$ 具有 Fatou 性质。$\|\cdot\|_{F_1(0,\infty)}$ 的序连续性可用类似方法证明。

注意，对于任意 $f = \mu(f) \in E(0,\infty)$，我们有

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n;f)\chi_{(n-1,n]} \leq \mu(f) \quad \text{and} \quad \sum_{n\geq 1} \mu(n;f)\chi_{(n-1,n]} \in E(0,\infty).$$

由（4），我们有 $(\mu(n;\ f))_{n\geq 1}\in \ell_E$。因此，

$$\left(\int_{n-1}^{n}\mu(t;f)dt\right)_{n\geq 2}=\left(\int_{n}^{n+1}\mu(t;f)dt\right)_{n\geq 1}\leq(\mu(n;f))_{n\geq 1}\in\ell_E\subset\ell_G.$$

因此，$\left(\int_{n-1}^{n}\mu(t;\ f)dt\right)_{n\geq 1}\in\ell_G$，即，

$$f\overset{(5)}{\in}F_1(0,\infty).$$

也就是说，$E(0,\infty)\subset F_1(0,\infty)$。通过定义 $F(0,\infty):=F_1(0,\infty)$，即可完成第一个断言的证明。

假设 $E(0,1)\neq L_1(0,1)$。若 $E(0,1)=L_\infty(0,1)$，则定义 $G(0,1):=L_2(0,1)$（这是一个自反对称函数空间），可得 $G(0,1)\supset E(0,1)$。若 $E(0,1)\neq L_\infty(0,1)$，则根据 [68, 推论 3.2.3]，，存在一个自反对称函数空间 $G(0,1)$，使得$E(0,1)\subset G(0,1)$。我们定义

$$G(0,\infty):=\left\{f\in(L_1+L_\infty)(0,\infty):\mu(f)\chi_{(0,1)}\in G(0,1)\right\}$$

赋予范数[5]

$$\|f\|_G:=\inf_{f=u+v,\ u\in G(0,\infty),v\in L_\infty(0,\infty)}\left\{\left\|\mu(u)\chi_{(0,1)}\right\|_{G(0,1)}+\|v\|_\infty\right\},\ f\in G(0,\infty).$$

根据 K¨othe 对偶的定义（例如参见 [60, (4.31)]），容易验证，K¨othe 对偶$G(0,\infty)^\times$ 由 $G(0,\infty)$给出

$$\begin{aligned}&\left\{f\in(L_1+L_\infty)(0,\infty):\left\|\mu(f)\chi_{(0,1)}\right\|_{G(0,1)^\times}<\infty\right\}\cap L_1(0,\infty)\\&=\left\{f\in(L_1+L_\infty)(0,\infty):\mu(f)\chi_{(0,1)}\in G(0,1)^\times\text{ and }\mu(f)\chi_{[1,\infty)}\in L_1(0,\infty)\right\}.\end{aligned}$$

赋予范数

$$\|f\|_{G(0,\infty)^\times}:=\max\left\{\left\|\mu(f)\chi_{(0,1)}\right\|_{G(0,1)^\times},\|f\|_1\right\},\ f\in G(0,\infty)^\times.$$

对于任意递减网 $S_0(0,\ \infty)\supset E(0,\ \infty)\ni f_i\downarrow 0$，有 $\mu(f_i)\downarrow_i 0$（例如参见 [32, 命题 2(iv)]），因此存在常数 $c(G)$，仅依赖于 $G(0,\ 1)$ 和第 I 章定理 1.8]，使得

$$\|f_i\|_{G(0,\infty)^\times}\leq c(G)\left(\left\|\mu(f_i)\chi_{(0,1)}\right\|_{G(0,1)^\times}+\|\mu(f_i)\|_{L_1(0,\infty)}\right)\downarrow_i 0,\tag{6}$$

这表明 $G(0,\ \infty)^\times$ 具有序连续范数。

现在，我们定义

$$F(0,\infty):=G(0,\infty)\cap F_1(0,\infty),$$

赋予 $\|\cdot\|_F:=$最大值$\left\{\|\cdot\|_G,\ \|\cdot\|_{F_1}\right\}$。由于 $G(0,\infty)$ 和 $F_1(0,\infty)$ 都具有 Fatou 性质，因此 $F(0,\infty)$ 具有 Fatou 性质。与（6）中相同的推理表明$\|\cdot\|_F$ 是序连续的。注意 [79, 第 2 节。3]（另见 [64]）

$$F(0,\infty)^\times=G(0,\infty)^\times+F_1(0,\infty)^\times$$

赋予范数

$$\|f\|_{F(0,\infty)^\times}:=\inf_{f=u+v,\ u\in G(0,\infty)^\times,v\in F_1(0,\infty)^\times}\left\{\|u\|_{G^\times}+\|v\|_{F_1^\times}\right\}.$$

我们声称，$\|\cdot\|_{F(0,\infty)^\times}$是序连续的。事实上，对于任意递减网 $F_1(0,\ \infty)\ni f_i\downarrow 0$，有 $\mu(f_i)\downarrow_i 0$。特别地，对于每个 $n\geq 1$，有 $\mu(n;f_i)\downarrow_i 0$。根据三角不等式，有

$$\|f_i\|_{F(0,\infty)^\times}\leq\left\|\mu(f_i)\chi_{(0,1)}\right\|_{G(0,\infty)^\times}+\left\|\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)}\right\|_{F_1(0,\infty)^\times}.$$

[5]设 $f,g\in G(0,\infty)$。根据 [6, 推论 7，6], 存在 $A\subset(0,\infty)$ 使得 $\mu((f+g)\chi_A)=\mu(f+g)^{\chi_{(0,1)}}$。因此，我们有 $\left\|\mu(f+g)\chi_{(0,1)}\right\|_G(0,1)=\|(f+g)\chi_A\|_{G(0,1)}\leq\|f\chi_A\|_{G(0,1)}+\|g\chi_A\|_{G(0,1)}\leq\left\|f\chi_{(0,1)}\right\|_G(0,1)+\left\|g\chi_{(0,1)}\right\|_G(0,1)$。于是，$\|\cdot\|_{G(0,1)}$ 在 $G(0,\infty)$ 上生成一个对称范数。由于 $\|\cdot\|_\infty$ 是对称范数，因此可知 $\|\cdot\|_G$ 是 $G(0,\infty)$ 上的完备对称范数，参见例如 [60, 第 I 章。3]

由（6），只需证明 $\left\|\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)}\right\|_{F_1(0,\ \infty)^\times} \to_i 0$。根据 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{F_1(0,\ \infty)}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\left\|\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)}\right\|_{F_1(0,\infty)^\times} &\overset{[32,\ \text{Prop. 26}]}{=} \sup_{\|x\|_{F_1(0,\infty)}=1}\int_0^\infty \mu(t;\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)})\mu(t;x)dt\\ &= \sup_{\|x\|_{F_1(0,\infty)}=1}\sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^n \mu(t;\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)})\mu(t;x)dt\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\mu(n+1;f_i)\int_{n-1}^n \mu(t;x)dt &= \sum_{n\geq 1}\mu(n;\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)})\int_{n-1}^n \mu(t;x)dt\\ &\leq \sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^n \mu(t;\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)})\mu(t;x)dt\\ &\leq \sum_{n\geq 1}\mu(n-1;\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)})\int_{n-1}^n \mu(t;x)dt = \sum_{n\geq 1}\mu(n;f_i)\int_{n-1}^n \mu(t;x)dt.\end{aligned}$$

根据 $F_1(0,\infty)$ 的定义，我们有 $(\mu(n;\ f_i))_{n\geq 1}\in \ell_G^\times$ 并且

$$\left\|\mu(f_i)\chi_{[1,\infty)}\right\|_{F_1(0,\infty)^\times} \leq \|\{\mu(n;f_i)\}_{n\geq 1}\|_{\ell_G^\times} \downarrow_i 0.$$

根据 [61, 定理 1.c.5]（另见 [66, 定理 2.4.14] 或 [34, 60]），$F(0,\infty)$ 是自反的。 □

下面的引理是众所周知的，它刻画了其“尾部”为 $C_0(\mathrm{M}\ \tau)$ 真子空间的对称空间。为完整起见，我们给出完整证明。

引理 3.4。假设

(1) $E(\mathcal{M}\ \tau)$ 是从属于配备半有限、无限、忠实正规迹 τ 的冯·诺依曼代数的强对称空间，其中 $c_E=\mathbf{1}$；(2) $\mathcal{M}$ 是配备半有限、无限、忠实正规迹 τ 的无原子冯·诺依曼代数，或者 $\mathcal{M}$ 是原子型代数，配备半有限、无限、忠实正规迹 τ，且所有极小投影的迹相等。

那么，$E(\mathcal{M}\ \tau)^{\times\times}\subset S_0(\mathcal{M}\ \tau)$ 当且仅当 $E(\mathcal{M}\ \tau)\cap\mathcal{M}\subsetneqq C_0(\mathcal{M}\ \tau)$。

证明。($\Rightarrow$)。反设，$E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}$ 不是 $C_0(\mathrm{M}\ \tau)$ 的真子空间。注意，若 $E(\mathrm{M}\ \tau)$ 含有某个元素 x，使得 $\mu(\infty;x)>0$，则 $E(\mathrm{M}\ \tau)\supset\mathrm{M}\supset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$。若对于每个 $x\in E(\mathrm{M}\ \tau)$，都有 $\mu(\infty;x)=0$，则 $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}\subset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$。因此，$E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}=C_0(\mathrm{M}\ \tau)$，或 $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}=\mathrm{M}$，即 $E(\mathrm{M}\ \tau)\supset E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}\supset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$。

根据 [29, 定义 5.1]（另见 [34, 第四章，命题 3.12]），我们有

$$\begin{aligned}E(\mathcal{M},\tau)^\times &= \{y\in S(\mathcal{M},\tau): xy\in L_1(\mathcal{M},\tau)\ \text{for all}\ x\in E(\mathcal{M},\tau)\}\\ &\subset \{y\in S(\mathcal{M},\tau): xy\in L_1(\mathcal{M},\tau)\ \text{for all}\ x\in C_0(\mathcal{M},\tau)\}\\ &= C_0(\mathcal{M},\tau)^\times \overset{\text{see e.g. [79, Lemma 8]}}{=} L_1(\mathcal{M},\tau),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times} &= \left\{y\in S(\mathcal{M},\tau): xy\in L_1(\mathcal{M},\tau)\ \text{for all}\ x\in E(\mathcal{M},\tau)^\times\right\}\\ &\supset \{y\in S(\mathcal{M},\tau): xy\in L_1(\mathcal{M},\tau)\ \text{for all}\ x\in L_1(\mathcal{M},\tau)\}=\mathcal{M},\end{aligned}$$

这与假设 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times}\subset S_0(\mathrm{M}\ \tau)$ 矛盾。（

$\Leftarrow$). A假设 b与.....矛d盾 hat $E(\mathcal{M}\ \tau)^{\times\times}\supset\mathcal{M}$.

根据 [32, 命题 28]（另见 [29,31]），存在一个具有 Fatou 性质的全对称函数空间 $G(0,\infty)$，使得

$$E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}=G(\mathcal{M},\tau)$$

且 $\|y\|_{E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}} = \|\mu(y)\|_{G(0,\infty)}$, $y \in E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}$。由于 $G(\mathcal{M},\tau) \supset \mathcal{M}$，因此可得$G(0,\infty) \supset L_\infty(0,\infty)$，从而，对于某个常数 $c(G)$，有 $\|\cdot\|_\infty \geq c(G)\,\|\cdot\|_G$；该常数仅取决于 $G(0,\infty)$ [6, 第 I 章，定理 1.8]。因此，我们有

$$E(\mathcal{M},\tau)\cap\mathcal{M} \overset{(3)}{\supset} \overline{(L_1\cap L_\infty)(\mathcal{M},\tau)}^{\|\cdot\|_E}\cap\mathcal{M} \overset{(2)}{=} \overline{(L_1\cap L_\infty)(\mathcal{M},\tau)}^{\|\cdot\|_G}\cap\mathcal{M}$$
$$\supset \overline{(L_1\cap L_\infty)(\mathcal{M},\tau)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathcal{M},\tau),$$

这与假设 $E(\mathcal{M},\tau)\cap\mathcal{M} \subsetneq C_0(\mathcal{M},\tau)$ 矛盾。 □

下面，我们建立定理 3.3 的一个非交换版本。注意，下面的命题3.5 的结果对有限迹和无限迹都成立。

命题 3.5。 设$\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹 τ 的冯·诺依曼代数。设 $E(\mathcal{M},\tau)$ 是一个强对称空间，且 $E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times} \subset S_0(\mathcal{M},\tau)$[6]。那么，存在一个对称的 KB-函数空间 $F(0,\infty)$ 使得

$$E(\mathcal{M},\tau) \subset F(\mathcal{M},\tau).$$

证明。 不失一般性，设 $c_E = 1$。若 $\tau(1) < \infty$，则结论显然成立，因为 $E(\mathcal{M},\tau) \overset{(3)}{\subset} L_1(\mathcal{M},\tau)$，且可以取 $F(0,\infty) := L_1(0,\infty)$。

现在，我们假设 $\tau(1) = \infty$。

根据 [32, 命题 28]（另见 [29]），存在一个具有 Fatou 性质的全对称函数空间 $G(0,\infty)$，使得

$$E(\mathcal{M},\tau)^\times = G(\mathcal{M},\tau)$$

且 $\|y\|_{E^\times(\mathcal{M},\tau)} = \|\mu(y)\|_{G(0,\infty)}$, $y \in E(\mathcal{M},\tau)^\times$。

令 $F_1(0,\infty) := G(0,\infty)^\times$。特别地，$F_1(0,\infty)$ 具有 Fatou 性质 [32, 定理 27]。注意，$F_1(\mathcal{M},\tau) = E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}$ [32, 定理 53]。由此得到 [32, 第 5 节。3]

$$E(\mathcal{M},\tau) \subset E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times} = F_1(\mathcal{M},\tau) \subset S_0(\mathcal{M},\tau).$$

特别地，$F_1(0,\infty) \subset S_0(0,\infty)$。由于 $F_1(0,\infty)$ 和 $L_\infty(0,\infty)$ 都具有 Fatou 性质，因此可得 $F_1(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty)$ 具有 Fatou 性质，从而 $F_1(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty) \neq C_0(0,\infty)$。

根据定理 3.3，存在一个对称的 KB-函数空间 $F(0,\infty)$，使得 $F_1(0,\infty) \subset F(0,\infty)$，由此完成证明。□

4. 主要结果

本节以 Akemann、Dodds 和 Gamlen 的以下重要结果为出发点 [3, 定理 4.2]（另见 [2, 推论 II.9 和定理 IV.3] 及 [75]）。该结果应被视为格罗滕迪克定理 [41], 的非交换版本；格罗滕迪克定理指出，从 $C(K)$ 到弱序列完备巴拿赫空间的任意有界算子必为弱紧算子。

定理 4.1。 从一个 C^*-代数到弱序列完备巴拿赫空间的有界线性映射是弱紧的。

回顾一下，非交换强对称空间是 KB-空间，当且仅当它是弱序列完备的 [33, 定理 6。5], 另见 [28,31,32,34]。由定理4.1可得以下推论。

推论 4.2。 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹τ的冯·诺依曼代数，且 $E(\mathcal{M},\tau)$ 是从属于$\mathcal{M}$的强对称 KB-空间。那么，从一个 C^*-代数到 $E(\mathcal{M},\tau)$ 的每个有界映射都是弱紧的。

命题4.3 是推论 4.2 和 [28, 推论 2。9]（另见 [35,定理 5。4]）。对于巴拿赫空间 X，我们用 B_X 表示 X的单位球。

[6]注意，若 $\tau(1) < \infty$，则 $S_0(\mathcal{M},\tau) = S(\mathcal{M},\tau)$。

命题 4.3。 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹 τ 的冯·诺依曼代数。假设 $E(\mathcal{M},\tau)$ 是一个强对称 KB 空间，且 $E(\mathcal{M},\tau)^{\times}\subset S_0(\mathcal{M},\tau)$。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个 C^*-子代数，并设 T 是一个从 $\mathcal{A}$ 到 $E(\mathcal{M},\tau)$ 的有界线性算子。那么，集合

$$B_{\mathcal{M}}T(B_{\mathcal{A}})B_{\mathcal{M}}:=\{aT(x)b:a,b\in B_{\mathcal{M}},x\in B_{\mathcal{A}}\}$$

在 $E(\mathcal{M},\tau)$ 中是相对弱紧的。

证明。不失一般性，我们可以假设 $c_E=\mathbf{1}$。

由于每个弱紧算子都会将有界集映射为弱紧集，根据推论4.2 我们得到集合

$$T(B_{\mathcal{A}})$$

在 $E(\mathrm{M},\tau)$ 中是相对弱紧的。由于 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质，因此可推出 $E(\mathrm{M},\tau)=E(\mathrm{M},\tau)^{\times\times}\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$（见第 2.2 节）。由于 $E(\mathrm{M},\tau)^{\times}\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$，由 [28, 推论 2.9]（或 [35, 定理 5.4]）可得

$$\bigcup_{y\in B_{\mathcal{A}}}\Omega(T(y))$$

在 $E(\mathrm{M},\tau)$ 中是相对 $\sigma(E^{\times\times},E^{\times})$-紧的（等价地，相对 $\sigma(E,E^{\times})$-紧，或弱紧的），其中 $\Omega(x):=\{z\in(L_1+L_\infty)(\mathrm{M},\tau):z\prec\prec y\}$。由于 $B_{\mathcal{M}}T(B_{\mathcal{A}})B_{\mathcal{M}}\subset\bigcup_{y\in B_{\mathcal{A}}}\Omega(T(y))$，因此可得

$$B_{\mathcal{M}}T(B_{\mathcal{A}})B_{\mathcal{M}}$$

在 $E(\mathrm{M},\tau)$ 中弱紧 □

注 4.4。 假设 $E(\mathcal{M},\tau)$ 是一个满足 $c_E=\mathbf{1}$ 的强对称空间。注意，若$\tau(\mathbf{1})<\infty$，则条件 $E(\mathcal{M},\tau)^{\times}\subset S_0(\mathcal{M},\tau)$ 对任意对称空间 $E(\mathcal{M},\tau)$均成立。

若 $\tau(1)=\infty$，则 $E(M,\tau)^{\times}\subset S_0(M,\tau)$ 当且仅当 $E(M,\tau)\cap M\supsetneq L_1(M,\tau)\cap M$。事实上，假设 $E(M,\tau)\cap M\supsetneq L_1(M,\tau)\cap M$。那么，存在一个元素 $0\le z\in E(M,\tau)\cap M$，但 $z\notin L_1(M,\tau)$。特别地，我们有 $\tau(z)=\infty$。根据 K¨o 对偶的定义，我们推得 $\mathbf{1}\notin E(M,\tau)^{\times}$，这进而意味着 $E(M,\tau)^{\times}\subset S_0(M,\tau)$。另一方面，用反证法假设 $L_1(M,\tau)\cap M$ 不是 $E(M,\tau)\cap M$ 的真子空间。由 (3)，我们有 $L_1(M,\tau)\cap M\subset E(M,\tau)\cap M$。因此，我们得到 $E(M,\tau)\cap M=L_1(M,\tau)\cap M$。

根据 $E(\mathcal{M},\tau)\overset{(3)}{\subset}(L_1+L_\infty)(M,\tau)$，我们得出，对任意元素 $x\in E(M,\tau)$，$\mu(x)\chi_{(0,1)}\in L_1(0,1)$。因此，$E(M,\tau)$ 中的所有元素都属于 $L_1(M,\tau)$。故，$E(M,\tau)^{\times}\supset L_1(M,\tau)^{\times}=M$ [29, 定义 5.1]。也就是说，$E(M,\tau)^{\times}\not\subset S_0(M,\tau)$，证毕。

令 U(A) 表示 C^*-代数 A 中所有酉元的集合。

命题 4.5. 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹 τ的冯·诺依曼代数，并设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个含幺 C^*-子代数。假设 $E(\mathcal{M},\tau)$ 是一个强对称 KB 空间，且满足 $E(\mathcal{M},\tau)^{\times}\subset S_0(\mathcal{M},\tau)$。令 $\delta:\mathcal{A}\to E(\mathcal{M},\tau)$ 为一个导子。那么，

$$\{\delta(u)u^*\mid u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})\}$$

在 $E(\mathcal{M},\tau)$ 中是相对弱紧的。因此，凸包 $\mathrm{conv}\{\delta(u)u^*\mid u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})\}^{\|\cdot\|_E}$的闭包是弱紧的。

证明。由 Ringrose 定理 [73, 定理 2]，δ 从 (A, k·k$_\infty$) 到 (E(M τ), k·k$_E$) 有界。由命题 4.3，$\{\delta(u)u^*\mid u\in$ U(A)$\}$ 在 E(M τ) 中相对弱紧。

第二个断言由 Krein–Smulian 定理得出（例如参见 [84]）。 □

下面的引理表明，取值于“较大”对称空间的导子是内导子。

引理 *4.6.* 设 M 是一个配有忠实正规半有限迹 τ 的冯·诺依曼代数，A 是 M 的含幺 C^*-子代数。设 $E(M,\tau)$ 是一个强对称 KB 空间，并且 $E(M,\tau)^{\times}\subset S_0(M,\tau)$。对于每个导子 $\delta: A\to E(M,\tau)$，存在一个元素 $a\in conv\{\delta(u)u^*\mid u\in U(A)\}^{\|\cdot\|_E}$，使得 $\delta=\delta_a$ 在 A 上成立。特别地，$kak\le k\delta k_{A\to E}$。

证明。 不失一般性，我们可以假设载体投影 $c_E = \mathbf{1}$。

对于每个 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$，我们有 $\delta(u) \in E(\mathcal{M},\tau)$，因此可以定义映射$\alpha_u$： $E(\mathcal{M},\tau) \longrightarrow E(\mathcal{M},\tau)$，定义为

$$\alpha_u(x) := uxu^* + \delta(u)u^*.$$

对于每个 u， $v \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_u(\alpha_v(x)) &= uvxv^*u^* + u\delta(v)v^*u^* + \delta(u)u^* \\ &= (uv)x(uv)^* + u\delta(v)v^*u^* + \delta(u)vv^*u^* \\ &= (uv)x(uv)^* + \delta(uv)(uv)^* = \alpha_{uv}(x).\end{aligned}$$

此外，等式 $\delta(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1}^2) = 2\delta(\mathbf{1})$ 意味着 $\delta(\mathbf{1}) = 0$，因此 $\alpha_{\mathbf{1}}(x) = x$， $x \in E(\mathcal{M},\tau)$。因此， α是群 $\mathrm{U}(\mathcal{A})$ 在 $E(\mathcal{M},\tau)$ 上的作用。

我们断言集合

$$K := \overline{\mathrm{conv}\{\delta(u)u^* \mid u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}}^{\|\cdot\|_E}$$

关于 α 不变。由于 $\delta(u)u^* = \alpha_u(0)$，可知 $k_{00} := \{\delta(u)u^* \mid u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})\}$ 是 0 关于 α 的一个轨道，因此是关于 α 的一个不变子集。此外，对于任意正标量 s 和 t，满足 $s+t=1$，我们有

$$\alpha_u(s\cdot x + t\cdot y) = s\cdot uxu^* + t\cdot uyu^* + (s+t)\cdot\delta(u)u^* = s\cdot\alpha_u(x) + t\cdot\alpha_u(y), \quad \forall x,y \in E(\mathcal{M},\tau).$$

因此，对于每个 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$，映射 α_u 都是仿射映射，这意味着 $\mathrm{conv}(K_{00})$ 也是关于 α的不变子集。现在，等式 $\alpha_u(x) - \alpha_u(y) = u(x-y)u^*$， x， $y \in E(\mathcal{M},\tau)$ 意味着每个 α_u， $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$，都是 $E(\mathcal{M},\tau)$上的等距映射。因此， K 是关于 α的不变子集。

此外， α_U 是等距映射这一事实，结合 [25, 第五章，引理 10。7]表明，族$\{\alpha_u : u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}$ 是由仿射映射构成的非压缩族。显然，α_u 对每个 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 都是弱连续的。

另一方面，由命题4.5， K 是弱紧的。因此，集合 K 和族$\{\alpha_u : u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}$ 满足 Ryll-Nardzewski 不动点定理 [25, 第五章，定理 10。8]。因此，存在一点 $a \in K$ 相对于 α是不动点，也就是说，我们有

$$a = \alpha_u(a) = uau^* + \delta(u)u^*$$

对每个 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$，且 $\|a\|_E \le \|\delta\|_{\mathcal{A}\to E}$。因此，对每个 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$， $au = ua + \delta(u)$。于是，$\delta(u) = [a,u]$ 对每个 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{A})$。由于 $\mathcal{A}$ 中的每个元素都是 $\mathrm{U}(\mathcal{A})$ 中四个元素的线性组合 [51, 定理 4.1。7], 我们得到 $\delta = \delta_a$ 在 $\mathcal{A}$ 上。□

若对称函数空间 $E(\mathcal{M},\tau)$ 具有 Levi 性质 [1, 定义 7]，，或具有单调完备范数，或满足性质 (B) [58, 第 X 章。4]，，则称其具有上述性质：对 $E(\mathcal{M},\tau)^+$ 中的每个向上有向网 $\{x_\beta\}$，若满足 $\sup_\beta \|x_\beta\|_E < \infty$，则存在元素 $x \in E(\mathcal{M},\tau)^+$，使得 $x_\beta \uparrow x$ 属于 $E(\mathcal{M},\tau)$。众所周知，若范数具有 Levi 性质，则必然也具有弱 Fatou 性质 [1, p.89]，，即存在常数 $K \ge 1$，使得

$$0 \le x_\beta \uparrow x \Rightarrow \|x\|_E \le K\lim_\beta \|x_\beta\|_E.$$

注 4.7. 对于对称函数空间 $E(0,\infty)$，它具有 *Levi* 性质，当且仅当它具有一个具有 *Fatou* 性质的等价对称范数。($\Leftarrow$) 方向显然。对于($\Rightarrow$) 方向，只需注意，对于任意 $0 \le x \in E(0,\infty)$，存在一个网$(x_\beta)_\beta \subset (L_1 \cap L_\infty)(0,\infty)$ 使得 $x_\beta \uparrow x$ *[32, 命题 1(vii)]*，，因此，

$$\frac{1}{K}\|x\|_E \le \sup_\beta \|x_\beta\|_E \overset{(2)}{=} \sup_\beta \|x_\beta\|_{E^{\times\times}} = \|x\|_{E^{\times\times}} \overset{[32,\ \text{Section } 5.3]}{\le} \|x\|_E,$$

并且$(E(0,\infty)^{\times\times}, \|\cdot\|_{E^{\times\times}})$ 具有 *Fatou* 性质（见 *[30, 定理 4.1]* 和 *[60]*）。

回顾一下， $E(0,\infty)$ 具有 *Fatou* 性质，当且仅当 $E(0,\infty)$ 与 $E(0,\infty)^{\times\times}$等距。由此可得， $E(0,\infty)$ 具有 *Levi* 性质，当且仅当 $E(0,\infty) = E(0,\infty)^{\times\times}$（在等价范数意义下）。

以下定理是本文的主要结果，它解决了多篇论文中考虑的问题，例如参见 [11, 12, 14, 43, 45, 47, 55, 83] 及其中的参考文献。

定理 *4.8.* 设 M 是带有忠实正规半有限迹 τ 的冯·诺依曼代数，并设 A 是 M 的一个 C^* 子代数。若 $E(M,\tau)$ 是由 τ 紧算子构成的强对称空间（即，$E(M,\tau)\subset S_0(M,\tau)$[7]），且具有 *Fatou* 性质（分别地，*Levi* 性质），则每个导子 $\delta: A\to E(M,\tau)$ 都是内的。也就是说，存在一个元素 $a\in \overline{conv\{\delta(u)u^*\mid u\in U(A)\}}^{t_\tau}\subset E(M,\tau)$，满足 $\|a\|_E\le \|\delta\|_{A\to E}$（$\|a\|_E\le c\|\delta\|_{A\to E}$，其中某个常数 c 仅取决于 $E(0,\infty)$），使得 $\delta=\delta_a$ 在 A 上成立。

证明。不失一般性，我们可以假设载体投影 $c_E=\mathbf{1}$ 并假设 $\mathcal{A}$ 是含幺的（例如参见 [11, 命题 3。4]）。根据备注 4.7，我们可以假设$E(\mathcal{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质。

由于 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质，且 $E(\mathrm{M},\tau)\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$，因此可得 $E(\mathrm{M},\tau)^{\times\times}\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$。根据命题 3.5，存在一个对称的 KB-函数空间 $F(0,\infty)\subsetneq (L_1+C_0)(0,\infty)$，使得

$$E(\mathcal{M},\tau)\subset F(\mathcal{M},\tau)\subset S_0(\mathcal{M},\tau).$$

不失一般性，我们可以通过将 $F(0,\infty)$ 替换为$L_2(0,\infty)+F(0,\infty)$，假设 $L_2(0,\infty)\subset F(0,\infty)$。特别地，$F(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty)\supsetneq L_1(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty)$。根据注 4.4，$F(0,\infty)^\times\subset S_0(0,\infty)$，因此，$F(\mathrm{M},\tau)^\times\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$。

注意到 $\delta(\mathcal{A})\subset E(\mathcal{M},\tau)\subset F(\mathcal{M},\tau)$。由引理 4.6，存在一个元素

$$a\in \overline{\mathrm{conv}\{\delta(u)u^*\mid u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})\}}^{\|\cdot\|_F}$$

使得 $\delta=\delta_a$ 在 A 上。因此，存在一个序列

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset \mathrm{conv}\{\delta(u)u^*\mid u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})\}$$

使得 $\|x_n-a\|_F\to_n 0$。由于 $F(\mathrm{M},\tau)$ 是一个对称空间，由 [32, 命题20] 可得 $x_n\to_{t_\tau} a$ 当 $n\to\infty$时。

由 Ringrose 定理 [73], 可知，δ: $(\mathrm{A},\|\cdot\|_\infty)\to(E(\mathrm{M},\tau),\|\cdot\|_E)$ 是一个有界映射。由于 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质，因此半径为 $\|\delta\|_{A\to E}$ 的闭球 $(E(\mathrm{M},\tau),\|\cdot\|_E)$ 关于局部测度拓扑是闭的（见第 2.2 节）。注意到每个元素 x_n, $n\ge 1$ 都属于 $E(\mathrm{M},\tau)$ 中半径为 $\|\delta\|_{A\to E}$ 的球，且 $x_n\to a$ 在局部测度拓扑下，故我们得出 $a\in E(\mathrm{M},\tau)$ 满足 $\|a\|_E\le\|\delta\|_{A\to E}$。□

回顾一下，具有法图／列维性质的对称函数空间会生成具有法图／列维性质的非交换强对称空间（参见例如 [61, 命题 2.a.8]和 [32, 定理 54]）。由定理 4.8可得以下推论。

推论 4.9。假设 $E(0,\infty)\subset S_0(0,\infty)$ 是具有 *Fatou* 性质（分别地，*Levi* 性质）的对称函数空间。那么，导子

$$\delta:\mathcal{A}\to E(\mathcal{M},\tau)$$

对于任意带有半有限忠实正规迹 τ且具有 M 的一个 C^*-子代数 A 的冯·诺依曼代数 M，必然是内导子。也就是说，存在元素 $a\in \overline{conv\{\delta(u)u^*\mid u\in U(A)\}}^{t_\tau}\subset E(M,\tau)$，使得 $\|a\|_E\le\|\delta\|_{A\to E}$ ($\|a\|_E\le c\|\delta\|_{A\to E}$，其中常数 c 仅取决于 $E(0,\infty)$，且在 A 上 $\delta=\delta_a$。

推论4.9 为 Bunce 和 Paschke 提出的导子问题提供了另一种证明 [18], ，不同于 [5, 70] 中涉及 L冯·诺依曼代数预对偶的嵌入性。除此之外，我们还给出了新的信息：导子的实现元 a 可以在 L_1凸包的测度拓扑（或任何弱于 L_1拓扑的对称范数拓扑）闭包中找到，即$\{\delta(u)u^*\mid u\in\mathcal{U}(A)\}$；这在不动点理论和导子理论中似乎更为自然。

[7]如果 $\tau(\mathbf{1})<\infty$，则对于任何从属于 M 的对称空间 $E(\mathrm{M},\tau)$，$E(\mathrm{M},\tau)\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$ 均成立。

推论 4.10。设$\mathcal{M}$ 是一个半有限冯·诺伊曼代数，且$\mathcal{A}$ 是$\mathcal{M}$的 C^*-子代数。那么，从$\mathcal{A}$ 到$\mathcal{M}_*$ 的任意导子都是内导子，并且存在一个元素 $a \in$ 凸包$\{\delta(u)u^* \mid u \in \mathcal{U}(A)\}^{t_\tau}$，满足$\|a\|_{L_1} \leq \overline{\|\delta\|_{\mathcal{A}\to L_1}}$，使得 $\delta = \delta_a$ 在$\mathcal{A}$上成立。

以下推论显著推广了 [11,43,55] 关于映入对称理想的导子的结果。另一方面，它表明 [12, 定理 13] 即使对于 C^*-子代数而非冯·诺依曼子代数也成立。

推论 4.11。 设$\mathcal{M}$是配备半有限忠实正规迹 τ 的半有限冯·诺伊曼代数，且$\mathcal{A}$是$\mathcal{M}$的 C^*-子代数。设 $E(\mathcal{M}\ \tau)$是 $C_0(\mathcal{M}\ \tau)$的一个具有强对称范数和 *Levi* 性质的理想。那么，从$\mathcal{A}$到 $E(\mathcal{M}\ \tau)$的每个导子都是内的。

对于配备忠实正规迹态的冯·诺依曼代数$\mathcal{M}$， $\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M}\ \tau)$ 且 $\mathcal{M}$ 具有法图／列维性质。因此，我们得到定理 4.8的如下推论。

推论 4.12. *[19,* 节 *5] [80]* 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备忠实正规迹态的冯·诺依曼代数，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个 C^*-子代数。那么，从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的每个导子都是内导子。

5. 外导子

本节中，我们给出若干取值于不满足 Levi 性质的对称空间中的外导子的例子。

对冯·诺依曼代数的理想上的导子的研究由 Johnson 和 Parrott 开创 [48]，他们证明了从 $B(\mathcal{H})$ 的阿贝尔／真无限冯·诺依曼子代数到代数 $K(\mathcal{H})$ 中所有紧算子构成的代数$\mathcal{H}$ 上的每个导子都是内导子。这一结果可视为问题 1 在 $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ 中对称赋范理想情形下的先声。此后，人们对取值于冯·诺依曼代数理想中的导子的内性进行了广泛研究 [11,12,15,16,20,40,43,55,72]。

回顾一下，定理 4.8 中不能去掉法图／列维性质，这一点已由 [77, 例 4.18], [11, 定理 38] 和 [44, 定理 4.21] 证明。下面的定理表明，当理想 $E(\mathcal{M}\ \tau) \cap \mathcal{M}$ 不具有 $E(\mathcal{M}\ \tau) \cap \mathcal{M}$ Levi 性质时，存在取值于该空间的外导子。

定理 5.1。 设$\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹 τ的非有限因子，并设 $E(\mathcal{M}\ \tau)$是从属于$\mathcal{M}$的对称空间，且 $E(\mathcal{M}\ \tau)\cap\mathcal{M}$不具有 *Levi* 性质。那么，存在从 C^*-代数 $C_0(\mathcal{M}\ \tau)$到 $E(\mathcal{M}\ \tau)\cap\mathcal{M}$的外导子。

证明。 由于 M 是一个因子，可知它要么是无原子的，要么是原子型且所有原子的迹都相等。因此，

$$E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}$$

是一个具有 Fatou 性质的全对称空间（例如参见[29], [34, 第四章，定理 5.4], [32, 注 5 和 6]）。因此，

$$E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times} \cap \mathcal{M},$$

赋予范数 $\|x\|_{E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}\cap\mathcal{M}} = \max\{\|x\|_{E^{\times\times}}, \|x\|_\infty\}$ $x \in E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times}\cap\mathrm{M}$ 后，具有 Fatou 性质。另一方面， $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}$ 不具有 Levi 性质，这意味着存在一个由 $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}$ 中正元素组成的网 $(x_i)_{i\in I}$，该网递增至 $0 \leq x \in \mathrm{M}$，且 $\sup \|x_i\|_E < \infty$，但 $x \notin E(\mathrm{M}\ \tau)$。根据 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times}$ 和 $E(\mathrm{M}\ \tau)$ 的 Fatou 性质，以及 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times}$ [32, 第 5 节， $x \in E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times}\cap\mathrm{M}$。

由于 $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M}$不具有Levi 性质，因此可得 $E(\mathrm{M}\ \tau)\cap\mathrm{M} \neq \mathrm{M}$。因此，$E(\mathrm{M}\ \tau) \subset S_0(\mathrm{M}\ \tau)$。存在两种可能的情况：

(1) 如果 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times} \subset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$，那么我们考虑 δ_x。

W我们声称， δ_x 是从 $C_0(\mathrm{M}\ \tau)$到 $E(\mathrm{M}\ \tau)$的非内导子， $\cap\mathrm{M}$。回想一下， t

$$\|z\|_E \overset{(2)}{=} \|z\|_{E^{\times\times}},\ \forall z \in \mathcal{F}(\mathcal{M},\tau).$$

对于每个 $y \in C_0(\mathrm{M}\ \tau)$，投影 $e^{|y|}(\varepsilon,\ \infty)$和 $e^{|y|}(\varepsilon_1,\ \infty)$对于每个 $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$都是 τ-有限的。因此，我们有

$$\left\|xye^{|y|}(\varepsilon,\infty) - xye^{|y|}(\varepsilon_1,\infty)\right\|_E \leq \left\|xye^{|y|}(\varepsilon_1,\varepsilon]\right\|_E = \left\|xye^{|y|}(\varepsilon_1,\varepsilon]\right\|_{E^{\times\times}} \leq \varepsilon \|x\|_{E^{\times\times}},$$

这表明 $\left(xye^{|y|}(\frac{1}{n},\infty)\right)_{n\geq 1}$是 $E(\mathrm{M}\ \tau)$ 中的柯西序列。另一方面，$xye^{|y|}(\frac{1}{n},\infty) \to xy$依测度收敛，这意味着 $xy \in E(\mathrm{M}\ \tau)$。类似地，$yx \in E(\mathrm{M}\ \tau)$，因此 $\delta_x(C_0(\mathrm{M}\ \tau)) \subset E(\mathrm{M}\ \tau)$。此外，$x \in \mathrm{M}$ 且 $C_0(\mathrm{M}\ \tau) \subset \mathrm{M}$ 意味着

$$\delta_x(C_0(\mathcal{M},\tau)) \subset E(\mathcal{M},\tau) \cap \mathcal{M}.$$

最后，若存在算子 $x' \in E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M}$，使得 $\delta_x = \delta_{x'}$，则

$$x - x' \text{ commutes with all elements in } C_0(\mathcal{M},\tau).$$

注意到 $\mathcal{M}$ 是 $C_0(\mathcal{M}\ \tau)$ 在弱算子拓扑下的闭包（例如参见 [62, 定义 2.6。8]），我们得到

$$x - x' \text{ commutes with all elements in } \mathcal{M}.$$

然而，M 是一个因子，因此 $x - x' \in \mathbb{C}\mathbf{1}$，这与假设 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times} \subset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$ 矛盾。

(2) 若 $E(\mathrm{M}\ \tau)^{\times\times} \supset \mathrm{M}$，则由引理 3.4 可得 $E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M} \supset C_0(\mathrm{M}\ \tau)$。回顾一下，$E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M} \neq \mathrm{M}$。我们有 $E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M} = C_0(\mathrm{M}\ \tau)$。现在，外导子的存在性可由定理 3.8] 立即得出。□

推论 5.2。设 $E(0,\infty)$是一个对称函数空间。若 $E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$不具有 *Levi* 性质，则对于任意配备半有限忠实正规迹τ的无限因子 $\mathcal{M}$，都存在从 C^*-代数 $C_0(\mathcal{M}\ \tau)$到 $E(\mathcal{M}\ \tau) \cap M$ 的外导子。

证明。根据定理 5.1，只需证明 $E(\mathcal{M}\ \tau) \cap \mathcal{M}$不具有 Levi 性质。由于 $E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$ 不具有 Levi 性质，因此（例如参见注 4.7）

$$E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty) \neq (E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty))^{\times\times} = E(0,\infty)^{\times\times} \cap L_\infty(0,\infty).$$

也就是说，存在 $0 \leq x = \mu(x) \in E(0,\infty)^{\times\times} \cap L_\infty(0,\infty)$，使得 $x \notin E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$。注意到

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n;x)\chi_{(n-1,n]} \leq \mu(x) \in E(0,\infty)^{\times\times} \cap L_\infty(0,\infty).$$

存在 $y \in \mathrm{M}$，使得

$$\mu(y) = \sum_{n\geq 1} \mu(n;x)\chi_{(n-1,n]} \leq \mu(x) \in E(0,\infty)^{\times\times} \cap L_\infty(0,\infty).$$

然而，我们有

$$\mu(y) \geq \mu\left(\mu(x) - \mu(x)\chi_{(0,1]}\right).$$

由于 $\mu(x)\chi_{(0,1]} \in E(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$（例如参见 [32, 第245] 页或 [60]），可得 $y \notin E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M}$。这表明，当 M 是半有限无穷（原子型或无原子）因子时，$E(\mathrm{M}\ \tau) \cap \mathrm{M}$ 不具有 Levi 性质，参见注 4.7。□

回忆一下，$S(0,\infty)$ 上的膨胀算子 σ_s, $s > 0$ 定义为 [60–62]

$$(\sigma_s)f(t) = f\left(\frac{t}{s}\right), \forall f \in S(0,\infty),\ s \in (0,\infty).$$

对于无界算子的情形，外导子的例子更为复杂。下面给出的结果或许是第一个取值于从属于有限冯·诺依曼代数的对称空间中的外导子实例。

例 5.3. 设 $\mathcal{M}$ 是由 $\oplus_{n\geq 1}\mathbb{M}_2$ 在弱算子拓扑下闭包得到的冯·诺依曼代数，并配备迹 $\tau := \oplus_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}_2$，，其中 Tr_2 是$\mathbb{M}_2$上的标准迹。设 $E(0,\ 1)$是一个不具有 *Levi* 性质的对称函数空间。那么，存在从 C^*-代数 $\mathcal{A} := \overline{\oplus\mathbb{M}_{2^n}}^{\|\cdot\|^\infty}$到 $E(\mathcal{M}\ \tau)$的外导子。

证明。缺乏 Levi 性质意味着 $E(0,1)$ 包含于 $E(0,1) \neq E(0,1)^{\times\times}$ (参见例如注4.7)，且存在一个正函数 $a \in E(0,1)^{\times\times}$，但 $a \notin E(0,1)$。定义

$$b := \sum_{n\geq 1} \mu\left(\frac{1}{2^{n-1}}; a\right) \chi_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})}.$$

我们有

$$b \leq a \leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(\frac{1}{2^n}; a\right) \chi_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})} = \sigma_2(b).$$

因此，$b \in E(0,1)^{\times\times}$ 但 $b \notin E(0,1)$。

现在，我们通过如下方式定义一个自伴元 y

$$z := \sum_{n\geq 1} a_n \left(p_{n1} - p_{n2}\right), \; a_n = \mu\left(\frac{1}{2^n}; a\right), \; n \geq 1,$$

其中，p_{n1} 和 p_{n2} 是 n 号直和项$\mathbb{M}_2$中的互相正交的非平凡投影，并且该级数在测度拓扑下取值。特别地，$\mu(z) = \sigma_2(b)$，因此，$z \in E(\mathcal{M},\tau)^{\times\times}$但 $z \notin E(\mathcal{M},\tau)$。

我们断言，$\delta_z(A) \subset E(\mathcal{M},\tau)_b$，即 $\mathcal{M}$ 在 $E(\mathcal{M},\tau)$ 中的闭包。事实上，由于 δ_z的像包含于 $E^{\times\times}(\mathcal{M},\tau)$（由 $E(0,1)^{\times\times}$生成），根据 Ringrose 定理[73]，δ_z从 $(A, \|\cdot\|_\infty)$ 到 $(E^{\times\times}(\mathcal{M},\tau), \|\cdot\|_{E^{\times\times}})$ 有界。设 p_n为第 n 个直和项 $\mathbb{M}_2$的单位元。对于任意元素 $y \in A$，我们在一致范数拓扑下有 $y_n := y\sum_{k=1}^n p_k \to y$。注意，$y_n z, z y_n \in \mathcal{M}$。因此，对于任意 $n > m$，我们有

$$\begin{aligned}
\|\delta_z(y_n) - \delta_z(y_m)\|_{E(\mathcal{M},\tau)} &= \|\mu(\delta_z(y_n) - \delta_z(y_m))\|_{E(0,1)} \\
&\overset{(2)}{=} \|\mu(\delta_z(y_n) - \delta_z(y_m))\|_{E(0,1)^{\times\times}} \\
&= \|\delta_z(y_n) - \delta_z(y_m)\|_{E^{\times\times}(\mathcal{M},\tau)} \\
&\leq 2\,\|y_n - y_m\|_\infty \|z\|_{E^{\times\times}(\mathcal{M},\tau)} \to 0 \text{ as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

因此，$(\delta_z(y_n))_{n\geq 1}$是 $E(\mathcal{M},\tau)$中的柯西序列，这意味着$(\delta_z(y_n))_{n\geq 1}$收敛到 $E(\mathcal{M},\tau)$中的某个元素（特别地，$(\delta_z(y_n))_{n\geq 1}$是 t_τ-收敛的）。另一方面，当 $n \to \infty$时，$\delta_z(y_n) \to_{t_\tau} \delta_z(y)$。因此，$\|\delta_z(y_n)_{n\geq 1} - \delta_z(y)\|_{E(\mathcal{M},\tau)} \to_n 0$。于是，对于所有 $y \in A$，$\delta_z(y) \in E(\mathcal{M},\tau)$。

假设存在 $z_1 \in E(\mathcal{M},\tau)$使得 $\delta_{z_1} = \delta_z$，即 $z_1 - z$与A可交换。也就是说，对于某个复数序列$(b_n)_{n\geq 1}$，有 $z_1 - z = \sum_{n\geq 1} b_n p_n$，其中该级数在测度拓扑下收敛。然而，

$$\begin{aligned}
E(0,1) \ni \mu(z_1) = \mu\left(z + \sum_{n\geq 1} b_n p_n\right) &= \mu\left(\sum_{n\geq 1} a_n \left(p_{n1} - p_{n2}\right) + \sum_{n\geq 1} b_n p_n\right) \\
&= \mu\left(\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n) p_{n1} - (a_n - b_n) p_{n2}\right) \\
&\geq \mu\left(\sum_{n\geq 1} \max\{|a_n + b_n|, |a_n - b_n|\} p_{n1}\right) \\
&\geq \mu\left(\sum_{n\geq 1} a_n p_{n1}\right) = \mu\left(\sum_{n\geq 1} a_n p_{n2}\right) = \sigma_{1/2}\mu(z),
\end{aligned}$$

这意味着 $z \in E(\mathcal{M},\tau)$ [60, 定理 II.4。4]这与假设矛盾。□

以下结果可直接由推论4.9、5.2 和例5.3得出。

推论5.4。 对于给定的对称函数空间 $E(0,\infty) \subset S_0(0,\infty)$，以下两个陈述等价：

(1) 对于任意配备半有限忠实正规迹 τ 的冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ ，以及 $\mathcal{M}$ 的任意 C^*-子代数 $\mathcal{A}$，导子 $\delta\colon \mathcal{A} \to E(\mathcal{M}\ \tau)$ 必为内导子；(2) $E(0,\infty)$ 具有 *Levi* 性质。

以下结果是推论4.9 和定理 5.1的直接推论。

推论 5.5. 设 C_E 是 $B(\mathcal{H})$中的紧算子对称理想。那么，以下两个陈述等价：

(1) 对于 $B(\mathcal{H})$的任意 C^*-子代数 $\mathcal{A}$，导子 $\delta\colon \mathcal{A} \to C_E$ 必为内导子；(2) C_E 的交换核心 ℓ_E 具有 *Levi* 性质。

参考文献

[1] Yu.A. Abramovich, C. Aliprantis，《正算子》，《巴拿赫空间几何手册》第 I 卷，85–122，North-Holland，阿姆斯特丹，2001年。[2] C. Akemann，《算子代数的对偶空间》，《美国数学会汇刊》126 (1967)，286–302。[3] C. Akemann，P. Dodds，J. Gamlen，《 C^*-代数对偶空间中的弱紧性》，《泛函分析杂志》10 (1972)，446–450。[4] C. Aliprantis，O. Burkinshaw，《正算子》，Academic Press，纽约，1985年。[5] U. Bader，T. Gelander，N. Monod，《 L^1 空间的不动点定理》，《数学发明》189 (2012)，143–148。[6] C. Bennett，R. Sharpley，《算子插值》，Academic Press，波士顿，1988年。[7] A. Ber，V. Chilin，G. Levitina，F. Sukochev，D. Zanin，《无界算子代数上的导子》，即将出版。[8] A. Ber，V. Chilin，F. Sukochev，《交换正则代数上的非平凡导子》，Extracta Math. 21(2) (2006)，107–147。[9] A. Ber，V. Chilin，F. Sukochev，《局部可测算子代数上导子的连续性》，Integr. Equ. Oper. Theory 75 (2013)，527–557。[10] A. Ber，V. Chilin，F. Sukochev，《局部可测算子代数上的连续导子都是内导子》，Proc. London Math. Soc. 109(1) (2014)，65–89。[11] A. Ber，J. Huang，G. Levitina，F. Sukochev，《取值于半有限冯·诺依曼代数理想中的导子》，《泛函分析杂志》272(12) (2017)，4984–4997。[12] A. Ber，J. Huang，G. Levitina，F. Sukochev，《取值于从属于半有限冯·诺依曼代数的 τ-紧算子理想中的导子》，《数学物理通讯》390(2) (2022)，577–616。[13] A. Ber，K. Kudaybergenov，F. Sukochev，《与 III_1型代数相关的 Murray–von Neumann 代数上的导子都是内导子》，《纯粹与应用数学杂志》791 (2022)，283–301。[14] A. Ber，F. Sukochev，《 τ-紧算子的巴拿赫理想中的导子》，arXiv:1204.4052v1，12页。[15] A. Ber，F. Sukochev，《 W^*-因子中的交换子估计》，《美国数学会汇刊》364(10) (2012)，5571–5587。[16] A. Ber，F. Sukochev，《 W^*-代数中的交换子估计》，《泛函分析杂志》262(2) (2012)，537–568。[17] A. Buhvalov，A. Veksler，V. Ge˘ıler，《赋范格》，（俄文）《数学分析》第 18 卷，第 125–184 页，苏联科学院，全苏科学技术信息研究所，莫斯科，1980年。[18] J. Bunce，W. Paschke，《 C^*-代数及其双对偶上的导子》，《泛函分析杂志》37 (1980)，235–247。[19] E. Christensen，《导子的延拓》，《泛函分析杂志》27 (1978)，234–247。[20] E. Christensen，《与冯·诺依曼代数相关的广义紧算子 C^*-代数》，《不定度量空间中的算子、散射理论及其他主题》（布加勒斯特，1985），51–58，Oper. Theory Adv. Appl., 24，Birkh¨auser，巴塞尔，1987年。[21] E. Christensen，E. Effros，A. Sinclair，《完全有界多重线性映射与 C^*-代数上同调》，《数学发明》90 (1987)，279–296。[22] E. Christensen，F. Pop，A. Sinclair，R. Smith，《具有性质 Γ的因子的 Hochschild 上同调》，《数学年刊》158 (2003)，635–659。[23] A. Connes，《内射因子的分类》，《数学年刊》104 (1976)，73–115。[24] A. Connes，《论算子代数的上同调》，《泛函分析杂志》28 (1978)，248-253。[25] J. Conway，《泛函分析教程》，施普林格出版社，纽约，1985年。[26] K. Davidson，《Nest代数》，Longman Scientific & Technical，Harlow，1988年。[27] W. Davis，T. Figiel，W. Johnson，A. Pe lczy´nski，《弱紧算子的分解》，《泛函分析杂志》17 (1974)，311–327。[28] P. Dodds，T. Dodds，B. de Pagter，《对称算子空间的弱紧子集》，《剑桥哲学会数学论文集》110 (1991)，169–182。[29] P. Dodds，T. Dodds，B. de Pagter，《非交换 K ¨othe 对偶性》，《美国数学会汇刊》339 (1993)，717–750。

[30] P. Dodds，T. Dodds，F. Sukochev，S. Tikhonov，《非交换 Yosida-Hewitt 定理与在测度拓扑下局部闭的可测算子凸集》，Positivity 9 (2005)，457–484。[31] P. Dodds，B. de Pagter，《非交换 Yosida–Hewitt 分解再探》，《美国数学会汇刊》364(12) (2012)，6425–6457。[32] P. Dodds，B. de Pagter，《赋范 K ¨othe 空间：非交换视角》，Indag. Math. 25 (2014)，206–249。[33] P. Dodds，B. de Pagter，F. Sukochev，《可测算子对称空间中具有一致绝对连续范数的集合》，《美国数学会汇刊》368 (2016)，6，4315–4355。[34] P. Dodds，B. de Pagter，F. Sukochev，《非交换积分理论》，即将出版。[35] P. Dodds，F. Sukochev，G. Schluchtermann，《可测空间对称空间中的弱紧性判据》，《剑桥哲学会数学论文集》131 (2001)，363–384。[36] G. Elliott，《具有外导子的某些 C^*-代数》，Rocky Mountain J. Math. 3 (1973)，501–506。[37] G. Elliott，《具有外导子的某些 C^*-代数 II》，Canad. J. Math. 26 (1974)，185–189。[38] G. Elliott，《具有外导子的某些 C^*-代数 III》，Ann. Math. 106 (1977)，121–143。[39] T. Fack，H. Kosaki，《 τ-可测算子的广义 s-数》，《太平洋数学杂志》123 (1986)，269–300。[40] A. Galatan，S. Popa，《II_1 因子的光滑双模与上同调》，J. Inst. Math. Jussieu 16(1) (2017)，155–187。[41] A. Grothendieck，《关于从 C型空间K出发的弱紧线性映射》，Canad. J. Math. 5 (1953)，129–173。[42] U. Haagerup，《所有核 C^*-代数都是可容的》，《数学发明》74(2) (1983)，305–319。[43] T. Hoover，《导子、同态与算子理想》，Proc. Amer. Math. Soc. 62(2) (1977)，293–298。[44] J. Huang，《取值于半有限冯·诺依曼代数理想中的导子》，博士论文，新南威尔士大学，2019年。[45] J. Huang，G. Levitina，F. Sukochev，《 M-嵌入的对称算子空间与导子问题》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 169(3) (2020)，607–622。[46] J. Huang，M. Pliev，F. Sukochev，《非交换对称空间上的（非）Dunford–Pettis 算子》，《泛函分析杂志》282 (2022)，109443。[47] B. Johnson，《Banach 代数中的上同调》，美国数学会回忆录，第 127 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI（1972）。[48] B. Johnson，S. Parrott，《模紧算子集与冯·诺依曼代数交换的算子》，《泛函分析杂志》11 (1972)，39–61。[49] B. Johnson，R. Kadison，J. Ringrose，《算子代数的上同调 III》，Bull. Soc. Mat. France 100 (1972)，73–96。[50] R. Kadison，《算子代数的导子》，《数学年刊》83 (1966)，280–293。[51] R. Kadison，J. Ringrose，《算子代数理论基础 I》，Academic Press，奥兰多，1983年。[52] R. Kadison，J. Ringrose，《算子代数理论基础 II》，Academic Press，奥兰多，1986年。[53] R. Kadison，Z. Liu，《关于 Murray–von Neumann 代数导子的一则注记》，Proc. Natl. Acad. Sci. USA 11 (2014)，2087–2093。[54] R. Kadison，Z. Liu，《Murray–von Neumann 代数的导子》，Math. Scand. 115 (2014)，206–228。[55] V. Kaftal，G. Weiss，《相对于半有限冯·诺依曼代数的紧导子》，《泛函分析杂志》62 (1985)，202–220。[56] N. Kalton，F. Sukochev，《算子的对称范数与空间》，《纯粹与应用数学杂志》621 (2008)，81–121。[57] A. Kaminska，M. Masty lo，《巴拿赫格中的 Schur 性质与（弱）Dunford–Pettis 性质》，J. Austral. Math. Soc. 73 (2002)，251–278。[58] L. Kantorovich，G. Akilov，《泛函分析》，Nauka，莫斯科，1984年。[59] A. Kaminska，M. Masty lo，《对称空间的 Dunford–Pettis 性质》，Canad. J. Math. 52 (2000)，789–803。[60] S. Krein，Yu. Petunin，E. Semenov，《线性算子插值》，《数学专著译丛》第54卷，美国数学会，普罗维登斯，R.I.，1982年。[61] J. Lindenstrauss，L. Tzafriri，《经典 Banach 空间 II：函数空间》，《数学及其边缘领域成果》97，施普林格出版社，柏林—纽约，1979年。[62] S. Lord，F. Sukochev，D. Zanin，《奇异迹：理论与应用》，德格鲁伊特出版社数学研究丛书第46卷，德格鲁伊特出版社，柏林，2013年。[63] V. Losert，《群代数的导子问题》，《数学年刊》168 (2008)，221–246。[64] G.Ya. Lozanovskiˇi，《可测函数的巴拿赫格映射》，Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5(192) (1978)，84–86（俄文）。[65] W.A.J. Luxemburg，《巴拿赫函数空间》，学位论文，代尔夫特理工学院，代尔夫特，1955年。70页。[66] P. Meyer-Nieberg，《巴拿赫格》，施普林格出版社，柏林—海德堡—纽约，1991年。[67] E. Nelson，《非交换积分札记》，《泛函分析杂志》15 (1974)，103–116。[68] S.Ya. Novikov，《对称空间中的函数序列》，萨马拉大学出版社，萨马拉，2008年（俄文）。[69] G. Pisier，《相似问题与完全有界映射》，施普林格出版社，柏林，2001年。[70] H. Pfitzner，《 L-嵌入巴拿赫空间与测度拓扑》，Israel J. Math. 205 (2015)，421–451。

[71] S. Popa, 冯·诺依曼代数的紧算子集模交换子，《泛函分析杂志》71 (1987年), 393–408. [72] S. Popa, F. R˘adulescu, 从冯·诺依曼代数到半有限代数紧理想空间的导子，《杜克数学杂志》57(2) (1988年), 485–518. [73] J. Ringrose, 算子代数导子的自动连续性，《伦敦数学会杂志》5 (1972年), 432–438. [74] V. Runde, B(ℓ^p) 从不具可容性，《美国数学会杂志》23(4) (2010年), 1175–1185. [75] S. Sakai, 算子代数上的弱紧算子，《太平洋数学杂志》14 (1964年), 659–664. [76] S. Sakai, 导子 W^*-代数，《数学年刊》83 (1966年), 273–279. [77] S. Sakai, C^*-代数与 W^*-代数，1971年版重印，数学经典丛书，施普林格出版社，柏林，1998年，xii+256 页。[78] I. Segal, 抽象积分的非交换扩张，《数学年刊》57 (1953年), 401–457. [79] E. Semenov, F. Sukochev, 对称算子空间的和与交，《数学分析及其应用杂志》，414 (2014 年), 742–755. [80] A. Sinclair, R. Smith, 冯·诺依曼代数的*Hochschild*上同调，伦敦数学会讲义系列203，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[81] M. Takesaki, 算子代数理论 *I*，施普林格出版社，纽约，1979年。[82] M. Takesaki, 算子代数理论 *II*，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，2003年。[83] M. Weigt, 导子

τ

195, -可

273 2009

测算子，载于《算子理论：进展与应用》，第–286卷，比克豪泽出版社，巴塞尔，。[84] R. Whitley, *Krein–Smulian* 定理，《美国数学会会刊》97(2) (1986年), 376–377.

哈尔滨工业大学数学研究院，哈尔滨工业大学，中国哈尔滨市，邮编 150001电子邮箱地址：jinghao.huang@hit.edu.cn

新南威尔士大学数学与统计学院，澳大利亚肯辛顿，邮编 2052a电子邮箱地址： f.sukochev@unsw.edu.au