arXiv:2301.03882v1 [cond-mat.stat-mech] 10 Jan 2023

通过蒙特卡罗临界性模拟中的代际方差缩减来缓解不期望的相关性

Kévin Fröhlicher,*[a] Eric Dumonteil[b] LoïcThulliez[b] Julien Taforeau[a] and Mariya Brovchenko[a]

[a]法国放射防护与核安全研究所（*IRSN*），法国丰特奈欧罗斯，*Leclerc* 师部大道 *31* 号，邮编 *92260*

[b]*IRFU*，法国原子能和替代能源委员会，巴黎萨克雷大学，法国伊韦特河畔吉夫，邮编 *91191*

*电子邮箱： kevin.frohlicher@irsn.fr

页数：38 表数：4 图数：18

摘要

蒙特卡罗临界性模拟广泛用于核安全论证，因为这类模拟只需作出极少假设，便能以任意精度估计全局和局部计数。然而，自这类数值方法问世以来，人们早已认识到，偏差可能会影响这些计数及其误差估计。尤其是，过去十年间发展起来的随机建模方法揭示了空间相关性通过一种称为中子聚类的现象所发挥的重要作用。在模拟弱耦合系统（即优势比较高的系统）时，这种效应尤为显著。为解决这一问题，本文提出将蒙特卡罗临界性代码中的幂迭代技术改写为一种称为自适应多层分裂的方差缩减技术。其核心思想是，将中子代之间的迭代视为推动一部分中子趋向代际探测器（而非方差缩减技术通常采用的空间探测器）。虽然这两种方法都能实现中子群体控制，但前一种方法会盲目地移除或分裂中子。相比之下，后一种方法通过伴随通量估计，在移除或分裂中子时优化其空间、代际和能谱属性，从而减弱代际和空间相关性。本文以单速理论下一个简单的裸板反应堆为例进行说明，并将自适应多层分裂应用于该案例，再与中子输运中使用的蒙特卡罗幂迭代方法的不同变体进行比较。除了考察这些方法最终的效率外，本研究还旨在阐明自适应多层分裂在临界性计算中的主要机制。**关键词 —** 蒙特卡罗临界性模拟、中子聚类、幂迭代、方差缩减、自适应多层分裂

I. 引言

80年来，增殖介质中的中子输运模拟一直是推动高性能数字计算能力和蒙特卡罗算法本身发展的主要动因之一。与确定性方法相比，核工程师和研究人员仍将蒙特卡罗方法视为高保真方法，因为它只需作出很少的假设，便能以任意精度估算全局和局部计数。核数据不确定性通常被视为唯一的不确定性来源（而技术不确定性等其他来源通常被忽略或无视），此外还有该方法本身固有的随机涨落。因此，蒙特卡罗模拟被广泛用作验证新模型/方法的基准计算。

几十年来，反应堆物理学一直使用临界性计算，通过求解输运临界方程 k_{eff} 来表征增殖核系统的行为 [1, 2, 3, 4, 5]。该方程的形式为特征值方程，其中忽略固定中子源（例如自发裂变），并修改方程中的产生项，以确保中子群体在各代之间保持恒定。使用蒙特卡罗方法求解这一 k特征值方程，通常采用基于幂迭代方法的迭代算法，从而能够将系统的基模表征为恰好处于临界状态。尽管由于幂迭代法对裂变中子进行归一化，所求解问题的内在本质仍存在根本性疑问 k_{eff} [6]，但在临界性计算中，这种方法已得到广泛认可。如今，它不仅广泛应用于核临界安全领域，也应用于反应堆物理学。然而，对于弱耦合系统，该方法可能出现收敛问题 [7] ，从而可能导致全局和局部计数及其统计不确定性的估算出现显著误差。所谓弱耦合系统，是指中子可能难以在若干代内从几何体的一部分迁移到另一部分的系统，通常是大型系统。

事实上，在20世纪60年代末期，不同研究揭示了临界计算中 k_{eff} 估计量的偏差，[8, 9, 10, 11, 12] 然而，核工业对这类计算的应用却日益广泛。之后，Ueki 等人 [13], 和 Dumonteil 等人 [14]分别指出，代际相关性和空间相关性也是空间通量估计中产生偏差的来源。此外，不同研究 [15] 指出，计数值估计量通常基于从以下过程中获得的观测值构建：

连续代中中子的观测值，这会导致计数不确定性出现实际的低估偏差 [16, 13]。

这些观察的核心在于这样一个事实：尽管两类相关性（代际相关性和空间相关性）都深深根植于裂变现象之中，因此也会在实际核构型中出现 [17], ，但由于种群控制与可模拟中子数量远少于自然系统中中子数量这两者的共同作用，它们在数值模拟中的强度可能会显著增大。特别是，所谓的中子聚集效应在过去十年中受到了广泛关注。它是分支空间过程的典型特征，其根源在于中子俘获与中子出生之间的不对称性：中子俘获可在任何地方发生，而中子出生只能发生在其他中子附近。当系统耦合较弱时，即便存在吸收边界 [18], ，这种不对称性也会形成由随机分布的中子簇构成的空间模式。这会导致某些区域采样不足，最终使全局（例如， k_{eff}）和局部（例如通量）计数出现有偏估计[19], ；若通过多物理场耦合 [20, 21]考虑反馈效应，后果可能十分严重。这种称为中子聚类的现象已采用统计力学工具进行研究；具体而言，可使用所谓的分支布朗运动对其建模，该模型将 Galton-Watson生灭过程与标准布朗运动耦合起来 [14, 18, 22, 23]。尽管通常可通过在蒙特卡罗模拟中采样更多粒子来减轻中子聚类，但人们也测试了不同策略，以避免这一现象的发生。虽然这些措施能够减轻该现象，但无论是引入能够再现缓发中子效应的双时间尺度，还是有无种群控制[24] ，都不会改变这一现象的定性图景 [25, 26]。由于中子族的持续存在是模拟中抵消这一效应的关键，近期研究了对蒙特卡罗幂迭代方法的有益改进 [27, 20, 28]。

基于这些最新观察，本文提出了一种应对代际和空间相关性（从而缓解蒙特卡罗临界性偏差）的不同方法。驱动我们方法的观察是，幂迭代会在种群控制过程中随机杀死或分裂中子。确保中子族灭绝速度减缓的唯一方法，是重新启动那些能够存活多代的中子。因此，这里的范式转变在于：将作用于超临界/次临界介质的种群控制视为

选择中子，或强制中子在各代之间持续存在。换言之，目标是估计以系统存活为条件的渐近状态：这类方法在数学上称为 Fleming-Viot过程 [29, 30]。这些过程也可以被视为稀有事件的估计量 [31]，因此也是一种方差缩减技术 [32]，其主要目标是在不对与该探测器相关的计数估计引入任何偏差的情况下，将中子“推向”给定的“探测器”。这些技术可以使用重要性图，其质量将决定方法效率的提升程度。在当前情况下，我们的探测器可以是代际探测器，而重要性图可以是伴随通量 [33, 34, 35]，该通量可以在运行过程中估计，也可以使用外部代码进行估计。最近出现了一种这类 Fleming-Viot过程的推广形式，能够处理重要性函数。该方法基于粒子分裂，并使用运行过程中对重要性等级的估计来确定粒子分裂的等级 [36]。该方法被命名为自适应多层分裂（AMS），并已应用于屏蔽计算中的中子输运 [37, 38]。本文将展示，这种在屏蔽计算中已被证明有效的方差缩减技术的改进形式，同样有助于减轻蒙特卡罗临界计算中的相关性和偏差。本文还将展示，AMS既可以单独使用，也可以叠加在其他种群控制技术之上（例如无分支碰撞方法 [15]）。

本文结构安排如下。在第 II 节中，我们介绍自适应多层分裂方法及其在临界性计算中的扩展；第 III 节则概述主要数值结果，并讨论各方法的性能。我们比较了所有方法在k_{eff} 和通量估计方面的表现，以及它们对空间相关性和代际相关性的影响。

II. 自适应多层分裂

II.A. 粒子输运的原始算法

自适应多层分裂（AMS）最初是应用数学领域开发的一种用于计算稀有事件概率的方法。该方法最初面向连续马尔可夫链 [36]，，之后被推广到离散马尔可夫链 [39]，并应用于衰减和辐射防护问题中的粒子输运 [40, 41]。

其理念是反复重新采样粒子，使其逐步趋近探测器。该方法的核心思想是对粒子历史进行重新采样，使其越来越接近探测器。为此，中子

历史首先从产生到消亡（所有粒子因俘获、泄漏或俄罗斯轮盘而消失）进行模拟，并依据重要性准则排序。根据排序结果，删除重要性最低的历史，并从剩余历史中重新采样。一般算法如图 1 所示。此处介绍的通用算法针对粒子的模拟输运，但也可以在加权蒙特卡罗过程中使用 AMS [39]。

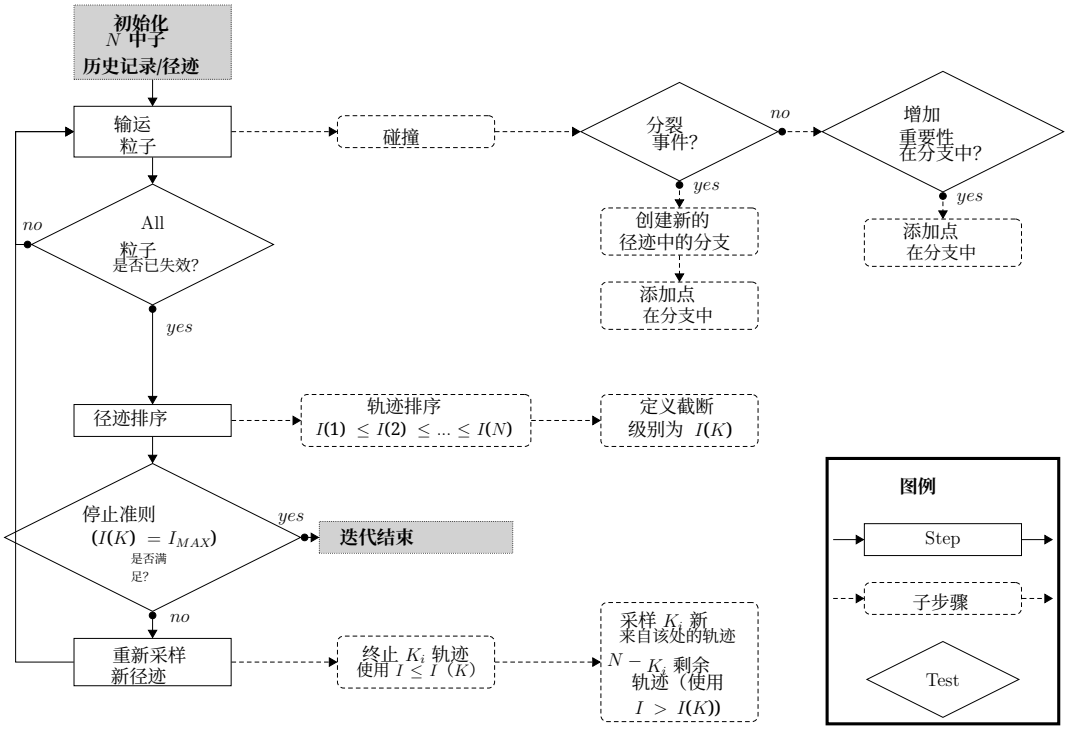


图1. AMS算法

*II.A.1. AMStree*结构和输运步骤

AMS由连续进行的固定源模拟组成，每个批次（即每次模拟）由以下内容构成： N 条径迹（起初彼此独立），代表 N 粒子历史。这里，粒子历史是一个粒子及其碰撞和分裂事件产生的子代粒子所经历的完整轨迹，从初始粒子诞生到其所有子代粒子死亡。在每次碰撞时，都会使用代价函数为碰撞后射出的粒子分配一个重要性值（见第II.A.4节）。如果粒子的重要性高于前一个分支点的重要性，则将该粒子作为一个点保存在AMS结构中。每条径迹最初都有一个唯一的

分支；每次发生分裂事件时，都会添加新的分支（可以是裂变等物理过程，也可以是加权蒙特卡罗过程中的分裂等数值过程）。在任何时刻，一条径迹的重要性都等于其各分支重要性的最大值，而一个分支的重要性等于其各点重要性的最大值。所得树结构如图2所示。

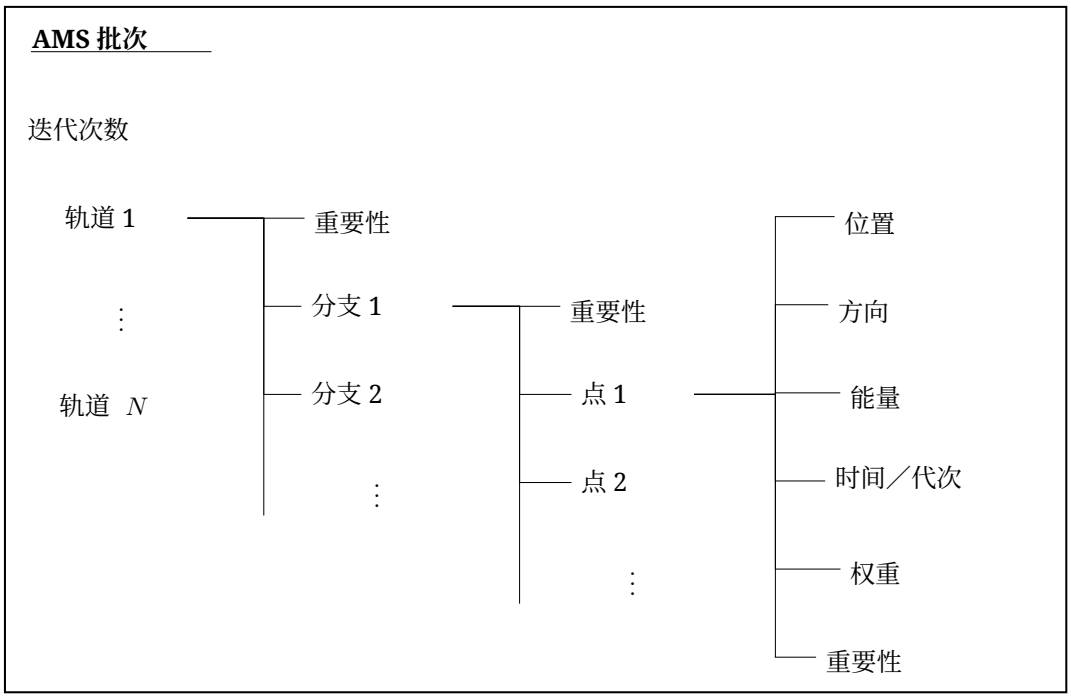


图 2. AMS 轨迹/分支/点结构

II.A.2. 历史排序

一次迭代中的所有粒子 i 均已死亡（因俘获、泄漏或俄罗斯轮盘所致）后， N轨迹会按重要性从低到高排序。此时， I_{kill} 截断级别由倒数第 K条轨迹的重要性确定，其中 K 是用户定义的参数。

$$I_{\text{kill}}^{(i)} \equiv I^{(i)}(K) \tag{1}$$

当一条轨迹到达探测器时，其重要性设为无穷大。在一次迭代结束时，如果尚未满足

下文定义的停止准则，算法将按照以下描述抽取新的轨迹。

AMS 迭代在以下条件下停止

$$I_{\text{kill}}^{(i)} = I_{MAX}^{(i)} \tag{2}$$

其中 $I_{MAX}^{(i)}$ 是第 i次迭代时的最大轨迹重要性。如果算法正确迭代（参见第II.A.4节中关于重要性的讨论），则应在

$$I_{\text{kill}}^{(i)} = I^{(i)}(K) = \infty. \tag{3}$$

这条方程意味着，径迹 K 至 N 已到达探测器（因为它们的重要性高于 $I^i(K)$），因此至少有 $N - K + 1$ 条径迹已到达探测器。

II.A.3. 采样新粒子

计算出截断级别后，将所有重要性低于或等于该级别的径迹从批次结构中删除。由于多条径迹可能具有相同的重要性，删除的径迹数量不一定等于 K （可能更多），我们将第 i次迭代时的删除数量记为 K_i，其中 $K_i \equiv card(S) \geq K$，并将 S 定义为

$$S = \left\{ k,\ k \in [1;\ N] \mid \begin{matrix} I^{(i)}(k) \\ \leq I_{\text{kill}} \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

为保持轨迹总数不变， K_i 从剩余轨迹中均匀地抽取样本进行复制，以补足被删除的轨迹。选中一条轨迹进行复制时，会将其中第一个重要性大于截断级别的点复制到新轨迹中。如此生成的新轨迹按照第II.A.1节所述的方法进行模拟。图3对此进行了说明。

AMS 算法停止后（注意最后一次迭代 I），使用以下估计量计算得分

$$\widetilde{\phi}_{\text{detector}} = \phi_{\text{detector}}^{(I)} \times \alpha_{AMS}. \tag{5}$$

其中， $\widetilde{\phi}_{\text{detector}}$ 是 ϕ_{detector}的无偏估计量， $\phi^{(I)}$ 探测器是基于所有迭代计数并使用经典蒙特卡罗估计量（例如轨迹长度或碰撞

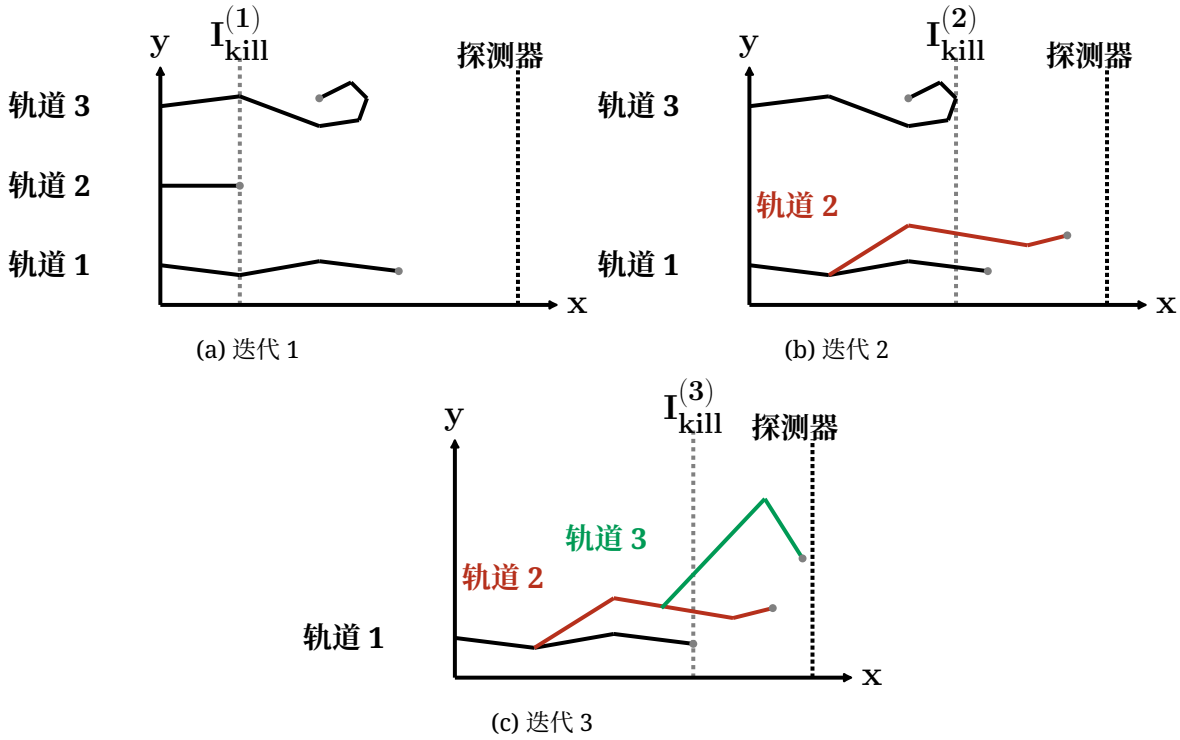


图 3. 在（x， y）平面上定义探测器时的 AMS 迭代，其中 $N = 3$ 和 $K = 1$。探测器越近，粒子的重要性越高。

.

估计量）对得分 α_{AMS} 的估计，其定义为

$$\alpha_{\mathrm{AMS}} \equiv \prod_{i=1}^{I} \left(1 - \frac{K_i}{N}\right). \tag{6}$$

虽然使用 α_{AMS} 校正计数以使结果保持无偏，但它也可以解释为到达探测器的概率估计。虽然此处未作描述，但可以定义实时计分程序，以计算探测器外的得分。

II.A.4. 关于重要性函数

重要性函数是一个将 $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$映射到 L 的函数，其中 L 是计算重要性时所考虑的参数数量（位置、方向、能量等）。其作用是对 AMS 中的轨迹进行排序（见第II.A.2节），并应选择能够将中子历史推向探测器的函数。对该函数的最优选择应能使概率 α_{AMS} 的估计达到最佳，从而使方差 [42]最小。在粒子输运中，尽管

尚无针对 AMS 的正式证明，但通常认为，探测器的伴随玻尔兹曼方程解 [35] 是最优选择。

尽管没有其他要求，最好避免使用呈现离散层级的重要性函数，因为这可能导致粒子聚集。事实上，对于离散的重要性函数，如果重要性最高的 $N-K+1$ 个粒子处于同一层级，那么分裂层级将等于 $I_{MAX}^{(i)} < \infty$，迭代会在足够多的粒子到达探测器之前停止。

最后，由于重要性函数仅用于对粒子进行排序，因此只有两个粒子之间的相对重要性才有意义，这使得 AMS 成为一种相当稳健且易于使用的方法[41]。

II.B. 对临界性计算的适用

对于次临界系统，中子群体往往会随着时间／代数的推移而灭绝[a]。因此，显然，k_{eff}越低，中子历史越不可能存活多个代，抵达较远代数便属于稀有事件。在临界性计算中，AMS 用于重新采样历史，并推动它们跨越不同代。此外，正如第 II.A.1 节所述，任何碰撞点都可以加入 AMS 结构，这意味着任何碰撞点都可用于中子的重新采样。与幂迭代相比，后者只在裂变位点采样新中子；由于谱和空间非均匀性效应，这会导致算法所求解的精确方程存在不可忽略的差异，Cullen 等人在参考文献 [6]中对此作了解释。不过，为了便于与幂迭代方法比较，只保存裂变点即可，因为只要系统保持马尔可夫性，就可以存储任何停止点。

在次临界系统中，k_{eff} 可解释为中子从一代进入下一代的概率。由此可知，初始含有一个粒子的中子历史到达第 G 代的概率为

$$P_{\text{survive}}(G) = k_{\text{eff}}^{G}. \tag{7}$$

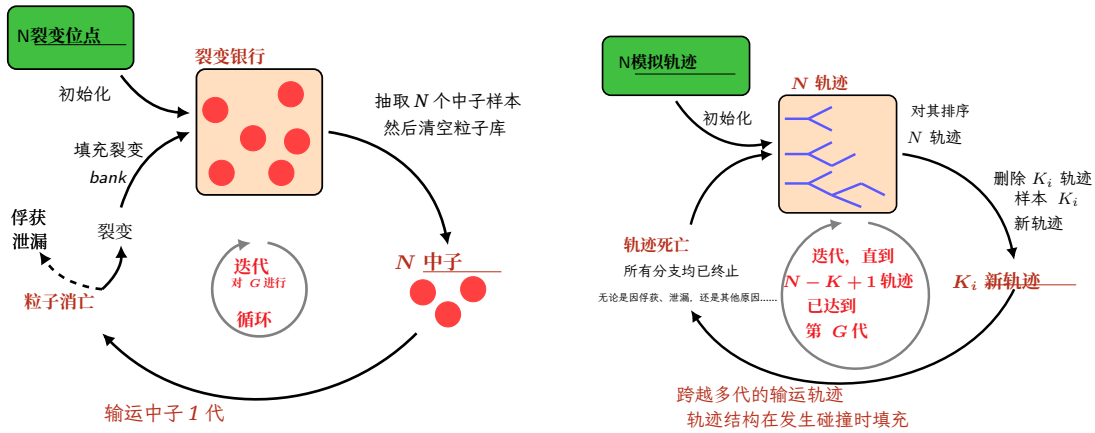
[a]可以人为地将一代定义为中子从出生到因吸收或泄漏而消亡的轨迹。因此，裂变产生的中子被视为导致该裂变的粒子的下一代。

因此，在次临界系统中，若不进行种群控制，那么跨代追踪中子也可视为一个跨代衰减问题，这使其成为使用 AMS 的合适研究范围。接下来要做的是在某一代中定义一个探测器（即一个目标代，重采样算法将把中子推向该代），并追踪中子在连续代中的变化，而非追踪其随时间的变化。为此，在本文后续各节中，用于对轨迹进行排序的重要性函数将采用以下形式

$$I(\boldsymbol{r}, g) = g + f(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

其中 g 是用于将中子沿各代推进的中子代数，而 $0 \leq f(\boldsymbol{r}) \leq 1$ 是空间的函数，用于区分同一代的中子，使重要性函数不呈离散形式（参见第 II.A.4节）。所得算法与幂迭代的比较见

图 4.



(a) 幂迭代法：以任意裂变分布初始化后，对裂变中子进行迭代（每次迭代一代）。中子从上一次迭代的裂变中子中抽取。

(b) 临界性问题中的 AMS：以 N 模拟轨迹作为初始输入后，对重采样轨迹进行迭代（每次迭代包含多代）。

Fig. 4. 幂迭代法（PI）与用于临界性计算的 AMS 的比较方案 .

因此，达到由方程6 定义的探测器的概率可以与 k_{eff} 给出的存活概率进行比较（参见方程7）

$$\alpha_{\text{AMS}} = \prod_{i=1}^{I} \left(1 - \frac{K_i}{N}\right) = k_{\text{eff}}^{G} \tag{9}$$

其中， I 是 AMS 迭代的总次数， G 是目标代。因此，我们可以构建以下对 k_{eff}的估计

$$k_{\text{eff}} = \left\{ \prod_{i=1}^{I} \left(1 - \frac{K_i}{N} \right) \right\}^{1/G} . \tag{10}$$

这对于次临界系统成立，但当系统处于临界或超临界状态时便不再适用。在上述描述中，中子群体不受任何群体控制机制的约束，因此系统中的粒子数量会发生波动。这种机制可能导致接近临界的系统（以及超临界系统）中群体增长，从而增加一条径迹中的分支数。由于在重采样步骤中必须考虑这些分支，重新采样的分支数可能会随着迭代进行而增加，导致迭代速度越来越慢（同时占用越来越多的内存）。此外，与固定源计算一样，中子历史必须在某个点结束，才能按照前述方法对径迹进行排序；这在临界和超临界状态下可能会带来问题。因此，采用了无分支碰撞方法 [15]来限制一条径迹中的分支数（若不使用分裂，则分支数为一），从而避免这些问题。对于存在泄漏的系统，若让粒子通过统计权重承载群体波动，就会形成数值次临界系统（分裂不会产生粒子，部分粒子则会因泄漏出几何体而消失）。因此，只要使用无分支碰撞方法，无论 k_{eff} 如何，都可以再现跨代的群体衰减，这也正是采用 AMS 的理由。

III. 对一维平板反应器的应用

为了刻画 AMS 在临界性计算中的行为，我们在一维裸板反应堆上测试了该方法。我们在一个简单的一维案例中测试了该方法，其中的中子为单能中子，从而限制了探索空间所需的粒子数量，并使我们能够将结果与一个简单的解析解进行比较。

III.A. 裸板性质

所建模的系统是一维均匀裸板反应堆，两侧存在泄漏，板的总尺寸为 100 cm，范围从 $x_{min} = -50.0$ cm 到 $x_{max} = 50.0$ cm。选择该板尺寸是为了使系统的耦合较弱，具体取决于系统的截面，相关数据见表 I。在模拟输运中，碰撞后可能发生三种反应：裂变、俘获和各向同性散射。截面经过任意选取，以构建一个略微超临界的系统，从而评估 AMS 使用无分支碰撞方法模拟超临界系统的能力；所得 k_{eff} 等于 1。03437。简洁性

表 I 均匀一维棒的物理性质

裂变中子的平均数量（$\bar{\nu}$）	2.383
中子速度（v）	$2.2 \times 10^4\ cm.s^{-1}$
宏观截面	
裂变（Σ_f）	$0.250\ cm^{-1}$
吸收 (Σ_a)	$0.575\ cm^{-1}$
散射 (Σ_s)	$0.425\ cm^{-1}$
总计 (Σ_{tot})	$1.00\ cm^{-1}$

该系统还使我们能够利用扩散理论计算解析解 [43], ，并将其作为以下结果的比较基准

$$\phi(x) = \phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2(a+z_0)}x\right) \tag{11}$$

其中 ϕ_0 取决于归一化方式， a 为反应堆的半尺寸（此处为 $a = 50.0\ cm$），而 z_0是反应堆线性外推的端点，其定义如下

$$z_0 = \frac{2}{3\Sigma_{tr}} \tag{12}$$

其中 Σ_{tr} 为输运截面，由于所有碰撞在实验室参考系中均为各向同性，因此它等于总宏观截面 Σ_{t}。

测试并比较了不同的计算选项，以评估各选项对聚类和方差估计的影响。表II中列出了各案例对应的选项组合。为区分所用方法的影响，针对幂迭代进行了四种不同的模拟

。实际上，碰撞既可以通过模拟方式进行模拟，也可以使用无分支碰撞方法进行模拟。对于循环间的种群控制，采用了两种采样方法：简单的有放回抽样和梳理方法 [44]。对于 AMS，由于系统处于超临界状态，因此没有进行采用模拟碰撞的模拟，因为这会导致粒子数随代数增加而发散，进而带来计算成本问题。

表 II 计算参数说明

Case	种群控制	碰撞	重要性（仅限 AMS）
PI 模拟	有放回抽样	模拟	
PI 无分支	有放回抽样	无分支	
PI 梳理	梳理	模拟	
PI 梳理无分支	梳理	无分支	
AMS 无分支	AMS	无分支	$g + \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$

以下所有计算均从均匀裂变分布开始，在 $M = 1000$ 次独立运行中，采用每循环 1000 个中子（AMS 的 $N = 1000$ 条初始独立轨迹），共进行 $G = 1000$代连续代计算。刻意将每代粒子数设得较少，以便研究各种方法对中子聚类的影响。

最后，本研究中用于通量和 k_{eff} 的估计量依赖于参考文献 [41] 中详述的 在线计分程序。在每一代 i 中，使用碰撞估计量计算通量，并对其进行归一化，以便对连续代的空间形状取平均。k eff 估计量基于对 k_{eff} 的物理解释，其计算方式为某一代产生的中子数与前一代产生的中子数之比。

III.B. 非活跃循环的收敛与香农熵的行为

首先，考察了每一代中 k_{eff} 估计值的收敛情况，以及系统的香农熵[45] ，以确定非活跃循环的数量。首先， k_{eff} 的收敛情况如图5 所示，图中展示了每代的平均 k_{eff} ，该值是在 M 独立模拟中计算得出的，并以循环编号为函数

$$\overline{k_{\text{eff}}}(g) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{N_g^{(m)}}{N_{g-1}^{(m)}} \tag{13}$$

其中， $N_g^{(m)}$是模拟 m中第 g 代产生的中子数。每次计算的收敛速度都相当快。除统计涨落外（如后文所示，这些涨落不会影响平均值），所有方法似乎都收敛到同一个值。

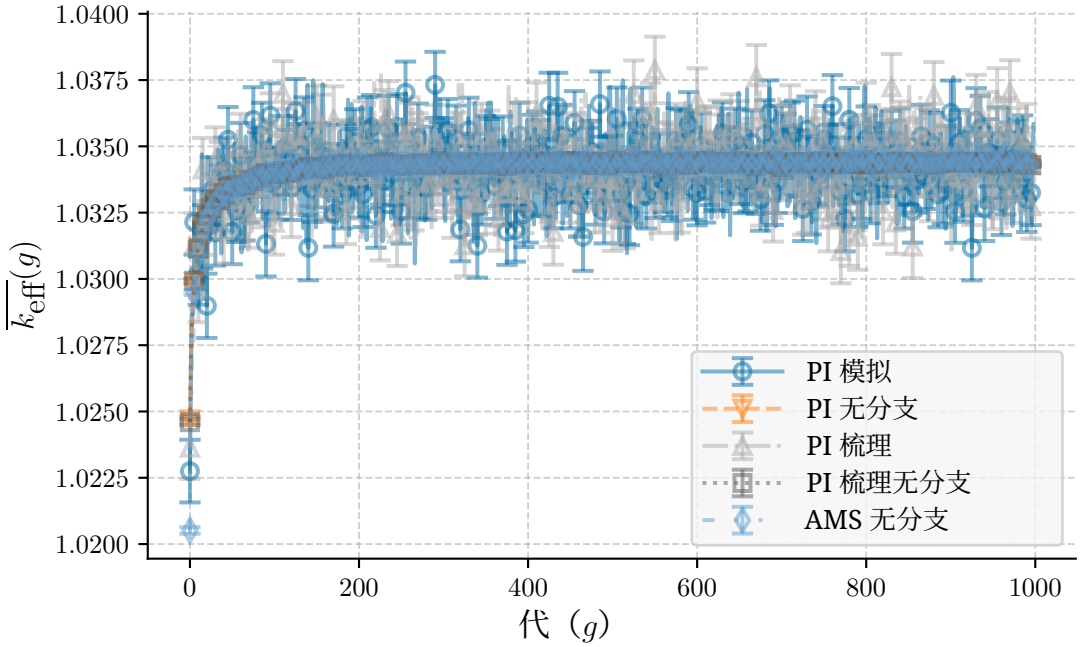


图 5. 平均 k_{eff} （基于 1000 次独立运行）收敛时的 3σ 置信区间。PI 无分支、PI 梳理无分支和 AMS 无分支的结果相同，且置信区间较窄。

其次，使用香农熵评估空间通量收敛 [45]，并确定计算平均得分时所舍弃的代数。每一代中，其在 M 次独立模拟上的平均值按如下方式计算

$$\overline{H}(g) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[-\sum_{l=1}^{N_{\text{bins}}}\frac{\phi_g^{(m)}(x_l)}{\phi_{g,tot}^{(m)}}\log_2\left(\frac{\phi_g^{(m)}(x_l)}{\phi_{g,tot}^{(m)}}\right)\right] \tag{14}$$

其中 N_{bins} 是沿 x 方向的空间分箱数量（此处为 100 个分箱）， $\phi_g^{(m)}(x_l)$ 是模拟 g 中分箱 x_l 在第 m代的归一化通量估计值，而 $\phi_g^{(m)}{}_{,tot}$ 是模拟 g 在循环 m 中对 x积分得到的归一化通量。结果绘于图6中。正如预期，熵的收敛速度慢于 k_{eff}。所有情况均被认为在 $g = 200$时达到了可接受的收敛程度。本文其余部分将非活跃循环数设为 200。

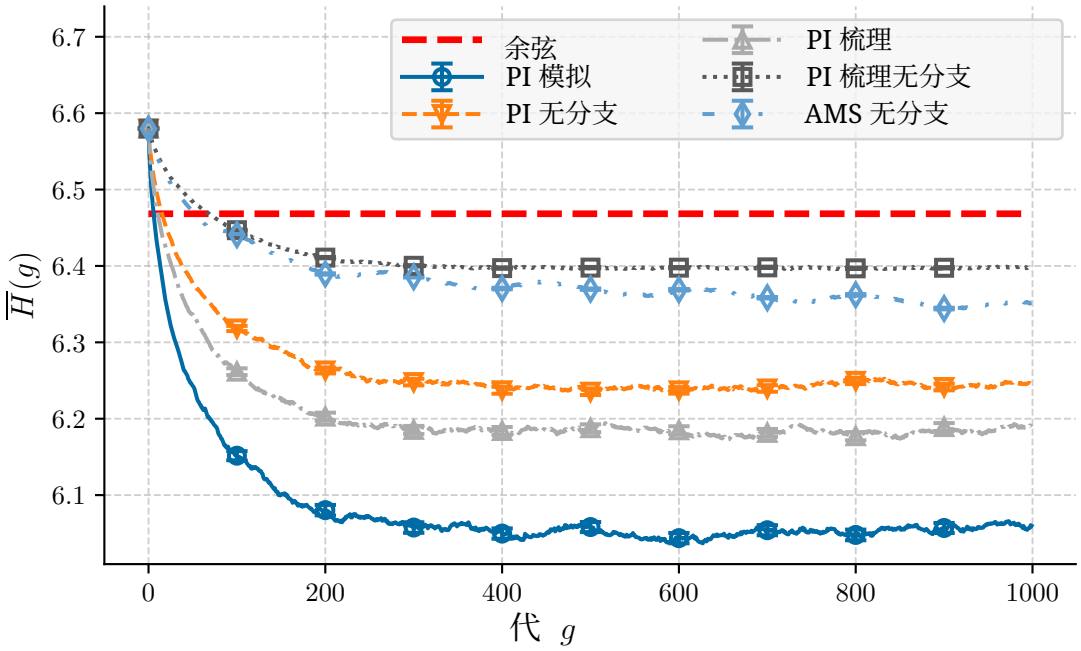


图 6. 平均熵随代数演变。

与 k_{eff}不同，香农熵（定义见方程 14，结果见图6）在不同方法下并未收敛至相同的渐近值，并且所有情况下都低于余弦形分布的理论值。此外，使用 AMS 时熵会出现振荡。这一现象可能是由于 AMS 向模拟中注入粒子的方式所致，可分解为两种潜在机制：系统的数值次临界性 (1)，以及 AMS 对新粒子的重新采样 (2)，如图 7所示。事实上，如第 II.B 节所述，为了使用 AMS 模拟衰减问题，通过无分支碰撞方法将系统设为数值次临界。因此，若没有种群控制，粒子种群会随代数增加而逐渐灭绝（见图 7中的机制 (1)）。至于新粒子的重新采样（详见第 II.A.3 节），算法会采样约 K 条新轨迹，其重要性接近由当前迭代的截断级别所定义的重要性等级。如方程8所述，粒子的代数主要决定其重要性值，因此我们有

$$g \leq I_{\text{kill}}(i) \leq g + 1. \tag{15}$$

新的　　因此，由算法采样的轨迹将分别在第 g 代以一个　　n

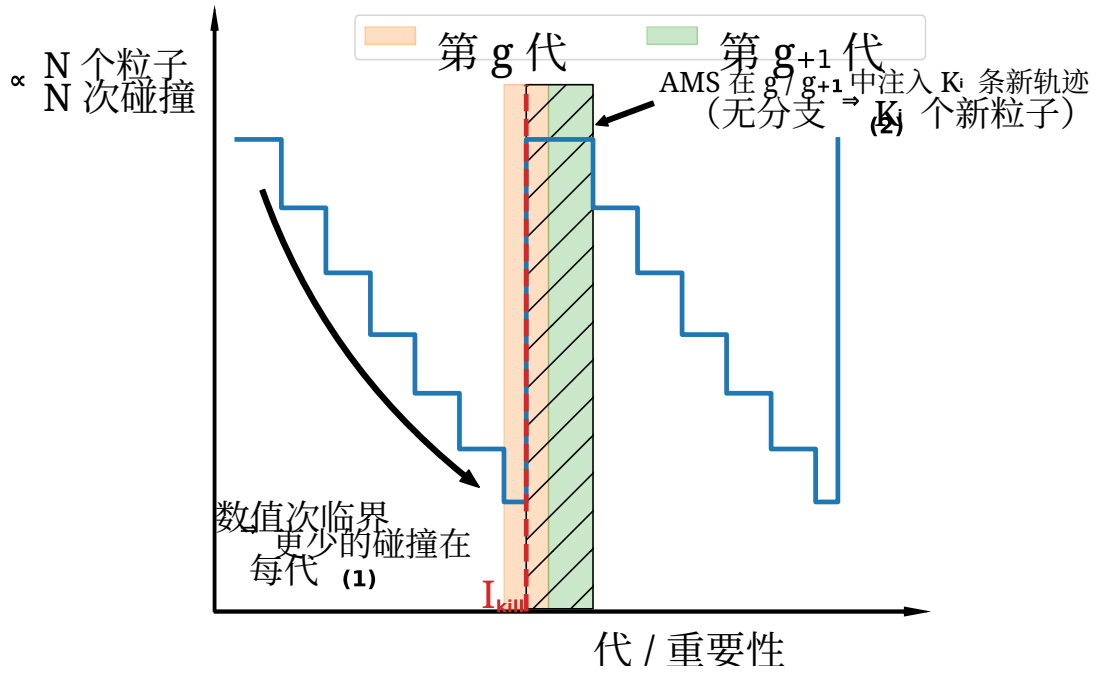


图7。AMS种群控制机制。在此示例中，所有重新采样的中子均出现在第 g 代。

重要性高于 $I_{\text{kill}}(i)$ 的代，或在第 $g+1$ 代开始（如图7中的虚线区域所示）。这将导致这些代中采样的总粒子数大幅增加（见图 7中的机制（2））。直观地说，系统中的粒子越多，其分布就越接近（也越平滑地接近）自然分布。因此，随着系统损失粒子，通量估计会因统计涨落而变得更加嘈杂。尽管这些涨落不会对平均估计值产生明显影响，但会稍微改变熵。因此，当系统中的粒子数在第 g 代和 $g+1$代通过 AMS 的重新采样增加时，第 $g+1$ 代的通量估计会比前几代更加平滑，从而导致熵增加（随后随着粒子消失，熵会下降，直到下一次重采样步骤，如此循环）。为了减小这些涨落的幅度，可以通过降低 K 的值来减少每次迭代中重新采样的粒子数。这也会提高熵的变化频率，因为粒子会更频繁地进行重新采样。为说明这一现象，计算了每代的平均碰撞次数（未加权）及其相应的熵，并绘制于图 8 中，适用于 $K/N = 25\%$ 和$K/N = 10\%$。使系统（在数值上）变得不那么次临界，也应当降低其频率

这些振荡；然而，它不应改变振荡的振幅。另一种在不改变模拟的情况下消除振荡的方法，是在更粗的空间网格上计算香农熵，这样可以减小空间波动。

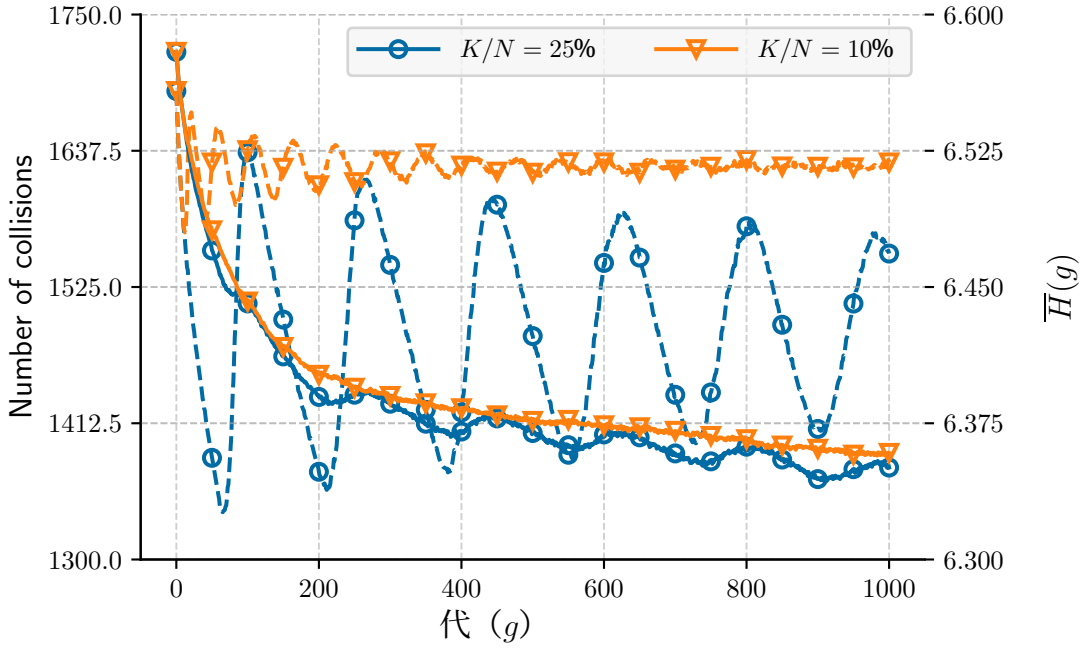


图 8. AMS + 无分支情形下，每代的平均熵（实线）和平均碰撞点数（虚线），对应 $K/N = 10\%$ 和 $K/N = 25\%$。

简而言之，AMS 似乎既不会延长也不会缩短收敛周期。此外，它可能产生的通量熵振荡是自然的，不会影响平均通量估计。

III.C. 基模估计

由 k-特征值方程描述的乘法系统，其基模由最大特征值 $k_0 = k_{\text{eff}}$ 及其对应的特征向量（即基模通量分布）表征。

对于前文所述的系统，k_{eff} 在 1000 次独立模拟中，每次模拟的 800 个活跃循环的分布如图所示9。采用无分支碰撞的情形显示出相当相似的分布，其平均值周围的离散度远小于非无分支情形。因此，就 k_{eff} 估计而言，无分支碰撞方法似乎是主要的解法

是方差缩减的贡献因素，而不同种群控制方法之间的差异并不十分显著。

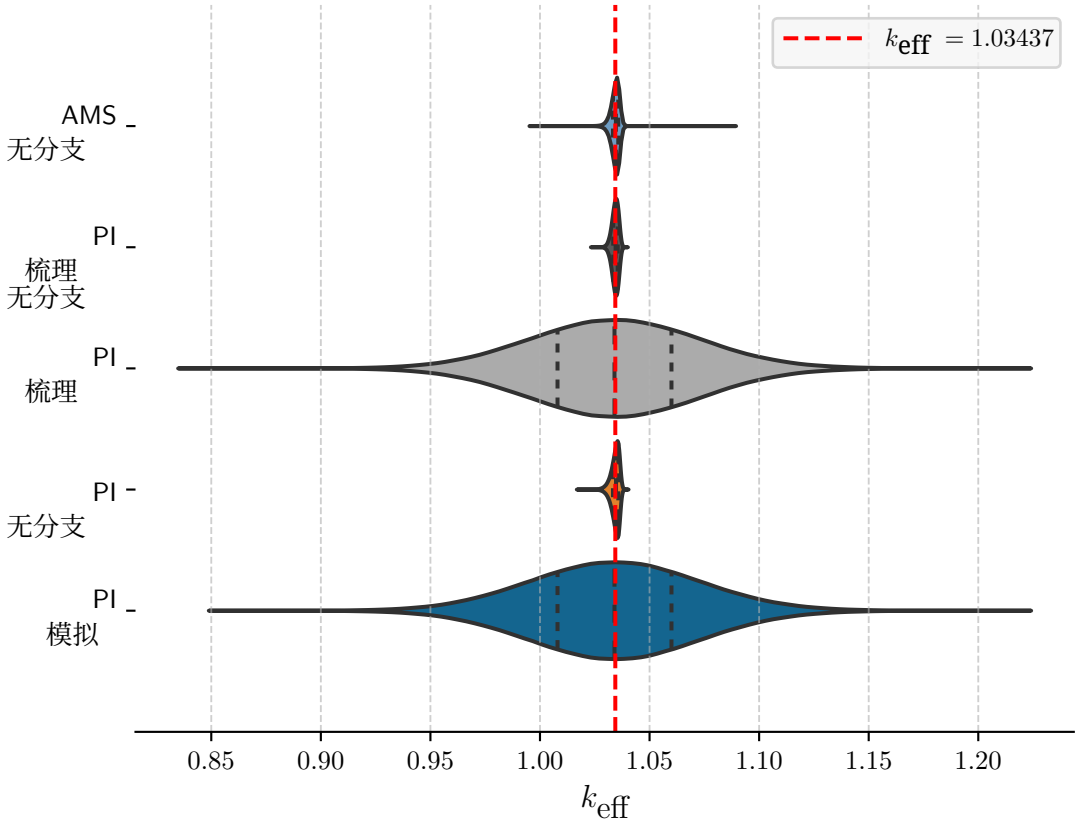


图 9. 收敛后 k_{eff} 的分布。虚线表示经验分布的第一、第二和第三四分位数。

除了特征值之外，还在 1000 次独立模拟中计算了连续 800 代的基通量，并绘于图10中。首先值得注意的是，不同方法所得解之间缺乏一致性，即使考虑了 3σ 置信区间。虽然这些解的 3σ 置信区间并未包含解析解，但与解析余弦差异最小的情形是：采用无分支碰撞并使用梳理进行种群控制的幂迭代，以及结合无分支情形的 AMS[b]。

这些观测到的通量形状变形可能是由影响[b]解析解是使用扩散理论计算的，因此预计会出现轻微偏差，尤其是在两侧。

对平均空间通量的估计。由于我们的目标是比较各方法在聚类方面的表现，因此每批模拟的粒子数量较少，出现这些效应是意料之中的；增加粒子数量则有助于减弱聚类效应，直至其消失。

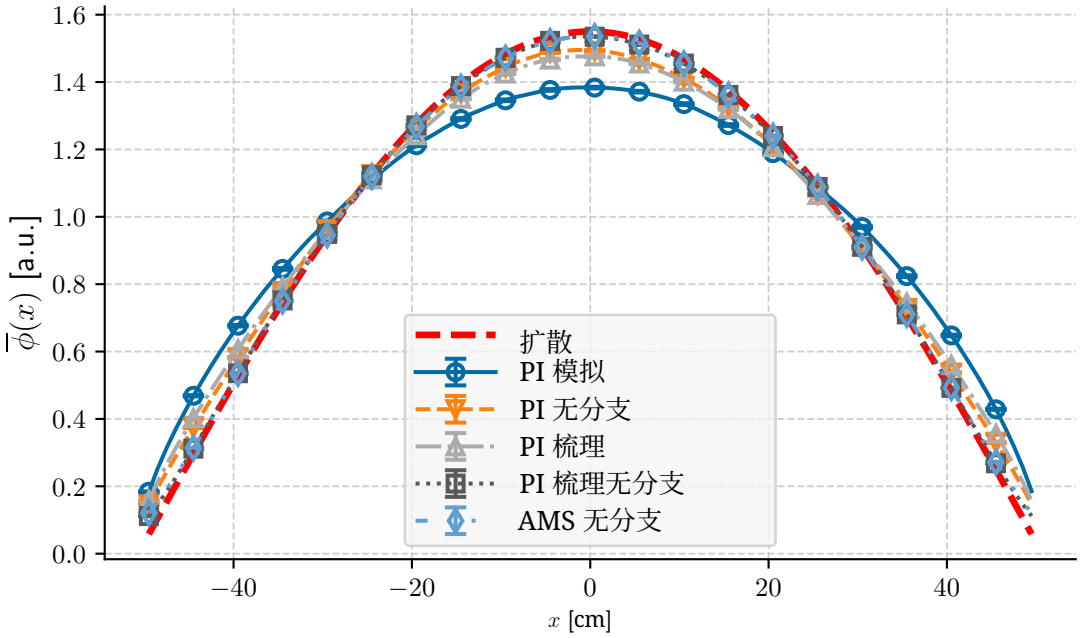


图 10. 空间通量剖面及其 3σ 置信区间（上），与解析余弦形解相比的相对（中）和绝对（下）偏差。

通过展平平均通量分布，中子簇的存在应会提高平均分布的熵，因为均匀分布的熵高于余弦分布的熵。与此同时，单代空间通量的估计比多代平均值噪声更大，这会降低熵；而单代中的簇应会进一步降低熵。这或许可以解释图6中显示的不同渐近值。表III列出了平均空间通量熵，以及代熵收敛到的渐近值（图6中所示的值）。我们可以看到，平均通量熵始终高于参考解熵，这是因为空间形状比解析扩散解更平坦；而单代达到的渐近熵则始终较低，这是由统计噪声造成的（如果减少用于计算熵的分箱数，噪声便可能降低）。在这方面，AMS 无分支和 PI 梳理无分支情形的偏差最小

（两种方法的偏差量级大致相同）与解析解相比，这意味着空间通量估计中的噪声更小，且平均值比其他情形更接近解析解。

表 III
各案例在源收敛期间达到的渐近熵，以及对活跃循环的通量分布取平均后得到的熵值。差值是相对于解析解计算的；负差值表示该分布比解析解更有序（就熵而言），而正差值表示该分布比解析解更无序（更接近均匀分布）。

Case	收敛熵		平均通量熵	
	值	差值	值	差异
解析解	6.4673	-	6.4673	-
PI 模拟	6.0525	-4.148×10^{-1}	6.5424	7.511×10^{-2}
PI 无分支	6.2427	-2.246×10^{-1}	6.4975	3.020×10^{-2}
PI 梳理	6.1838	-2.835×10^{-1}	6.5088	4.154×10^{-2}
PI 梳理无分支	6.3976	-6.969×10^{-2}	6.4687	1.375×10^{-3}
AMS 无分支	6.3629	-1.044×10^{-1}	6.4704	3.168×10^{-3}

下一节将进一步考察与聚簇现象相关的平均通量形状偏差。

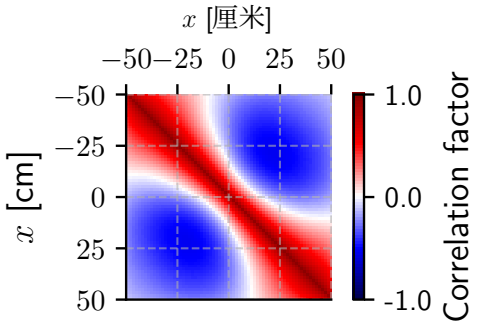
III.D. AMS 对聚类的影响

为评估簇出现的概率，我们使用皮尔逊相关系数的经验估计值，计算了由以下方式定义的各空间分箱之间的空间相关性

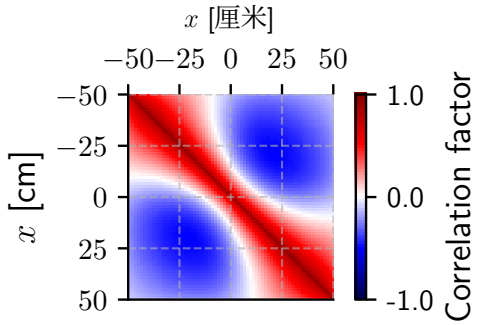
$$\rho_{ij} = \frac{Cov\left[\phi(x_i), \phi(x_j)\right]}{\sigma\left[\phi(x_i)\right]\sigma\left[\phi(x_j)\right]} \tag{16}$$

其中 $Cov\left[\phi(x_i)\ \phi(x_j)\right]$ 表示空间分箱中通量估计值之间的协方差 x_i 和 x_j，而$\sigma\left[\phi(x_i)\right]$ 表示空间分箱中通量的标准差 x_i。结果见图11 和 12 ，对应 100 个空间分箱。PI 模拟、PI 无分支和 PI 梳理情形表现出相近水平的空间相关性（见图 11）；而梳理无分支和 AMS 无分支情形的空间相关性几乎不存在，如图 12所示。由于这些相关性与簇形成的概率密切相关 [22], 这意味着上述两种情形最不容易出现中子团簇问题。较高的相关性水平与系统中相关粒子对的数量有关，而该数量会随着代数增加

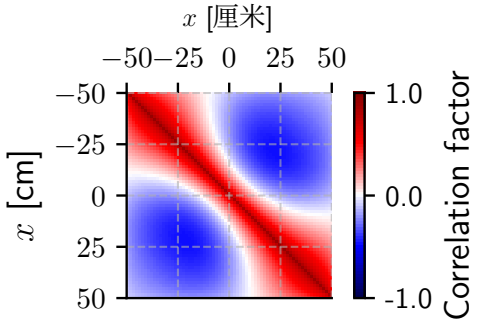
由于独立家族[c] 灭绝 [23, 27]。



(a) PI 模拟

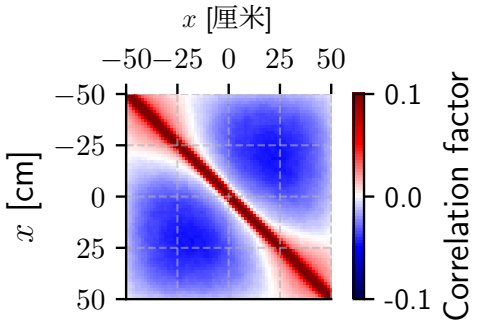


(b) PI 梳理

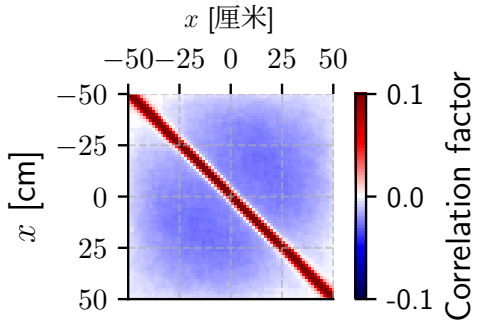


(c) PI 无分支

图 11. 空间相关性（尺度范围为 -1 至 1）



(a) PI 梳理无分支



(b) AMS 无分支

图 12. 空间相关性（尺度设定为从 -0.1 到 0。1）

[c]中子族定义为初始存在的中子中所有源自同一祖先的中子的集合。

关于独立中子族的损失，图13 表明，无分支碰撞方法和种群控制在保留不相关粒子对方面都发挥着不可忽视的作用。事实上，梳理方法和 AMS 似乎都能使更多中子谱系在多代中得以保留。

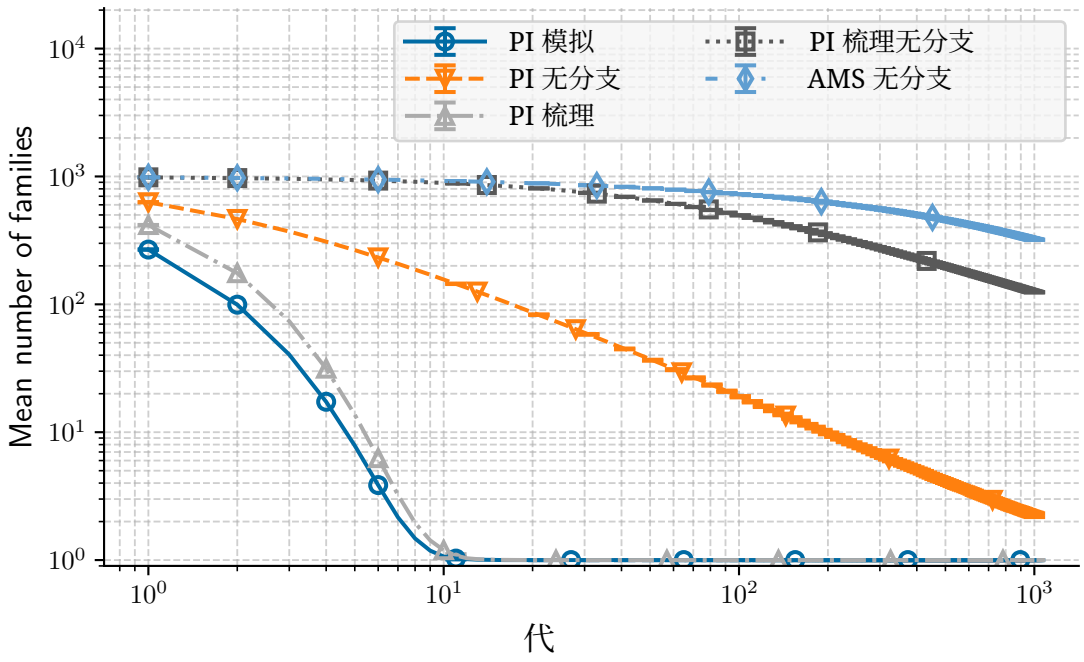


图13。各代中的平均族数（对于所有情况，第0代的族数均等于1000）。

在功率迭代方法中，粒子可能因输运阶段中的物理现象而死亡，也可能在群体控制步骤中被梳理掉或未被选中进行复制。为更详细地考察这两种机制，图14 和15分别给出了在输运阶段和群体控制步骤中从模拟中移除的独立族数量。

关于输运过程中发生的死亡，如图14所示，在未使用无分支碰撞时，其相对数量更高，因为该方法通过防止族因俘获而死亡，减少了在输运步骤中消失的不相关粒子对数量。

粒子簇可能会形成，这是因为粒子消亡与新粒子诞生之间存在不对称：堆芯各处都可能发生粒子消亡，而新粒子只会在发生裂变时产生。

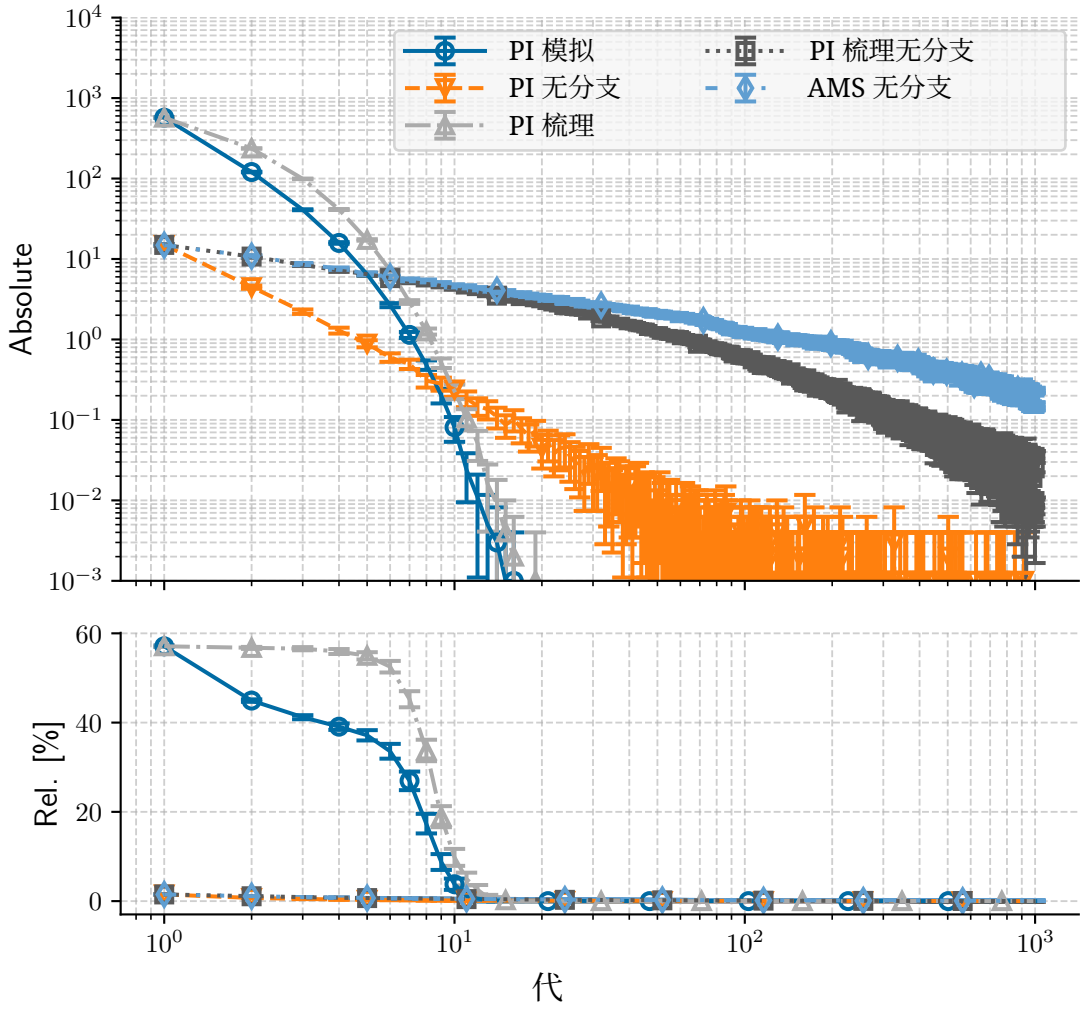


图 14. 生灭过程中各代被杀死的独立中子族平均数量的绝对值（上）和相对值（下）

位置。因此，调节粒子群体也会影响粒子簇的形成：通过移除独立族（它们不会在群体控制步骤中被采样），降低不相关粒子的数量。此举还有助于粒子重新聚集到几何体的某些区域，因为从裂变银行中采样某一区域内粒子的概率取决于该区域的粒子密度，因此会偏向粒子簇等高密度区域。从这一角度来看，梳理预计比有放回抽样更不利于粒子簇的形成，因为梳理对粒子可被采样的次数有限。如图 15所示，梳理方法表现出色，粒子消亡数量很少

速率约为几个百分点。同时，由于 AMS 在重新采样过程中不会移除粒子，因此 AMS 并未出现在绝对结果（上图）中。这是因为它从不会消灭独立族，因为“种群控制”是在重采样步骤中执行的，见第 II.A.3节，该步骤只会重新生成粒子。如果不考虑任何重要性函数，通过将系统建模为 Fleming-Viot 粒子系统，最终有可能获得相同的效果[d]。最后，这些观察结果与近期关于种群控制对蒙特卡罗迭代裂变源计算中聚类作用的研究发现一致[27]。值得注意的是，当种群控制通过有放回抽样完成时，使用无分支碰撞（图 15中的 PI 无分支情形）会导致比模拟碰撞（PI 模拟情形）终止更多的独立族。这是因为模拟碰撞在输运过程中导致了更多的死亡，因此，一旦达到群体控制步骤，独立族的总数就更少，如图 15 底部图中所示，该图给出了 PI 模拟情形下被消灭的族群相对数量。

提醒一下，每周期粒子数被有意设得过低，以便形成中子簇，从而比较各种方法在聚类问题上的表现。最终，AMS 和梳理方法若与无分支碰撞结合，都有助于通过保留更多独立族来减轻聚类效应。在生产计算中，粒子数会更高，以减少平均值的偏差。然而，对于弱耦合系统，如果这种偏差限制了每一代模拟的粒子数，那么采用合适的方法减少所需的中子数，将有助于提升计算的整体性能。

III.E. 方差估计

除了聚类导致平均通量估计出现偏差外，由于得分是在相关世代上取平均，临界性计算的方差估计也可能出现偏差。为了评估几何体沿 x 轴的通量方差估计偏差，我们计算了世代相关系数随中子沿 x 的位置变化的函数。与空间

[d]为了表征该系统在其存续条件下的状态

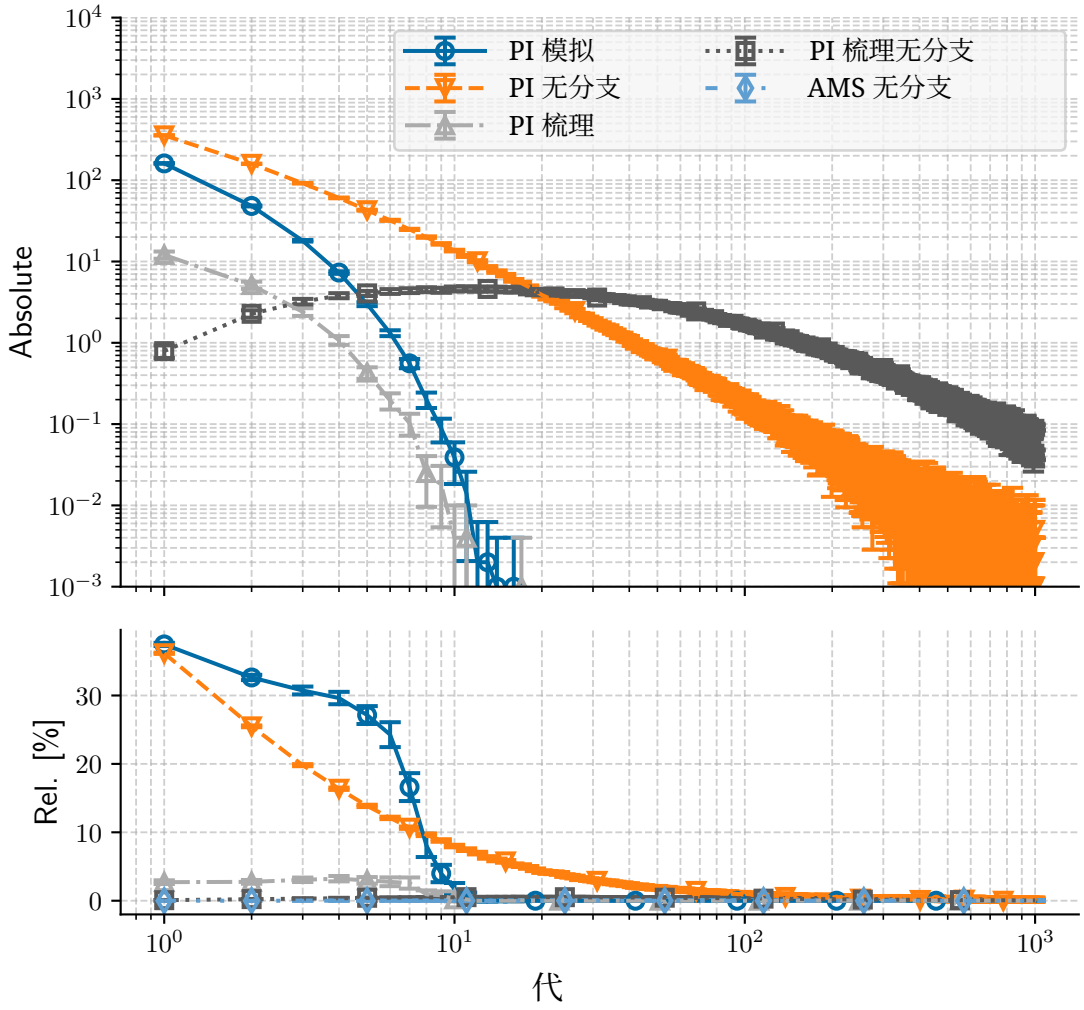


图 15. 种群控制在各代中杀死的独立中子族平均数量的绝对值（上图）和相对值（下图）

相关性　相关性一样，代际相关性也是使用皮尔逊相关系数估计的

$$\rho_g(x_l) = \frac{Cov\left[\phi_0(x_l), \phi_g(x_l)\right]}{\sigma\left[\phi_0(x_l)\right]\sigma\left[\phi_g(x_l)\right]} \tag{17}$$

其中 $\rho_g(x_l)$ 是通过 M 独立模拟计算得到的两个相隔 g 代的 x_l 空间分箱中通量估计的相关系数，$\phi_0(x_l)$ 和 $\phi_g(x_l)$ 分别是第一个和第 $k+1$个活跃代中空间分箱 x_l 的通量估计，而 $\sigma\left[\phi_0(x_l)\right]\sigma\left[\phi_g(x_l)\right]$是它们标准差的乘积。图16 展示了代际

在 PI 模拟情况下，不同空间分箱中的相关性；预计这种情况下的相关性最强。图中，沿 x轴出现两个局部极大值（约为 -25 cm 和 25 cm，分别对应板层长度的 $1/4$ 和 $3/4$ ），每代还出现三个局部极小值，约位于 -50、0 和 50 cm 处（分别对应总长度的 0、 $1/2$ 和 1 ）。此前的研究已观察到这种现象，这是特征向量高阶模态被激发所致，详见参考文献 [46]。为比较不同的计算结果，图 x展示了沿 17 中 $x = 25$ cm 处的剖面；该位置是相关性最强的位置之一。此图表明，当梳理或 AMS 与无分支碰撞方法结合使用时，代际相关性会迅速降至可忽略的水平。简言之，在这两种情况下，实际方差应与蒙特卡罗计算给出的表观方差非常接近。计算循环相关性，可在估算品质因数时求得实际方差。

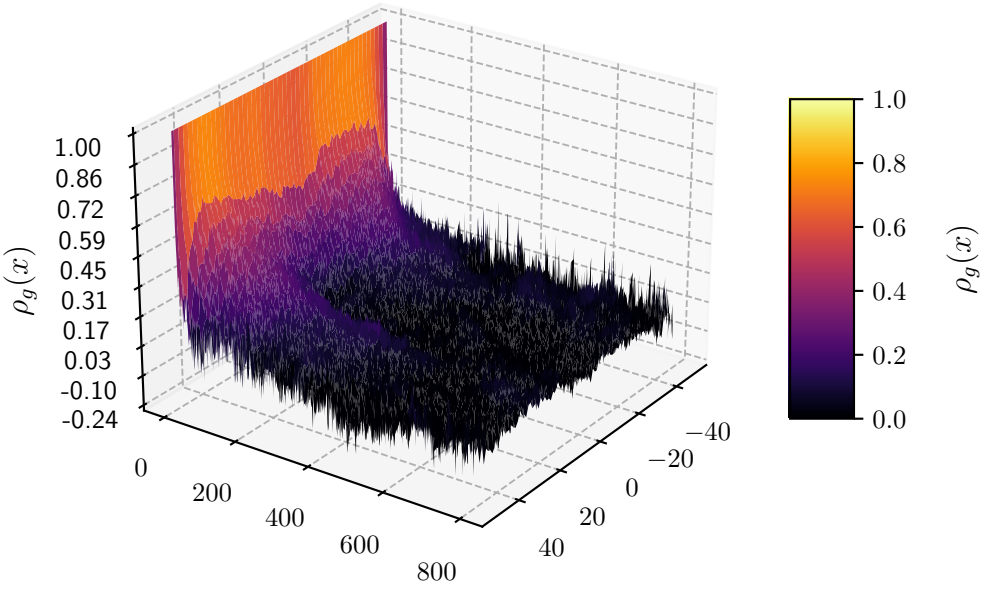


图 16. PI 模拟案例的循环相关性。

In o为了比较这些方法的效率，计算了荧光的品质因数（FoM） x

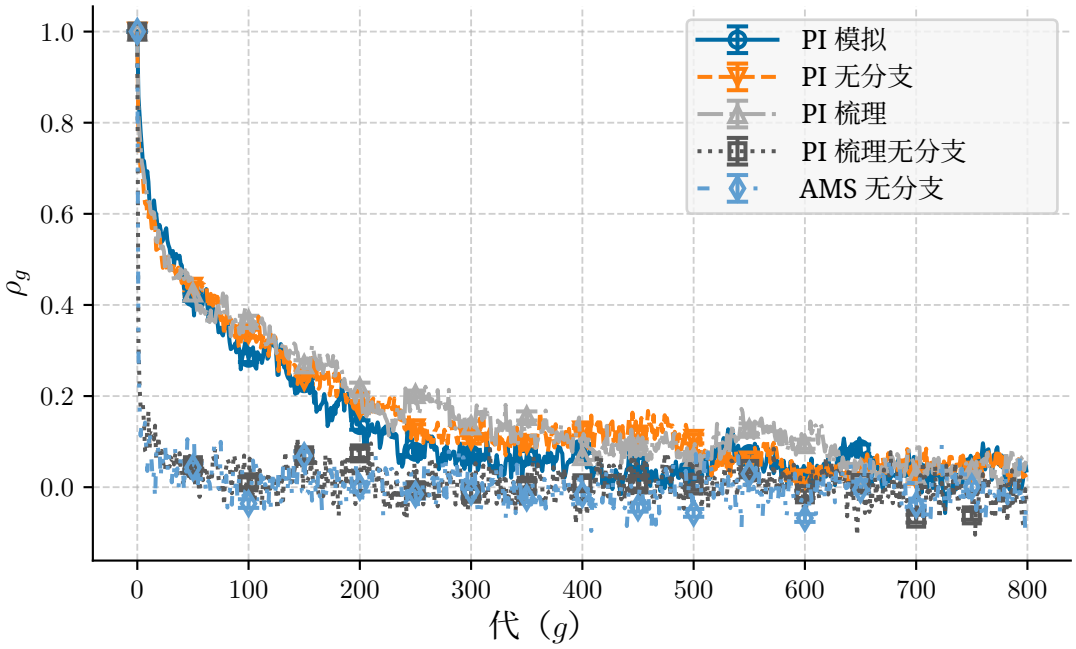


图 17. $x = 23.5$ cm 处的循环相关性。

在每个空间分箱中，计算方式如下 x_l

$$FoM(x_l) = \frac{1}{\sigma^2_{corr}(x_l) T_{\text{calc}}} \tag{18}$$

其中， T_{calc} 是计算时间， σ^2_{corr} 是采用比耶内梅恒等式并考虑代际相关性计算得出的得分方差，因此

$$\sigma^2_{corr}(x_l) = \frac{\sigma^2(x_l)}{N} \left[1 + 2 \sum_{g=1}^{G-1} \left(1 - \frac{g}{G} \right) \rho_k(x_l) \right] \tag{19}$$

其中 $\sigma^2(x_l)$ 是空间分箱 x_l中的通量估计值之间的方差， N 是用于计算平均通量的样本大小， G 是活跃循环的数量，而 $\rho_k(x_l)$ 是方程17中定义的代际相关系数。

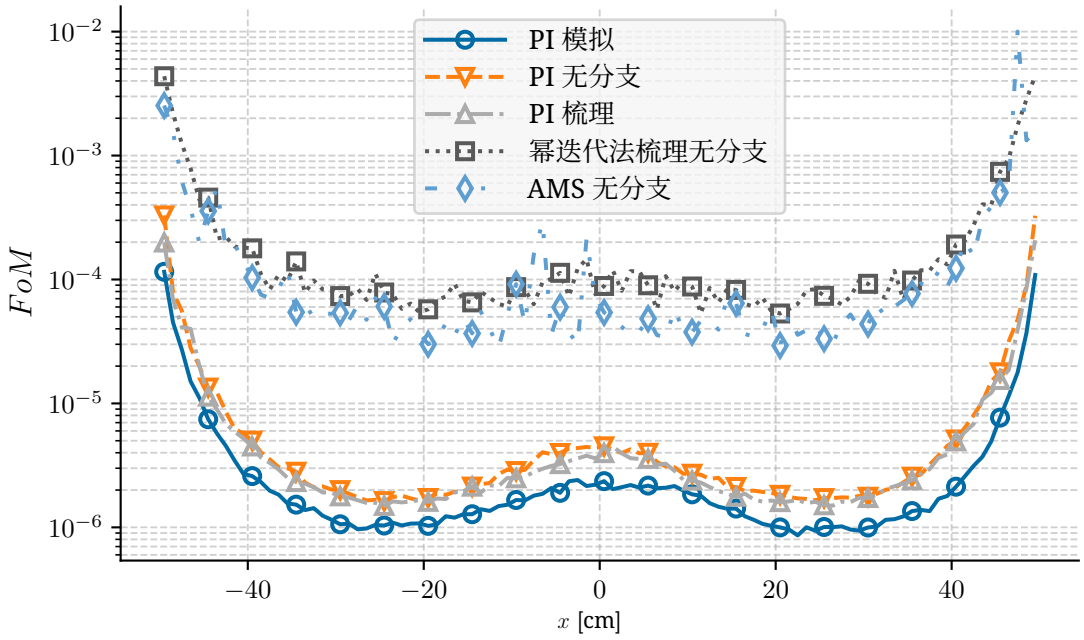
计算时间列于表IV中。所有方法的数量级相近，整体而言，梳理比其他方法更快，而 AMS 稍慢。梳理速度较快，是因为源中子的采样方式比有放回采样更高效。对于 AMS，由于某些代中发生的碰撞较少（见图 8），其输运部分比幂迭代稍快

。似乎有相当一部分时间花在向 AMS结构中添加点的函数上，这部分或许可以优化。

表 IV 每次计算的计算时间 [s]

Case	总计	输运	采样	评分	轨迹排序	添加点
PI 模拟	1.822×10^4	1.896×10^3 (10) %	7.954×10^3 (43) %	6.134×10^3 (33) %		
PI 无分支	1.779×10^4	1.859×10^3 (10 %)	7.805×10^3 (43 %)	5.949×10^3 (33 %)		
PI 梳理	1.497×10^4	2.066×10^3 (13 %)	4.377×10^3 (29 %)	6.245×10^3 (41 %)		
PI 梳理无分支	1.392×10^4	1.896×10^3 (13 %)	3.990×10^3 (28 %)	5.885×10^3 (42 %)		
AMS 无分支	2.094×10^4	1.660×10^3 (7 %)	4.166×10^1 (0 %)	1.199×10^4 (57 %)	3.638×10^1 (0 %)	3.867×10^3 (18 %)

空间通量的品质因数结果如图18所示。对于所有 x，PI 梳理无分支和 AMS 无分支两种情况表现出较高的品质因数，比其他三种情况高出约一至两个数量级。总体而言，通过适当的种群控制保留尽可能多的独立粒子对，并结合可降低裂变链长度方差的无分支碰撞方法，可提高空间通量的品质因数。从这个意义上说，AMS 似乎是梳理方法的一种同等替代方案。



x 上通量估计的品质因数。

IV. 结论

本研究将最初为降低方差而设计、并用于固定源模拟的自适应多层分裂（AMS）算法扩展至蒙特卡罗中子临界计算。我们将采用该方法得到的结果，与使用幂迭代算法对一维均匀反应堆板进行蒙特卡罗计算所得的结果进行了比较。为评估种群控制对相关性和聚类的影响，我们在幂迭代中采用了多种种群控制方法。我们比较了不同方法在平均 k_{eff} 、空间通量以及空间相关性和代际相关性方面所得的结果。

由于 AMS 不会像常规粒子群控制技术那样消灭粒子，因此能够大幅降低相关性。它与无分支碰撞方法结合后，所得结果几乎与采用梳理和无分支碰撞方法时使用幂迭代法得到的结果完全一致。与其他情况（采用有放回抽样的幂迭代法和／或模拟碰撞）相比，AMS 无分支方法和

梳理无分支方法展现出的空间相关性和代际相关性都接近于零，因此几乎没有聚类，尽管每代中子数较少。总的来说，我们成功使用 AMS 无分支碰撞计算出基模通量分布，其品质因数（FoM）是基本幂迭代法的 100 倍，因此与采用梳理和无分支碰撞方法的幂迭代法所得品质因数相近。

由于系统本身的特点，数值应用中所选的重要性函数相当简单。实际上，在单速均匀问题中，我们预计改变重要性的空间形状不会显著提升品质因数。要进一步刻画该方法的行为，尤其是在弱耦合系统中的表现，可能需要对具有非平凡伴随解的复杂系统进行建模。在这类系统中，中子难以到达某些区域，因此重要性函数的作用会更加显著；与结合无分支碰撞使用的梳理方法相比，它有可能进一步提升品质因数。

这项工作的另一个研究方向，则是考察能够彻底消除重要性图的方法。实际上，在临界性模拟中使用 AMS，旨在刻画系统在以存续为条件时的渐近行为（例如， k_{eff} 和基通量）。从本质上说，这种方法并不需要重要性函数来对轨迹排序并推动中子历史随时间演进。可以将系统视为Fleming-Viot过程，从而利用种群控制再生粒子，同时不淘汰独立族，以此摆脱这一函数。

最后，更重要的是，既然 AMS 能够计算稳态空间通量分布，而不受系统反应性的影响，那么进一步将其用于模拟动力学计算中的瞬态也应当是可行的。因此，可以在特定时间区间内定义目标探测器，例如，可以关注降低功率峰值期间功率分布的方差。为了在特定时间区间内实现方差缩减，重要性函数必须考虑粒子在时间上的位置。因此，能够计算时变伴随通量将大有裨益。从时不变伴随通量转向时变伴随通量，也能将缓发中子先驱核的重要性纳入考量。事实上，AMS 分支还可以将粒子类型作为参数，从而能够根据粒子使用多个重要性函数

性质。

致谢

作者谨此感谢 Benjamin Dechenaux 对本文提出的宝贵意见，并感谢 Tony Lelièvre 就自适应多层分裂方法进行的有益讨论。

参考文献

[1] D. Dickinson 和 G. E. Whitesides, 《阵列临界性计算的蒙特卡罗方法》, 《核技术》, **30**, *2*, 166（1976）。

[2] W. Goad 和 R. Johnston, 《用于临界性问题的蒙特卡罗方法》, 《核科学与工程》, **5**, *6*, 371（1959）。

[3] M. R. Mendelson, 《热中子反应堆的蒙特卡罗临界计算》, 《核科学与工程》, **32**, *3*, 319（1968）。

[4] J. G. MOORE, 《通过蒙特卡罗方法求解临界性问题》, 《核科学与技术进展》, 73–98（1976）; 10.1016/B978-0-12- 029309-4.50009-X。

[5] H. Rief 和 H. Kschwendt, 《基于蒙特卡罗的反应堆分析》, 《核科学与工程》, **30**, *3*, 395（1967）。

[6] D. E. Cullen、C. J. Clouse、R. Procassini 和 R. C. Little, 《静态临界性和动态临界性：二者是否不同？》, 劳伦斯利弗莫尔国家实验室（LLNL）, 加利福尼亚州利弗莫尔（美国）（2003）。

[7] E. Dumonteil 和 T. Courau, "优势比评估与蒙特卡罗临界性模拟：应对高优势比系统", 《核技术》, **172**, *2*, 120（2010）; 10.13182/NT10-A10899。

[8] J. Lieberoth, "采用蒙特卡罗技术求解玻尔兹曼输运方程的静态特征值问题。" 《*Nukleonik*》, *11*: *213-19*（*1968*年*9*月）。（1968年）网址 https://www.osti.gov/biblio/4835730。

[9] R. C. Gast, "蒙特卡罗特征函数迭代策略：公平与不公平的方法（轻水增殖反应堆开发计划）", （1969年）网址 https://www.osti.gov/biblio/6720467。

[10] D. MacMillan, 《迭代源计算的蒙特卡罗置信限》, 《核科学与工程》, **50**, *1*, 73（1973）。

[11] E. M. Gelbard 和 R. Prael, 《阿贡国家实验室的蒙特卡罗工作》（1974）。[12] R. Brissenden 和 A. Garlick, 《通过蒙特卡罗方法估算有效增殖因子及其误差时的偏差》, 《核能年鉴》, **13**, *2*, 63（1986）。[13] T. Ueki、F. B. Brown、D. K. Parsons 和 D. E. Kornreich, 《蒙特卡罗临界计算中的自相关与优势比》, 《核科学与工程》, **145**, *3*, 279（2003）。

[14] E. Dumonteil, F. Malvagi, A. Zoia, A. Mazzolo, D. Artusio, C. Dieudonné 和 C. De Mulatier, “蒙特卡罗临界性模拟中的粒子聚类”, 《核能年鉴》, **63**, 612（2014年）。

[15] I. Lux 和 L. Koblinger, 蒙特卡罗粒子输运方法, CRC出版社（1991年）。[16] T. Ueki、T. Mori 和 M. Nakagawa, “蒙特卡罗特征值计算中的误差估计及其偏差”, 《核科学与工程》, **125**, *1*, 1（1996年）; 10.13182/NSE97- 1。

[17] E. Dumonteil、R. Bahran、T. Cutler、B. Dechenaux、T. Grove、J. Hutchinson、G. McKenzie、A. McSpaden、W. Monange、M. Nelson 等, “斑块状核链式反应”, 《通讯物理》, **4**, *1*, 1（2021年）。

[18] A. Zoia、E. Dumonteil、A. Mazzolo、C. De Mulatier 和 A. Rosso, “受限几何空间中的分支布朗运动聚类”, 《物理评论*E*》——统计、非线性与软物质物理, **90**, *4* (2014); 10.1103/PHYSREVE.90.042118。[19] J. Miao、B. Forget 和 K. Smith, “利用多类型分支过程预测蒙特卡罗特征值模拟的相关系数”, 《核能年鉴》, **112**, 307（2018）; 10.1016/j.anucene.2017.10.014。[20] P. Cosgrove、E. Shwageraus 和 G. Parks, “中子聚类作为蒙特卡罗燃耗不稳定性的驱动因素”, 《核能年鉴》, **137**, 106991（2020）。[21] P. Cosgrove、M. A. Kowalski、E. Shwageraus 和 G. T. Parks, “在蒙特卡罗中通过中子源注入应对中子聚类”, 《*EPJ*会议网络》, **247**,

04022 （2021年）；10.1051/epjconf/202124704022。，网址 https://doi.org/10.1051/epjconf/202124704022。

[22] C. De Mulatier，《随机中子输运的随机游走方法》，博士论文，巴黎萨克雷大学（ComUE）（2015年）。

[23] E. Dumonteil、G. Bruna、F. Malvagi、A. Onillon 和 Y. Richet，《非耦合与受限介质的蒙特卡罗临界性模拟中的聚类与行波》，《核工程与技术》，**49**，*6*，1157（2017年）。

[24]C. De Mulatier，E. Dumonteil，A. Rosso，和A. Zoia，《重新审视临界灾变》，《统计力学杂志：理论与实验》，**2015年**，*8*，P08021（2015）；10.1088/1742-5468/2015/08/P08021。，网址 https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2015/08/P08021https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2015/08/P08021/meta。

[25] B. Houchmandzadeh，E. Dumonteil，A. Mazzolo，以及A. Zoia，《中子涨落：延迟的重要性》，《物理评论*E*》—统计、非线性与软物质物理，**92**，*5*，052114（2015年）；10.1103/PHYSREVE.92.052114/FIGURES/8/MEDIUM.，网址：https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.92.052114。

[26] T. Bonnet，D. Mancusi，以及A. Zoia，《含瞬发与延迟生灭事件的扩散模型的时空相关性》，《物理评论*E*》，**105**，*6*，064105（2022年）；10.1103/PhysRevE.105.064105.，网址：https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.105.064105。

[27] T. M. Sutton，《“朝着更现实的中子聚类分析迈进”，《核科学与工程》，1–12（2022年）；10.1080/00295639.2022.2065872，网址：https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00295639.2022.2065872。

[28]I. Mickus 和 J. Dufek，《中子聚类是否会影响蒙特卡罗临界计算中的计数误差？》《核能年鉴》，**155**，108130（2021年）；10.1016/J.ANUCENE.2021.108130。

[29] W. H. Fleming 和 M. Viot，《群体遗传理论中的一些测度值马尔可夫过程》，《印第安纳大学数学杂志》，**28**，*5*，817（1979年）。

[30] A. Asselah、P. A. Ferrari、P. Groisman 和 M. Jonckheere，《Fleming–Viot 选择最小准平稳分布：Galton–Watson 情形》，*Annales de l'InstitutHenri Poincaré, Probabilités et Statistiques*，第 52 卷，647–668 页，Institut Henri Poincaré（2016年）。

[31] F. Cerou、B. Delyon、A. Guyader和M. Rousset，《自适应多层分裂的渐近正态性》，*https://doi.org/10.1137/18M1187477*，**7**，*1*，1 (2019); 10.1137/18M1187477.,URL https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/18M1187477。

[32] W. L. Dunn 和J. K. Shultis，探索蒙特卡罗方法，爱思唯尔（2011）。

[33] L. Ussachoff，《中子重要性、反应堆动力学和微扰理论的方程》，原子能和平利用国际会议论文集，日内瓦，瑞士，*1955*年*8*月*8*日至*21*日，第5卷，503–510页（1956）。

[34] H. Hurwitz，《伴随通量的物理解释：迭代裂变概率》，《海军反应堆物理手册》，864–869（1964年）。

[35] J. Lewins，重要性：伴随函数，培格曼（1965年）。

[36] F. Cérou 和 A. Guyader，《稀有事件分析的自适应多层分裂》，《随机分析与应用》，**25**，*2*，417（2007年）。

[37]H. Louvin，E. Dumonteil，T. Lelièvre，M. Rousset和C. M. DIop，《蒙特卡罗粒子输运的自适应多层分裂》，《*EPJ*会议网络》，**153**，06006（2017年）；10.1051/EPJCONF/201715306006。，网址 https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/abs/2017/22/epjconf_icrs2017_06006/epjconf_icrs2017_06006.html。

[38] E. Brun, F. Damian, C. M. Diop, E. Dumonteil, F. X. Hugot, C. Jouanne, Y. K. Lee, F. Malvagi, A. Mazzolo, O. Petit, J. C. Trama, T. Visonneau 和 A. Zoia，"TRIPOLI-4®，法国原子能和替代能源委员会、法国电力公司和阿海珐的参考蒙特卡罗程序"，《核能年鉴》，**82**，151（2015年）；10.1016/J.ANUCENE.2014.07.053。

[39] C.-E. Bréhier、M. Gazeau、L. Goudenege、T. Lelièvre 和 M. Rousset，《某些广义自适应多层分裂算法的无偏性》，《应用概率年刊》，**26**，*6*，3559（2016年）。

[40] H. Louvin、E. Dumonteil、T. Lelièvre、M. Rousset 和 C. M. Diop，《用于蒙特卡罗粒子输运的自适应多层分裂》，《*EPJ*会议网络》，第153卷，06006，EDP Sciences（2017年）。[41] H. Louvin，《蒙特卡罗粒子输运自适应方差缩减技术的开发》，博士论文，巴黎萨克雷大学（2017年）。[42] C. E. Bréhier 和 T. Lelièvre，《利用自适应多层分裂估计某些随机过程尾部概率的一类新得分函数》，《混沌：跨学科非线性科学期刊》，**29**，*3*，033126（2019年）；10.1063/1.5081440。[43] P. Zweifel，反应堆物理学（1977年）。[44] T. E. Booth，《一种用于蒙特卡罗的权重（电荷）守恒的重要性加权梳状算法》，洛斯阿拉莫斯国家实验室（LANL），洛斯阿拉莫斯，新墨西哥州（美国）（1996年）。

[45] F. B. Brown，《关于使用裂变分布的香农熵评估蒙特卡罗临界性计算收敛性》，美国核学会反应堆物理专题会议（*PHYSOR 2006*）。加拿大核学会，加拿大（2006）。

[46] E. Dumonteil 和 F. Malvagi，《TRIPOLI-4 临界性计算中方差估计偏差的自动处理》，*2012* 年国际核电站先进技术大会论文集——*ICAPP '12*，芝加哥，伊利诺伊州（美国）（2012）。