arXiv:2301.03877v1 [math.FA] 10 Jan 2023

有界线性算子及（α,β）-正规算子的数值半径不等式

Pintu Bhunia

Abstract. 通过推导 T的 α-范数上界（其定义为 $\|T\|_\alpha$ =sup $\left\{\sqrt{\alpha}|\langle Tx, x\rangle|^2+(1-\alpha)\|Tx\|^2\colon\ x\in\mathcal{H}, \|x\|=1\right\}$ for $0\leq\alpha\leq 1$），我们得到了定义在复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的有界线性算子 T 的数值半径 $w(T)$的各种上界。进一步，我们证明

$$w(T) \leq \sqrt{\left(\min_{\alpha\in[0,1]}\||\alpha|T|+(1-\alpha)|T^*|\|\right)\|T\|} \leq \|T\|.$$

对于 $0\leq\alpha\leq 1\leq\beta$，若算子 T满足 $\alpha^2T^*T\leq TT^*\leq\beta^2T^*T$，则称其为（$\alpha,\beta$）-正规算子。注意，对于适当的 α 和 β取值，每个可逆算子都是（α,β）-正规算子。作为关于（α,β）-正规算子 T的数值半径下界的其他结果之一，我们证明

$$\begin{aligned} w(T) &\geq \sqrt{\max\left\{1+\alpha^2, 1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4}+\frac{\||\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2}} \\ &\geq \max\left\{\sqrt{1+\alpha^2}, \sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}}\right\}\frac{\|T\|}{2} \\ &> \frac{\|T\|}{2}, \end{aligned}$$

其中， $\Re(T)$ 和 $\Im(T)$ 分别是 T 的实部和虚部。

1. 引言

令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的 C^*-代数，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 令 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。记 $|T|=(T^*T)^{1/2}$和 $|T^*|=(TT^*)^{1/2}$，其中 T^*表示 T.的伴随。T的数值半径记为 $w(T)$，定义如下

$$w(T)=\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in\mathcal{H}, \|x\|=1\}.$$

2020年数学主题分类。47A12、47A30、15A60。关键词和短语。数值半径、算子范数、(α,β)-正规算子、有界线性算子。作者谨向 Kallol Paul 教授致谢，感谢他对本文提出的宝贵意见。作者还感谢印度政府 SERB 通过国家博士后奖学金（N-PDF，档案编号 PDF/2022/000325）提供经费支持，并由 Apoorva Khare 教授担任指导人。

注意，数值半径在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上定义了一个范数，且该范数与算子范数等价，并满足

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|, \text{ for every } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{1.1}$$

式（1.1）中的不等式及相关结果的多种改进，已在近期出版的一本书籍中进行了讨论[2]。此外，读者还可参阅论文[1, 6, 16] 及其中的参考文献。对于 $0 \leq \alpha \leq 1$， α-范数 T （见 [4, 5, 20]）定义如下

$$\|T\|_\alpha = \sup\left\{\sqrt{\alpha|\langle Tx, x\rangle|^2 + (1-\alpha)\|Tx\|^2} : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\right\}.$$

此 α-范数也是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的一个范数，并且满足

$$w(T) \leq \|T\|_\alpha \leq \|T\|, \text{ for every } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ and for all } \alpha \in [0,1]. \tag{1.2}$$

不等式（1.2）结合（1.1）可知， α-范数与算子范数和数值半径范数均等价。有关 α-范数的更多细节，读者可参阅[20]。接下来，我们将研究（α, β）-正规算子（见 [11]），其中 $0 \leq \alpha \leq 1 \leq \beta$. 若算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$满足 T $\alpha^2 T^*T \leq TT^* \leq \beta^2 T^*T.$，则称其为（$\alpha, \beta$）-正规算子。这等价于 $\alpha^2\langle T^*Tx, x\rangle \leq \langle TT^*x, x\rangle \leq \beta^2\langle T^*Tx, x\rangle$ 对所有 $x \in \mathcal{H}$均成立，也就是说，

$$\alpha\|Tx\| \leq \|T^*x\| \leq \beta\|Tx\| \text{ for all } x \in \mathcal{H}.$$

对于适当的 α、 β. 值，所有正规算子和次正规算子都是 (α, β)-正规算子。对于正规算子， $\alpha = \beta = 1$ ；对于次正规算子， $\beta = 1$.。此外，还存在既非正规也非次正规的算子。例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是一个 (α, β)-正规算子，其中 $\alpha = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 且 $\beta = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.。然而，该矩阵既非正规也非次正规。若 T 是一个 (α, β)-正规算子，则 T majorizes T^*，且 T^* majorizes T。根据 Douglas（ Mazorization 引理），若满足以下等价命题之一，则算子 $T \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}$） majorizes 算子 $S \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）：[12],

(i) Ran（T） $\subseteq Ran$（S），其中 Ran（T）（Ran（S））表示 T（S）的值域空间。(ii) 对某个 $\mu \geq 0.$， $TT^* \leq \mu^2 SS^*$

因此， T是（α, β）-正规算子，当且仅当 $Ran(T) = Ran(T^*)$。所以，对于适当的 α、 β取值，每个可逆算子都是（α, β）-正规算子。

本文推导了有界线性算子的 α-范数上界，并由此得到数值半径的界，改进了现有结果。此外，我们推导了（α, β）-正规算子数值半径的下界，改进了经典界$w(T) \geq \frac{\|T\|}{2}$.

2. α-范数与数值半径不等式

通过推导 α-范数的界，我们得到了有界线性算子数值半径的新上界。首先，我们回顾文献中的一些必要不等式

加藤 [15] 推广了柯西-施瓦茨不等式，即，

$$|\langle Tx,y\rangle|^2 \le \left\langle |T|^{2\alpha}x,x\right\rangle \left\langle |T^*|^{2(1-\alpha)}y,y\right\rangle \ \forall x,y\in\mathcal{H},\ \forall\alpha\in[0,1]. \tag{2.1}$$

特别地，对于 $\alpha=1/2$ （见 [13, 第 75-76] 页），

$$|\langle Tx,y\rangle| \le \langle |T|x,x\rangle^{1/2}\ \langle |T^*|y,y\rangle^{1/2}\ \forall x,y\in\mathcal{H}. \tag{2.2}$$

在 [18, 定理 1], 中，Kittaneh 推广了加藤不等式，内容如下：若 f,g: $[0,\infty]\to[0,\infty]$ 是满足 $f(t)g(t)=t,\ \forall t\ge 0$的连续函数，则

$$|\langle Tx,y\rangle|^2 \le \left\langle f^2(|T|)x,x\right\rangle \left\langle g^2(|T^*|)y,y\right\rangle \ \forall x,y\in\mathcal{H}. \tag{2.3}$$

接下来，我们回顾 H¨older–McCarthy 不等式（见 [21, 第 20] 页），该不等式指出，若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为正，则

$$\langle Tx,x\rangle^r \le \langle T^rx,x\rangle \quad \forall r\ge 1\ \forall x\in\mathcal{H},\|x\|=1. \tag{2.4}$$

不等式（2.4）在 $0\le r\le 1$ 时反向成立。 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的笛卡尔分解为 $T=\Re(T)+i\Im(T)$，其中 $\Re(T)=\frac{1}{2}(T+T^*)$ 以及 $\Im(T)=\frac{1}{2i}(T-T^*)$。现在，我们可以证明第一个结果了。

定理 2.1. 若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\|T\|_\alpha^2 \le \left\|\frac{\alpha}{4}\left(f^4(|T|)+g^4(|T^*|)\right)+(1-\alpha)|T|^2\right\| + \frac{\alpha}{2}\left\|\Re\left(f^2(|T|)g^2(|T^*|)\right)\right\|,$$

其中 f 和 g 如 (2.3)所示。

证明。 设 $x\in\mathcal{H}$ 满足 $\|x\|=1$. 那么，由（2.3）可得

$$\begin{aligned}
|\langle Tx,x\rangle|^2 &\le \left\langle f^2(|T|)x,x\right\rangle\left\langle g^2(|T^*|)x,x\right\rangle\\
&= \left(\left\langle f^2(|T|)x,x\right\rangle^{1/2}\left\langle g^2(|T^*|)x,x\right\rangle^{1/2}\right)^2\\
&\le \frac{1}{4}\left(\left\langle f^2(|T|)x,x\right\rangle+\left\langle g^2(|T^*|)x,x\right\rangle\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left\langle\left(f^2(|T|)+g^2(|T^*|)\right)x,x\right\rangle^2\\
&\le \frac{1}{4}\left\langle\left(f^2(|T|)+g^2(|T^*|)\right)^2x,x\right\rangle \ \text{(by using (2.4))}\\
&= \frac{1}{4}\left\langle\left(f^4(|T|)+g^4(|T^*|)\right)x,x\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\Re\left(f^2(|T|)g^2(|T^*|)\right)x,x\right\rangle.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\|T\|_\alpha^2 &= \sup_{\|x\|=1}\left\{\alpha\left|\langle Tx,x\rangle\right|^2+(1-\alpha)\|Tx\|^2\right\}\\
&\le \sup_{\|x\|=1}\left\langle\left(\frac{\alpha}{4}\left(f^4(|T|)+g^4(|T^*|)\right)+(1-\alpha)|T|^2\right)x,x\right\rangle\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}\sup_{\|x\|=1}\left|\left\langle\Re\left(f^2(|T|)g^2(|T^*|)\right)x,x\right\rangle\right|\\
&= \left\|\frac{\alpha}{4}\left(f^4(|T|)+g^4(|T^*|)\right)+(1-\alpha)|T|^2\right\|+\frac{\alpha}{2}\left\|\Re\left(f^2(|T|)g^2(|T^*|)\right)\right\|,
\end{aligned}$$

如所需。 □

现在，作为定理2.1的推论，我们得到以下推论。

推论 2.2. 若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\|T\|_\alpha^2 \leq \left\| \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)|T|^2 + \frac{\alpha}{4}|T^*|^2 \right\| + \frac{\alpha}{2}\|\Re(|T||T^*|)\| \tag{2.5}$$

and

$$\|T\|_\alpha^2 \leq \left\| \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)|T^*|^2 + \frac{\alpha}{4}|T|^2 \right\| + \frac{\alpha}{2}\|\Re(|T||T^*|)\|. \tag{2.6}$$

此外，

$$w(T) \leq \min\{\gamma, \delta\}, \tag{2.7}$$

其中

$$\gamma = \min_{\alpha\in[0,1]} \left\{ \left\| \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)|T|^2 + \frac{\alpha}{4}|T^*|^2 \right\| + \frac{\alpha}{2}\|\Re(|T||T^*|)\| \right\}^{1/2}$$

and

$$\delta = \min_{\alpha\in[0,1]} \left\{ \left\| \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)|T^*|^2 + \frac{\alpha}{4}|T|^2 \right\| + \frac{\alpha}{2}\|\Re(|T||T^*|)\| \right\}^{1/2}.$$

证明。通过在定理 2.1 中取 $f(t) = g(t) = t^{1/2}$，可得不等式 (2.5)。将 T 替换为 T^* 并利用等式 $\|T\|_\alpha = \|T^*\|_\alpha$ （见 [20, 命题 2.6]），可由 (2.5) 得到不等式 (2.6)。由 $w(T) \leq \min_{\alpha\in[0,1]} \|T\|_\alpha$ 这一事实可得不等式 (2.7)。□

注 2.3。最近，Bhunia 和 Paul 在 [3, 不等式 (2.3)]和 [8, 推论 2.6] 中分别得到了 $w^2(T) \leq \frac{1}{4}\||T|^2 + |T^*|^2\| + \frac{1}{2}\|\Re(|T||T^*|)\|$ 和 $w^2(T) \leq \frac{1}{4}\||T|^2 + |T^*|^2\| + \frac{1}{2}w(|T||T^*|)$。显然，我们可以看到

$$\begin{aligned} \min\{\gamma^2, \delta^2\} &\leq \frac{1}{4}\left\||T|^2 + |T^*|^2\right\| + \frac{1}{2}\|\Re(|T||T^*|)\| \\ &\leq \frac{1}{4}\left\||T|^2 + |T^*|^2\right\| + \frac{1}{2}w(|T||T^*|). \end{aligned}$$

因此，我们想指出，不等式（2.7）改进了 [3, 不等式 (2.3)] 和 [8, 推论 2.6]中的两个不等式。为说明这种改进是严格的，我们考虑一个矩阵 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

然后，通过初等计算可得 $\gamma = \sqrt{\frac{28}{13}}$和 $\delta = \frac{3}{2}$，因此

$$\min\{\gamma^2, \delta^2\} = \frac{28}{13} < \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\left\||T|^2 + |T^*|^2\right\| + \frac{1}{2}\|\Re(|T||T^*|)\|.$$

α范数的另一个界如下：

定理 2.4. 若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\|T\|_\alpha^2 \leq \min\left\{\left\|\alpha|T|^2 + (1-\alpha)|T^*|^2\right\|, \left\|\alpha|T^*|^2 + (1-\alpha)|T|^2\right\|\right\}.$$

证明. 令 $x \in \mathcal{H}$，其中 $\|x\| = 1.$。利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
\|T\|_\alpha^2 &= \sup_{\|x\|=1} \left\{\alpha \left|\langle Tx, x\rangle\right|^2 + (1-\alpha)\|Tx\|^2\right\} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\{\alpha \left|\langle x, T^*x\rangle\right|^2 + (1-\alpha)\|Tx\|^2\right\} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left\{\alpha\|T^*x\|^2 + (1-\alpha)\|Tx\|^2\right\} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left\{\alpha\langle|T^*|^2x, x\rangle + (1-\alpha)\langle|T|^2x, x\rangle\right\} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle(\alpha|T^*|^2 + (1-\alpha)|T|^2)x, x\rangle \\
&= \|\alpha|T^*|^2 + (1-\alpha)|T|^2\|. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

将 T 代入 T^* （2.8），并利用 $\|T\|_\alpha = \|T^*\|_\alpha$，可得

$$\|T\|_\alpha^2 \leq \|\alpha|T|^2 + (1-\alpha)|T^*|^2\|. \qquad (2.9)$$

因此，结合（2.8）和（2.9），即可得到所需的不等式。 □

现在，结合定理 2.4 和（1.2）中的第一个不等式，可以轻易得到数值半径的以下上界:

$$w^2(T) \leq \min_{\alpha\in[0,1]} \left\|\alpha|T|^2 + (1-\alpha)|T^*|^2\right\|. \qquad (2.10)$$

注意，界（2.10）也见于 [7]。为得到下一个结果，我们需要用到布扎诺不等式 [10], ，即，若 x， y， $e \in \mathcal{H}$ 且 $\|e\| = 1$，则

$$2|\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| + |\langle x, y\rangle|. \qquad (2.11)$$

利用布扎诺不等式（2.11），我们证明以下定理。

定理 2.5. 若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\|T\|_\alpha^2 \leq \frac{\alpha}{4}w^2(|T| + i|T^*|) + \frac{\alpha}{4}w(|T||T^*|) + \left\|\left(1 - \frac{7\alpha}{8}\right)|T|^2 + \frac{\alpha}{8}|T^*|^2\right\|.$$

证明。 设 $x \in \mathcal{H}$ 满足 $\|x\| = 1.$ 那么，由不等式（2.2），我们得到 t

$$\begin{aligned}
&|\langle Tx, x\rangle|^2 \\
\leq\ &\langle|T|x, x\rangle\langle|T^*|x, x\rangle \\
\leq\ &\frac{1}{4}\left(\langle|T|x, x\rangle + \langle|T^*|x, x\rangle\right)^2 \\
=\ &\frac{1}{4}(\langle|T|x, x\rangle^2 + \langle|T^*|x, x\rangle^2) + \frac{1}{2}\langle|T|x, x\rangle\langle|T^*|x, x\rangle \\
=\ &\frac{1}{4}|\langle|T|x, x\rangle + i\langle|T^*|x, x\rangle|^2 + \frac{1}{2}\langle|T^*|x, x\rangle\langle x, |T|x\rangle \\
\leq\ &\frac{1}{4}|\langle(|T| + i|T^*|)x, x\rangle|^2 + \frac{1}{4}\||T^*|x\|\,\||T|x\| + \frac{1}{4}|\langle|T^*|x, |T|x\rangle| \ \text{(by (2.11))} \\
\leq\ &\frac{1}{4}|\langle(|T| + i|T^*|)x, x\rangle|^2 + \frac{1}{8}(\||T^*|x\|^2 + \||T|x\|^2) + \frac{1}{4}|\langle|T||T^*|x, x\rangle|.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\alpha|\langle Tx,x\rangle|^2+(1-\alpha)\|Tx\|^2\\
\leq\ &\frac{\alpha}{4}|\langle(|T|+i|T^*|)x,x\rangle|^2+\frac{\alpha}{4}|\langle|T||T^*|x,x\rangle|+\left\langle\left(\left(1-\frac{7\alpha}{8}\right)|T|^2+\frac{\alpha}{8}|T^*|^2\right)x,x\right\rangle\\
\leq\ &\frac{\alpha}{4}w^2(|T|+i|T^*|)+\frac{\alpha}{4}w(|T||T^*|)+\left\|\left(1-\frac{7\alpha}{8}\right)|T|^2+\frac{\alpha}{8}|T^*|^2\right\|.
\end{aligned}$$

因此，对 $\|x\|=1$ 取上确界，得到所需的不等式。 □

将 T 替换为 T^* 在定理 2.5中，然后使用 $\|T\|_\alpha=\|T^*\|_\alpha$，我们也得到以下不等式:

推论 2.6. 若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\|T\|_\alpha^2\ \leq\ \frac{\alpha}{4}w^2(|T|+i|T^*|)+\frac{\alpha}{4}w(|T||T^*|)+\left\|\left(1-\frac{7\alpha}{8}\right)|T^*|^2+\frac{\alpha}{8}|T|^2\right\|.$$

作为定理 α-范数界的一个应用，这些界由定理 2.5 和推论 2.6得出，我们得到了数值半径的一个新上界，如下所示。

推论 2.7. 若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\begin{aligned}
w^2(T)\ \leq\ &\frac{\alpha}{4}w^2(|T|+i|T^*|)+\frac{\alpha}{4}w(|T||T^*|)\\
&+\min\left\{\left\|\left(1-\frac{7\alpha}{8}\right)|T^*|^2+\frac{\alpha}{8}|T|^2\right\|,\left\|\left(1-\frac{7\alpha}{8}\right)|T|^2+\frac{\alpha}{8}|T^*|^2\right\|\right\},
\end{aligned}$$

对所有 $\alpha\in[0,1]$.

特别地，对于 $\alpha=1$，我们有（另见 [14]）：

$$\begin{aligned}
w^2(T)\ &\leq\ \frac{1}{4}w^2(|T|+i|T^*|)+\frac{1}{4}w(|T||T^*|)+\frac{1}{8}\left\||T^*|^2+|T|^2\right\| \qquad (2.12)\\
&\leq\ \frac{1}{2}\left\|T^*T+TT^*\right\|.
\end{aligned}$$

因此，推论2.7 推广并改进了不等式（2.12），以及由 Kittaneh 得到的著名不等式 $w^2(T)\leq\frac{1}{2}\|T^*T+TT^*\|$。 [16]。

接下来，我们注意到，每个算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 都满足以下数值半径不等式（见 [17]）： $w(T)\leq\frac{1}{2}\||T|+|T^*|\|$. 在 [7], 中证明了$w^2(T)\leq\|\alpha|T|^2+(1-\alpha)|T^*|^2\|$， $\forall\alpha\in[0,1]$. 现在，自然会问以下不等式是否

$$w(T)\leq\|\alpha|T|+(1-\alpha)|T^*|\|\,,\ \forall\alpha\in[0,1]$$

成立。在这方面，我们有以下结果。

定理 2.8. 若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(T)\ \leq\ \left(\|\alpha|T|+(1-\alpha)|T^*|\|\right)\|T\|,$$

对所有 $\alpha\in[0,1]$.

证明。 设 $x \in \mathcal{H}$ 满足 $\|x\| = 1$. 那么，由不等式（2.2）可得

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x\rangle|^2 &\leq \langle |T|x, x\rangle \langle |T^*|x, x\rangle \\ &= \langle |T|x, x\rangle^{\alpha} \langle |T^*|x, x\rangle^{1-\alpha} \langle |T|x, x\rangle^{1-\alpha} \langle |T^*|x, x\rangle^{\alpha} \\ &\leq (\alpha\langle |T|x, x\rangle + (1-\alpha)\langle |T^*|x, x\rangle)((1-\alpha)\langle |T|x, x\rangle + \alpha\langle |T^*|x, x\rangle) \\ &= \langle (\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|)x, x\rangle \langle (\alpha|T^*| + (1-\alpha)|T|)x, x\rangle \\ &\leq (\||\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|\|) \, (\||\alpha|T^*| + (1-\alpha)|T|\|) \\ &\leq (\||\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|\|) \, \|T\|. \end{aligned}$$

因此，对 $\|x\| = 1$ 取上确界，得到

$$w^2(T) \leq (\||\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|\|) \, \|T\|,$$

如所需。 □

注 2.9. 由于定理 2.8 对所有 $\alpha \in [0, 1]$均成立，我们可以将该不等式写成如下形式：

$$w(T) \leq \sqrt{\left(\min_{\alpha\in[0,1]} \||\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|\|\right) \|T\|}. \tag{2.13}$$

注意，界（2.13）是对著名界的显著改进$w(T) \leq \|T\|$。为展示这种严格改进，我们取与注2.3中相同的矩阵。通过简单计算可得

$$\sqrt{\left(\min_{\alpha\in[0,1]} \||\alpha|T| + (1-\alpha)|T^*|\|\right) \|T\|} = \sqrt{\frac{4}{3} \times 2} < 2 = \|T\|.$$

3. (α, β) -正规算子的数值半径

本节中，我们推导 (α, β) -正规算子数值半径的下界。我们注意到，对于 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$w(T) \geq \max\{\|\Re(T)\|, \|\Im(T)\|\}, \tag{3.1}$$

其证明可由 T. 的笛卡尔分解得出。本节的第一个下界如下：

定理 3.1. 设 T 是一个 (α, β)-正规算子。则

$$w^2(T) \geq \max\left\{1 + \alpha^2, 1 + \frac{1}{\beta^2}\right\} \frac{\|T\|^2}{4} + \frac{|\|\Re(T)\|^2 - \|\Im(T)\|^2|}{2}.$$

证明。 由不等式（3.1），可得

$$\begin{aligned} w^2(T) &\geq \frac{\|\Re(T)\|^2+\|\Im(T)\|^2}{2}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2} \\ &\geq \frac{\|(\Re(T))^2+(\Im(T))^2\|}{2}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2} \\ &= \frac{\||T|^2+|T^*|^2\|}{4}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2} \\ &\geq \frac{\||T|^2+\alpha^2|T|^2\|}{4}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2} \ (\text{since, } |T^*|^2\geq\alpha^2|T|^2) \\ &= \frac{(1+\alpha^2)\|T\|^2}{4}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

同样，我们还有

$$w^2(T) \geq \frac{\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\|T\|^2}{4}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2}. \tag{3.3}$$

因此，结合式(3.2)和(3.3)，即可得到所需的不等式。 □

注 3.2. 显然，$\max\left\{1+\alpha^2, 1+\frac{1}{\beta^2}\right\}>1$. 因此，对于一个$(\alpha,\beta)$-正规算子 T，

$$\begin{aligned} w(T) &\geq \sqrt{\max\left\{1+\alpha^2,1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4}+\frac{|\|\Re(T)\|^2-\|\Im(T)\|^2|}{2}} \\ &\geq \sqrt{\max\left\{1+\alpha^2,1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4}} \\ &= \max\left\{\sqrt{1+\alpha^2},\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}}\right\}\frac{\|T\|}{2} \\ &> \frac{\|T\|}{2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

因此，我们想指出，对于(α,β)-正规算子，定理3.1给出的界比众所周知的界更强 $w(T)\geq\frac{\|T\|}{2}$。注意，不等式(3.4)也在 [19,定理 3.1]中得到了发展。

为了得到另一项改进，我们首先注意到以下数值半径不等式（见 [9]）：对于每个 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$w(T)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\max\left\{\|\Re(T)+\Im(T)\|,\|\Re(T)-\Im(T)\|\right\}. \tag{3.5}$$

利用不等式（3.5）并采用与定理 3.1类似的论证，我们还证明了以下关于（α，β）-正规算子数值半径的下界。

定理 3.3. 设 T 是一个（α， β）-正规算子。则

$$w^2(T) \geq \max\left\{1+\alpha^2, 1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4} + \frac{\left|\|\Re(T)+\Im(T)\|^2 - \|\Re(T)-\Im(T)\|^2\right|}{4}.$$

注记 3.4. 显然，对于 (α,β)-正规算子 T，

$$\begin{aligned} w(T) &\geq \sqrt{\max\left\{1+\alpha^2, 1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4} + \frac{\left|\|\Re(T)+\Im(T)\|^2 - \|\Re(T)-\Im(T)\|^2\right|}{4}} \\ &\geq \sqrt{\max\left\{1+\alpha^2, 1+\frac{1}{\beta^2}\right\}\frac{\|T\|^2}{4}} \\ &= \max\left\{\sqrt{1+\alpha^2}, \sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}}\right\}\frac{\|T\|}{2} \\ &> \frac{\|T\|}{2}. \end{aligned}$$

因此，对于 (α,β)-正规算子，定理 3.3 给出的界比众所周知的界更强 $w(T) \geq \frac{\|T\|}{2}$。

最后，我们想指出，如果 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是可逆算子，那么 $w(T) > \frac{\|T\|}{2}$. 这意味着，当 $w(T) = \frac{\|T\|}{2}$ 时， T 必须是不可逆算子。

References

1. S. Bag、P. Bhunia 和 K. Paul；利用 t-Aluthge 变换给出有界线性算子数值半径的界，《数学不等式及其应用》23 (2020)，第 3 期，991–1004。2. P. Bhunia、S.S. Dragomir、M.S. Moslehian 和 K. Paul；《数值半径不等式讲义》，Infosys 科学基金会丛书，Infosys 数学科学丛书，Springer Cham，(2022)。https://doi.org/10.1007/978-3-031-13670-2 3. P. Bhunia 和 K. Paul；复希尔伯特空间算子数值半径不等式的改进，《Acta Sci. Math.（塞格德）》（2022），即将发表。4. P. Bhunia、A. Bhanja、D. Sain 和 K. Paul；基于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的新范数的算子矩阵数值半径不等式，《米什科尔茨数学札记》（2022），即将发表。5. P. Bhunia、A. Sen 和 K. Paul；半希尔伯特空间算子的新半范数及其应用，《凸分析杂志》29 (2022)，第 4 期，1149–1160。6. P. Bhunia 和 K. Paul；数值半径不等式的发展及等号成立条件的刻画，《线性代数及其应用》630 (2021)，306–315。7. P. Bhunia 和 K. Paul；著名数值半径不等式的恰当改进及其应用，《数学研究成果》76 (2021)，第 4 期，论文编号 177，共 12 页。8. P. Bhunia、K. Paul；希尔伯特空间算子数值半径的新上界，《数学科学通报》167 (2021)，论文编号 102959，共 11 页。9. P. Bhunia、S. Jana 和 K. Paul；希尔伯特空间算子数值半径的精细不等式，(2021)。https://arxiv.org/abs/2106.13949 10. M.L. Buzano；柯西-施瓦茨不等式的推广，《都灵理工大学数学研讨会报告》31(1971/73) (1974) 405–409。11. S.S. Dragomir 和 M.S. Moslehian；希尔伯特空间中 (α,β)-正规算子的若干不等式，《大学学报：数学与信息学系列》23 (2008)，39–47。12. R.G. Duglas；关于希尔伯特空间上算子的主化、因子分解和值域包含，《美国数学会会刊》17 (1966)，413–415。13. P.R. Halmos；《希尔伯特空间问题集》，施普林格出版社，纽约，1982。

14. S. Jana、P. Bhunia 和 K. Paul；数值半径不等式及多项式零点的估计，(2023)。https://arxiv.org/abs/2301.03159 15. T. Kato；关于线性算子若干不等式的札记，《数学年刊》125 (1952)，208–212。16. F. Kittaneh；希尔伯特空间算子的数值半径不等式，《数学研究》168 (2005)，第 1 期，73–80。17. F. Kittaneh；数值半径不等式及弗罗贝尼乌斯伴随矩阵数值半径的估计，《数学研究》158 (2003)，第 1 期，11–17。18. F. Kittaneh；关于希尔伯特空间算子若干不等式的札记，《京都大学数理科学研究所刊物》24 (1988) 283–293。19. M. Sababheh 和 H.R. Moradi；希尔伯特空间算子之间的新序，(2022)。https://arxiv.org/abs/2212.06382v1 20. D. Sain、P. Bhunia、A. Bhanja 和 K. Paul；关于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的新范数及其在数值半径不等式中的应用，《泛函分析年刊》12 (2021)，第 4 期，论文编号 51，共 25 页。21. B. Simon；《迹理想及其应用》，剑桥大学出版社，1979。

Department of Mathematics, Indian Institute of Science,
Bengaluru 560012,Karnataka, India电子邮件地址：pintubhunia5206@gmail.com