arXiv:2301.03950v2 [math.DG] 8 Dec 2023

# 强可分解正向量丛的舒尔形式的正性

XUEYUAN WAN

摘要。本文定义了两种强可分解正性，它们是（对偶）Nakano 正性的推广，且强于 S. Finski 引入的可分解正性。我们给出了 I 型和 II 型强可分解正性的判据，并证明 I 型强可分解正向量丛的舒尔形式是弱正的，而 II 型强可分解正向量丛的舒尔形式是正的。这肯定地回答了格里菲斯关于强可分解正向量丛的问题。因此，我们给出了（对偶）Nakano 正向量丛的舒尔形式正性的代数证明；这一结论最初由 S. Finski 证明。

目录

1. 引言 2
2. 强可分解正向量丛 5
2.1. 联络与曲率 5
2.2. 强可分解正性 7
2.3. 与可分解正性的关系 9
3. 微分形式的正性概念 11
4. I 型强可分解正性 12
4.1. I 型正性的判据 12
4.2. 舒尔形式的弱正性 17
5. II 型强可分解正性 25
5.1. II 型正性的判据 25
5.2. 舒尔形式的正性 27
参考文献 30

日期：2023年12月11日。2020 年数学主题分类。32Q10，32L10，53C65。关键词和短语。舒尔形式，正性，弱正性，强可分解正性，（对偶）Nakano 正性。Xueyuan Wan 的研究部分受到国家自然科学基金（项目编号：12101093）、重庆市自然科学基金（项目编号：CSTB2022NSCQ-JQX0008）以及重庆理工大学科学研究基金的资助。

## 1. 引言

设 $(E, h^E)$ 是一个秩为 $r$ 、定义在维数为 $n$ 的复流形 $X$ 上的 Hermitian全纯向量丛。次数为 $2i$、 $0 \leq i \leq r$ 的陈形式 $c_i(E, h^E)$，以及全陈形式 $c(E, h^E)$，定义如下:

$$c(E, h^E) := \sum_{i=0}^{r} c_i(E, h^E) := \det\left(\mathrm{Id}_E + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^E\right),$$

其中， $R^E \in A^{1,1}(X, \mathrm{End}(E))$ 表示 $(E, h^E)$ 的陈曲率。对于任意满足 $1 \leq k \leq n$ 的 $k \in \mathbb{N}$ ，令 $\Lambda(k, r)$ 表示所有由不超过 $r$ 的非负整数构成的 $k$ 的分拆的集合，即任意元素 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \Lambda(k, r)$ 满足

$$r \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0 \text{ and } |\lambda| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = k.$$

每个分拆 $\lambda \in \Lambda(k, r)$ 都可通过下式得到一个舒尔形式

$$P_\lambda(c(E, h^E)) := \det(c_{\lambda_i - i+j}(E, h^E))_{1 \leq i,j \leq k},$$

该形式是一个闭的实 $k$， $k$ 形式。舒尔形式包含陈形式和带符号的塞格雷形式作为特殊例子，例如，

$$P_{(k,0,\cdots,0)}(c(E, h^E)) = c_k(E, h^E)$$

and

$$P_{(1,\cdots,1,0,\cdots,0)}(c(E, h^E)) = (-1)^k s_k(E, h^E).$$

在 [Gri70，第129页，猜想（0.7）], Griffiths 猜想 Griffiths 正向量丛的数值正性（定义见（2.3））， 即如果（$E$， $h^E$）是 Griffiths 正向量丛，那么

$$\int_V P(c_1, \cdots, c_s) > 0 \tag{1.1}$$

其中 $P(c_1, \cdots, c_s)$ 是陈类 $c_1, \cdots, c_s$上的正多项式，其中它们属于任意商丛 $Q$ 的 $E|_V$， $V \subset X$ 是任意复解析子簇。布洛赫-吉泽克 [BG71] 证明了丰向量丛的所有陈类都满足（1.1）； Fulton-Lazarsfeld [FL83, 定理 I] 推广了布洛赫-吉泽克的结果，并证明所有舒尔多项式对于丰向量丛都是数值正的。对于紧 Kähler 流形上的数值有效向量丛，德马伊-佩特内尔-施奈德 [DPS94，定理 2，5] 证明了所有舒尔多项式的数值半正性。

格里菲斯 [Gri70，第 247] 页也猜想（1.1）在微分形式层面上成立，这可以改述如下，参见 [Fin22，第 1541 页，格里菲斯问题]。

问题 1.1（Griffiths）。 设 $P \in \mathbb{R}[c_1, \ldots, c_r]$ 是加权次数为 $k$的舒尔多项式的非零非负线性组合。对于复流形 $X$ 上任意 Griffiths 正向量丛 $(E, h^E)$，其中复流形的维数为 $n, n \geqslant k$，形式$P\left(c_1(E, h^E) \ldots, c_r(E, h^E)\right)$ 是否弱正?

回顾一下，实 $(k,k)$-形式 $u$ 称为弱正（分别称为非负），若对于任意非零可分解 $(\sqrt{-1})^{(\overline{n-k})^2}\beta\wedge\beta>\overline{0}$（分别有 $\geq 0$），其中 $(n-k,0)$-形式 $\beta=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{n-k}$，且 $\beta_i, 1\leq i\leq n-k$ 是 (1,0)-形式；关于（弱）正（分别为非负）向量丛的定义，参见定义 3.1 。

格里菲斯 [Gri70，第 249] 页证明，利用施瓦茨不等式，Griffiths 正向量丛的第二陈形式是正的。Guler[Gul12，定理 1.1] 验证了问题 1.1 对所有带符号的塞格雷形式均成立。Diverio-Fagioli [DF22] 通过考察旗丛的推前，证明了 Griffiths（半）正向量丛的陈形式中若干其他多项式也具有正性，其中包括后续进展[Fag22a， Fag22b]。丰向量丛的其他相关结果，参见 Xiao [Xia22]和 Ross-Toma [RT19] 。

对于 Bott-Chern 非负向量丛，Bott-Chern [BC65, 引理 5.3, (5.5)] 证明了所有陈形式均为非负；Li [Li21, 命题 3.1] 扩展了 Bott-Chern 的结果，并证明所有舒尔形式均为非负。随后，Finski [Fin22, 定理 2.15] 证明了 Bott-Chern 非负性与对偶 Nakano 非负性等价。此外，Finski [Fin22, 第 3 节4] 采用纯代数方法，证明了 Nakano 非负向量丛的所有舒尔形式均为非负。对于（对偶）Nakano 正向量丛，Finski [Fin22, 定理 1.1] 通过对微分形式层面的 Kempf-Laksov 行列式公式进行精细化，证明了所有舒尔形式均为正。然而，正如 Finski [Fin22, 注 3.18], 所指出的，上述代数方法可用于处理非负情形；而对于正性结论，能否精细化这一代数方法尚不清楚，因为（对偶）Nakano 正性没有类似的判据（见 [Fin22, 注 2.16]），且关于[Fin22, (3.83)]中定义的形式的具体结构，已知甚少。这促使作者通过发展纯代数方法来研究格里菲斯问题（问题 1.1）。

在 [Fin22第 2 节中，3], Finski 引入了可分解正向量丛的定义，见定义 2.2。这种定义推广了中野正性和对偶中野正性，并且在 $n\cdot r\leq 6$ 时与 Griffiths 正性一致。因此，自然会想知道问题 1.1 对这类正向量丛是否成立。本文引入了向量丛正性的两个新概念，称为 I 型和 II 型强可分解正性，见定义 2.4 和定义 2.7。它们介于（对偶）中野正性与可分解正性之间。粗略来说，$(E,h^E)$ 是 I 型强可分解正的，当且仅当对于任意 $x\in X$，都存在一个分解 $T^1{}_x{}^0X=U_x\oplus V_x$ 使其在子空间 $E_x\otimes U_x$上中野正，在子空间 $E_x\otimes V_x$上对偶中野正，并且交叉曲率项为零，见定义 2.4。通过纯代数方法，我们对 I 型强可分解正向量丛上的问题 1.1 给出了肯定回答。

**定理 1.2**。 设 $(E,h^E)$ 是复流形 $X$ 上的 $I$ 型强可分解正向量丛，秩$E=r$，且 维数 $X=n$。那么，对于任意分拆 $\lambda\in\Lambda(k,r)$,$k\leq n$ 和 $k\in\mathbb{N}$，舒尔形式 $P_\lambda(c(E,h^E))$ 都是弱正的。

上述定理的证明主要在于给出 I 型强可分解正向量丛的一种等价刻画。尽管以往的代数方法可以处理非负情形，但对于严格正情形，利用我们的等价刻画，如果舒尔形式不是弱正的，就能导出矛盾。

根据 [HK74，定理 1。2], 实 $(k,k)$-形式 $u$ 非负，当且仅当 $u$ 可写成

$$u=\sum_{s=1}^{N}(\sqrt{-1})^{k^2}\alpha_s\wedge\overline{\alpha_s} \tag{1.2}$$

对于某些 $(k,0)$-形式 $\alpha_s,1\leq s\leq N$。由（4.15）和（4.16），舒尔形式具有如下形式

$$P_\lambda(c(E,h^E))=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)^2(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c,\epsilon}(-1)^{|\epsilon|+k}\psi_{\rho tc\epsilon}\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon}}. \tag{1.3}$$

其中 $\psi_{\rho tc\epsilon}$ 是一个（$|\epsilon|,k-|\epsilon|$）-形式，其定义为

$$\psi_{\rho tc\epsilon}:=\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\bigwedge_{j=1}^{k}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{\epsilon_j}\wedge(\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j}. \tag{1.4}$$

一般情况下，不清楚如何将（1.3）表示为（1.2）的形式。因此，似乎很难通过代数方法证明舒尔形式 $P_\lambda(c(E,h^E))$ 是一个正的 $(k,k)$-形式。然而，如果 $(E,h^E)$ 是中野正或对偶中野正，则它等价于 $A=0$ 或 $B=0$。例如，对于 $A=0$，（1.4）给出

$$\psi_{\rho tc\epsilon_1}=\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\bigwedge_{j=1}^{k}\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}},\quad \epsilon_1=(1,\cdots,1)$$

且对任意 $\epsilon\neq\epsilon_1$，$\psi_{\rho tc\epsilon}=0$。那么舒尔形式为

$$P_\lambda(c(E,h^E))=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)^2(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c}\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon_1}},$$

它满足（1.2），因为 $\psi_{\rho tc\epsilon_1}$ 是一个 （$k$，0)-形式。因此，我们可以用代数证明以下关于（对偶）Nakano 正向量丛的舒尔形式正性。

定理 *1.3*（*Finski* [*Fin22*，定理 *1.1*]）。设 $(E,h^E)$ 是复流形 $X$ （维数为 $n$）上的秩为 $r$ 的（对偶）中野正向量丛。那么对于任意 $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$ 和 $\lambda\in\Lambda(k,r)$，$(k,k)$-形式 $P_\lambda\left(c\left(E,h^E\right)\right)$ 是正的。

受 I 型强可分解正性的定义启发，通过将向量丛逐点分解为中野正向量丛与对偶中野正向量丛的直和，自然可以定义 II 型强可分解正性，参见定义 2.7。根据 Littlewood-Richardson 规则（参见 [Ful97，第 5]章），直和 $E \oplus F$ 的舒尔类可表示为

$$P_\lambda(c(E \oplus F)) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} P_\mu(c(E)) P_\nu(c(F)),$$

其中 $c_{\mu\nu}^{\lambda}(\geq 0)$ 是一个 Littlewood-Richardson 系数。本文通过在微分形式层面细化上述恒等式，并利用定理1.3，得到

**定理 1.4**。 设 $(E, h^E)$ 是复流形 $X$ 上的一个 *II* 型强分解正向量丛，秩 $E = r$，且维数 $X = n$。那么，对于任意分拆 $\lambda \in \Lambda(k, r)$， $k \leq n$和 $k \in \mathbb{N}$，舒尔形式 $P_\lambda(c(E, h^E))$ 均为正。

注 1.5。 比较定理1.2 与定理 1.4，自然会问，对于 I 型强可分解向量丛，舒尔形式是否为正。

本文组织如下：第 2 节将定义两类强分解正向量丛，它们是中野正性和对偶中野正性的推广，且强于可分解正性。第 3 节将回顾微分形式的正性概念，并证明两个正形式的乘积仍为正。在第 4 节中，我们将给出 I 型强可分解正向量丛的一个判据，回顾舒尔形式和 Griffiths 锥的定义，随后证明舒尔形式的弱正性；定理 1.2 和定理 1.3将在本节中得到证明。在第 5 节中，我们将给出 II 型强分解正向量丛的一个判据，并证明舒尔形式的正性；定理 1.4 将在本节中得到证明。

致谢。 作者感谢 SiarheiFinski 的有益讨论，也感谢匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见改进了本文。

## 2. 强分解正向量丛

本节将定义两类强可分解正向量丛。

### 2.1. **联络与曲率**。

本小节将回顾厄米全纯向量丛的陈联络及其曲率的定义。更多详情可参见 [Kob87，第 1] 章。本文将使用爱因斯坦求和约定。

设 $\pi : (E, h^E) \to X$ 是复流形 $X$上的 Hermitian全纯向量丛，秩为$E = r$，维数为 $X = n$。设 $\nabla^E$ 为陈联络

，它保持度量 $h^E$，且为 $(1,0)$ 型。相对于 $E$的局部全纯标架 $\{e_i\}_{1\leq i\leq r}$，有

$$\nabla^E e_i = \theta_i^j e_j, \tag{2.1}$$

其中 $\theta = (\theta_i^j)$（$j$ 行，$i$ 列）是 $\nabla^E$ 的联络形式。更准确地说，

$$\theta_i^j = \partial h_{i\bar{k}} h^{\bar{k}j},$$

其中 $h_{i\bar{k}} := h(e_i, e_k)$。用矩阵形式表示，它是

$$\theta^\top = \partial h \cdot h^{-1}.$$

考虑 $e = (e_1, \cdots, e_r)$ 为行向量，则（2.1）可写为

$$\nabla^E e = e \cdot \theta.$$

令 $R^E = (\nabla^E)^2 \in A^{1,1}(X, \text{自同态空间}(E))$ 表示 $(E, h^E)$ 的陈曲率，并记

$$R^E = R_i^j e_j \otimes e^i \in A^{1,1}(X, \mathrm{End}(E)),$$

其中 $R = (R_i^j)$（$j$ 行，$i$ 列）是曲率矩阵，其元素为 $(1,1)$-形式，$\{e^i\}_{1\leq i\leq r}$ 表示 $\{e_i\}_{1\leq i\leq r}$ 的对偶标架。曲率矩阵 $R = (R_i^j)$ 定义为

$$R_i^j = d\theta_i^j + \theta_k^j \wedge \theta_i^k = \bar{\partial}\theta_i^j.$$

若 $\{\tilde{e}_i\}_{1\leq i\leq r}$ 是 $E$ 的另一个局部全纯标架，且满足 $\tilde{e}_i = a_i^j e_j$，则

$$\tilde{e} = e \cdot a,$$

其中 $\tilde{e} := (\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r)$，且 $a = (a_j^i)$。记 $\widetilde{R}$ 为相对于局部标架 $\{\tilde{e}_i\}_{1\leq i\leq r}$的曲率矩阵。则

$$\widetilde{R} = a^{-1} \cdot R \cdot a. \tag{2.2}$$

设 $\{z^\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n}$ 是 $X$的局部全纯坐标。记

$$R_i^j = R_{i\alpha\bar{\beta}}^j dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

并记

$$R_{i\bar{j}} := R_i^k h_{k\bar{j}} = R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta,$$

从而

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = R_{i\alpha\bar{\beta}}^k h_{k\bar{j}} = -\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}} h_{i\bar{j}} + h^{\bar{l}k}\partial_\alpha h_{i\bar{l}}\partial_{\bar{\beta}} h_{k\bar{j}},$$

其中 $\partial_\alpha := \partial/\partial z^\alpha$ 和 $\partial_{\bar{\beta}} := \partial/\partial\bar{z}^\beta$。

2.2. **强可分解正性**。 本小节将定义两类强可分解正向量丛。首先，我们回顾中野正向量丛和对偶中野正向量丛的以下定义。

**定义2.1** （（对偶）中野正）。 若厄米全纯向量丛 $(E,h^E)$ 满足

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}\overline{u^{j\beta}}>0\,(resp.\ \ \geq 0)$$

对任意非零元素 $u=u^{i\alpha}e_i\otimes\partial_\alpha\in E\otimes T^{1,0}X$. $(E,h^E)$ 称为对偶中野正（非负），如果

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{\bar{j}\alpha}\overline{v^{\bar{i}\beta}}>0\,(resp.\ \ \geq 0)$$

对任意非零元素 $v=v^{j\alpha}\bar{e}_j\otimes\bar{\partial_\alpha}\in E\otimes T^{1,0}\overline{X}$。

在 [Fin22，定义2。18], S. Finski 为向量丛引入了以下新的正性概念：可分解正性。

**定义2.2** （可分解正）。 若厄米向量丛 $(E,h^E)$对于任意 $x\in X$，存在一个数$N\in\mathbb{N}$ 以及线性（分别为半双线性）形式 $l'_p:\ T^{1,}{}_x{}^0X\otimes E_x\to\mathbb{C}$（分别为 $l_p:\ T^{1,}{}_x{}^0X\otimes E_x\to\mathbb{C}$），$p=1,\ldots,N$，使得对任意 $v\in T^{1,}{}_x{}^0X,\xi\in E_x$，都有

$$\frac{1}{2\pi}\left\langle R^E_x(v,\bar{v})\xi,\xi\right\rangle_{h^E}=\sum_{p=1}^{N}\left|l_p(v,\xi)\right|^2+\sum_{p=1}^{N}\left|l'_p(v,\xi)\right|^2.$$

我们称其为可分解正，如果此外 $\left\langle R^E_x(v,\bar{v})\xi,\xi\right\rangle_{h^E}\neq 0$对于 $v,\xi\neq 0$成立。

注 2.3. 根据上述定义，中野正（对偶）向量丛必定是可分解正的。根据 [Fin22，命题 2.21], 对于$n\cdot r\leq 6$ 可分解正性等价于 Griffiths 正性，即

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^i\bar{v}^j\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta>0 \tag{2.3}$$

对于任意非零的 $\xi=\xi^\alpha\partial_\alpha\in T^{1,0}X$ 和 $v=v^ie_i\in E$。对于所有其他 $n$, $r\neq 1$，可分解正性严格强于 Griffiths 正性。

接下来，我们将介绍强可分解正性的概念，它介于中野正性（对偶）与可分解正性之间。

**定义2.4 (I 型强可分解正).** 若厄米向量丛 $(E,h^E)$ 对于任意 $x\in X$，都存在一个分解 $T^{1,}{}_x{}^0X=U_x\oplus V_x$，使得该丛称为 $I$ 型强可分解正（分别地，非负）向量丛，条件是

$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}\overline{u^{j\beta}}>0$（分别地，$\geq 0$） $\overline{R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}}u^{i\alpha}v'^{j\beta}=0$， $\overline{R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}}v^{\bar{j}\alpha}v^{\bar{i}\beta}>0$（$\geq 0$）

（（分别地，对于任意非零元素 $u=u^{i\alpha}e_i\otimes\partial_\alpha\in E_x\otimes U_x$、$v'=v'^{j\beta}e_j\otimes\partial_\beta\in E_x\otimes V_x$ 和 $v=v^{\bar{j}\alpha}\bar{e}_j\otimes\partial_\alpha\in E_x\otimes V_x$。

注 2.5。事实上，在上述定义中取 $u^{i\alpha}=1=v'^{j\beta}$，条件 $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}v'^{j\beta}=0$ 等价于：对于任意 $\partial_\alpha\in\overline{U_x}$ 和 $\partial_\beta\in V_x$，$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}=0$，即 $R(U_x,V_x)=0$；这也等价于对于任意 $\overline{v}=v^{\bar{j}\alpha}\bar{e}_j\otimes\partial_\alpha\in E_x\otimes V_x$ 和 $u'=u'^{i\bar{\beta}}\bar{e}_i\otimes\partial_\beta\in\overline{E_x}\otimes U_x$，$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{\bar{j}\alpha}u'^{i\bar{\beta}}=0$。因此，上述定义在交换 $U$ 和 $V$ 后保持不变。

对于任意点 $x\in X$，若 $V_x=\{0\}$（分别地，$U_x=\{0\}$），则 I 型强可分解正性恰好等价于中野正（分别地，对偶中野正）。

**例2.6.** 设 $\pi_1:(E_1,h^{E_1})\to X_1$ 是一个中野正向量丛，且 $\pi_2:(E_2,h^{E_2})\to X_2$ 是一个对偶*Nakano*正向量丛。记 $p_i:X_1\times X_2\to X_i$，$i=1,2$为自然投影，则

$$\pi_\oplus:(p_1^*E_1\oplus p_2^*E_2,p_1^*h^{E_1}\oplus p_2^*h^{E_2})\to X_1\times X_2$$

是一个 *I* 型强可分解非负向量丛，并且

$$\pi_\otimes:(p_1^*E_1\otimes p_2^*E_2,p_1^*h^{E_1}\otimes p_2^*h^{E_2})\to X_1\times X_2$$

是一个 *I* 型强可分解正向量丛。

根据定义 2.4，I 型强可分解正向量丛 $(E,h^E)$ 意味着存在全纯切丛 $T^{1,0}X=U_x\oplus V_x$ 的一个分解，使得 $(E,h^E)$ 在 $E_x\otimes U_x$ 中是中野正，在 $E_x\otimes V_x$ 中是对偶中野正，且交叉曲率项消失。自然地，可以通过分解向量丛来定义另一种向量丛的强可分解正性。更确切地说，

**定义2.7**（II型强可分解正）。我们称（$E,h^E$）为 *II* 型强可分解正（分别地，非负）向量丛，若对于任意 $x\in X$，存在（$E_x,h^E|_{E_x}$）的正交分解，$E_x=E_{1,x}\oplus E_{2,x}$，使得陈曲率 $R^E_x$ 具有如下形式

$$R^E_x=\begin{pmatrix}R^E_x|_{E_{1,x}} & 0\\ 0 & R^E_x|_{E_{2,x}}\end{pmatrix},$$

并且对于任意非零$\overline{\quad}$ $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}u^{j\beta}>0$ $\geq 0$ $u=u^{i\alpha}e_i\otimes\partial_\alpha\in E_{1x}\otimes$
$T^{10}_xX$ $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{i\bar{\beta}}v^{j\bar{\alpha}}>0$ $\geq 0$ $v=v^{i\bar{\beta}}e_i\otimes\partial_{\bar{\beta}}\in$
（分别地，）；对于任意非零 $E_{2,x}\otimes T^{0,1}_xX$，（分别地）。

下面给出一个 II 型强可分解向量丛的简单例子。

**例 2.8**。设$(E,h^E)$是中野正向量丛，且$(F,h^F)$是复流形 $X$ 上的对偶中野正向量丛。那么$(E\oplus F,h^E\oplus h^F)$是 *II* 型强分解正向量丛。

根据定义2.4 和定义 2.7，强可分解正向量丛定义如下。

**定义 2.9** (强分解正)。 若 *Hermite* 向量丛$(E, h^E)$ 是 *I* 型或 *II* 型强分解正向量丛，则称其为强分解正的。

类似地，也可以定义强分解负（非正）向量丛。注意，中野正（负）向量丛的对偶是对偶中野负（正），因此

**命题 2.10**。 厄米向量丛 $(E, h^E)$ 是 *I* 型（*II* 型）强可分解正（非负）向量丛，当且仅当 $(E^*, h^{E^*})$ 是 *I* 型（*II* 型）强分解负（非正）向量丛。

注 2.11。 设 $(E, h^E)$ 是强可分解正向量丛，且 $Q$ 是 $E$的商丛。丛 $Q$ 的曲率由下式给出

$$R^Q = R^E\big|_Q + C \wedge \overline{C}^\top$$

对于某个矩阵 $C$ ，其元素为 (1,0)-形式。根据强可分解正向量丛的判据、定理 4.3和定理5.2，以及上述商丛曲率公式，商丛 $(Q, h^Q)$ 通常不再是强可分解正向量丛。

2.3. **与分解正性的关系**。 根据 S. Finski 对中野非负和对偶非负的等价刻画 [Fin22，定理 2.15 和 2.17]，可得

**命题 2.12**。 厄米向量丛$(E, h^E)$ 是可分解非负的，当且仅当其陈曲率矩阵具有以下形式

$$R = -B \wedge \overline{B}^\top + A \wedge \overline{A}^\top \tag{2.4}$$

相对于酉标架，其中 $A$ （分别为 $B$）是一个以(1，0)-形式（分别以(0，1)-形式）为元素的矩阵。

证明。 根据定义2.2，$(E, h^E)$ 是可分解正的，当且仅当对于任意 $x \in X$，存在一个数 $N \in \mathbb{N}$ 以及线性（分别为半双线性）形式$l'_p$: $T^{1,}{}_x{}^0X \otimes E_x \to \mathbb{C}$（分别为 $l_p$: $T^{1,}{}_x{}^0X \otimes E_x \to \mathbb{C}$），$p = 1, \ldots, N$，使得对于任意 $v \in T^{1,}{}_x{}^0X, \xi \in E_x$，有

$$\left\langle R^E_x(v, \bar{v})\xi, \xi \right\rangle_{h^E} = \sum_{p=1}^{N} |l_p(v, \xi)|^2 + \sum_{p=1}^{N} \left|l'_p(v, \xi)\right|^2. \tag{2.5}$$

我们记

$$l_p(v, \xi) = l_{ip\bar{\beta}} v^i \bar{\xi}^\beta, \quad l'_p(v, \xi) = l'_{ip\alpha} v^i \xi^\alpha,$$

并定义 $A = (A_{jp})$ 和 $B = (B_{jp})$ 为

$$A_{jp} := A_{jp\alpha} dz^\alpha = \overline{l_{jp\bar{\alpha}}} dz^\alpha, \quad B_{jp} := B_{jp\bar{\beta}} d\bar{z}^\beta = \overline{l'_{jp\beta}} d\bar{z}^\beta.$$

那么，(2.5) 等价于

$$
\begin{aligned}
R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} &= \sum_{p=1}^{N} l_{ip\bar{\beta}}\overline{l_{jp\bar{\alpha}}} + \sum_{p=1}^{N} l'_{ip\alpha}\overline{l'_{jp\beta}} \\
&= \sum_{p=1}^{N} A_{jp\alpha}\overline{A_{ip\beta}} + \sum_{i=1}^{N} B_{jp\bar{\beta}}\overline{B_{ip\bar{\alpha}}}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

相对于一个酉标架， $R^{j}_{i\alpha\bar{\beta}} = R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$且（2.6）等价于

$$R = -B \wedge \overline{B}^{\top} + A \wedge \overline{A}^{\top},$$

至此，证明完成。 □

根据命题2.12 和定义2.2，$(E,\ h^E)$ 是可分解正的，当且仅当（2.4）成立，且 $\left\langle R^E_x(v,\ \bar{v})\xi,\ \xi\right\rangle_{h^E} \neq 0$ 对 $v,\ \xi \neq 0$成立。由定理4.3 和定理5.2，可得

**推论2.13**。 若$(E, h^E)$ 是 *I* 型或 *II* 型强可分解正向量丛，则$(E, h^E)$ 是可分解正的。

另一方面，由定理4.3和定理5.2可知，这两类强可分解正向量丛互不包含。二者都是（对偶）Nakano 正向量丛的推广，且比可分解正性更强。参见下图1。

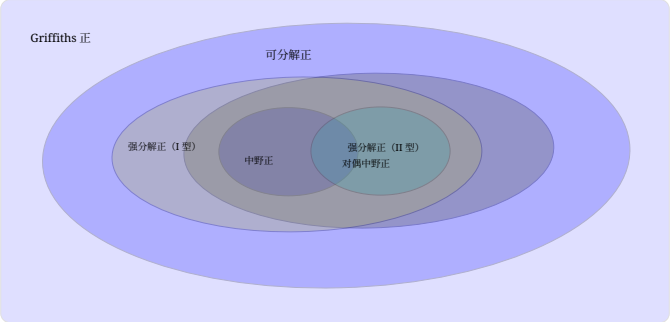


图1. 几种正性概念之间的关系

注记2.14。请注意，向量丛的曲率算子集合，无论它们是 Griffiths 正、可分解正还是（对偶）中野正，都对加法封闭。具体而言，若 $R_1$ 和 $R_2$ 都是属于上述任一类别的曲率算子，那么它们的和 $R_1 + R_2$也属于同一类别。此外，一个可分解正的曲率算子可以表示为一个中野正曲率算子与一个对偶中野正曲率算子之和。因此，它也可以表示为 I 型（或

II 型）强可分解正性算子之和。由于 I 型（II 型）强可分解正性严格强于可分解正性，I 型（或 II 型）强可分解正曲率算子的集合对加法并不封闭。

## 3. 微分形式的正性概念

本节将回顾微分形式的正性概念。更多细节可参阅 [Fag22a，第 1 节。1] 以及 [HK74，Fin22]。

设 $V$ 是一个维数为 $n$ 的复向量空间，且 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $V$ 的一组基。记 $(e^1, \cdots, e^n)$ 为其对偶基。令 $\Lambda^{p,q}V^*$ 表示 $(p, q)$-形式空间，令 $\Lambda^{p,p}_{\mathbb{R}}V^* \subset \Lambda^{p,p}V^*$ 表示实 $(p, p)$-形式子空间。

**定义 3.1**。若形式 $\nu \in \Lambda^{n,n}V^*$ 满足 $\nu = \tau\sqrt{-1}e^1 \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}e^n \wedge e^n$，其中 $\tau \in \mathbb{R}$、$\tau \geq 0$ 为某些对象（分别为 $\tau > 0$），则称其为非负（分别为正）体积形式。

现在我们规定，$q = n - p$若某个 $(q,0)$-形式 $\beta$ 可写为 $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q$，其中 $\beta_1, \ldots, \beta_q \in V^*$，则称其为可分解形式。

**定义 3.2**。实$(p,p)$-形式 $u \in \Lambda^{p,p}_{\mathbb{R}}V^*$ 称为

- 弱非负（分别为弱正），如果对于每个非零的$\beta \in \Lambda^{q,0}V^*$ 可分解形式，$u \wedge (\sqrt{-1})^{q^2}\beta \wedge \bar{\beta}$ 都是非负（分别为正）体积形式；
- 非负（分别为正），如果对于每个非零的 $\beta \in \Lambda^{q,0}V^*$，$u \wedge (\sqrt{-1})^{q^2}\beta \wedge \bar{\beta}$ 都是非负（分别为正）体积形式；
- 强非负（分别为强正），如果存在可分解形式 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \Lambda^{p,0}V^*$ 使得 $u = \sum_{s=1}^{N}(\sqrt{-1})^{p^2}\alpha_s \wedge \overline{\alpha_s}$。

注记 3.3。令 $\mathrm{WP}^pV^*$,$\mathrm{P}^pV^*$ 和 $\mathrm{SP}^pV^*$ 分别表示包含于 $\Lambda^{p,p}_{\mathbb{R}}V^\vee$ 中、由弱非负、非负和强非负形式张成的闭正凸锥。于是

$$\mathrm{SP}^pV^* \subseteq \mathrm{P}^pV^* \subseteq \mathrm{WP}^pV^*. \tag{3.1}$$

注意，对于 $p = 0, 1, n-1, n$，上述两个包含关系变为等式；而对于 $2 \leq p \leq n-2$，包含关系是严格的，参见例如 [Fag22a，注记 1.7, 1。8]以及 [HK74]。

**命题 3.4**。若 $u$ 是正的 $(k,k)$-形式，且 $v$ 是正的 $(l,l)$-形式，$k + l \leq n$，则 $u \wedge v$ 是正的 $(k+l, k+l)$-形式。

证明。根据 [HK74，推论 1.3 (a)]，$u \wedge v$是一个非负 $(k+l, k+l)$-形式，即对于任意非零的 $\beta \in \Lambda^{n-k-l,0}V^*$，

$$u \wedge v \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k-l)^2}\beta \wedge \bar{\beta} \geq 0. \tag{3.2}$$

根据 [HK74，定理 1。2]，$v$ 具有如下形式

$$v = \sum_{s=1}^{N}(\sqrt{-1})^{l^2}\alpha_s \wedge \overline{\alpha_s}$$

对于某些 $(l,\ 0)$-形式 $\alpha_s, 1 \leq s \leq N$。因此

$$u \wedge v \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k-l)^2}\beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{s=1}^{N} u \wedge (\sqrt{-1})^{l^2}\alpha_s \wedge \overline{\alpha_s} \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k-l)^2}\beta \wedge \bar{\beta}$$
$$= \sum_{s=1}^{N} u \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\alpha_s \wedge \beta \wedge \overline{\alpha_s \wedge \beta}.$$

因此，等式（3.2）成立，当且仅当

$$u \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\alpha_s \wedge \beta \wedge \overline{\alpha_s \wedge \beta} = 0, \quad 1 \leq s \leq N,$$

这等价于

$$\alpha_s \wedge \beta = 0, \quad 1 \leq s \leq N.$$

Thus

$$v \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k-l)^2}\beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{s=1}^{N} (\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\alpha_s \wedge \beta \wedge \overline{\alpha_s \wedge \beta} = 0,$$

这与 $v$ 的正性矛盾。因此

$$u \wedge v \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k-l)^2}\beta \wedge \bar{\beta} > 0$$

对任意非零的 $\beta \in \Lambda^{n-k-l,0}V^*$，即 $u \wedge v$ 是正的。

□

设 $X$ 是一个维数为 $n$ 的复流形，并用 $A^{p,q}(X)$ 表示所有光滑 $(p,q)$ 形式构成的空间。

**定义 3.5**。若对任意 $x \in X$, $\alpha_x \in \Lambda^{p,p}_{\mathbb{R}}(T^{1,0}_x X)^*$ 均分别为弱非负（弱正）、非负（正）或强非负（强正），则称实 $(p,p)$-形式 $\alpha \in A^{p,p}(X)$ 为弱非负（弱正）、非负（正）或强非负（强正）。

## 4. I 型强可分解正性

本节将给出 I 型强可分解正向量丛的判据，并证明舒尔形式的弱正性。

4.1. **I 型正性的判据**。本小节遵循 S. Finski 的方法 [Fin22，定理 2.15、2。17], 我们将利用 M.- D. Choi 的结果，给出 I 型强可分解正性（非负性）的判据。

设 $(E, h^E)$ 是一个 I 型强可分解非负向量丛。对于任意 $x \in X$，存在一个分解 $T^{1,0}_x X = U_x \oplus V_x$。可以取 $x$ 附近的局部全纯坐标 $\{z^1, \cdots, z^n\}$，使得

$$U_x = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\partial_1, \cdots, \partial_{n_0}\},\ V_x = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\partial_{n_0+1}, \cdots, \partial_n\},$$

其中 $n_0 :=$ 维$U_x$，并回忆 $\partial_\alpha := \partial/\partial z^\alpha$。设 $\{e_i\}_{1\le i\le r}$ 是 $E$ 的局部全纯标架，使得

$$h_{i\bar{j}}(x) = h^E(e_i(x), e_j(x)) = \delta_{ij}.$$

相对于 $\{z^\alpha\}_{1\le\alpha\le n}$ 和 $\{e_i\}_{1\le i\le r}$，$x \in X$ 处的陈曲率矩阵 $R =(R_i^j)$ 可表示为

$$\begin{aligned} R_i^j &= R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_0} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n_0}\sum_{\beta=n_0+1}^{n} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \sum_{\alpha=n_0+1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n_0} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

根据假设，$(E,\ h^E)$ 是 I 型强可分解非负的，因此

$$\sum_{\alpha=1}^{n_0}\sum_{\beta=n_0+1}^{n} R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} u^{i\alpha}\overline{v'^{j\beta}} = 0$$

对于任意 $\sum_{\alpha=1}^{n_0} u^{i\alpha} e_i \otimes \partial_\alpha$ 和 $\sum_{\beta=n_0+1}^{n} v'^{j\beta} e_j \otimes \partial_\beta$，由此可得

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = 0, \quad 1 \le \alpha \le n_0,\ n_0+1 \le \beta \le n. \tag{4.2}$$

取共轭可得

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = \overline{R_{j\bar{i}\beta\bar{\alpha}}} = 0, \quad n_0+1 \le \alpha \le n,\ 1 \le \beta \le n_0. \tag{4.3}$$

将（4.2）、（4.3）代入（4.1），得到

$$R_i^j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_0} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n} R^j_{i\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

对于局部标架 $\{\partial_\alpha\}_{1\le\alpha\le n}$，我们定义 $x$ 附近的局部度量 $g$，如下:

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) := \delta_{\alpha\beta}.$$

现在我们定义一个线性映射

$$H_x^V : \mathrm{End}(V_x) \to \mathrm{End}(E_x)$$

by

$$H_x^V(\partial_\alpha \otimes dz^\gamma) = R^j_{i\alpha\bar{\beta}} g^{\bar{\beta}\gamma} e_j \otimes e^i = R^j_{i\alpha\bar{\gamma}} e_j \otimes e^i \tag{4.4}$$

对于任意 $n_0+1 \le \alpha$、$\gamma \le n$。关于基 $\{\partial_\alpha\}_{n_0+1\le\alpha\le n}$，$\partial_\alpha \otimes dz^\gamma \in \mathrm{End}(U_x)$ 的矩阵为 $E_{\alpha\gamma}$，这是一个 $(n-n_0) \times (n-n_0)$ 矩阵，其 $(\alpha,\ \gamma)$ 分量为 1，其余位置均为 0。$R^j_{i\alpha\bar{\gamma}} e_j \otimes e^i \in \mathrm{End}(E_x)$ 的矩阵由 $(R^j_{i\alpha\bar{\gamma}})_{1\le j\le i\le r}$ 给出，其中 $(j$ 行，$i$ 列$)$。用矩阵表示，(4.4) 变为

$$H_x^V(E_{\alpha\gamma}) = (R^j_{i\alpha\bar{\gamma}})_{1\le j,i\le r} = (R_{i\bar{j}\alpha\bar{\gamma}})_{1\le j,i\le r}. \tag{4.5}$$

那么 $(H_x^V(E_{\alpha\gamma}))_{n_0+1\le\alpha,\ \gamma\le n}$ 是一个 $(n-n_0)\times(n-n_0)$ 分块矩阵，其元素为 $r\times r$ 矩阵，并且

$$(H_x^V(E_{\alpha\gamma}))_{n_0+1\le\alpha,\gamma\le n}=\left((R_{i\bar{j}\alpha\bar{\gamma}})_{1\le j,i\le r}\right)_{n_0+1\le\alpha,\ \gamma\le n}\quad (j\,\alpha\text{行 }i\,\gamma\text{列})。$$

由于 $(E,\ h^E)$ 是 I 型强可分解非负，因此

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{\bar{j}\alpha}\overline{v^{\bar{i}\beta}}\ge 0$$

对于任意非零的 $v=v^{\bar{j}\alpha}e_i\otimes\partial_\alpha\in E_x\otimes V_x$，这说明矩阵

$$(H_x^V(E_{\alpha\gamma}))_{n_0+1\le\alpha,\gamma\le n}$$

是半正定的。利用 [Cho75、定理 2 和定理 1], ，存在 $n-n_0()\times r$ 个矩阵 $V_p$，$1\le p\le N_1$（可以选取 $N_1=(n-n_0)\cdot r$），使得

$$H_x^V(E_{\alpha\gamma})=\sum_{p=1}^{N_1}\overline{V_p}^{\top}\cdot E_{\alpha\gamma}\cdot V_p$$

对任意 $n_0+1\le\alpha,\ \gamma\le n_\circ$ 结合（4.5）并考虑 $(j,\ i)$项，可得

$$R^j_{i\alpha\bar{\beta}}=\sum_{p=1}^{N_1}(\overline{V_p}^{\top}\cdot E_{\alpha\beta}\cdot V_p)_{j,i}=\sum_{p=1}^{N_1}\overline{(V_p)_{\alpha j}}(V_p)_{\beta i}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n}R^j_{i\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta&=\sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n}\sum_{p=1}^{N_1}\overline{(V_p)_{\alpha j}}(V_p)_{\beta i}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta\\&=\sum_{p=1}^{N_1}A_{jp}\wedge\overline{A_{ip}},\end{aligned}$$

其中 $A_{jp}:=\sum_{\alpha=n_0+1}^{n}\overline{(V_p)_{\alpha j}}dz^\alpha$，并且有

$$\left(\sum_{\alpha,\beta=n_0+1}^{n}R^j_{i\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta\right)_{1\le j,i\le r}=A\wedge\overline{A}^{\top},$$

其中 $A=(A_{jp})$ 是一个以 $V_x^*$ 中的 (1,0)-形式为元素的 $r\times N_1$ 矩阵。

类似地，考虑线性映射

$$H_x^U:\mathrm{End}(U_x)\to\mathrm{End}(E_x^*),\quad H_x^V(\partial_\alpha\otimes dz^\gamma)=R^j_{i\alpha\bar{\gamma}}e^i\otimes e_j.$$

由此可得

$$(H_x^V(E_{\alpha\gamma}))_{1\le\alpha,\gamma\le n_0}=\left((R_{i\bar{j}\alpha\bar{\gamma}})_{1\le j,i\le r}\right)_{1\le\alpha,\gamma\le n_0}\quad (i\,\alpha\text{ row},j\,\gamma\text{ column}),$$

由此可得

$$\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n_0}R^j_{i\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta\right)_{1\le j,i\le r}=-B\wedge\overline{B}^{\top},$$

其中 $B=(B_{jp})$ 是一个 $r\times N_2$（可以取 $N_2=n_0\cdot r$）矩阵，其元素属于 $U_x^*$ 上的 $(0,1)$-形式。

因此，若 $(E,h^E)$ 是 I 型强可分解非负的，则对于任意 $x\in X$，该点处的陈曲率矩阵具有如下形式

$$R=-B\wedge\overline{B}^{\top}+A\wedge\overline{A}^{\top} \tag{4.6}$$

相对于一个酉标架，其中 $B$ 是一个以 $(0,1)$-形式为元素的 $r\times N_2$ 矩阵，$A$ 是一个以 $(1,0)$-形式为元素的 $r\times N_1$ 矩阵，并且

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\overline{B}\}\cap\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{A\}=\{0\}, \tag{4.7}$$

其中

$$\{\overline{B}\}:=\{\overline{B_{ip}},1\le i\le r,1\le p\le N_2\}$$

and

$$\{A\}:=\{A_{ip},1\le i\le r,1\le p\le N_1\}.$$

注 4.1. 注意到，上述论证与酉标架的选取无关。若 $\tilde{e}=e\cdot a$ 也是一个酉标架，则 $a$ 是一个酉矩阵。由（2.2），可得

$$\begin{aligned}\widetilde{R}&=a^{-1}\cdot(-B\wedge\overline{B}^{\top}+A\wedge\overline{A}^{\top})\cdot a\\&=-a^{-1}B\wedge\overline{a^{-1}B}^{\top}+a^{-1}A\wedge\overline{a^{-1}A}^{\top},\end{aligned}$$

其具有（4.6）的形式。此外，$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{B\}=\overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{C}}\{a^{-1}B\}$ 以及 $\overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{C}}\{A\}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a^{-1}A\}$，（4.7）等价于

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\overline{a^{-1}B}\}\cap\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a^{-1}A\}=\{0\}.$$

反之，我们假设 (4.6) 和 (4.7) 成立。对于任意 $x\in X$，取局部全纯坐标 $\{z^\alpha\}_{1\le\alpha\le n}$，定义在 $x\in X$ 附近，使得

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{dz^1|_x,\cdots,dz^{n_0}|_x\}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\overline{B}\}$$

and

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{dz^{n_0+1}|_x,\cdots,dz^{n_1}|_x\}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{A\}.$$

现在我们令

$$U_x:=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\partial_1|_x,\cdots,\partial_{n_0}|_x\},\quad V_x=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\partial_{n_0+1}|_x,\cdots,\partial_n|_x\}.$$

于是 $U_x\oplus V_x=T^{1,0}_xX$。利用 (4.6) 和 (4.7)，可以验证 $(E,h^E)$ 是强可分解非负的。

因此 $(E,h^E)$ 是 I 型强可分解非负，当且仅当 $(E,h^E)$ 的陈曲率矩阵满足 (4.6) 和 (4.7)。

接下来，我们假设 $(E,h^E)$ 是 I 型强分解正的，即它是 I 型强可分解非负的，并且

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}\overline{u^{j\beta}}=0\Longrightarrow u^{i\alpha}=0,\ \text{for all } 1\le i\le r,\ 1\le\alpha\le n_0 \tag{4.8}$$

and

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{\bar{j}\alpha}\overline{v^{\bar{i}\beta}}=0\Longrightarrow v^{\bar{j}\alpha}=0,\ \text{for all } 1\le j\le r,\ n_0+1\le\beta\le n. \tag{4.9}$$

根据 I 型强可分解非负的等价描述，即，(4.6) 和 (4.7) 成立，可得

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}\overline{u^{j\beta}}=\sum_{p=1}^{N_2}|B_{ip\bar{\alpha}}\overline{u^{i\alpha}}|^2.$$

**定义4.2**。 设 $B$ 是一个以(0,1)-形式为元素的 $r\times N_2$ 矩阵。我们将下列 $N_2\times rn_0$-矩阵$\mathbf{B}$ 定义为

$$\mathbf{B}:=(B_{ip\bar{\alpha}})_{p,i\alpha}=\begin{pmatrix} B_{11\bar{1}} & B_{11\bar{2}} & \cdots & B_{1r\overline{n_0}} \\ B_{12\bar{1}} & B_{11\bar{2}} & \cdots & B_{r2\overline{n_0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1N_2\bar{1}} & B_{1N_2\bar{2}} & \cdots & B_{rN_2\overline{n_0}} \end{pmatrix}_{N_2\times rn_0}. \tag{4.10}$$

类似地，若 $A$ 是一个以(1,0)-形式为元素的 $r\times N_1$ 矩阵，我们定义

$$\mathbf{A}:=(A_{jp\alpha})_{p,j\alpha}=\begin{pmatrix} A_{11(n_0+1)} & A_{11(n_0+2)} & \cdots & A_{r1n} \\ A_{12(n_0+1)} & A_{11(n_0+2)} & \cdots & A_{r2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N_1(n_0+1)} & A_{1N_1(n_0+2)} & \cdots & A_{rN_1n} \end{pmatrix}_{N_1\times r(n-n_0)}. \tag{4.11}$$

因此，(4.8) 等价于方程 $\mathbf{B}x=0$ 仅有零解。这也等价于 $\mathrm{rank}(\mathbf{B})=rn_0$。类似地，(4.9) 等价于$\mathrm{rank}(\mathbf{A})=r(n-n_0)$。

总之，我们得到

**定理 4.3**。 • 厄米向量丛 $(E,h^E)$ 是强可分解 $I$ 型非负的，当且仅当 (4.6) 和 (4.7) 成立。

• 厄米向量丛 $(E,\ h^E)$ 是 $I$ 型强可分解正，当且仅当 (4.6) 和 (4.7) 成立，且 $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=r\dim V_x$，$\mathrm{rank}(\mathbf{B})=r\dim U_x$。

由此，我们得到以下（对偶）Nakano 正向量丛的判据。

**推论 4.4**。 • 厄米向量丛 $(E,h^E)$ 是中野正的，当且仅当其陈曲率矩阵具有如下形式

$$R=-B\wedge\overline{B}^{\top}$$

相对于某个酉标架，其中 $B$ 是一个以$(0,\ 1)$-形式为元素的 $r\times N$ 矩阵，且 $\mathrm{rank}(\mathbf{B})=rn$。

• 厄米向量丛 $(E,h^E)$ 是对偶中野正的，当且仅当其陈曲率矩阵具有如下形式

$$R=A\wedge\overline{A}^{\top}$$

相对于某个酉标架，其中 $A$ 是一个以(1,0)形式为元素的 $r\times N$ 矩阵，且$\mathrm{rank}(\mathbf{A})=rn$。

注4.5。 请注意，关于对偶中野正性的上述推论此前已由 F. Fagioli [?在《 [Fin20]Fag20》第 13 页的正性部分中作为一条未附证明的论述提出。

**4.2. 舒尔形式的弱正性。** 本小节将证明 I 型强可分解正向量丛的舒尔形式的弱正性。

4.2.1. 舒尔多项式。 每个分拆 $\lambda \in \Lambda(k,r)$ 都对应一个次数为 $k$ 的舒尔多项式 $P_\lambda \in \mathbb{Q}[c_1,\ldots,c_r]$，定义为 $k\times k$ 行列式

$$P_\lambda(c_1,\ldots,c_r)=\det\left(c_{\lambda_i-i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k},$$

按照约定，若 $i\notin[0,r]$，则 $c_0=1$ 且 $c_i=0$。

记 $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 分别为 $r\times r$ 矩阵构成的向量空间和 $r$ 阶一般线性群。若映射 $P:\mathrm{M}_r(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ 在 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 对 $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ 的共轭作用下保持不变，则称其为 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$-不变映射。现在定义如下 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$-不变函数 $c_i:\mathrm{M}_r(\mathbb{C})\to\mathbb{C}, i=1,\ldots,r$：

$$\det(I_r+tX)=\sum_{i=0}^{r}t^i\cdot c_i(X),$$

其中 $I_r$ 是 $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ 中的单位矩阵。那么，$\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 在 $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ 上的不变齐次多项式所构成的分次环（此处记为 $\mathrm{I}(r)=\bigoplus_{k=0}^{+\infty}\mathrm{I}(r)_k$），由 $c_1$、……、$c_r$ 乘法生成。

设 $(E,\ h^E)$ 是一个厄米向量丛，其第 $i$ 个陈形式 $c_i(E,\ h^E)$ 定义为

$$c_i\left(E,h^E\right)=c_i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^E\right).$$

对于每个 $\lambda\in\Lambda(k,\ r)$，回顾一下，舒尔形式（见引言）可表示为

$$P_\lambda(c(E,h^E))=P_\lambda(c_1(E,h^E),\ldots,c_r(E,h^E)),$$

这代表舒尔类

$$P_\lambda(c(E)):=P_\lambda(c_1(E),\ldots,c_r(E))\in\mathrm{H}^{2k}(X,\mathbb{Z}).$$

4.2.2. ***Griffiths*** 锥。根据 [Gri70，第 242 页，(5.6)]，，每个 $P\in\mathrm{I}(r)_k$ 都可写为

$$P(B)=\sum_{\sigma,\tau\in S_k}\sum_{\rho\in[1,r]^k}p_{\rho\sigma\tau}B_{\rho_{\sigma(1)}\rho_{\tau(1)}}\cdots B_{\rho_{\sigma(k)}\rho_{\tau(k)}},\tag{4.12}$$

其中 $B_{\lambda\mu}$，$\lambda$，$\mu=1$，……，$r$ 是矩阵 $B$ 的各个分量，$S_k$ 是作用于 $k$ 个指标上的置换群，而 $[1,r]:=\{1,\ldots,r\}$。若元素 $P\in\mathrm{I}(r)_k$ 可表示为式（4.12）中的形式，则称其为格里菲思非负，其中

$$p_{\rho\sigma\tau}=\sum_{t\in T}\lambda_{\rho t}\cdot q_{\rho\sigma t}\bar{q}_{\rho\tau t},$$

对于某个有限集合 $T$、一些实数 $\lambda_{\rho t}\geqslant 0$ 和复数 $q_{\rho\sigma t}$。

*Griffiths* 锥 $\Pi(r) \subset \mathrm{I}(r)$ 定义为 Griffiths 非负多项式构成的锥。

**命题 4.6** (Fulton-Lazarsfeld [FL83，命题 A.3])。 设

$$P = \sum_{\lambda \in \Lambda(k,r)} a_\lambda(P) P_\lambda \quad (a_\lambda(P) \in \mathbb{Q})$$

是 $\mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_r]$ 中的非零加权齐次多项式。那么，当且仅当每个舒尔系数 $a_\lambda(P)$ 均为非负时， $P$才属于 *Griffiths* 锥 $\Pi(r)$ 。

特别地，对于每个 $\lambda \in \Lambda(k, r)$，有

$$P_\lambda(B) = \sum_{\sigma,\tau \in S_k} \sum_{\rho \in [1,r]^k} p_{\rho\sigma\tau} B_{\rho_{\sigma(1)}\rho_{\tau(1)}} \cdots B_{\rho_{\sigma(k)}\rho_{\tau(k)}},$$

其中 $p_{\rho\sigma\tau} = \sum_{1 \le i,\ j \le m} \left(\frac{1}{k!}\right)^2 a_{ij}(\tau)\overline{a_{ij}(\sigma)}$，其中 $(a_{ij}(\tau)) \in \mathrm{U}(m)$，参见 [FL83，(A.6)]。记 $T = [1, \overline{m}]^2$和 $q_{\sigma t} := \overline{a_t(\sigma)}$ 对于任意 $t \in T$，则

$$P_\lambda(B) = \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \sum_{\sigma,\tau \in S_k} \sum_{\rho \in [1,r]^k} \left( \sum_{t \in T} q_{\sigma t} \overline{q_{\tau t}} \right) B_{\rho_{\sigma(1)}\rho_{\tau(1)}} \cdots B_{\rho_{\sigma(k)}\rho_{\tau(k)}}. \tag{4.13}$$

4.2.3. 舒尔形式的弱正性。 假设 $(E,\ h^E)$ 是复流形 $X$ 上的 I 型强可分解正向量丛。根据定理 4.3，对于任意 $x \in X$，存在分解 $T^1_{\ x}{}^0X = U_x \oplus V_x$，使得 $(E,\ h^E)$ 的陈曲率矩阵 $R$ 具有如下形式

$$R = -B \wedge \overline{B}^\top + A \wedge \overline{A}^\top \tag{4.14}$$

相对于酉标架，其中 $B$是一个以 $U_x^*$中的 (0，1)-形式为元素的 $r \times N$矩阵， $A$是一个以 $\overline{V_x^*}$中的 (1，0)-形式为元素的 $r \times N$矩阵。此外，$\mathrm{rank(A)} = r \cdot \dim V_x$，$\mathrm{rank(B)} = r \cdot \dim U_x$。

对于每个 $\lambda \in \Lambda(k,\ r)$，根据（4.13），舒尔形式 $P_\lambda(c(E,\ h^E)$ 给出为

$$P_\lambda(c(E, h^E)) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\sigma,\tau \in S_k} \sum_{\rho \in [1,r]^k} \left( \sum_{t \in T} q_{\sigma t} \overline{q_{\tau t}} \right) \cdot \bigwedge_{j=1}^k R_{\rho_{\sigma(j)}\overline{\rho_{\tau(j)}}}.$$

由（4.14），陈曲率矩阵满足

$$\begin{aligned} R_{\rho_{\sigma(j)}\overline{\rho_{\tau(j)}}} &= (B_{\rho_{\tau(j)}c_j\bar{\beta}_j} \overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j\overline{\alpha_j}}} + A_{\rho_{\tau(j)}c_j\alpha_j} \overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j\beta_j}}) dz^{\alpha_j} \wedge d\bar{z}^{\beta_j} \\ &= \sum_{c_j=1}^N (\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}} \wedge B_{\rho_{\tau(j)}c_j} + A_{\rho_{\tau(j)}c_j} \wedge \overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}}) \\ &= \sum_{c_j=1}^N \sum_{\epsilon_j \in \{0,1\}} (\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}} \wedge B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j} \wedge (A_{\rho_{\tau(j)}c_j} \wedge \overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j}, \end{aligned}$$

由此可得

$$\bigwedge_{j=1}^{k} R_{\rho_{\sigma(j)}\overline{\rho_{\tau(j)}}} = \bigwedge_{j=1}^{k}\sum_{c_j=1}^{N}\sum_{\epsilon_j\in\{0,1\}} (\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}}\wedge B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j}\wedge(A_{\rho_{\tau(j)}c_j}\wedge\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j}$$

$$= \sum_{c\in[1,N]^k}\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{j=1}^{k}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}}\wedge B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j}\wedge(A_{\rho_{\tau(j)}c_j}\wedge\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j}$$

$$= \sum_{c\in[1,N]^k}\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{j=1}^{k}(-1)^{\epsilon_j+1}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{\epsilon_j}\wedge(\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j}\wedge(B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j}\wedge(A_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{1-\epsilon_j}$$

$$= \sum_{c\in[1,N]^k}\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{|\epsilon|+k}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot$$

$$(\bigwedge_{j=1}^{k}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{\epsilon_j}\wedge(\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j})\wedge(\bigwedge_{j=1}^{k}(B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j}\wedge(A_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{1-\epsilon_j}),$$

其中 $|\epsilon|:=\sum_{j=1}^{k}\epsilon_j$。

回顾 $\rho\in[1,r]^k$、 $t\in T$、 $c\in[1,N]^k$ 和 $\epsilon\in\{0,1\}^k$，我们得到

$$P_\lambda(c(E,h^E)) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\frac{1}{(k!)^2}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\sum_{\rho,t,c,\epsilon}(-1)^{|\epsilon|+k}\cdot$$

$$(\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\bigwedge_{j=1}^{k}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{\epsilon_j}\wedge(\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j})\wedge(\sum_{\tau\in S_k}\overline{q_{\tau t}}\bigwedge_{j=1}^{k}(B_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{\epsilon_j}\wedge(A_{\rho_{\tau(j)}c_j})^{1-\epsilon_j}).$$

现在我们设

$$\psi_{\rho tc\epsilon}:=\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\bigwedge_{j=1}^{k}(\overline{B_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{\epsilon_j}\wedge(\overline{A_{\rho_{\sigma(j)}c_j}})^{1-\epsilon_j},\tag{4.15}$$

它是一个 $(|\epsilon|,\ k-|\epsilon|)$-形式。因此

$$P_\lambda(c(E,h^E)) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)^2(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c,\epsilon}(-1)^{|\epsilon|+k}\psi_{\rho tc\epsilon}\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon}}.\tag{4.16}$$

对于任意非零的可分解 $(n-k,\ 0)$-形式 $\eta=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{n-k}$，其中$\eta_i$，$1\le i\le n-k$ 是 $(1,\ 0)$-形式，我们假设 $\eta_1,\ \cdots,\ \eta_{i_0}\in U_x^*$ 和 $\eta_{i_0+1},\ \cdots,\ \eta_{n-k}\in V_x^*$。现在，我们可以在 $x\in X$ 周围取局部全纯坐标$\{z^\alpha\}_{1\le\alpha\le n}$，使得

$$U_x^*=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{dz^1|_x,\cdots,dz^{n_0}|_x\},\ \text{with}\ dz^j|_x=\eta_j,\quad 1\le j\le i_0$$

and

$$V_x^*=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{dz^{n_0+1}|_x,\cdots,dz^{n}|_x\},\ \text{with}\ dz^{n_0-i_0+j}|_x=\eta_j,\quad i_0{+}1\le j\le n{-}k,$$

因此 $\psi_{\rho tc\epsilon}$ 可以写成如下形式

$$\psi_{\rho tc\epsilon} = \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\cdots<\alpha_{|\epsilon|}\le n_0\\ n_0+1\le\beta_1<\cdots<\beta_{k-|\epsilon|}\le n}} \psi_{\alpha_1\cdots\alpha_{|\epsilon|}\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-|\epsilon|}} dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{|\epsilon|}} \wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_{k-|\epsilon|}}.$$

Then

(4.17)

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c,\epsilon}(-1)^{|\epsilon|+k}\psi_{\rho tc\epsilon}\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon}}\wedge(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\eta\wedge\bar\eta\\
&=(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c,|\epsilon|=n_0-i_0}(-1)^{n_0-i_0+k}(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}dz^1\wedge\cdots\wedge dz^{i_0}\wedge\\
&dz^{n_0+1}\wedge\cdots\wedge dz^{n-i_0+n-k}\wedge d\bar z^1\wedge\cdots\wedge d\bar z^{i_0}\wedge d\bar z^{n_0+1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{n-i_0+n-k}\wedge\\
&\Big(\psi_{i_0+1,\cdots,n_0,\overline{n_0-i_0+n-k+1},\cdots,\bar n}dz^{i_0+1}\wedge\cdots\wedge dz^{n_0}\wedge d\bar z^{n_0-i_0+n-k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^n\Big)\wedge\\
&\Big(\overline{\psi_{i_0+1,\cdots,n_0,\overline{n_0-i_0+n-k+1},\cdots,\bar n}}d\bar z^{i_0+1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{n_0}\wedge dz^{n_0-i_0+n-k+1}\wedge\cdots\wedge dz^n\Big)\\
&=\sum_{\rho,t,c,|\epsilon|=n_0-i_0}|\psi_{i_0+1,\cdots,n_0,\overline{n_0-i_0+n-k+1},\cdots,\bar n}|^2\cdot\\
&(\sqrt{-1})^{n^2}dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar z^1\wedge\cdots\wedge d\bar z^n,
\end{aligned}$$

这是一个非负体积形式。由（4.16），舒尔形式 $P_\lambda(c(E,\ h^E))$是弱非负的。

我们将用反证法证明舒尔形式 $P_\lambda(c(E,\ h^E))$ 的弱正性。具体而言，假设$P_\lambda(c(E,\ h^E))\wedge(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\eta\wedge\bar\eta=0$，并由此推出矛盾。

由（4.17）可知

$$P_\lambda(c(E,h^E))\wedge(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\eta\wedge\bar\eta=0$$

当且仅当

$$\psi_{i_0+1,\cdots,n_0,\overline{n_0-i_0+n-k+1},\cdots,\bar n}=0 \tag{4.18}$$

对任意 $\rho,\ t,\ c,\ |\epsilon|=n_0-i_0$。

现在我们取一个特殊向量 $\epsilon=(1,\ \cdots,\underbrace{1,\ 0}\cdots,\ 0)$，并记为 $j_0=n_0-i_0$

$n_0-i_0$，由（4.15），可得

$$\psi_{\rho tc\epsilon}=\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\overline{B_{\rho_{\sigma(1)}c_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{B_{\rho_{\sigma(j_0)}c_{j_0}}}\wedge\overline{A_{\rho_{\sigma(j_0+1)}c_{j_0+1}}}\wedge\cdots\wedge\overline{A_{\rho_{\sigma(k)}c_k}}.$$

结合（4.18），可得

(4.19)
$$\begin{aligned}0 &= \psi_{i_0+1,\cdots,n_0,\overline{n_0-i_0+n-k+1},\cdots,\bar{n}}\\ &= \sum_{\tau_1\in S_{j_0}}\sum_{\tau_2\in S_{k-j_0}}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau_1)\operatorname{sgn}(\tau_2)q_{\sigma t}\cdot\\ &\overline{B_{\rho_{\sigma(1)}c_1\overline{\tau_1(i_0+1)}}}\cdots\overline{B_{\rho_{\sigma(j_0)}c_{j_0}\overline{\tau_1(n_0)}}}\cdot\overline{A_{\rho_{\sigma(j_0+1)}c_{j_0+1}\tau_2(j_0+n-k+1)}}\cdots\overline{A_{\rho_{\sigma(k)}c_k\tau_2(n)}}.\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{rank(A)}=r\cdot\dim V_x$，$\mathbf{rank(B)}=r\cdot\dim U_x$，不失一般性，我们假设子矩阵

$$\mathbf{B}'=(\mathbf{B}_{c,i\alpha})_{1\le c\le r\dim U_x,1\le i\le r,1\le\alpha\le\dim U_x}$$

and

$$\mathbf{A}'=(\mathbf{A}_{c,j\alpha})_{1\le c\le r\dim V_x,1\le j\le r,1\le\alpha\le\dim V_x}$$

$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{A}$ 互为逆矩阵。由（4.19），并注意到$\mathbf{B}'_{c,\ i\alpha}=B_{ic\bar{\alpha}}$ 以及$\mathbf{A}'_{c,\ j\alpha}=A_{jc\alpha}$，可得

(4.20)
$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\tau_1\in S_{j_0}}\sum_{\tau_2\in S_{k-j_0}}\sum_{c_1,\cdots,c_{j_0}=1}^{rn_0}\sum_{c_{j_0+1},\cdots,c_k=1}^{r(n-n_0)}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau_1)\operatorname{sgn}(\tau_2)q_{\sigma t}\cdot\\ &\overline{\mathbf{B}'_{c_1,\rho_{\sigma(1)}\tau_1(i_0+1)}}\cdots\overline{\mathbf{B}'_{c_{j_0},\rho_{\sigma(j_0)}\tau_1(n_0)}}\cdot\overline{\mathbf{A}'_{c_{j_0+1},\rho_{\sigma(j_0+1)}\tau_2(j_0+n-k+1)}}\cdots\overline{\mathbf{A}'_{c_k,\rho_{\sigma(k)}\tau_2(n)}}\cdot\\ &\overline{\mathbf{A}'^{-1}_{l_k\beta_k,c_k}}\cdots\overline{\mathbf{A}'^{-1}_{l_{j_0+1}\beta_{j_0+1},c_{j_0+1}}\mathbf{B}'^{-1}_{l_{j_0}\beta_{j_0},c_{j_0}}}\cdots\overline{\mathbf{B}'^{-1}_{l_1\beta_1,c_1}}\\ &= \sum_{\tau_1\in S_{j_0}}\sum_{\tau_2\in S_{k-j_0}}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau_1)\operatorname{sgn}(\tau_2)q_{\sigma t}\cdot\delta_{\rho_{\sigma(k)}l_k}\delta_{\tau_2(n)\beta_k}\cdots\delta_{\rho_{\sigma(j_0+1)}l_{j_0+1}}\cdot\\ &\delta_{\tau_2(j_0+n-k+1)\beta_{j_0+1}}\delta_{\rho_{\sigma(j_0)}l_{j_0}}\delta_{\tau_1(n_0)\beta_{j_0}}\cdots\delta_{\rho_{\sigma(1)}l_1}\delta_{\tau_1(i_0+1)\beta_1}\end{aligned}$$

对于任意 $(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_{j_0})\in[1,n_0]^{j_0}$、$(\beta_{j_0+1},\ \cdots,\ \beta_k)\in[n_0+1,n]^{n-j_0}$ 以及 $(l_1,\ \cdots,\ l_k)\in[1,r]^k$，均成立。

取

$$\beta_s=\begin{cases}i_0+s & 1\le s\le j_0,\\ n-k+s & j_0+1\le s\le k,\end{cases}$$

则（4.20）变为

$$\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\delta_{\rho_{\sigma(1)}l_1}\cdots\delta_{\rho_{\sigma(k)}l_k}=0 \tag{4.21}$$

对于任意的 $\rho,l\in[1,r]^k$ 和 $t\in T$。

注记 4.7. 注意到，(4.21) 成立当且仅当 $\psi_{\rho tc\epsilon}=0$ 对任意 $\rho,t,c,\epsilon$. 事实上，若 $\psi_{\rho tc\epsilon}=0$，则 (4.18) 成立，进而得到 (4.21)。反之，若

(4.21) 成立，则

$$\psi_{\rho t c \epsilon} = \sum_{l\in[1,r]^k} \Big( \sum_{\sigma\in S_k} q_{\sigma t} \delta_{\rho_{\sigma(1)} l_1} \cdots \delta_{\rho_{\sigma(k)} l_k} \Big) \bigwedge_{j=1}^{k} \overline{B_{l_j c_j}}^{\epsilon_j} \wedge \overline{A_{l_j c_j}}^{1-\epsilon_j} = 0.$$

对于 $k \le r$，可取 $\rho_i = l_i = i$ 使其满足 $1 \le i \le k$。因此

$$0 = \sum_{\sigma\in S_k} q_{\sigma t} \delta_{\rho_{\sigma(1)} l_1} \cdots \delta_{\rho_{\sigma(k)} l_k} = q_{\mathrm{Id},t}$$

对于任意 $t \in T$，这就产生了矛盾，因为 $(q_{\mathrm{Id},\ t})_{t\in T} \in \mathrm{U}(m)$ 是一个酉矩阵。因此，对于任意 $k \le r$，所有 $(k,\ k)$-舒尔形式 $P_\lambda(c(E,\ h^E))$ 都是弱正的。特别地，所有陈形式 $c_i(E,\ h^E)$ $1 \le i \le r$ 都是弱正的。

对于一般的 $k$和 $r$，我们取 $l_1,\ \cdots,\ l_k$在（4.21）中为

$$l_i = \rho_i, \text{ for } 1 \le i \le k,$$

且（4.21）意味着

$$\sum_{\rho\in[1,r]^k} \sum_{\sigma\in S_k} \chi_\lambda(\sigma) \delta_{\rho_1\rho_{\sigma(1)}} \cdots \delta_{\rho_k\rho_{\sigma(k)}} = 0, \tag{4.22}$$

其中

$$\chi_\lambda(\sigma) = \mathrm{Tr}(\overline{q_{\sigma t}}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(\sigma)$$

是表示 $\phi_\lambda(\sigma) = (a_{ij}(\sigma)) \in \mathrm{U}(m)$ 对应于分拆 $\lambda$的特征标。由 [FL83, (A.5)], (4.22) 等价于

$$P_\lambda(I_r) = 0. \tag{4.23}$$

这里 $P_\lambda$(•)表示在同构 $\mathrm{I}(r) \cong \mathbb{Q}(c_1,\ \cdots,\ c_r)$下，与舒尔函数 $P_\lambda$ 对应的不变多项式。

将陈根记作 $x_1,\ \cdots,\ x_r$，其定义如下:

$$\sum_{j=0}^{r} c_j t^j = (1+tx_1)(1+tx_2)\cdots(1+tx_r).$$

回忆一下，舒尔多项式定义为

$$P_\lambda\left(c_1,\ldots,c_r\right) = \det\left(c_{\lambda_j-j+l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant k},$$

其中 $\lambda = (\lambda_1、\ \cdots、\ \lambda_k) \in \Lambda(k、\ r)$ 是满足以下条件的分拆

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = k \text{ and } r \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_k \ge 0.$$

记 $\lambda'$ 为分拆 $\lambda$的共轭分拆，参见例如 [FH91，第 4.1 节，第 45], 页，则

$$\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_r), \quad \text{with } \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i = k \text{ and } \lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_r \geq 0. \tag{4.24}$$

第二个雅可比-特鲁迪恒等式（或詹贝利公式）给出

$$P_\lambda(c_1, \ldots, c_r) = \det\left(c_{\lambda_j - j + l}\right)_{1 \leqslant j,l \leqslant k} = s_{\lambda'}(x_1, \cdots, x_r), \tag{4.25}$$

例如参见 [FH91，第 455 页，(A.6)], 其中

$$s_{\lambda'}(x_1, \cdots, x_r) := \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda'_1+r-1} & x_2^{\lambda'_1+r-1} & \ldots & x_r^{\lambda'_1+r-1} \\ x_1^{\lambda'_2+r-2} & x_2^{\lambda'_2+r-2} & \ldots & x_r^{\lambda'_2+r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda'_r} & x_2^{\lambda'_r} & \ldots & x_r^{\lambda'_r} \end{vmatrix}}{\prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_i - x_j)}. \tag{4.26}$$

特别地，我们有

$$\begin{aligned} P_\lambda(I_r) &= P_\lambda\left(c_1 = C_r^1, \cdots, c_i = C_r^i, \cdots, c_r = C_r^r\right) \\ &= s_{\lambda'}(1, \cdots, 1) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\lambda'_i - \lambda'_j + j - i}{j - i} \geq 1, \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中第三个等号由 [FH91，第 461 页，(ii)]得出。因此， $P_\lambda(I_r) \neq 0$，这与 (4.23)矛盾。因此，

$$P_\lambda(c(E, h^E)) \wedge (\sqrt{-1})^{(n-k)^2} \eta \wedge \bar{\eta} > 0$$

对于任意非零的可分解 $(n-k, 0)$-形式 $\eta$，因此 $P_\lambda(c(E, h^E))$ 是一个弱正的 $(k, k)$-形式。

总之，我们得到

**定理 4.8**。设复流形 $X$ 上的 $(E, h^E)$ 是一个 $I$ 型强可分解正向量丛，秩 $E = r$，且 维数 $X = n$。那么，对于任意分拆 $\lambda \in \Lambda(k, r)$，$k \leq n$ 和 $k \in \mathbb{N}$，舒尔形式 $P_\lambda(c(E, h^E))$ 都是弱正的。

特别地，若 $(E, h^E)$ 是中野正的，则陈曲率矩阵具有如下形式

$$R = -B \wedge \overline{B}^\top.$$

通过在 $A = 0$ （4.15）中考虑，得到

$$\psi_{\rho t c \epsilon_1} = \sum_{\sigma \in S_k} q_{\sigma t} \bigwedge_{j=1}^{k} \overline{B_{\rho_{\sigma(j)} c_j}}, \quad \epsilon_1 = (1, \cdots, 1)$$

and

$$\psi_{\rho t c \epsilon} = 0, \text{ for any } \epsilon \neq \epsilon_1,$$

由（4.16）可得

$$P_\lambda(c(E,h^E))=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)^2(\sqrt{-1})^{k^2}\sum_{\rho,t,c}\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon_1}},\tag{4.28}$$

其中 $\psi_{\rho tc\epsilon_1}$ 是一个 $(k,\ 0)$-形式。对于任意非零的 $(n-k,\ 0)$-形式 $\eta$，有

$$\begin{aligned}&P_\lambda(c(E,h^E))\wedge(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\eta\wedge\overline{\eta}\\=&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)^2(\sqrt{-1})^{n^2}\sum_{\rho,t,c}\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\eta\wedge\overline{\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\eta},\end{aligned}$$

它是一个非负体积形式，因此 $P_\lambda(c(E,\ h^E))$ 是非负的。此外，

$$P_\lambda(c(E,h^E))\wedge(\sqrt{-1})^{(n-k)^2}\eta\wedge\overline{\eta}=0\tag{4.29}$$

当且仅当

$$\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\eta=0\tag{4.30}$$

对于任意 $\rho\in[1,r]^k,\ \ t\in T,\ \ c\in[1,N]^k$。根据 $\psi_{\rho tc\epsilon_1}$，(4.30) 可化为

$$\begin{aligned}0=&\psi_{\rho tc\epsilon_1}\wedge\eta\\=&\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\overline{B_{\rho_{\sigma(1)}c_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{B_{\rho_{\sigma(k)}c_k}}\wedge\eta\\=&\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\overline{B_{\rho_{\sigma(1)}c_1\bar{\alpha}_1}}\cdots\overline{B_{\rho_{\sigma(k)}c_k\bar{\alpha}_k}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_k}\wedge\eta.\end{aligned}\tag{4.31}$$

由于 $(E,\ h^E)$ 是中野正的，根据推论 4.4，我们可以取 $B$，使得 $\mathbf{B}$ 可逆。将 (4.31) 乘以 $(\mathbf{B}^{-1})_{c_1,\ l_1\beta_1}\cdots(\mathbf{B}^{-1})_{c_k,\ l_k\beta_k}$，并对 $c_1,\ \cdots,\ c_k$ 求和，得到

$$\left(\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\delta_{\rho_{\sigma(1)}l_1}\cdots\delta_{\rho_{\sigma(k)}l_k}\right)dz^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\beta_k}\wedge\eta=0$$

对任意 $l=(l_1,\ \cdots,\ l_k)\in[1,r]^k$ 和 $\beta=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_k)\in[1,n]^k$。通过选择 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_k$ 使得 $dz^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\beta_k}\wedge\eta\neq0$，因此

$$\sum_{\sigma\in S_k}q_{\sigma t}\delta_{\rho_{\sigma(1)}l_1}\cdots\delta_{\rho_{\sigma(k)}l_k}=0,\tag{4.32}$$

这正是 (4.21)。根据注 4.7，(4.32) 等价于 $\psi_{\rho tc\epsilon_1}=0$。因此 (4.29) 等价于 (4.32)，由此可得 $P_\lambda(I_r)=0$，见 (4.23)。根据 (4.27)，$P_\lambda(I_r)\neq0$，因此得到矛盾。于是，$P_\lambda(c(E,h^E))$ 是一个正的 $(k,k)$-形式。类似地，如果 $(E,h^E)$ 是对偶中野正的，那么$P_\lambda(c(E,h^E))$ 也是一个正的 $(k,k)$-形式。

因此，我们可以为以下（对偶）中野正向量丛的舒尔形式正性给出代数证明。

定理 *4.9*（*Finski* [*Fin22*，定理 *1.*1]）。设 $(E, h^E)$ 是复流形 $X$（维数为 $n$）上的秩为 $r$ 的（对偶）中野正（分别为非负）向量丛。那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ 和 $\lambda \in \Lambda(k, r)$，$(k, k)$-形式 $P_\lambda\left(c\left(E, h^E\right)\right)$ 是正（分别为非负）的。

注4.10。 注意到，S. Finski 通过以下两个步骤证明了上述舒尔形式的正性：第一步是在微分形式层面精化 Kempf-Laksov 的行列式公式，该公式将舒尔形式表示为某个厄米向量丛的顶陈形式的推前，而该向量丛是由 $(E, h^E)$ 的张量幂取商得到的；第二步则是证明（对偶）中野正向量丛的顶陈形式为正。我们的方法则是通过分析舒尔形式的消失来给出代数证明，与 S. Finski 的方法截然不同。

## 5. II 型强可分解正性

本节将讨论 II 型强可分解正性，它是逐点意义下中野正向量丛与对偶中野正向量丛的直和。

**5.1. II 型正性的判据。** 设 $(E, h^E)$ 是一个 II 型强可分解正向量丛，见定义 2.7。由推论4.4可知，对于 $(E_{1,x}, h^E|_{E_{1,x}})$ 在 $x \in X$ 处的酉标架 $\{e_1, \cdots, e_{r_1}\}$，以及 $(E_{2,x}, h^E|_{E_{2,x}})$ 在 $x \in X$ 处的酉标架 $\{e_{r_1+1}, \cdots, e_r\}$，有

$$R^E_x|_{E_{1,x}} = -B_1 \wedge \overline{B_1}^\top, \quad R^E_x|_{E_{2,x}} = A_2 \wedge \overline{A_2}^\top,$$

其中，$\mathbf{B}_1$的秩为 $= \dim(E_{1,x}) \cdot n$，$\mathbf{A}_2$的秩为 $= \dim(E_{2,x}) \cdot n$。其中，$B_1 = ((B_1)^{ip})_{1\leq i\leq r_1, 1\leq j\leq N_1}$ 是一个以(0,1)-形式为元素的矩阵，而 $A_2 = ((A_2)^{ip})_{r_1+1\leq i\leq r, 1\leq j\leq N_2}$ 是一个以(1,0)-形式为元素的矩阵。矩阵$\mathbf{B}_1$ 和$\mathbf{A}_2$ 分别定义于(4.10)和(4.11)中。现在我们定义矩阵 $A_{r\times N}$ 和 $B_{r\times N}$（$N = \max\{N_1, N_2\}$），如下：

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Then

$$\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}_1) = r_1 \cdot n, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}_2) = (n - r_1) \cdot n$$

and

$$R^E_x = \begin{pmatrix} -B_1 \wedge \overline{B_1}^\top & 0 \\ 0 & A_2 \wedge \overline{A_2}^\top \end{pmatrix} = -B \wedge \overline{B}^\top + A \wedge \overline{A}^\top.$$

对于矩阵 $\mathbf{B} = (B_{ip\bar{\alpha}})_{i\alpha,\ p}$，我们可以将其与另一个矩阵 $\mathcal{B}$ 关联起来，定义如下：

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\alpha p}) = \left(\sum_{i=1}^{r} B_{ip\bar{\alpha}} e_i\right)_{\alpha p},$$

它是一个以 $E$ 的元素为条目的 $n \times N$ 矩阵。类似地，我们可以定义一个 $n \times N$ 矩阵，如下:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{\alpha p}) = \left( \sum_{i=1}^{r} A_{ip\alpha} e_i \right)_{\alpha p}.$$

我们定义

$$\{\mathcal{B}\} := \left\{ \sum_{i=1}^{r} B_{ip\bar{\alpha}} e_i, 1 \le p \le N, 1 \le \alpha \le n \right\}$$

and

$$\{\mathcal{A}\} := \left\{ \sum_{i=1}^{r} A_{ip\alpha} e_i, 1 \le p \le N, 1 \le \alpha \le n \right\}.$$

根据矩阵 $A$ 和 $B$的定义，可得

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}\} \perp \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{B}\}.$$

因此，若 $(E, h^E)$ 是一个 II 型强分解正向量丛，则存在两个 $r \times N$-矩阵 $A$和 $B$，分别由 $(1,0)$-形式和 $(0,1)$-形式构成，使得相对于 $E_x$的酉标架 $\{e_i\}_{1 \le i \le r}$，

$$R_x^E = -B \wedge \overline{B}^{\top} + A \wedge \overline{A}^{\top}, \tag{5.2}$$

and

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}\} \perp \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{B}\}. \tag{5.3}$$

此外，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的秩满足

$$\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = r_1 \cdot n, \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = (r - r_1) \cdot n. \tag{5.4}$$

注 5.1。若我们考虑一个新的酉标架 $\widetilde{e} = e \cdot a$，对应于酉矩阵$a \in \mathrm{U}(r)$，根据注 4.1，可得

$$\widetilde{R_x^E} = -\widetilde{B} \wedge \overline{\widetilde{B}}^{\top} + \widetilde{A} \wedge \overline{\widetilde{A}}^{\top}, \tag{5.5}$$

其中 $\widetilde{B} = a^{-1} \cdot B$ 和 $\widetilde{A} = a^{-1} \cdot A$。此外，有

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha p} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{B}_{ip\bar{\alpha}} \widetilde{e}_i = \sum_{i,j=1}^{r} (a^{-1})_{ij} B_{jp\bar{\alpha}} \widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^{r} B_{jp\bar{\alpha}} e_j = \mathcal{B}_{\alpha p}.$$

$\widetilde{\ }$类似地，$\mathcal{A}_{\alpha p} = \mathcal{A}_{\alpha p}$。因此，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 与酉标架无关。还可以验证

$$\mathrm{rank}(\widetilde{\mathbf{B}}) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = r_1 \cdot n, \quad \mathrm{rank}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = (r - r_1) \cdot n.$$

总之，我们证明 (5.2)–(5.4) 对任意酉标架都成立。

反过来，我们假设 (5.2)–(5.4) 对 $E_x$,$x \in X$ 的某个酉标架成立。令

$$E_{1,x} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{B}\}, \quad E_{2,x} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathcal{A}\}.$$

设 $\{e_1, \cdots, e_{r_1'}\}$ 是 $E_{1,x}$ 的酉标架，$\{e_{r_1'+1}, \cdots, e_{r'}\}$ 是 $E_{2,x}$ 的酉标架。由于 $E_{1,x} \perp E_{2,x}$，因此 $\{e_i\}_{1 \le i \le r'}$ 是 $E_{1,x} \oplus$ 的酉标架

$E_{2,x}$。现在我们可以扩充标架 $\{e_i\}_{1\le i\le r'}$，得到一个酉标架$\{e_i\}_{1\le i\le r}$，它属于 $E_x$。根据注 5.1，式（5.2）–（5.4）对这个酉标架 $\{e_i\}_{1\le i\le r}$ 也成立。因此

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}e_j\otimes\overline{e_i}=\sum_{p=1}^{N}(-\mathcal{B}_{\beta p}\otimes\overline{\mathcal{B}_{\alpha p}}+\mathcal{A}_{\alpha p}\otimes\overline{\mathcal{A}_{\beta p}}).$$

So

$$R^E_x|_{E_{1,x}}=-B\wedge\overline{B}^{\top},\ R^E_x|_{E_{2,x}}=A\wedge\overline{A}^{\top}$$

and

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}=0\text{ for any }(i,j)\text{ or }(j,i)\in[1,r'_1]\times[r'_1+1,r].$$

由（5.4），有

$$r'_1\ge r_1,\quad r-r'_1\ge r'-r'_1\ge r-r_1,$$

由此可得

$$r_1=r'_1,\quad r'=r.$$

因此 $E_x=E_{1,\,x}\oplus E_{2,\,x}$。由推论 4.4，可知对于任意非零的 $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}u^{i\alpha}\overline{u^{j\beta}}>0$ $u=u^{i\alpha}e_i\otimes\partial_\alpha\in E_{1,\,x}\otimes T^{1,\,0}_{\,x}X$，$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}v^{i\bar{\beta}}\overline{v^{j\bar{\alpha}}}>0$对于任意非零的 $v=v^{i\bar{\beta}}e_i\otimes\partial_{\bar{\beta}}\in E_{2,\,x}\otimes T^{0,\,1}_{\,x}X$。因此，$(E,\ h^E)$ 是一个 II 型强分解正向量丛。

总之，我们得到了一个 II 型强分解正向量丛的判据。

**定理 5.2**。（$E$，$h^E$）是一个 *II* 型强分解正向量丛，当且仅当其满足（5.2）–（5.4）。

**5.2. 舒尔形式的正性**。本小节将考察 II 型强分解正向量丛的舒尔形式的正性。

设 $E$ 和 $F$ 是复流形$X$上的两个全纯向量丛，秩$(E)=r$ 且 秩$(F)=q$。令 $x_1$、$\cdots$、$x_r$ 分别表示$E$的陈根。对于满足 (4.24) 的任意分拆 $\lambda'$

$$s_{\lambda'}(c(E)):=s_{\lambda'}(x_1,\cdots,x_r)\in\mathrm{H}^{2k}(X,\mathbb{R}),$$

其中 $s_{\lambda'}(x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 由 (4.26) 定义，也称为舒尔类。类似地，可以定义上同调类 $s_{\lambda'}(c(F))$ 和 $s_{\lambda'}(c(E\oplus F))$。对于这些上同调类，根据 Littlewood-Richardson 规则，参见 [BRT21，命题 3.3 (3.14)]，，有

$$s_{\lambda'}(c(E\oplus F))=\sum_{\mu',\nu'}c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}s_{\mu'}(c(E))s_{\nu'}(c(F)),$$

其中 $c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}$ 是一个 Littlewood-Richardson 系数。有关 Littlewood-Richardson 系数的更多详细信息，请参阅 [Ful97，第 5] 章。由

(4.25)，直和 $P_\lambda(c(E\oplus F))$ 的舒尔类 $E\oplus F$ 满足

(5.6)
$$P_\lambda(c(E\oplus F))=\sum_{\mu',\nu'}c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}P_\mu(c(E))P_\nu(c(F))=\sum_{\mu,\nu}c^{\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(c(E))P_\nu(c(F)),$$

其中 $\lambda$，$\mu$，$\nu$分别是 $\lambda'$，$\mu'$，$\nu'$的共轭分拆。最后一个等式由共轭对称性 $c^{\lambda'}_{\mu'\nu'}=c^{\lambda}_{\mu\nu}$得出，参见例如 [Ste01，第 115]页。

设 $h^E$ 和 $h^F$ 分别是 $E$ 和 $F$上的厄米度量。直和 $E\oplus F$赋予自然度量 $h^E\oplus h^F$。现在我们可以在微分形式层面证明（5.6）。

**命题 5.3.** 对于任意 $\lambda\in\Lambda(k,\ r)$，有

$$P_\lambda(c(E\oplus F,h^E\oplus h^F))=\sum_{\mu,\nu}c^{\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(c(E,h^E))\wedge P_\nu(c(F,h^F)).$$

证明。我们将采用证明 [Gul12，命题 3。1]和 [DF22，定理 3。5]中的方法。根据全陈形式的定义，有

$$c(E\oplus F,h^E\oplus h^F)=c(E,h^E)\wedge c(F,h^F).$$

回忆一下，$P_\lambda(c_1,\ \ldots\ldots,\ c_r)=\det(c_{\lambda_i-i+j})_{1\leqslant i,\ j\leqslant k}$，因此

$$\begin{aligned}&P_\lambda(c(E\oplus F,h^E\oplus h^F))-\sum_{\mu,\nu}c^{\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(c(E,h^E))\wedge P_\nu(c(F,h^F))\\ =&\sum_{\substack{i_1+2i_2+\cdots+ri_r\\+j_1+2j_2+\cdots+qj_q=k}}f_{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_q}c_1(E,h^E)^{i_1}\wedge\cdots\wedge c_r(E,h^E)^{i_r}\\ &\wedge c_1(F,h^F)^{j_1}\wedge\cdots\wedge c_q(F,h^F)^{j_q}.\end{aligned}$$

其中普适系数 $f_{i_1\cdots i_rj_1\ldots j_q}$ 不依赖于 $E$，$F$ 和 $X$，只依赖于 $r$，$q$，$P_\lambda$。由（5.6），上同调类满足

$$\begin{aligned}&\Bigg[\sum_{\substack{i_1+2i_2+\cdots+ri_r\\+j_1+2j_2+\cdots+qj_q=k}}f_{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_q}c_1(E,h^E)^{i_1}\wedge\cdots\wedge c_r(E,h^E)^{i_r}\\ &\wedge c_1(F,h^F)^{j_1}\wedge\cdots\wedge c_q(F,h^F)^{j_q}\Bigg]=0\end{aligned}$$

现在，我们可以取任意 $n$维射影流形 $X$，并在 $X$上固定一个丰线丛 $A$。设 $A$ 上的度量 $\omega_A$ 具有正曲率。对于正整数 $m_1$，$\cdots$，$m_r$，$m_{r+1}$，$\cdots$，$m_{r+q}$，我们定义

$$E=A^{\otimes m_1}\oplus\cdots\oplus A^{\otimes m_r},\quad F=A^{\otimes m_{r+1}}\oplus\cdots\oplus A^{\otimes m_{r+q}}.$$

通过与 [DF22 第 14], 页相同的证明，可以证明所有普适系数 $f_{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_q}$ 均为零，由此可得

$$P_\lambda(c(E\oplus F,h^E\oplus h^F))-\sum_{\mu,\nu}c^{\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(c(E,h^E))\wedge P_\nu(c(F,h^F))=0,$$

至此，证明完成。 □

现在我们假设 $(E,h^E)$ 是一个 II 型强分解正向量丛。对于任意 $x\in X$，都存在 $E_x$ 的正交分解，

$$E_x=E_{1,x}\oplus E_{2,x},$$

且陈曲率 $R^E_x$ 具有如下形式

$$R^E_x=\begin{pmatrix}R^E_x|_{E_{1,x}} & 0\\ 0 & R^E_x|_{E_{2,x}}\end{pmatrix}.$$

设 $\{e_1,\cdots,e_{r_1}\}$ 是 $(E_{1,x},h^E|_{E_{1,x}})$ 的一个酉标架，$\{e_{r_1+1},\cdots,e_r\}$ 是 $(E_{2,x},h^E|_{E_{2,x}})$ 的一个酉标架。设 $(U,\{z^\alpha\}_{1\le\alpha\le n})$ 是 $x$ 附近的一个局部坐标邻域，并记 $E_1=U\times E_{1,x}$ 为局部平凡丛，而 $\{e_i\}_{1\le i\le r_1}$ 也给出 $E_1$ 的一个标架。现在我们在 $E_1$ 上定义如下厄米度量：

$$h^{E_1}(e_i,e_j):=\delta_{ij}-R_{i\bar j\alpha\bar\beta}z^\alpha\bar z^\beta,\quad 1\le i,j\le r_1,$$

当 $U$ 足够小时，这就是一个厄米度量。于是 $(E_1,h^{E_1})$ 是 $x$ 附近的一个厄米向量丛，并满足

$$R^{E_1}_x=R^E_x|_{E_{1,x}}.$$

类似地，可以定义一个厄米向量丛 $(E_2,h^{E_2})$，使得$R^{E_2}_x=R^E_x|_{E_{2,x}}$. 因此

$$\begin{aligned}c(E_1\oplus E_2,h^{E_1}\oplus h^{E_2})|_x&=\det\left(\mathrm{Id}_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\begin{pmatrix}R^{E_1}_x & 0\\ 0 & R^{E_2}_x\end{pmatrix}\right)\\&=\det\left(\mathrm{Id}_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\begin{pmatrix}R^E|_{E_{1,x}} & 0\\ 0 & R^E|_{E_{2,x}}\end{pmatrix}\right)\\&=\det\left(\mathrm{Id}_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^E_x\right)\\&=c(E,h^E)|_x,\end{aligned}$$

由此可得

$$P_\lambda(c(E,h^E))|_x=P_\lambda(c(E_1\oplus E_2,h^{E_1}\oplus h^{E_2}))|_x.$$

根据命题5.3，可知

$$P_\lambda(c(E,h^E))|_x=\sum_{\mu,\nu}c^\lambda_{\mu\nu}P_\mu(c(E_1,h^{E_1}))|_x\wedge P_\nu(c(E_2,h^{E_2}))|_x. \tag{5.7}$$

由于 $(E_1,h^{E_1})$ 是中野正的，且 $(E_2,h^{E_2})$ 在$x$处是对偶中野正的，因此 $P_\mu(c(E_1,h^{E_1}))|_x$ 和 $P_\nu(c(E_2,h^{E_2}))|_x$ 是正形式。由于 Littlewood-Richardson 系数$c^\lambda_{\mu\nu}$ 是非负整数，见 [Ful97 第 5], 章推论 1，因此每个求和项

$$c^\lambda_{\mu\nu}P_\mu(c(E_1,h^{E_1}))|_x\wedge P_\nu(c(E_2,h^{E_2}))|_x$$

(5.7)右侧的项是非负的。另一方面，对于任意 $\lambda$、$\mu$、$\nu$ 满足 $\lambda_i = \mu_i + \nu_i$ 对所有 $i$，则 $c_{\mu,\nu}^{\lambda} = 1$，见 [Ful97，第 66]，以及

$$P_\mu(c(E_1, h^{E_1}))|_x \wedge P_\nu(c(E_2, h^{E_2}))|_x$$

根据命题 $(|\lambda|, |\lambda|)$，这是一个正 3.4-形式。由（5.7），我们证明舒尔形式 $P_\lambda(c(E, h^E))|_x$ 是一个正 $(|\lambda|, |\lambda|)$-形式。

**定理 5.4**。设 $(E, h^E)$ 是复流形 $X$ 上的一个 $II$ 型强分解正向量丛，秩 $E = r$，且维数 $X = n$。那么，对于任意分拆 $\lambda \in \Lambda(k, r)$，舒尔形式 $P_\lambda(c(E, h^E))$ 均为正，其中 $k \leq n$ 且 $k \in \mathbb{N}$。

## 参考文献


[BC65] Raoul Bott 和 S. S. Chern。厄米向量丛及其全纯截面零点的等分布。《数学学报》，114:71–112，1965。页码 3[BG71] Spencer Bloch 和 David Gieseker。丰向量丛陈类的正性。《数学发明》，12 112 117, 1971 2 : – 。页码 BRT Sara C. [ 21] Billey、Brendon Rhoades 和 Vasu Tewari。布尔积多项式、舒尔正性与陈 plethysm。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，( 21 16636 16670, 2021 27 ): – 。页码 Cho Man-Duen Choi。复 [ 75] 矩阵上的完全正线性映射。线性代数及其应用，10 3 285 290, 1975 14 ( ): – 。页码 DF Simone [ 22] Diverio 和 Filippo Fagioli。逐点泛 Gysin 公式及其在 Griffiths 猜想中的应用。比萨高等师范学院科学系学报，XXIII( 5 1597 1624, 2022 3, 28 ): – 。页码 DPS Jean-Pierre Demailly 、 Thomas Peternell 和 Michael Schneider。具有数值有效切 [ 94] 丛的紧复流形。*J. Algebraic Geom.*, 3 2 295 345, 1994 2 ( ): – 。页码 Fag a Filippo Fagioli。关于 Griffiths 猜想（陈-Weil 形式正性）的短札。《微分几何及其应用》，81, [ 22 ] 3, 1 2022。cvgmt 预印本。页码 [ 22 ] Fag b Filippo Fagioli。泛向量丛、推前公式与特征形式的正性。*arXiv: 2210 11157 1*, 2022 3 .v。页码 FH William Fulton 和 Joe Harris。表示论，数学研究生教材第129卷，Springer-Verlag，纽约，[ 91] 1991。入门课程，数学读本。页码 [ 22] 23 Fin Siarhei Finski。关于正向量丛的特征形式、混合判别式与推前恒等式。《伦敦数学会杂志》，106 2 1539 1579, 2022 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 25 ( ): – 。页码 FL William Fulton 和 [ 83] Robert Lazarsfeld。丰向量丛的正多项式。《数学年刊（ 2 118 1 35 60, 1983 2, 18, 22 ），( ): – 。页码 Ful [ 97] William Fulton。杨表，伦敦数学会学生读本系列第 35 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997。附有表示论和几何学方面的应用。页码 [ 70] 5, 27, 29, 30 Gri Phillip A. Griffiths。厄米微分几何，陈类与正向量丛，第185–252页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1970。页码[ 12] 2, 3, 14 Gul Dincer Guler。关于正向量丛的 Segre 形式。《加拿大数学通报》，55(1):108–113，2012。页码 3, 28

[HK74] Reese Harvey 和 Anthony Knapp。正的*(p,p)*形式、*Wirtinger*不等式与流，第 43 62 01 1974 4, 11 – 页。页码 Kob Shoshichi Kobayashi。复向量 [ 87] 丛微分几何。普林斯顿大学出版社，普林斯顿, 1987 5 。 页码 Li Ping Li。非负Hermite向量丛与陈数。《数学年刊》, [ 21] 380 1 2 21 41, 2021 3 ( - ): – 。页码 RT Julius Ross 和 Matei Toma。泛向量丛、推前公式与特征形式的正性。*arXiv: 1905 13636 3*, 2019 [ 19] 3 .*v*。页码 Ste John R. Stembridge。舒尔函数的无重积。《组合数学年刊》, [ 01] 5 2 113 121, 2001 28 ( ): – 。页码 Xia Jian Xiao。丰向量丛高次舒尔类的正性。《中国科学：数学》, [ 22] 65(1):51–62，2022。页码 3

Xueyuan Wan：重庆理工大学数学科学研究中心，中国重庆 400054。电子邮箱地址：xwan@cqut.edu.cn