arXiv:2301.03948v1 [math.FA] 10 Jan 2023

某些乘积巴拿赫代数的范数唯一性与忠实性

H. V. Dedania

印度古吉拉特邦瓦拉布维迪亚纳加尔 388120，萨达尔·帕特尔大学数学系

J. G. Patel*

印度古吉拉特邦瓦拉布维迪亚纳加尔 388120，萨达尔·帕特尔大学数学系

Abstract. 我们证明，忠实性和范数唯一性这两种性质在不同的乘积代数中保持稳定，例如直和积代数、卷积乘积代数和模积代数。此外，我们展示了这两种性质在零积代数中并不稳定，并给出一个关于代数范数的共同充分条件，以确保 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 中$\mathcal{A}^2 = \text{span}\{ab : a, b \in \mathcal{A}\}$ 的余维有限（当$\overline{\mathcal{A}^2} = \mathcal{A}$时）。

1. Introduction

全文中， $\mathcal{A}$是复数域 $\mathbb{C}$上的一个（结合）代数。 $\mathcal{A}$上的范数 $\|\cdot\|$是指线性范数且满足次乘性，即 $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $(a, b \in \mathcal{A})$。如果 $\|\cdot\|$ 赋予完备度量拓扑，那么我们称 $\mathcal{A}$ 为巴拿赫代数。集合 $N(\mathcal{A})$和 $N_c(\mathcal{A})$分别表示所有代数范数（按等价关系计）和所有巴拿赫代数范数（按等价关系计）的集合。设 $\mathcal{A}$是代数 $\mathcal{I}$ 中的一个理想。如果 $ab = 0$ $(b \in \mathcal{I})$蕴含 $a = 0$，则称 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{I}$ 上是忠实的。若代数$\mathcal{A}$ 在其自身 [Da:00]上忠实，则称其为忠实代数。文献 [DP:22(a)] 指出，笛卡尔积代数 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 上的范数唯一性取决于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$上的范数唯一性，其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是巴拿赫代数。因此，研究其他乘积代数上的范数唯一性是很自然的，具体而言，包括直和积代数 [Definition 2.2], 、卷积乘积代数[Definition 2.6] 以及模积代数 [Definition 2.11]。在某些情况下，我们得到了范数唯一性和忠实性的充要条件。

Dales 和 Loy 给出了一个有趣的例子，表明它有两个不等价的完备范数 [DL:97]。我们在 [DP:22(a)], [DP:22(b)] 中证明，它有无穷多个完备范数和不完备范数。本文将这一结果推广到满足关于 $\mathcal{A}$ 的某个条件的赋范代数 $\mathcal{A}$ 。我们还指出，

E-mail addresses: hvdedania@gmail.com, jatinprofessor39@gmail.com。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46H05, 46H25。

Key words and phrases. 代数，巴拿赫代数，忠实，范数。

条件“$N(\mathcal{A}) = N_c(\mathcal{A})$ 仅含一个元素”是使 $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中余维有限的充分条件，而 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ （在$\mathcal{A}^2$ 的情形下）在 $\mathcal{A}$ 中稠密。

2. Main Results

命题 2.1. [Wa:14, P. 14] 设 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫代数，且 $\mathcal{I}_1$、 $\mathcal{I}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 中的闭理想，并满足 $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$。假设 $\mathcal{A}/\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1$ 都具有唯一代数范数。那么 $\mathcal{A}/\mathcal{I}_1$ 具有唯一代数范数。

定义 2.2. [Ka:16] 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$的子代数。那么，$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 在逐点线性运算和直和乘积‘$\times_d$’下构成一个代数，其中直和乘积定义为 $(a, b) \times_d (c, d) = (ac + ad + bc, bd)$ $((a, b), (c, d) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$。直和乘积是对定义在 $\mathcal{A}_e$ 上的乘积的一种推广（即 $\mathcal{A}$的添单位化）。此外， $\|(a, b)\|_1 = \|a\| + \|b\|$ 和 $|(a, b)| = \max\{\|a - b\|, \|b\|\}$ $((a, b) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$上的代数范数。

注 2.3. (i) 设 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫代数，且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的闭子代数。那么 $(\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$ 是一个巴拿赫代数。(ii) $\mathcal{A} \times \{0\}$ 是 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 的闭理想。(iii) 根据第一同构定理，$(\mathcal{A} \times_d \mathcal{B})/\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$。(iv) $\|\cdot\|_1$ 和 $|\cdot|$ 在 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 上是等价的。

引理 2.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数。那么，当且仅当 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 是忠实的时， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是忠实的。

证明。假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是忠实的。令 $(a, b) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$，其中 $(a, b) \times_d (c, d) = (0, 0)$ $((c, d) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$。于是 $(ac + ad + bc, bd) = (0, 0)$ $((c, d) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$。这意味着 $b = 0$，因为 $\mathcal{B}$ 是忠实的。将 $b = 0$ 置于 $ac + ad + bc = 0$ 中，则 $a(c + d) = 0$，因为 d 是任意元素，我们可以令 $d = 0$。这就得到 $a = 0$，因为 $\mathcal{A}$ 是忠实的。因此， $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 是忠实的。反之，假设 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 是忠实的。假设存在 $0 \neq a \in \mathcal{A}$，使得 $ax = 0$ $(x \in \mathcal{A})$。令 $(a, 0) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$，并令 $(x, y) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$。则 $(a, 0) \times_d (x, y) = (ax + ay + 0x, 0y) = (0, 0)$，这与 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 的忠实性矛盾。因此， $\mathcal{A}$ 是忠实的。同理，假设 $\mathcal{B}$ 不忠实，则存在 $0 \neq b \in \mathcal{B}$，使得 $by = 0$ $(y \in \mathcal{B})$。令 $(-b, b) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$，并令 $(x, y) \in \mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$。则 $(-b, b) \times_d (x, y) = (-bx - by + bx, by) = (-by, by) = (0, 0)$，这与 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 的忠实性矛盾。因此， $\mathcal{B}$ 是忠实的。□

定理 2.5. 设 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫代数， $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的闭子代数。那么，当且仅当 $N(\mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$ 是单元素集时， $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{B})$ 都是单元素集。

证明。假设 $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{B})$ 是单元素集。考虑 $J_1 = \{(0, 0)\}$ 和$J_2 = \mathcal{A} \times \{0\}$。那么 J_1 和 J_2 是 $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$, $J_1 \subset J_2$, $(\mathcal{A} \times_d \mathcal{B})/J_2 \cong \mathcal{B}$ 和 $J_2/J_1 \cong \mathcal{A}$ 中的闭理想。由于 $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{B})$ 是单元素集，因此 $N((\mathcal{A} \times_d \mathcal{B})/J_2)$ 和 $N(J_2/J_1)$ 是单元素集。于是，由命题 2.1， $\mathcal{A} \times_d \mathcal{B}$ 具有唯一代数范数，即$N(\mathcal{A} \times_d \mathcal{B})$ 是单元素集。反过来，假设 $N(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ 是单元素集。若不然，假设 $N(\mathcal{A})$ 不是单元素集。选取两个范数 $p_1(\cdot)$ $p_2(\cdot) \in N(\mathcal{A})$，使得 $\widetilde{p_1}(\cdot)$ 和 $\widetilde{p_2}(\cdot)$ 是 $N(\mathcal{A})$ 中两个不同的等价类。那么 $p_1(\cdot)$ 和 $p_2(\cdot)$ 在 $\mathcal{A}$ 上不等价。接着取 $q(\cdot) \in N(\mathcal{B})$。对于 $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$，定义 $q_1(x, y) = p_1(x) + q(y)$ 和$q_2(x, y) = p_2(x) + q(y)$。于是 $q_1(\cdot)$ 和 $q_2(\cdot)$ 是 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 上不等价的范数，因此 $N(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ 不是单元素集，矛盾。故 $N(\mathcal{A})$ 必为单元素集。同理， $N(\mathcal{B})$ 是单元素集。□

定义 2.6. [Ka:16] 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数， $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个理想。那么 $\mathcal{A}\times\mathcal{I}$ 是一个具有逐坐标线性运算和卷积乘积 '$\times_c$' 的代数，该卷积乘积定义为 $(a,x)\ \times_c (b,y) = (ab+xy, ay+xb)$ $((a,x),(b,y)\in \mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$。那么$\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$ 称为卷积乘积代数。

注 2.7. (i) 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个闭理想。那么 $\mathcal{I}\times_c\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$ 中的一个闭理想。

(ii) 根据第一同构定理，$(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})/(\mathcal{I}\times_c\mathcal{I})\cong\mathcal{A}/\mathcal{I}$。

引理 2.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想。那么 $\mathcal{A}$ 忠实，当且仅当 $\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$ 忠实。

证明。假设 $\mathcal{A}$ 忠实。取 $(a,x)\in\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$，满足 $(a,x)\times_c(b,x)=(0,0)$ $((b,x)\in\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$。那么 $(a,x)\times_c(b,0)=(ab,xb)=(0,0)$ $((b,0)\in\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$，$ab=xb=0$ $(b\in\mathcal{A})$。因此 $a=x=0$，因为 $\mathcal{A}$ 忠实。反过来，假设 $\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$ 忠实。若不然，设存在 $0\neq a\in\mathcal{A}$，使得 $ax=0\,(x\in\mathcal{A})$。令 $(a,0)\in\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$，并取 $(x,y)\in\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$。那么 $(a,0)\times_c(b,y)=(ab,ay)=(0,0)$，这与 $\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}$ 的忠实性矛盾。因此 $\mathcal{A}$ 忠实。□

引理 2.9. 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个闭理想。那么，$N(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$ 是单元素集蕴含 $N(\mathcal{A})$ 是单元素集。

证明。证明与定理 2.5 证明中的"逆向部分"类似。□

定理 2.10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个闭理想。那么，$N(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ 和 $N(\mathcal{I}\times_c\mathcal{I})$ 均为单元素集，蕴含 $N(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$ 是单元素集。

证明。令 $J_1=\{0\}\times\{0\}$ 和 $J_2=\mathcal{I}\times\mathcal{I}$。则 J_1 和 J_2 是 $\mathcal{A}$ 的两个闭理想，$(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}/J_2)\cong\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 和 $J_2/J_1\cong J_2$。由于 $N(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ 和 $N(\mathcal{I}\times_c\mathcal{I})$ 是单元素集，$N(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I}/J_2)$ 和 $N(J_2/J_1)$ 也是单元素集。因此，由命题 2.1，$N(\mathcal{A}\times_c\mathcal{I})$ 是单元素集。□

定义 2.11. [Da:00] 设 $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫代数，$(\mathcal{X},|\cdot|)$ 是一个巴拿赫$\mathcal{A}$-双模。对于 (a,x)、$(b,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{X}$，定义 $(a,x)\times_m(b,y)=(ab,ay+xb)$。则 $(\mathcal{A}\times_m\mathcal{X},\times_m)$ 称为模积代数。它是一个巴拿赫代数，其范数为 $\|(a,x)\|_1=\|a\|+|x|$ $((a,x)\in\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})$。

注 2.12. (i) $\{0\}\times\mathcal{X}$是 $\mathcal{A}\times_m\mathcal{X}$中的一个闭理想。
(ii) 根据第一同构定理，$(\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})/(\{0\}\times\mathcal{X})\cong\mathcal{A}$。

定义 2.13. 设 $\mathcal{X}$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模。若 $xa=$不为 0（$a\in\mathcal{A}$），则称其为 $\mathcal{A}$-忠实。

引理 2.14. 若 $\mathcal{A}$ 忠实且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$-忠实的，则 $\mathcal{A}\times_m\mathcal{X}$ 忠实。

证明。设 $(a,x)\in\mathcal{A}\times_m\mathcal{X}$，使得 $(a,x)\times_m(b,y)=(0,0)$ $((b,y)\in\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})$。则 $(a,x)\times_m(b,0)=(ab,xb)=(0,0)$ $(b\in\mathcal{A})$。因此，由于 $\mathcal{A}$ 忠实，$a=0$；又由于 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$-忠实的，$x=0$。□

定理 2.15. 设 $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫代数，且 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫 $\mathcal{A}$-双模。那么 $N(\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})$ 是单元素集，当且仅当 $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{X})$ 都是单元素集。

证明。假设 $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{X})$ 都是单元素集。令 $J_1=\{(0,0)\}$ and $J_2=\{0\}\times\mathcal{X}$。那么 J_1 and J_2 是 $\mathcal{A}\times_m\mathcal{X}$, $J_1\subset J_2$, $(\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})/J_2\cong\mathcal{A}$ 和 $J_2/J_1\cong\mathcal{X}$ 中的闭理想。由于 $N(\mathcal{A})$ 和 $N(\mathcal{X})$ 都是单元素集，$N((\mathcal{A}\times_m\mathcal{X})/J_2)$ 和

$N(J_2/J_1)$ 是单元素集。因此，根据命题 2.1，$\mathcal{A} \times_m \mathcal{X}$ 具有唯一代数范数，即 $N(\mathcal{A} \times_m \mathcal{X})$ 是单元素集。“逆命题部分”的证明与定理 2.5 的证明类似。□

定义 2.16. 设 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个赋范代数，并令 $\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}$，其乘积为 $(a,\alpha)\times_0(b,\beta) = ab$ 且 $\|(a,\alpha)\| = \|a\|+|\alpha|$ $((a,\alpha) \in \mathcal{A}\times_0\mathbb{C})$。那么 $(\mathcal{A}\times_0\mathbb{C}, \times_0, \|\cdot\|)$ 是一个赋范代数，且 $\mathrm{rad}(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}) = \mathbb{C}$。

下一个结果是对 [DL:97, P. 633] 中所给示例的推广。

定理 2.17. 设 $\mathcal{A}$ 是一个赋范代数，且 $\mathcal{A}^2$ 的余维为无限。那么 $N(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C})$ 是无限的。此外，若 $N_c(\mathcal{A})$ 非空，则$N_c(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C})$ 是无限的。

证明. 设 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个赋范代数。由于 $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中的余维为无限，存在 $\mathcal{A}$ 的无限线性无关子集 L，使得 $\mathcal{A}^2 \cap L = \phi$ 且$\|a\| = 1$ $(a \in L)$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，选取 $L_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\} \subset L$ 使得：

(1) 每个 L_n 都是无限的；(2) $L_n \cap L_m = \phi$ $(n \neq m)$；(3) $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$。

设 B_n 是 $\mathcal{A}$ 的一个（哈梅尔）基，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $L_n \subset B_n$。那么，每个 $C_n = B_n \cap \mathcal{A}^2$ 都是 $\mathcal{A}^2$的一个基。考虑满足下述条件的唯一线性映射 $\varphi_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi_n(a) = \begin{cases} k & (\text{if } a = a_{nk} \in L_n \setminus \{a_{n1}\}); \\ 1 & (\text{if } a \in B_n \setminus (L_n \cup C_n)); \\ 0 & (\text{if } a \in C_n \cup \{a_{n1}\}). \end{cases}$$

接下来取 $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}$。对于$(a,\alpha)$、$(b,\beta) \in \mathcal{B}$，定义

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab, 0) \quad \text{and} \quad p((a,\alpha)) = \|a\| + |\alpha|.$$

那么，$(\mathcal{B}, p(\cdot))$是一个赋范代数。对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$p_n((a,\alpha)) = \|a\| + |\varphi_n(a) - \alpha| \quad ((a,\alpha) \in \mathcal{A}).$$

显然，每个 $p_n(\cdot)$都是线性范数。设(a,α)、$(b,\beta) \in \mathcal{B}$。那么，$p_n((a,\alpha)(b,\beta)) = p_n((ab, 0))$ $= \|ab\| \leq p_n((a,\alpha))p_n((b,\beta))$，因为 $ab \in \mathcal{A}^2$，因此 $\varphi_n(ab) = 0$。由此，每个 $p_n(\cdot) \in N(\mathcal{B})$。现在，我们断言这些范数不等价。设 $m < n$ 且 $g_k = a_{mk}$ $(k \in \mathbb{N})$。那么，对于 $k \geq 2$，$p_m((a_k, 0)) = 1 + k$ 且$p_n((a_k, 0)) \leq 2$，因为 $\varphi_n(a_{mk}) = 0$ 或1。由此证明了我们的断言。因此，$N_c(\mathcal{A})$是一个无限集。设$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$是一个巴拿赫代数。最后，我们断言每个 $p_n(\cdot) \in N_c(\mathcal{B})$。设$(a_n, \alpha_n)$是$(\mathcal{B}, p_n(\cdot))$中的一个柯西序列。那么，$a_n$是$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$中的一个柯西序列，且收敛于 a；α_n 是$\mathbb{C}$中的一个柯西序列，且收敛于 α。因此，(a_n, α_n)在 $\in \mathcal{B}$中收敛于(a,α)。□

下一个结果是命题 2.1 的直接应用，并给出了 $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中余维有限的充分条件。

推论 2.18. 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，使得 $N(\mathcal{A})$ 和 $N_c(\mathcal{A})$ 都是单元素集。那么

(i) $N(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C})$是单元素集。(ii) $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中的余维有限。(iii) 若 $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$中稠密，则 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$。

证明。(*i*) 由于$(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C})/\{0\} \times_0 \mathbb{C} \cong \mathcal{A}$ 和 $\{0\} \times_0 \mathbb{C}/\{0\} \times_0 \{0\}$ 具有唯一代数范数，因此由命题 2.1可知，$(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C})/\{0\} \times_0 \{0\} \cong \mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}$ 具有唯一代数范数。

(*ii*) 假设 $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中的余维为无限。则根据上述定理 2.17，巴拿赫代数 $(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}, p(\cdot))$ 有无穷多个范数；但根据陈述 (i)，巴拿赫代数 $(\mathcal{A} \times_0 \mathbb{C}, p(\cdot))$ 具有唯一范数。因此， $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中的余维是有限的。

(*iii*) 假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{A}^2$ 在 $\mathcal{A}$ 中的余维为 n 。则集合 $B = \{v_1 + \mathcal{A}^2, v_2 + \mathcal{A}^2 \ldots, v_n + \mathcal{A}^2\}$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{A}^2$ 的一组基。现在考虑 $W = \text{span}\{\mathcal{A}^2, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个超空间，即 $\dim(\mathcal{A}/W) = 1$。于是存在不连续线性泛函 $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ ，使得 $\ker\varphi = W$。定义 $|||a||| = \|a\| + |\varphi(a)|$ ($a \in \mathcal{A}$) 和 $\|a\| \leq |||a|||$ ($a \in \mathcal{A}$)。因此， n 必须为 0，从而得到 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$。□

3. Examples

例 3.1. 设 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$，且 $\mathcal{I} = \left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ 为理想。那么 $\mathcal{I}$ 是忠实代数 $M_2(\mathbb{C})$ 的右非忠实理想。

例 3.2. 设 $1 \leq p < \infty$ ，并令 $\mathcal{A} = \ell^p$ 配备逐点乘积。那么 $N(\ell^p) > 1$，且 $(\ell^p)^2 = \ell^{\frac{p}{2}}$ 在 $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ 中稠密，但 $\ell^{\frac{p}{2}} \subsetneq \ell^p$。此例表明，我们不能放宽推论 2.18（$iii$）中的条件“$N(\mathcal{A})$ 是单元素集”。

例 3.3. 交换半单代数的每个理想都是忠实的。

4. Question

探讨命题 2.1 在不假设完备性的情况下是否成立，将会很有意思。

Declarations

经费支持 第二作者非常感谢大学拨款委员会（UGC）新德里分部提供高级研究奖学金。

利益冲突 作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[Da:00] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, 牛津科学出版社，伦敦数学会专著，2000年。

[DL:97] H.G. Dales 和 R. J. Loy, *Uniqueness of the norm topology for Banach algebras with finite-dimensional radical* 74 3 1997 633 661 ，伦敦数学会会刊，

() () -。[DP:22(a)] H. V. Dedania 和 J. G. Patel, *Classification of algebra norms and relations among them* 2 ，巴勒莫数学研讨会报

告 ()，已接收。[DP:22(b)] H. V. Dedania 和 J. G. Patel, *Methods for constructing algebra norms on Banach algebras* 114 3 2022, 587 596 ，加尔各答数学会通报，

( ) -。[Ka:16] H. J. Kanani, *Spectral and uniqueness properties in various Banach algebra products*, 博士论文，萨达尔·帕特尔大学，2016年。[Wa:14] G. K. Ware, *Uniqueness of norm properties of Calkin algebras*, 博士论文，澳大利亚国立大学，2014年。