arXiv:2301.03970v2 [math.GR] 8 Jul 2023

灯笼群与汤普森群的乌拉姆稳定性

Francesco Fournier-Facio 和 Bharatram Rangarajan

2023年7月11日

摘要

我们证明，一大类群相对于配备次乘性范数的酉群具有一致稳定性，例如算子范数、Frobenius 范数和 Schatten$p$-范数。这些群包括灯笼群 $\Gamma \wr \Lambda$（其中 Λ 是无限且可和的），以及若干具有动力学起源的群，例如经典汤普森群 F、F'、T 和 V。我们通过渐近上同调中的消失结果证明这一点。渐近上同调是第二作者、Glebsky、Lubotzky 和 Monod 引入的一种理论，适用于研究一致稳定性。与此同时，我们证明了渐近上同调中的一些基础性结果，并利用这些结果证明了乌拉姆稳定性的一些遗传性质。我们还讨论了这类群的度量逼近性质，其取值于酉群或对称群。

1 引言

设 Γ 是一个可数离散群，$\mathfrak{U}$ 是一族有限维酉群。稳定性问题关注的是，每个近似同态 $\Gamma \to U \in \mathfrak{U}$是否都接近某个同态。为形式化这一概念，我们需要选定一种范数，并说明如何解释这些近似概念。本文关注经典情形，即相对于次乘性范数的一致缺陷和距离。

设 $\mathfrak{U} := \{(U(k), \|\cdot\|)\}$ 是一族配备双不变次乘性范数 $\|\cdot\|$ 的有限维酉群（我们允许 $U(k)$ 以不同范数多次出现）。例如，$\|\cdot\|$ 可以是算子范数——最经典的情形——或者更一般地，是 Schatten p-范数。给定一个映射 $\phi\colon \Gamma \to U(k)$，我们将其缺陷定义为

$$\mathrm{def}(\phi) := \sup_{g,h\in\Gamma} \|\phi(gh) - \phi(g)\phi(h)\|.$$

给定另一个映射 $\psi\colon \Gamma \to U(k)$，我们将它们之间的距离定义为

$$\mathrm{dist}(\phi,\psi) := \sup_{g\in\Gamma} \|\phi(g) - \psi(g)\|.$$

定义 1.1. 一致渐近同态是指一列映射 $\phi_n\colon \Gamma \to U(k_n)$，满足 $\mathrm{def}(\phi_n) \to 0$。我们简记为 $\phi\colon \Gamma \to \mathfrak{U}$。若 $\phi, \psi\colon \Gamma \to \mathfrak{U}$ 具有相同的值域次数，且 $\mathrm{dist}(\phi_n, \psi_n) \to 0$，则称它们一致渐近接近。

群 Γ 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，如果每个一致渐近同态都一致渐近地接近一列同态。

我们也可以定量地讨论稳定性，即询问根据缺陷可以选取多接近的同态。这便引出了具有线性估计的稳定性这一概念，它与我们相关，并将在第2.1节中作出精确定义。

关于类似问题的早期论述，可见于冯·诺依曼的著作[vN29]以及图灵的著作 [Tur38]。在 [Ula60的第 6] 章中，乌拉姆讨论了更一般的稳定性问题，此后引发了大量研究。关于一致 $\mathfrak{U}$-稳定性的研究，大多针对赋予算子范数的酉群族；这种情形下的概念通常称为乌拉姆稳定性。在此背景下，Kazhdan 证明了可和群的稳定性[Kaz82], ，而 Burger、Ozawa 和 Thom 则证明了某些 S-整数上的特殊线性群具有稳定性，并证明了存在非平凡拟同态的群不稳定[BOT13]。

最近，第二作者与 Glebsky、Lubotzky 和 Monod 证明了高秩李群中某些格的乌拉姆稳定性，其中所用范数为任意次乘性范数[GLMR23]。为证明这一结果，他们引入了一种新的上同调理论，称为渐近上同调，并证明稳定性可由某些渐近上同调类的消失推出 $\alpha \in \mathrm{H}_a^2(\Gamma, \mathcal{V})$。相关定义请参见第2.2 节。

本文旨在进一步加深对渐近上同调的理解，并将其应用于证明新的稳定性结果。其中最主要的是经典汤普森群的稳定性：

定理 1.2 (第 5节)。 汤普森群 F， F'， T和 V均具有一致的 $\mathfrak{U}$-稳定性，且满足线性估计。

正如 Arzhantseva 和 P˘aunescu [AP15 中指出的，开放问题], ：关于 F 的置换逐点稳定性，若能得到类似的结论， F 就意味着 F不是 sofic 群，从而一举证明非 sofic 群的存在以及 F的非 amenable 性——这是现代群论中最引人注目的两个开放问题。我们将在第 7 节讨论这些问题及其与我们结果的关系。

定理 1.2 关于 F 和 F' 将由某些灯笼群的稳定性结果推出。给定群 Γ， Λ，相应的灯笼群（或称受限 wreath 积）是群$\Gamma \wr \Lambda = (\oplus_\Lambda \Gamma) \rtimes \Lambda$，其中 Λ 通过平移坐标起作用。

定理 1.3. 设 Γ、 Λ 是两个可数群，其中 Λ 是无限且可和的。那么 $\Gamma \wr \Lambda$ 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，并具有线性估计。

单凭定理 1.3 就提供了大量一致 $\mathfrak{U}$-稳定群的例子，其灵活程度前所未有。例如，利用经典的嵌入结果 [HNN49]，可立即推出以下结论：

推论 1.4. 每个可数群都能嵌入一个三生成群，该群是一致$\mathfrak{U}$-稳定的，并具有线性估计。

特别是，这证明了存在不可数多个有限生成的、一致 $\mathfrak{U}$-稳定群。这一事实也可以通过将 Kazhdan 定理 [Kaz82] 应用于一个由有限生成可和群构成的无限族而得到，例如 B. H. Neumann 所构造的那个群族 [Neu37]。

为了从定理 F 和 F' 中得到 1.3 的稳定性，我们利用 余可 amen 性。回忆一下，子群 $\Lambda \leq \Gamma$是余 amenable 的，当且仅当陪集空间 Γ/Λ 存在一个 Γ-不变均值。众所周知， F'和 F都包含一个余 amenable 灯笼群 $F \wr \mathbb{Z}$。因此，定理 F 和 F' （推论 5.8）的稳定性可由定理 1.3及以下结果推出：

命题 1.5。设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是余 amenable 的。若 Λ 对 $\mathfrak{U}$ 具有带线性估计的统一稳定性，则 Γ 也具有这种稳定性。

这可以看作 Kazhdan 著名结果的相对版本，该结果指出可和群具有统一的 $\mathfrak{U}$-稳定性 [Kaz82]。为补全这一图景，我们还证明了 Kazhdan 定理的另一个相对版本，它在某种意义上与命题1.5互为对偶：

命题 1.6。设 $N \leq \Gamma$ 是一个可和正规子群。若 Γ 对 $\mathfrak{U}$ 具有带线性估计的统一稳定性，则 Γ/N 也具有这种稳定性。

定理 1.2 由定理 1.3 和命题 1.5 推出这一事实，并非 Thompson群 F所独有：这种现象在若干具有某种自相似性质的分段线性同胚和分段射影同胚群中都很常见（定理 5.1 和推论 5.2）。因此， T 和 V 的稳定性可由这些结果推出，再结合一个有界生成论证；该论证与 [BOT13] 中的论证类似（推论5.11和 5.12）。

正如上文所述，定理1.3 和命题1.5 的证明所依据的工具是渐近上同调，尤其是二次上同调中某些类的消失。在这一框架下，定理1.3 具有如下形式：

定理 1.7. 设 Γ、 Λ 为两个可数群，其中 Λ 是无限可和群。那么，对于所有 $n \geq 1$ 以及所有有限维的对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$， $\mathrm{H}_a^n(\Gamma \wr \Lambda, \mathcal{V}) = 0$。

这里的有限维的一词，是指这些模源自相对于有限维酉表示的稳定性问题。这一假设至关重要：参见注6.1。命题1.5和1.6 也可由渐近上同调中的结果推出，而这一次不需要有限性假设：

命题 1.8. 设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是余 amenable 的。那么，对于所有 $n \geq 0$ 以及所有对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$，限制映射 $\mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^n(\Lambda, \mathcal{V})$ 是单射的。

命题 1.9. 设 $N \leq \Gamma$ 是一个可和正规子群。那么拉回映射 $\mathrm{H}_a^n(\Gamma/N, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V})$ 是一个同构，对所有 $n \geq 0$ 以及所有对偶渐近 Banach $^*(\Gamma/N)$-模 $\mathcal{V}$。

尽管目前还没有连接这两种理论的一般性定理，但渐近上同调似乎与有界上同调密切相关。后者是一种成熟的上同调理论[Joh72, Gro82, Iva85, Mon01, Fri17] ，并已成为刚性理论中的一项基本工具。格的渐近上同调消失从而导出稳定性的结果 [GLMR23]，与高秩格的有界上同调消失结果 [BM99, BM02, MS04]密切相关。同样，我们对定理 1.7 以及命题 1.8 和 1.9 的证明，也与相应的有界上同调结果密切相关：定理 1.7 的情形最近由 Monod 证明 [Mon22], ；命题 1.8 则是有界上同调中的一项基础性结果[Mon01, 8.6] （另见 [MP03]）；而命题 1.9 是 Gromov 的

映射定理 [Gro82]。注意，有界上同调 T 和 V 最近也已得到计算 [FFLM21、MN23、And22], ，但仅限于平凡实系数；我们的证明思路则有所不同。

因此，我们希望，为证明主要结果而采取的步骤有助于在渐近上同调中进行更多计算，从而发现更多一致 $\mathfrak{U}$稳定的群，尤其是乌拉姆稳定群。

我们的结果可应用于研究群的逼近性质。虽然逐点逼近方面的问题（例如拟有限性、超线性性和矩阵有限性）在某种意义上与本文内容无关，但我们的稳定性结果表明，本文研究的某些群无法针对相关族一致逼近 $\mathfrak{U}$ （推论7.6）。我们还可以通过一种更直接的论证处理赋予汉明距离的对称群情形（命题7.7）。

我们以提出一个问题来结束本引言。存在一种称为强乌拉姆稳定性的概念，其中逼近取值于可能是无限维希尔伯特空间上的酉群，并采用算子范数。强乌拉姆稳定性是否等同于 amenability，是一个众所周知的开放问题。在这方面，已知强乌拉姆稳定群不含非阿贝尔自由子群 [BOT13，定理 1。2], 但确实存在不含非阿贝尔自由子群、却并非强乌拉姆稳定的群 [Alp20]。

另一方面，我们的结果还证明了 Monod 的分段射影群 $\mathfrak{U}$-稳定性：这类群具有一致的 [Mon13] 和 Lodha–Moore [LM16], 稳定性；它们既不可和，也不含自由子群（见第 5.2节）。因此，我们提出以下问题：

问题 1.10. 设 Γ 是一个不含非阿贝尔自由子群的可数群。它是否是 Γ一致 $\mathfrak{U}$-稳定的（具有线性估计）？ 或者至少是乌拉姆稳定的?

特别是，所有可数挠群都乌拉姆稳定吗?

换句话说：如果 Γ 不是乌拉姆稳定的，那么它是否必定 Γ 包含一个非阿贝尔自由子群? 据我们所知，甚至尚不清楚拥有非平凡拟同态的群是否必定包含非阿贝尔自由子群：关于这一方向的部分结果，参见 [Man05] 和 [Cal10] 。

约定：所有群均假定为离散且可数。自然数集 $\mathbb{N}$ 从 0 开始。本文余下部分固定一个关于 $\mathbb{N}$ 的非主超滤子 ω 。

概要：我们首先在第2 节回顾渐近上同调及其在稳定性中的应用框架，该框架由 [GLMR23]提出。第3 节讨论乌拉姆稳定性的遗传性质，并证明命题1.5 和1.6。接着，我们转向灯笼群，并在第1.3 节证明定理4，然后讨论汤普森群，并在第1.2 节证明定理5。第6 节给出一些例子，说明我们的部分结果以及 [GLMR23] 中的部分结果是尖锐的；最后，我们在第7 节讨论其在群的度量逼近研究中的应用。

致谢：作者谨向 Alon Dogon、Lev Glebsky、Alexander Lubotzky 和 Nicolas Monod 致谢，感谢他们进行的有益讨论。

2 一致稳定性与渐近上同调

本节将简要概述缺陷递减的概念。该概念使我们能够将稳定性问题表述为一个具有阿贝尔核的同态提升问题，进而引出它与二阶上同调之间的联系。有关更详细的说明，请参阅[GLMR23]中的第 2 节。

2.1 一致稳定性与缺陷递减

我们首先回顾超积和非标准分析的一些基本概念，然后将稳定性问题表述为同态提升问题。为此，将一致渐近同态（即一列映射）描述为超积之间的一个映射会很方便。这样，我们便可以进行较为宽松的分析，从而得到一个到商群的（真正的）同态。回忆一下，ω 是 $\mathbb{N}$ 上的一个固定非主超滤子。指标集为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一族集合$\prod_\omega X_n$ 的代数超积定义为 $\prod_\omega X_n := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n/\sim$，其中对于 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$，若 $\{n : x_n = y_n\} \in \omega$，则定义$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。超积可以继承其构成对象的代数结构。例如，对于群 Γ，其超积$\prod_\omega \Gamma$称为超幂，记作 ${}^*\Gamma$，本身也是一个群。我们还将用到另一个重要例子，即超实数域 ${}^*\mathbb{R}$，它是 $\mathbb{R}$的超幂。

由标准对象的超积构成的对象（集合、函数等）称为内在对象。非内在对象的重要例子包括有界超实数的子集 ${}^*\mathbb{R}_b$，它由满足以下条件的元素 $\{x_n\}_\omega \in {}^*\mathbb{R}$ 组成：存在 $S \in \omega$ 和 $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对每个 $n \in S$，都有 $|x_n| \leq C$；以及无穷小量的子集 ${}^*\mathbb{R}_{inf}$，它由满足以下条件的元素 $\{x_n\}_\omega \in {}^*\mathbb{R}$ 组成：对于每个实数 $\varepsilon > 0$，都存在 $S \in \omega$，使得对每个$n \in S$，都有 $|x_n| < \varepsilon$。

对于 x、$y \in {}^*\mathbb{R}$，若 $x/y \in {}^*\mathbb{R}_b$，记作 $x = O_\omega(y)$；若 $x/y \in {}^*\mathbb{R}_{inf}$，记作 $x = o_\omega(y)$。特别地，$x \in {}^*\mathbb{R}_b$ 等价于 $x = O_\omega(1)$，而 $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_{inf}$ 等价于 $\varepsilon = o_\omega(1)$。子集 ${}^*\mathbb{R}_b$ 构成一个赋值环，其中 ${}^*\mathbb{R}_{inf}$ 是唯一的极大理想，其商
${}^*\mathbb{R}_b/{}^*\mathbb{R}_{inf} \cong \mathbb{R}$。商映射 $st : {}^*\mathbb{R}_b \to \mathbb{R}$ 称为标准部映射，或沿超滤子 ω 的极限。上述构造也可以推广到巴拿赫空间。设 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族巴拿赫空间。那么，$\mathcal{W} = \prod_\omega W_n$ 可以赋予一个 ${}^*\mathbb{R}$-向量空间结构。事实上，它还配备了一个取值于 ${}^*\mathbb{R}$ 的范数，从而可以˜定义外部子集 $\mathcal{W}_b$ 和 $\mathcal{W}_{inf}$。商 $\mathcal{W} := \mathcal{W}_b/\mathcal{W}_{inf}$ 是一个实巴拿赫空间。

给定一致渐近同态 $\{\phi_n : \Gamma \to U(k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，且 $\mathsf{def}(\phi_n) =: \varepsilon_n \to 0$，构造内映射 $\phi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)$，其中 $\phi := \prod_\omega \phi_n$，其（超实）缺陷$\varepsilon := \{\varepsilon_n\}_\omega \in {}^*\mathbb{R}_{inf}$。于是，一致稳定性具有线性估计这一问题，可以改述为：是否存在一个内同态 $\psi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)$，使得它们的（超实）距离满足 $\mathsf{dist}(\phi, \psi) := \{\mathsf{dist}(\phi_n, \psi_n)\}_\omega = O_\omega(\varepsilon)$。

将问题改用内映射的术语来表述，其优点在于，缺陷为 $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_{inf}$ 的内映射˜map $\phi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)$ 会导出一个真正的同态 $\phi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)/B(\varepsilon)$，其中 $B(\varepsilon)$ 是 $\prod_\omega U(k_n)$ 的（外部）正规子群，由那些与单位元的距离为 $O_\omega(\varepsilon)$的元素组成。特别地，一致稳定性具有线性估计这一问题，等价地可以表述为：给定这样的内映射˜ ϕ，同态 $\phi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)/B(\varepsilon)$能否提升为一个内

同态 $\psi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)$。

将具有线性估计的一致稳定性重新诠释为同态提升问题，这启发我们采用上同调方法来刻画障碍。然而，这里的难点在于，提升问题的核 $B(\varepsilon)$ 不是阿贝尔群。可以通过分步提升来处理，使每一步都涉及一个阿贝尔核。定义 $B(\varepsilon)$ 的正规子群 $I(\varepsilon)$，它由与单位元的距离为 $o_\omega(\varepsilon)$ 的元素构成。然后我们可以~尝试将 $\phi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)/B(\varepsilon)$ 提升为内映射 $\psi : {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n)$，使其模 $I(\varepsilon)$ 意义下为同态。从上同调的角度来看，这个问题更简单：由于范数具有次乘性，这个提升问题的核 $B(\varepsilon)/I(\varepsilon)$ 是阿贝尔群。若存在这样的提升，则称群 Γ 相对于 $\mathfrak{U}$ 具有缺陷递减性质；更明确地说，如果对于每个一致渐近同态 $\phi : \Gamma \to \mathfrak{U}$，都存在一个值域相同的一致渐近同态 ψ，使得 $\mathrm{dist}(\phi, \psi) = O_\omega(\mathrm{def}(\phi))$ 且 $\mathrm{def}(\psi) = o_\omega(\mathrm{def}(\phi))$，则称 Γ 具有缺陷递减性质。

定理 2.1 ([GLMR23，定理 2.3。11])。 Γ 具有关于 $\mathfrak{U}$ 当且仅当 Γ 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，并且满足线性估计。

这种同态提升的障碍，带有一个阿贝尔核 $B(\varepsilon)/I(\varepsilon)$，可以通过上同调 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{W})$ 进行精确建模，使得 $\mathrm{H}_a^2(\Gamma, \mathcal{W}) = 0$ 蕴含缺陷递减性质（从而具有带线性估计的一致稳定性）。这里的 $\mathcal{W} = \prod_\omega \mathfrak{u}(k_n)$ 是 $\prod_\omega U(k_n)$ 的一个内李代数，配备了由我们开始使用的一致渐近同态 ϕ 构造的超幂 ${}^*\Gamma$ 的渐近作用。缺陷映射的对数

$$ {}^*\Gamma \times {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(k_n) : (g_1, g_2) \mapsto \phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_1 g_2)^{-1} $$

将对应于 $\mathrm{H}_a^2(\Gamma, \mathcal{W})$ 中的一个渐近 2-余循环。在此情形下，这样的余循环是一个余边界（也就是说，它在 $\mathrm{H}_a^2(\Gamma, \mathcal{W})$ 中表示零类），当且仅当渐近同态 ϕ 具有缺陷递减性质。

2.2 渐近上同调

将问题约化为具有阿贝尔核的提升问题，促使我们研究 Γ的上同调理论，其系数取内李代数 $\mathcal{W} = \prod_\omega \mathfrak{u}(k_n)$ of $\prod_\omega U(k_n)$，并赋予其 Γ的渐近共轭作用。在本节中，我们回顾这一上同调的形式定义，并陈述一些来自 [GLMR23] 的结果，以便开展后续工作。

设 $(V_n)_{n\geq 1}$ 是一列巴拿赫空间，并设 $\mathcal{V} := \prod V_n$ 是它们的代数超$_\omega$积；我们将这样的 $\mathcal{V}$ 称为内巴拿赫空间。对于 $v \in \mathcal{V}$，我们用 $\|v\|$ 表示超实数 $(\|v_n\|)_\omega \in {}^*\mathbb{R}$。于是我们记

$$ \mathcal{V}_b := \{v \in \mathcal{V} : \|v\| \in {}^*\mathbb{R}_b\}; \qquad \mathcal{V}_{inf} := \{v \in \mathcal{V} : \|v\| \in {}^*\mathbb{R}_{inf}\}. $$

~那么，商空间 $\mathcal{V} := \mathcal{V}_b/\mathcal{V}_{inf}$ 是一个实巴拿赫空间，其范数由 $\mathcal{V}_b$上 $\|\cdot\|$ 的超极限所诱导。对于每个 V_n，记其连续对偶为 $V_n^\#$，并令 $\mathcal{V}^\#$ 为相应的代数超积。配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_n : V_{\#_n} \times V_n \to \mathbb{R}$ 诱导出一个配对$\mathcal{V}^\# \times \mathcal{V} \to {}^*\mathbb{R}$，它可下降到 $\tilde{\mathcal{V}}^\# \times \tilde{\mathcal{V}} \to \mathbb{R}$。我们称 $\mathcal{V}^\#$ 为 $\mathcal{V}$的内部对偶。

现在设 Γ 是一个可数离散群，并设 $\pi\colon {}^*\Gamma\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 是一个内映射，它保持 $\|\cdot\|$ 并诱导出 ${}^*\Gamma$ 的等距线性作用 $\tilde{\pi}\colon {}^*\Gamma\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$。这样的映射 π 称为 $\mathcal{V}$ 上的渐近 ${}^*\Gamma$-作用。于是，如果从上下文可以确定 π，我们称 $(\pi,\mathcal{V})$，或 $\mathcal{V}$，为渐近巴拿赫 ${}^*\Gamma$-模。给定一个内在巴拿赫 ${}^*\Gamma$-模 $(\pi,\mathcal{V})$，每个坐标上的逆变作用诱导出一个内映射 $\pi^{\#}\colon {}^*\Gamma\times\mathcal{V}^{\#}\to\mathcal{V}^{\#}$，从而使 $(\pi^{\#},\mathcal{V}^{\#})$ 成为渐近巴拿赫 ${}^*\Gamma$- 模。若一个模 $\mathcal{V}$ 是某个记作 $\mathcal{V}^{\flat}$ 的渐近 ${}^*\Gamma$- 模的对偶，则称其为对偶渐近巴拿赫 ${}^*\Gamma$-模。如果每个 V_n 都是有限维的，我们就在这些定义前加上“有限维的”一词。

现在，对每个 $m\geq 0$，定义内巴拿赫空间 $\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):=\prod\ell^\infty(\Gamma^m,V_n)_\omega$（注意，$m$ 固定，而 n 相对于超滤子ω遍历自然数）。与之前类似，对于 $f\in\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})$，我们记 $\|f\|:=(\|f_n\|)_\omega\in{}^*\mathbb{R}$，并且

$$\mathcal{L}^\infty_b(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):=\{f\in\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):\|f\|\in{}^*\mathbb{R}_b\};$$

$$\mathcal{L}^\infty_{inf}(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):=\{f\in\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):\|f\|\in{}^*\mathbb{R}_{inf}\}.$$

给定作用于 $\mathcal{V}$ 上的渐近 ${}^*\Gamma$-作用 π，我们可以构造一个自然的渐近 ${}^*\Gamma$-作用ρ^m：${}^*\Gamma\times\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})\to\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})$，定义为

$$(\rho^m(g)(f))(g_1,g_2,\dots,g_m):=\pi_G(g)f(g^{-1}g_1,\dots,g^{-1}g_m)\tag{1}$$

那么商

$$\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V}):=\mathcal{L}^\infty_b(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})/\mathcal{L}^\infty_{inf}(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})$$

仍然是一个实巴拿赫空间，带有由 ρ^m 按坐标诱导的等距 ${}^*\Gamma$-作用，它定义了不变子空间 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})^{{}^*\Gamma}$。

现在定义内余边界映射

$$d^m:\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})\to\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^{m+1},\mathcal{V});$$

$$d^m(f)(g_0,\dots,g_m):=\sum_{j=0}^m(-1)^jf(g_0,\dots,\hat{g_j},\dots,g_m),\tag{2}$$

它下降为余边界映射

$$\tilde{d^m}:\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^m,\mathcal{V})\to\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^{m+1},\mathcal{V}).$$

由于 d^m 是 ${}^*\Gamma$-等变的，因此它定义了上链复形：

$$0\xrightarrow{\tilde{d^0}}\tilde{\mathcal{L}}^\infty({}^*\Gamma,\mathcal{V})^{{}^*\Gamma}\xrightarrow{\tilde{d^1}}\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^2,\mathcal{V})^{{}^*\Gamma}\xrightarrow{\tilde{d^2}}\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^3,\mathcal{V})^{{}^*\Gamma}\xrightarrow{\tilde{d^3}}\cdots$$

定义 2.2 ([GLMR23，定义 4.2。2])。其 m次渐近上同调（Γ 系数取 $\mathcal{V}$）为

$$\mathrm{H}^m_a(\Gamma,\mathcal{V}):=\ker(\tilde{d^{m+1}})/\operatorname{im}(\tilde{d^m}).$$

也可以使用其他分解来计算渐近上同调。回忆一下（[Mon01, 5.3.2]），若存在一个 Γ-等变条件期望 $\mathfrak{m}: L^\infty(\Gamma \times S) \to L^\infty(S)$，则称正则 Γ-空间 S 为 Zimmer 可和的 Γ-空间。设 S 是一个正则 Γ-空间，其上有 Γ的 Zimmer 可和作用，并设 $\mathcal{L}^\infty((^*S)^m, \mathcal{V}) := \prod_\omega L^\infty_{w*}(S^m, V_n)$（其中 $L^\infty_{w*}(S^m, V_n)$ 是从 $*$ 到 S^m 的有界弱可测函数类空间 V_n）。同样，$^*\Gamma$在 $\mathcal{V}$ 上的渐近 $^*\Gamma$-作用在 $\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^m, \mathcal{V})$上诱导出自然的渐近 $^*\Gamma$-作用 $\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^m, \mathcal{V})$，如（1）所示，从而使 $\mathcal{L}^\infty((^*S)^m, \mathcal{V})$成为渐近 Banach $^*\Gamma$-模。余边界映射也可如（2）中那样定义，以构造上链复形，并且我们有：

定理 2.3 ([GLMR23，定理 4.3。3])。设 S 是一个 Zimmer 可和 Γ-空间，且 $\mathcal{V}$是一个对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模。那么 $\mathrm{H}^\bullet_a(\Gamma, \mathcal{V})$ 可计算为上链复形的渐近上同调

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(^*S, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*S)^2, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*S)^3, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

在一致 $\mathfrak{U}$-稳定性的背景下，我们感兴趣的相关渐近 Banach $^*\Gamma$-模是超积 $\mathcal{W} = \prod_\omega \mathfrak{u}(k_n)$，其中 $\mathfrak{u}(k_n)$ 是 $U(k_n)$ 的李代数。注意，我们只考虑有限维酉群，因此这样的模是有限维的。给定一个一致渐近同态 $\phi: {}^*\Gamma \to \prod_\omega U(n)$，其缺陷 $\mathrm{def}(\phi) \leq_\omega \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_{inf}$，这可用于构造渐近作用 $\pi: {}^*\Gamma \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 由$\pi(g)v = \phi(g)v\phi(g)^{-1}$给出，从而得到一个渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{W}$。

定义 2.4. 我们称这样的模为支集在 $\mathfrak{U}$ 上的乌拉姆 $^*\Gamma$-模 $\mathcal{W}$。

此外，考虑映射 $\alpha: {}^*\Gamma \times {}^*\Gamma \to \mathcal{W}$给出

$$\alpha(g_1, g_2) = \frac{1}{\varepsilon} \log(\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_1 g_2)^{-1}). \tag{3}$$

~这个映射 α 诱导出一个非齐次 2-余循环 $\tilde{\alpha}: {}^*\Gamma \times {}^*\Gamma \to \mathcal{W}$，因此在通常的非齐次上链与不变齐次上链之间的对应关系下，定义了 $\mathrm{H}^2_a(\Gamma, \mathcal{W})$ 中的一个类[GLMR23，定理 4.2。4]。

定义 2.5. 上同调类 $[\tilde{\alpha}] \in \mathrm{H}^2_a(\Gamma, \mathcal{W})$ 在 (3) 中构造，称为该乌拉姆类，对应于乌拉姆 $^*\Gamma$-模 $\mathcal{W}$。

注意，任意一致渐近同态 Γ 都会产生一个乌拉姆 $^*\Gamma$-模及其自身的乌拉姆类，我们将这些称为支集在 $\mathfrak{U}$上的乌拉姆类。这样的乌拉姆类消失，即 $\tilde{\alpha}$ 是一个余边界，当且仅当 ϕ 具有缺陷递减性质。因此，定理 2.1给出：

定理 2.6 ([GLMR23，定理 4.2。4])。Γ 关于 $\mathfrak{U}$-稳定且具有相对于 $\mathfrak{U}$ 的线性估计，当且仅当所有支集在 $\mathfrak{U}$ 上的乌拉姆类都消失。特别地，如果$\mathrm{H}^2_a(\Gamma, \mathcal{W}) = 0$ 对于支集在 $^*\Gamma$上的每个乌拉姆 $\mathfrak{U}$-模都成立，那么 Γ 关于 $\mathfrak{U}$-稳定且具有线性估计。

3 遗传性质

本节中，我们首先证明命题 1.8 ，并由此推出命题 1.5 ；然后以类似方式证明命题 1.9 ，并由此推出命题 1.6 。这两个稳定性结论都不是对称的，事实上，我们将在第 6 节看到，反向结论并不成立。

3.1 关于 Zimmer-可 amen 性的更多内容

为了证明命题 1.8 和 1.9，我们需要定理 2.3在一个特殊情形下的更精确版本。若一个正则 Γ-空间 S 是配备计数测度的可数集合，则称其为离散的。由 [AEG94] 中的等价刻画可知，离散 Γ-空间是 Zimmer 可和的，当且仅当每个点稳定子都是可和的。特别地：

1. 若 $\Lambda \leq \Gamma$ 是一个子群，则 Λ 通过左乘作用于 Γ 是自由的，因此 Γ 是一个离散的 Zimmer 可和 Λ-空间。

2. 若 $N \leq \Gamma$ 是一个可和子群，则 Γ 作用于陪集空间 Γ/N 时，其稳定子等于 N 的共轭元，因此 Γ/N 是一个离散的 Zimmer 可和 Γ-空间。

对于这类空间，我们可以给出一个显式链映射，实现定理 2.3 中上同调的同构。事实上，定理 2.3 的证明首先构造一个 Γ-同伦等价，它连接这两个复形：

$$0 \to L^\infty(\Gamma) \to L^\infty(\Gamma^2) \to L^\infty(\Gamma^3) \to \cdots$$

$$0 \to L^\infty(S) \to L^\infty(S^2) \to L^\infty(S^3) \to \cdots$$

随后将其内在地扩展到这些复形的渐近版本。对偶渐近系数的情形可通过对相应复形作适当的识别得到（见 [GLMR23，定理 4.20] 前的段落）。若 Γ 和 S 都是离散的，那么 S 的 Zimmer-可 amen 性归结为点稳定子的 amenability，并且上述同伦等价可以取为轨道映射

$$o_b^m : L^\infty(S^m) \longrightarrow L^\infty(\Gamma^m)$$

$$o_b^m(f)(g_1, \ldots, g_m) = f(g_1 b, \ldots, g_m b);$$

其中 $b \in S$ 是基点的某种选取；同伦逆是利用点稳定子上的不变均值构造的 [Fri17，第 4 节。9]。因此，在这种情况下，我们得到定理 2.3的以下更明确表述：

定理 3.1。设 S 是一个离散的 Zimmer 可和 Γ-空间，带有一个基点 $b \in S$，且 $\mathcal{V}$ 是一个对偶渐近 Banach ${}^*\Gamma$-模。则轨道映射

$$o_b^m : \mathcal{L}^\infty(({}^*S)^m, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m, \mathcal{V})$$

$$o_b^m(f)(g_1, \ldots, g_m) = f(g_1 b, \ldots, g_m b);$$

诱导出诱导出 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{V})$ 与复形的上同调之间的一个同构

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{L}}^\infty({}^*S, \mathcal{V})^{{}^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*S)^2, \mathcal{V})^{{}^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*S)^3, \mathcal{V})^{{}^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

在这两个 上述离散 Zimmer 可和空间的基本例子中，我们得到 ：

推论 3.2. 设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是一个子群，且 $\mathcal{V}$ 是一个对偶渐近 Banach${}^*\Gamma$-模，它限制为一个对偶渐近 Banach ${}^*\Lambda$-模。那么，上链限制 $\mathcal{L}^\infty(({}^*\Gamma)^m, \mathcal{V}) \to \mathcal{L}^\infty(({}^*\Lambda)^m, \mathcal{V})$ 在 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Lambda, \mathcal{V})$ 与以下复形的上同调之间诱导一个同构：

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{L}}^\infty({}^*\Gamma, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^2, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^3, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

证明。 将 Γ 视为一个离散的 Zimmer 可和 Λ空间，基点为 $1 \in \Gamma$，轨道映射不过是上链限制，因此由定理 3.1得证。 □

推论 3.3. 设 $N \leq \Gamma$ 是一个可和正规子群，且 $\mathcal{V}$ 是一个对偶渐近 Banach $^*(\Gamma/N)$-模，它通过拉回成为一个对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模。那么上链的拉回 $\mathcal{L}^\infty((^*(\Gamma/N))^m, \mathcal{V}) \to \mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^m, \mathcal{V})$ 诱导了 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{V})$ 与 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma/N, \mathcal{V})$ 之间的同构。

证明。将 Γ/N 视为一个离散的 Zimmer 可和 Γ-空间，其基点为陪集 N，轨道映射无非就是上链的拉回。因此定理 3.1 给出了 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{V})$ 与以下复形的上同调之间的同构：

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(^*(\Gamma/N), \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*(\Gamma/N))^2, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*(\Gamma/N))^3, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

但是，由于 $^*\Gamma$ 在 $^*(\Gamma/N)$ 和 $\mathcal{V}$ 上的作用都经由 $^*(\Gamma/N)$ 因子化，上述复形与计算 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma/N, \mathcal{V})$ 的标准复形一致。 □

本节将使用这些显式同构。稍后，在证明定理1.7时，也会出现非离散的 Zimmer 可和空间，但在这种情况下，我们只需要存在一个抽象同构，如定理 2.3中所述。

3.2 限制与余可 amen 性

设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是一个子群（不一定余 amenable）， $\mathcal{V}$ 是一个对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模，它限制为一个对偶渐近 Banach $^*\Lambda$-模。限制$\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \to \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Lambda)^\bullet, \mathcal{V})^{^*\Lambda}$ 在上同调上诱导出一个映射，称为限制映射，记作

$$\mathrm{res}^\bullet : \mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^\bullet(\Lambda, \mathcal{V}).$$

该映射与 Ulam 类（定义 2.5）相容：

引理 3.4. 设 $\mathcal{W}$ 是一个支集在 $\mathfrak{U}$ 上的 Ulam $^*\Gamma$-模。那么 $\mathcal{W}$ 也是一个支集在 $\mathfrak{U}$ 上的 Ulam $^*\Lambda$-模，并且限制映射 $\mathrm{res}^2 : \mathrm{H}_a^2(\Gamma, \mathcal{W}) \to \mathrm{H}_a^2(\Lambda, \mathcal{W})$ 将 Ulam 类映射为 Ulam 类。

证明。设 $\phi : \Gamma \to \mathfrak{U}$ 是一个一致渐近同态，且 $\mathcal{W}$ 是相应的乌拉姆 $^*\Gamma$-模。然后，对每个 n 将 ϕ_n 限制到 Λ，得到一个一致渐近同态 $\phi|_\Lambda : \Lambda \to \mathfrak{U}$，满足 $\mathrm{def}(\phi|_\Lambda) \leq_\omega \mathrm{def}(\phi)$，并赋予 $\mathcal{W}$ 一个渐近

$^*\Lambda$-作用，使其成为一个支集位于 $\mathfrak{U}$ 上的乌拉姆 $^*\Lambda$-模。与ϕ对应的余循环由映射定义

$$\alpha : {}^*\Gamma \times {}^*\Gamma \to \mathcal{W} : (g_1, g_2) \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \log(\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_1 g_2)^{-1}).$$

由于 $\mathrm{def}(\phi|_\Lambda) \leq_\omega \varepsilon$，将 α 限制到 $^*\Lambda \times {}^*\Lambda$，得到与一致渐近同态 ϕ_Λ相关的有效余循环。因此，链映射 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \to \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Lambda)^\bullet, \mathcal{V})^{^*\Lambda}$ 保持由一致渐近同态定义的余循环集合，从而保持乌拉姆类。 □

现在假设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是余 amenable。根据定义，这意味着存在一个关于 Γ/Λ的Γ-不变均值；也就是说，存在一个线性泛函 $m : \ell^\infty(\Gamma/\Lambda) \to \mathbb{R}$，使得

1. $m(1_{\Gamma/\Lambda}) = 1$，其中 $1_{\Gamma/\Lambda}$ 表示常值函数。
2. $|m(f)| \leq \|f\|$ 对所有 $f \in \ell^\infty(\Gamma/\Lambda)$。
3. $m(g \cdot f) = m(f)$ 对所有 $g \in \Gamma$ 以及所有 $f \in \ell^\infty(\Gamma/\Lambda)$。

与绝对情形一样 [GLMR23，引理 3。20],我们有如下结论：

引理 3.5. 假设 $\Lambda \leq \Gamma$ 是余 amenable 的，并令 $\mathcal{V}$ 为一个对偶渐近 Banach ${}^*\Gamma$-模。则存在一个内映射 $m : \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V}) \to \mathcal{V}$，它诱导出一个映射 $\tilde{m} : \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V}) \to \mathcal{V}$，并具有以下性质：

1. 若 f 是等于 $\tilde{v} \in \mathcal{V}$的常值函数，则 $\tilde{m}(f) = \tilde{v}$.
2. $\|\tilde{m}(f)\| \leq \|f\|$ 对所有 $f \in \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V})$。
3. $\tilde{m}(g \cdot f) = \tilde{\pi}(g)\, \tilde{m}(f)$ 对所有 $g \in {}^*\Gamma$ 以及所有 $f \in \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V})$。

证明。考虑 $f = \{f_n\}_\omega \in \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V})$。由于 $\mathcal{V}$ 是一个以前对偶 $\mathcal{V}^\flat$ 为前对偶的对偶渐近 ${}^*\Gamma$-模，对每个 $\lambda \in \mathcal{V}^\flat$，我们得到一个内映射

$$f^\lambda : {}^*\Gamma/{}^*\Lambda \to {}^*\mathbb{R} : x \mapsto f(x)(\lambda).$$

注意，由于 f^λ是内在的，它具有如下形式： $\{f_n^\lambda\}_\omega$，其中 $f_n^\lambda \in \ell^\infty(\Gamma/\Lambda)$。这使我们能够构造内映射 $m_{in}^\lambda : \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V}) \to {}^*\mathbb{R}$，其形式为

$$m_{in}^\lambda(f) = \{m\left(f_n^\lambda\right)\}_\omega$$

最后， $m_{in} : \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V}) \to \mathcal{V}$，其形式为

$$m_{in}(f)(\lambda) = m_{in}^\lambda(f)$$

容易验证，按定义得到的 m_{in} 诱导出一个线性映射 $\tilde{m} : \mathcal{L}^\infty({}^*\Gamma/{}^*\Lambda, \mathcal{V}) \to \mathcal{V}$。至于 ${}^*\Gamma$-等变性，这可由以下观察得出：$(g \cdot f)^\lambda(x) = \pi(g) f(g^{-1}x)(\lambda)$，而 $(g \cdot f^\lambda)(x) = f(g^{-1}x)(\lambda)$。关于 $\tilde{m}$ 的条件则由定义以及 $\ell^\infty(\Gamma/\Lambda)$ 上 Γ-不变均值 m 的性质推出。□

现在我们可以证明命题 1.8了。证明大致沿用 [Mon01命题 8.6 的思路。2]。

命题 (命题 1.8)。 设 $\Lambda \leq \Gamma$ 余 amenable。那么，对所有 $\mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^n(\Lambda, \mathcal{V})$ 和所有对偶渐近 Banach $n \geq 0$-模 ${}^*\Gamma$ $\mathcal{V}$，限制映射都是单射的。

证明。我们利用推论 3.2 中的复形 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda}$来实现 Λ 的渐近上同调。由于定义限制映射的链映射可分解经过此复形，且链映射 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda} \to \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Lambda)^\bullet, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda}$ 在上同调中诱导同构（推论 3.2），因此只需证明链包含映射 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{{}^*\Gamma} \to \tilde{\mathcal{L}}^\infty(({}^*\Gamma)^\bullet, \mathcal{V})^{{}^*\Lambda}$ 在上同调中诱导单射。下文将此称为限制映射。

我们的目标是构造一个传递映射，即线性映射 $\mathrm{trans}^\bullet : \mathrm{H}_a^\bullet(\Lambda, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^\bullet(\Gamma, \mathcal{V})$，使得 $\mathrm{trans}^\bullet \circ \mathrm{res}^\bullet$ 在 $\mathrm{H}_a^\bullet(\Lambda, \mathcal{V})$ 上为单位元。由此立即可知，$\mathrm{res}^\bullet$ 必须是单射的。根据上一段，我们可以通过构造一个内部链映射来实现这一点

$\widetilde{\text{trans}}^\bullet\colon \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Lambda}\to\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Gamma}$，它在 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Gamma}$ 上限制为单位元。

设 $f\in\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})$ 满足 $\tilde{f}\in\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})^{^*\Lambda}$。对于每个 $x\in(^*\Gamma)^k$，定义

$$f_x : {}^*\Gamma\to\mathcal{V}$$

$$f_x(g):=\pi(g)f(g^{-1}x)$$

换言之，$f_x(g)$ 就是 $(\rho^1(g)f)(x)$，如式 (1) 所示。由于 $\tilde{f}\in\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})^{^*\Lambda}$，对于任意 $\gamma\in{}^*\Lambda$和 $g\in{}^*\Gamma$,

$$f_x(g\gamma)-f_x(g)\in\mathcal{V}_{inf}$$

选取 $^*\Gamma$ 中左 $^*\Lambda$-陪集的代表元，并将 f_x 限制在这组代表元上，从而可以将 f_x 视为内映射 $f_x:{}^*\Gamma/{}^*\Lambda\to\mathcal{V}$。此外，由于 $f_x\in\mathcal{L}^\infty(^*\Gamma/{}^*\Lambda,\mathcal{V})$，我们可以将引理 3.5 中构造的均值 m 用于定义内映射 $\text{trans}^k(f):\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})\to\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})$，其定义如下:

$$\text{trans}^k(f)(x)=m(f_x)$$

由于 $\tilde{m}$ 是 $^*\Gamma$-不变的，这意味着对于 $g\in{}^*\Gamma$，$m(f_{gx})-\pi(g)m(f_x)\in\mathcal{V}_{inf}$，并且推出

$$(\text{trans}^k(f))(gx)-\pi(g)\,\text{trans}^k(f)(x)\in\mathcal{V}_{inf}.$$

这就证明，对于满足 $\tilde{f}\in\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})^{^*\Lambda}$的 $f\in\mathcal{L}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})$，有 $\text{trans}^k(f)\in\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^k,\mathcal{V})^{^*\Gamma}$。因此，$\text{trans}^\bullet$ 诱导出一个链映射 $\tilde{}\text{trans}^\bullet:\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Lambda}\to\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Gamma}$。$\tilde{}$最后，如果 f 已经是 $^*\Gamma$-不变的，那么 f_x 在无穷小量意义下为常数，因此 $m(f_x)$与该常数的值相差一个无穷小量，而该常数为 $f(x)$。这表明，将 $\widetilde{\text{trans}}^k$ 限制在 $\tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*\Gamma)^\bullet,\mathcal{V})^{^*\Gamma}$上时，它是单位元，并由此完成证明。□

命题 1.5现在可以轻松地得出。

命题 (命题 1.5)。设 $\Lambda\le\Gamma$ 是余 amenable 的。若 Λ 是具有线性估计的均匀 $\mathfrak{U}$-稳定的，则 Γ也是如此。

证明。设 Λ 是具有线性估计的均匀 $\mathfrak{U}$-稳定的，并设 Γ 是 Λ的余 amenable 超群。我们旨在证明，Γ 同样具有线性估计的均匀 $\mathfrak{U}$-稳定性。根据定理 2.6，只需证明所有支集在 $\mathfrak{U}$ 上的 Ulam 类都在 $\text{H}^2_a(\Gamma,\mathcal{W})$ 中消失，其中 $\mathcal{W}$ 是一个 Ulam $^*\Gamma$-模。根据命题 1.8，只需证明此类的像在限制映射 $\text{res}^2:\text{H}^2_a(\Gamma,\mathcal{W})\to\text{H}^2_a(\Lambda,\mathcal{W})$ 下消失，因为后者是单射的。根据引理 3.4，这些是 Λ的 Ulam 类。但由于 Λ 具有线性估计的均匀 $\mathfrak{U}$-稳定性，再次根据定理 2.6，$\text{H}^2_a(\Lambda,\mathcal{W})$ 中的所有 Ulam 类都消失，由此得证。□

3.3 拉回与可和核

设 $N\le\Gamma$ 是一个可和正规子群，设 $\mathcal{V}$ 是一个对偶渐近 Banach $^*(\Gamma/N)$-模，其拉回是一个对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模。将上链与投影 $^*\Gamma\to{}^*(\Gamma/N)$复合，定义了拉回 $p^\bullet:\text{H}^\bullet_a(\Gamma/N,\mathcal{V})\to\text{H}^\bullet_a(\Gamma,\mathcal{V})$。以下结论可通过与引理 3.4 类似的论证证明:

引理 3.6。设 $\mathcal{W}$ 是一个乌拉姆 $^*(\Gamma/N)$-模。那么 $\mathcal{W}$ 也是一个乌拉姆 $^*\Gamma$-模，并且拉回 p^2：$\mathrm{H}_a^2(\Gamma/N,\mathcal{W}) \to \mathrm{H}_a^2(\Gamma,\mathcal{W})$ 将乌拉姆类映为乌拉姆类。

W在这种语言下，命题1.9 只是推论3.3的重新表述：

命题 （命题 1.9）。 设 $N \leq \Gamma$ 是一个可和正规子群。那么，对于所有 $n \geq 0$以及所有对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$，拉回 $\mathrm{H}_a^n(\Gamma/N, \mathcal{V}) \to \mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V})$是一个同构。

同理，我们可推出命题 1.6：

命题 （命题 1.6）。 设 $N \leq \Gamma$ 是一个可和正规子群。如果 Γ 是具有线性估计的统一 $\mathfrak{U}$-稳定的，那么 Γ/N也是如此。

证明。设 Γ 是具有线性估计的统一 $\mathfrak{U}$-稳定的，并设 N是 Γ的一个可和正规子群。我们的目标是证明 Γ/N 也具有线性估计且是统一 $\mathfrak{U}$-稳定的。根据定理 2.6，只需证明支集在 $\mathfrak{U}$ 上的所有 Ulam 类在 $\mathrm{H}_a^2(\Gamma/N,\mathcal{W})$ 中均为零，其中 $\mathcal{W}$是一个 Ulam $^*(\Gamma/N)$-模。由命题 1.9，只需证明这些类在 $\mathrm{H}_a^2(\Gamma/N,\mathcal{W}) \to \mathrm{H}_a^2(\Gamma,\mathcal{W})$ 下的拉回均为零，因为后者是一个同构。根据引理 3.6，这些是 Γ的 Ulam 类。但由于 Γ 具有线性估计且是统一$\mathfrak{U}$-稳定的，再次应用定理 2.6，$\mathrm{H}_a^2(\Gamma,\mathcal{W})$ 中的所有 Ulam 类均为零，于是得证。

□

4 灯笼群的渐近上同调

在本节中我们证明定理1.7，为方便读者，现回顾如下 e:

定理。设 Γ、Λ 为两个可数群，其中 Λ 是无限可和群。则对于所有 $n \geq 1$ 以及所有有限维的对偶渐近巴拿赫 $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$，$\mathrm{H}_a^n(\Gamma \wr \Lambda, \mathcal{V}) = 0$。

注 4.1。 事实上，该定理对更大的一类系数也成立，这类系数由可分巴拿赫空间的超积得到。然而，这并不会带来更强的稳定性结果：见注6.1。

我们首先寻找一个合适的 Zimmer 可和 Γ-空间：

引理 4.2 ([Mon22，推论 8，命题 9]). 设 Γ, Λ 是两个可数群，其中Λ 是可和的。设 μ_0 是定义在 Γ 上的一个具有全支撑的分布，并设 μ 是定义在 S 上的乘积测度：$= \Gamma^\Lambda$。则 S 是一个 Zimmer 可和 $(\Gamma \wr \Lambda)$-空间。

这个空间之所以对计算有用，是因为它具有高度遍历性。回顾一下，若 Γ-空间 S 满足以下条件，则称其为遍历的：每个 Γ-不变函数 $S \to \mathbb{R}$ 都几乎处处为常数。当 S 具有双重遍历性时，即 Γ 在 $S \times S$ 上的对角作用是遍历的，我们甚至可以得到可分系数遍历性，这意味着对于每个 Γ-模 E，每个 Γ-等变映射$S \to E$ 都几乎处处为常数 Mon22, 2.A, 4.B]。

引理 4.3 (Kolmogorov [Mon22, 2.A, 4.B]). 设 Γ, Λ 是两个可数群，其中 Λ 是无限群，并设 S 如引理 *4.2*中所述。则 S^m是一个遍历的 $(\Gamma \wr \Lambda)$-空间，对每个 $m \geq 1$均成立。

对我们的目的而言，我们需要遍历性的近似版本（即几乎不变函数几乎为常数），而且模 E 只带有 Γ的近似作用。遍历性假设仍足以得到以下结论：

引理 4.4. 设 S 是一个概率测度 Γ-空间，并假设 Γ 在 S上的作用是遍历的。那么，只要 $f\colon S\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数，且对所有 $g\in\Gamma$都有 $\|g\cdot f-f\|<\varepsilon$，就存在一个常数 $c\in\mathbb{R}$，使得对几乎所有 $s\in S$，都有 $|f(s)-c|<\varepsilon$。

证明。我们定义 $F\colon S\to\mathbb{R}\colon s\mapsto \operatorname{esssup}_{g\in\Gamma} f(g^{-1}s)$。根据构造，$F$ 是 Γ-不变的，并且还有 $\|F-f\|<\varepsilon$。由遍历性可知，F几乎处处等于常数 c，因此对于几乎所有 $s\in S$，$|f(s)-c|<\varepsilon$。 □

引理 4.5。设 S 是一个概率测度 Γ-空间，并假设 Γ 在$S\times S$上的作用是遍历的。此外，假设 E 是一个赋有映射$\Gamma\times E\to E\colon v\mapsto g\cdot v$ 的可分巴拿赫空间，使得对于所有 $g\in\Gamma$、$v\in E$，都有 $\|g\cdot v\|=\|v\|$。

于是，只要 $f\colon S\to E$ 是一个满足对于所有$g\in\Gamma$都有 $\|g\cdot f-f\|<\varepsilon$ 的可测函数，其中$(g\cdot f)(s)=g\cdot f(g^{-1}s)$，就存在一个向量 $v\in E$，使得对于几乎所有 $s\in S$，$\|f(s)-v\|<3\varepsilon$。

证明。我们定义 $F\colon S\times S\to\mathbb{R}\colon (s,t)\mapsto\|f(s)-f(t)\|$。那么

$$\begin{aligned}\|g\cdot F-F\|&=\operatorname{ess\,sup}\big|\,\|g\cdot f(g^{-1}s)-g\cdot f(g^{-1}t)\|-\|f(s)-f(t)\|\,\big|\\&\le\operatorname{ess\,sup}\|g\cdot f(g^{-1}s)-g\cdot f(g^{-1}t)-(f(s)-f(t))\|\le 2\|g\cdot f-f\|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

根据前一个引理，存在常数 c，使得对所有 $\varepsilon>0$，都有 $|F(s,t)-c|<2\varepsilon$。如果$c<\varepsilon$，那么对于几乎处处的 $s,t\in S$，$|f(s)-f(t)|<3\varepsilon$，这就推出了所述结论。

否则，对于几乎处处的 $s,t\in S$，$\|f(s)-f(t)\|>\varepsilon$。令 $D\subset E$为一个可数稠密子集。那么对于每个 $d\in D$，集合 $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(d))$ 是 S 的一个可测子集，并且这些集合的并覆盖 S。由于 D 是可数的，必定存在 $d\in D$，使得 $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(d))$ 具有正测度。但是，对于该集合中的所有 s,t，都有 $\|f(s)-f(t)\|<\varepsilon$，矛盾。 □

注 4.6。 这个引理确实非常依赖可分性假设，这也是定理 1.7 包含有限性假设的原因（参见注 6.1）。

因此我们得到：

命题 4.7。设 S 是一个双重遍历的 Γ-空间。设 $(V_n)_{n\ge1}$ 是一列可分对偶巴拿赫空间，使得 $\mathcal{V}=\prod V_n$ 具有对偶渐近巴拿赫 $\omega\Gamma$-模的结构；记相应的渐近 ${}^*\Gamma$-模为 $\tilde{\mathcal{V}}^{*\Gamma}\to\tilde{\mathcal{L}}^\infty$。则自然包含 ${}^*S(\mathcal{V},{}^{*\Gamma})$ 是一个同构。

证明。设 $f\in\mathcal{L}^\infty_b({}^*S,\mathcal{V})=\prod L^\infty(S,V_n)$ 是元素 $\tilde f\in\tilde{\mathcal{L}}^\infty({}^*S,\mathcal{V})^{*\Gamma}$ 的一个提升。记作$_{\omega\sim}f=(f_n)_\omega$。那么，$f$ 是 ${}^*\Gamma$-不变的这一事实意味着，对每个序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Gamma$，都有 $(g_n\cdot f_n-f_n)_\omega\in\mathcal{L}^\infty_{inf}({}^*S,\mathcal{V})$。由于这对每个序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都成立，对角线论证表明，存在 $\varepsilon\in{}^*\mathbb{R}_{inf}$，使得对每个 $g\in\Gamma$ 都有 $(g\cdot f_n-f_n)_\omega\in{}^*\mathbb{R}_{inf}$。由引理 4.5 可知，存在 $(v_n)_\omega\in\mathcal{V}$，使得 $(f_n-1_{v_n})\in\mathcal{L}^\infty_{inf}({}^*S,\mathcal{V})$。˜因此，$f$ 在 $\mathcal{L}^\infty({}^*S,\mathcal{V})$ 中表示与某个 $\mathcal{V}$ 元素的像相同的元素。由于$\tilde f$ 是 ${}^*\Gamma$-不变的，相应元素实际上属于 $\tilde{\mathcal{V}}^{*\Gamma}$。 □

我们终于可以证明定理1.7：

定理1.7的证明。 设 Γ， Λ 是可数群，其中 Λ 是无限且可和的。根据引理4.2，沿用相同的记号， S 是一个 Zimmer 可和的（$\Gamma \wr \Lambda$）空间。因此我们可以应用定理2.3，从而得到下面的复形计算 H_a^*（$\Gamma \wr \Lambda$； $\mathcal{V}$）：

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{L}}^\infty(^*S, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*S)^2, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*S)^3, \mathcal{V})^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

由引理 4.3， S^m 对于每个 $\Gamma \wr \Lambda$，都是一个双重遍历的 $m \geq 1$-空间。因此，命题 4.7 适用，并且自然包含 $\tilde{\mathcal{V}}^{^*\Gamma} \to \tilde{\mathcal{L}}^\infty((^*S)^m, \mathcal{V})^{^*\Gamma}$ 对每个$m \geq 1$都是一个同构。因此，上述复形同构于

$$0 \xrightarrow{\tilde{d}^0} \tilde{\mathcal{V}}^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^1} \tilde{\mathcal{V}}^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^2} \tilde{\mathcal{V}}^{^*\Gamma} \xrightarrow{\tilde{d}^3} \cdots$$

˜每个微分 d^m 都是由 $(m+1)$ 项组成的交错和，且这些项彼此相等。因此d^m 当 m 为偶数时是单位元，当 m 为奇数时则为零。结论得证。

□

5 汤普森群

本节证明定理 1.2。关于 F' 的陈述是一个适用于一大类自相似群的更一般结果的特例。最一般的陈述如下：

定理 5.1. 设 Γ 是一个群， Γ_0 是一个满足以下性质的子群：

1. 存在 $g \in \Gamma$ 使得群 $\{g^i \Gamma_0 g^{-i} : i \in \mathbb{Z}\}$ 两两可交换；
2. Γ 的每个有限子集都包含于 Γ_0的某个共轭中。

那么对于所有 $n \geq 1$ 以及所有有限维的对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$， $\mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V}) = 0$。特别地， Γ 具有一致的 $\mathfrak{U}$稳定性，并且满足线性估计。

该定理适用于以下这一大类实直线同胚群：

推论 5.2. 设 Γ 是一个近端的、有界支撑的直线保向同胚群。那么对于所有 $n \geq 1$ 以及所有有限维的对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$， $\mathrm{H}_a^n(\Gamma, \mathcal{V}) = 0$。特别地， Γ 具有一致的 $\mathfrak{U}$稳定性，并且满足线性估计。

注 5.3. 这类群没有拟同态是众所周知的：例如参见[GG17、FFL23、Mon22]。

相关定义请参见第5.2 节。在推论5.8 中，我们将应用推论5.2 来处理 Thompson群 F'；关于 Thompson群 F 的结果将由命题1.5推出。根据第5.3节中的这些一般判据，我们推导出 Thompson群 T 和 V 的稳定性。

5.1 自相似群

本节我们将证明定理5.1。证明将通过一系列引理完成：

引理 5.4. 设 Γ 是一个群，并假设存在 $g \in \Gamma$ 和 $\Gamma_0 \leq \Gamma$，使得$\{g^i \Gamma_0 g^{-i} : i \in \mathbb{Z}\}$ 两两交换。那么存在一个满同态 $\Gamma_0 \wr \mathbb{Z} \to \langle \Gamma_0, g \rangle$，其核是可和的（事实上是后亚阿贝尔的）。

这是一个众所周知的结果，在 [Mon22] 中陈述时未附证明。为求完整起见，我们给出证明。

证明. 为了明确区分，我们用 H 表示抽象群 Γ_0，用 Γ_0 表示 Γ的子群。因此，我们要构造一个满同态 $H \wr \mathbb{Z} \to \langle \Gamma_0, g \rangle \leq \Gamma$，其核是后亚阿贝尔的。我们自然地定义

$$\varphi((g_i)_{i\in\mathbb{Z}}, p) = \left(\prod_{i\in\mathbb{Z}} t^i g_i t^{-i}\right) t^p.$$

注意，由于只有有限多个非单位元项，这个乘积是良定义的；又由于不同的共轭元彼此交换，乘积的顺序无关紧要。根据构造，φ 在 H_i上是单射的，也就是说，它是 $H \wr \mathbb{Z}$中支集位于第 i个坐标上的 H 的副本。令$K := \ker\varphi \cap \bigoplus_i H_i$，并注意到 K 是截面映射 $H \wr \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 限制在 $\ker\varphi$上的核。因此，只需证明 K 是阿贝尔的。

令 g、$h \in K$，并将它们写成 $(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$（我们省略 $\mathbb{Z}$ 坐标，因为它总是 0）。我们需要证明 g 和 h 交换。我们有

$$1_\Gamma = \varphi(g) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} t^i g_i t^{-i} \quad \text{and thus} \quad g_0 = \prod_{i\neq 0} t^i g_i t^{-i} \in \Gamma.$$

但现在 g_0 属于一个由 Γ 中与其交换的 Γ_0 的共轭元生成的群。特别地，这意味着 g_0 和 h_0 在 Γ 中交换。由于 $\varphi|_{H_0}$ 是单射的，这表明 g_0 和 h_0 在 H_0 中交换。对其他坐标运行相同的论证，我们得到对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，g_i 和 h_i 在 H_i 中交换，因而 g 和 h 交换。 □

以下事实均已见于文献：

引理 5.5 ([Mon22，命题 10])。假设 $\Gamma_0 \leq \Gamma$ 使得 Γ 的每个有限子集都包含于某个 Γ-共轭元中，该共轭元属于 Γ_0。则 Γ_0 在 Γ 中是余 amenable 的。

引理 5.6 ([MP03])。令 $K \leq H \leq \Gamma$。

1. 若 K 在 Γ 中余 amenable，则 H 在 Γ 中余 amenable；
2. 若 K 是在 H 中余 amenable，且 H 在 Γ 中余 amenable，则 K 在 Γ 中余 amenable。

注记 5.7。我们提醒读者，若 K 在 Γ 中余 amenable，则 K 未必在 H [MP03] 中余 amenable。

现在我们准备好证明定理 5.1：

定理 5.1 的证明。设 Γ、Γ_0 和 g 如陈述所述。由引理 5.4，存在一个核为后亚阿贝尔核的映射 $\Gamma_0 \wr \mathbb{Z} \to \langle \Gamma_0, g \rangle$。由定理 1.7 和命题 1.9，对于所有 $n \geq 1$ 以及所有有限维的对偶渐近 Banach $^*\Gamma$-模 $\mathcal{V}$，我们有 $\mathrm{H}_a^n(\langle \Gamma_0, g \rangle, \mathcal{V})$。现在由引理 5.5，$\Gamma_0$ 在 Γ 中是余 amenable 的。最后，由引理 5.6，$\langle \Gamma_0, g \rangle$ 在 Γ 中是余 amenable 的。由命题 1.8 可得结论。 □

5.2 直线同胚群

设 Γ 是一个通过同胚作用于实直线上的群。若对于任意实数 $a < b$ 和 $c < d$，都存在 $g \in \Gamma$ 使得 $g \cdot a < c < d < g \cdot b$，则称该作用是近端的。$g \in \Gamma$ 的支集是集合 $\{x \in \mathbb{R} : g \cdot x \neq x\}$。若 Γ 的每个元素都具有有界支集，则称 Γ 有界支撑。注意，有界支撑的同胚自动是保向的。

推论5.2的证明。设 Γ 如命题所述。设 Γ_0 为由支集包含于 $[0,1]$的元素构成的子群。设 $g \in \Gamma$ 满足 $g(0) > 1$：这样的元素存在，因为 Γ 的作用是近端的。于是，由归纳法以及 Γ 是保向的这一事实可知，区间 $\{g^i[0,1] : i \in \mathbb{Z}\}$ 两两不相交。因此，这些共轭元 $g^i \Gamma_0 g^{-i}$ 两两可交换。

由于 Γ 有有界支撑，对于每个有限子集 $A \subset \Gamma$，都存在 n，使得 A 中每个元素的支集都包含于 $[-n, n]$。由近端性可知，存在 $h \in \Gamma$使得 $h(0) < -n$ 且 $h(1) > n$。于是，$h\Gamma_0 h^{-1}$ 是由支集包含于 $[-n, n]$的元素构成的子群，特别地，它包含 A。

因此定理 5.1 适用，我们由此得出结论。 □

现在我们来说明如何由定理 F 和 F' 1.2 得出关于 推论5.2 和命题 1.5的结论。关于汤普森群的更多细节，请参阅 [CFP96] 。

汤普森群 F 是区间上的保向分段线性同胚群，其断点位于 $\mathbb{Z}[1/2]$ 中，斜率属于 $2^{\mathbb{Z}}$。导出子群 F'与有界支撑元素组成的子群一致。F' （因而F）在 $[0,1]$ 上的作用保持 $\mathbb{Z}[1/2] \cap (0,1)$，并在其上高度传递；也就是说，对于 $\mathbb{Z}[1/2] \cap (0,1)$ 中任意一对有序 n 元组，都存在 F' 中的一个元素将其中一个映到另一个。

推论 5.8。 汤普森群 F 和 F' 具有一致的 $\mathfrak{U}$-稳定性，且满足线性估计 .

证明。我们将 $(0,1)$ 与实直线等同。群 F' 具有有界支撑，且是近端的，因为它在某个稠密集的有序对上具有传递作用。因此推论 5.2适用，故 F' 具有一致的 $\mathfrak{U}$-稳定性，且满足线性估计。

由于商 F/F' 是阿贝尔群，因而是可和的，我们看到 F' 在 F中是余 amenable 的，因此由命题 1.5 可得 F' 具有一致的 $\mathfrak{U}$-稳定性，且满足线性估计。 □

注 5.9。我们也可以更直接地从 F 的稳定性推出 F' 的稳定性，而无需借助命题 1.5。事实上，由于 F' 具有一致的 $\mathfrak{U}$-稳定性，是单群且非线性，每个同态 $F' \to U(n)$ 都是平凡的——我们将在下一节再讨论这一点。因此，一致 $\mathfrak{U}$-稳定性意味着 F' 的每个一致渐近同态 $F' \to \mathfrak{U}$ 都与平凡同态一致接近。由此可知，每个一致渐近同态 $F \to \mathfrak{U}$都与一个可经由以下群分解的同态一致渐近接近 $\mathbb{Z}^2$。最后，由可 amenable 群的稳定性 [Kaz82、GLMR23]可得结论。

这些判据还适用于其他分段线性群 [BS16]，例如 Stein–Thompson 群 [Ste92], 或 Cleary 的黄金比例 Thompson 群[Cle00、BNR21]。在如此一般的情形下，需要更加谨慎，因为交换子子群有时是真子群，而非有界支撑子群。相关判据也适用于 Monod [Mon13] 和 Lodha–Moore 的分段投射群 [LM16]。在这种情况下，还需要进一步谨慎，因为在上述证明中，交换子子群所扮演的角色

必须由双交换子子群来承担 [BLR18]。这与引言中的问题1.10相呼应。

5.3 T 和 V

在本节中，我们将展示如何利用前面的结果证明圆和康托尔集的同胚群也具有稳定性。为简化叙述，我们只关注汤普森群 T 和 V，但经过适当修改后，证明也适用于一些以类似方式定义的群。我们的证明将用到一种有界生成稳定性论证，这一方法最早由 [BOT13]提出。我们只会使用它的一个简单版本，更接近 [BC20]中的版本。回顾一下，如果存在，使得集合由子群 $\mathcal{H}$ 有界生成 $k \geq 1$，当且仅当这些集合 $\{H_1 \cdots H_k : \ H_i \in \mathcal{H}\}$覆盖 Γ。

引理 5.10。设 Γ 是一个离散群。假设存在一个子群 $H \leq \Gamma$，具有以下性质：

1. 每个同态 $H \to U(n)$都是平凡的；
2. H 是均匀的 $\mathfrak{U}$-稳定的（具有线性估计）；
3. Γ 由 H的共轭元有界生成。

那么， Γ 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的（具有线性估计）。

证明. 设 $\phi_n : \Gamma \to U(d_n)$是一个一致渐近同态，且 $\mathrm{def}(\phi_n) =: \varepsilon_n$。那么 $\phi_n|_H : H \to U(d_n)$是 H的一个一致渐近同态，因此它与某个同态的距离至多为 δ_n，其中 $\delta_n \to 0$。但根据假设，这样的同态必定是平凡的，所以对所有 n，都有 $\|\phi_n(h) - I_{k_n}\| \leq \delta_n$。对 H的所有共轭元也同样成立，只需将 δ_n 替换为 $\delta_n + 2\varepsilon_n$。

根据有界生成，存在 $k \geq 1$，使得每个 $g \in \Gamma$ 都可以写成$g = h_1 \cdots h_k$，其中每个 h_i都属于 H的某个共轭元。我们进行估计：

$$\begin{aligned}\|\phi_n(g) - I_{d_n}\| = \left\|\phi_n\left(\prod_{i=1}^{k} h_i\right) - I_{d_n}\right\| &\leq \left\|\phi_n\left(\prod_{i=1}^{k-1} h_i\right)\phi_n(h_k) - I_{d_n}\right\| + \varepsilon_n \\ &= \left\|\phi_n\left(\prod_{i=1}^{k-1} h_i\right) - I_{d_n}\right\| + \|\phi_n(h_k) - I_{d_n}\| + \varepsilon_n \leq \cdots \\ \cdots &\leq \sum_{i=1}^{k} \|\phi_n(h_i) - I_{d_n}\| + k\varepsilon_n \leq k(\delta_n + \varepsilon_n).\end{aligned}$$

那里 由于 ϕ_n 与平凡同态相距 $k(\delta_n + \varepsilon_n)$，因此我们得出结论 . □

Thompson群 T 是由保向的分段线性圆周同胚组成的群，这些同胚保持 $\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$，其断点属于 $\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$，斜率属于 $2^{\mathbb{Z}}$。给定 $x \in \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$， x 的稳定子自然同构于 F。此外，芽稳定子 $T(x)$（即由逐点固定 x 的某个邻域的元素组成的群）同构于 F'。

推论 5.11。Thompson群 T 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，且具有线性估计。

证明。我们断言，引理 5.10 适用于 $H = T(0) \cong F'$。第 1 项由以下事实得出： F' 不能嵌入 $U(n)$（例如，因为它包含 F作为子群，而该子群是有限生成且非剩余有限的，因此根据马尔采夫定理[Mal40]，它不可能是线性群），并且 F' 是单群 [CFP96]。此外，根据推论 5.8， F' 是均匀 $\mathfrak{U}$-稳定的，且具有线性估计。因此，我们只需证明有界生成这一结论。我们将证明，对每个 $g \in T$，都存在 $x, y \in \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$，使得 $g \in T(x)T(y)$。这就足够了，因为 T在 $\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$上具有传递作用，所以 $T(x)$和 $T(y)$都与 $H = T(0)$共轭。

设 $1 \neq g \in T$，并选择 $x \neq y \in \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$，使得 $g(y) \notin \{x, y\}$。令 I 为 y 周围的一条小二进弧，使得 $x \notin \overline{I}$ 且 $x, y \notin g(I)$。选择一个元素 $f \in T(x)$，使得 $f(I) = g(I)$。令 h 为一个支集包含于 I 的元素，使得 $h|_I = f^{-1}g|_I$。由于 $x \notin \overline{I}$，我们也有 $h \in T(x)$。此外， $h^{-1}f^{-1}g|_I = \mathrm{id}|_I$，因此 $h^{-1}f^{-1}g \in G(y)$。由此可得，$g = fh \cdot h^{-1}f^{-1}g \in T(x)T(y)$。□

Thompson群 V可以描述为二进康托集 X 上的一个同胚群：$= 2^{\mathbb{N}}$。二进砖块是形如 $X_\sigma := \sigma \times 2^{\mathbb{N}_{>k}}$ 的闭开子集，其中 $\sigma \in 2^k$，且任意两个二进砖块都可通过 $X_\sigma \to X_\tau$: $\sigma \times x \mapsto \tau \times x$ 典范同胚。元素 $g \in V$ 由 V 的两个大小相同的有限划分定义，这些划分由二进砖块构成，并通过典范同胚彼此对应。

推论 5.12. Thompson群 V 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，且具有线性估计。

证明与 T 的证明非常相似，因此我们只给出证明概要：

证明概要。 令 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ 为一个二进点，即一个最终全为 0 的序列，并令 $V(x)$ 表示 V中由逐点固定 x的某个邻域的元素组成的子群。与推论 5.11 的证明相同的论证表明， V 由 $V(x)$ 的共轭元有界生成。

现在， $V(x)$ 同构于若干个 V 的副本的有向并，而 V 是有限生成单群 [CFP96], ，因此根据马尔采夫定理，每个同态 $V(x) \to U(n)$ 都是平凡的。最后， $V(x)$ 包含一个 V 的副本 V_0，使得这对 $(V(x)\ V_0)$ 满足定理 5.1 的假设（参见 [And22, 命题 4.3.4] 及其证明）。由引理 5.10 得证。□

6 我们结果的尖锐性

本节通过给出反例，说明我们的结果在哪些方面是尖锐的，并指出其推广和逆命题的问题。

注 6.1. 有一种称为 强乌拉姆稳定性的概念，其中取 $\mathfrak{U}$ 也包括无限维希尔伯特空间上的酉群，通常赋予其算子范数。文献 [BOT13] 证明了，强乌拉姆稳定群的子群是乌拉姆稳定的。因此，显然定理 1.3 对强乌拉姆稳定性并不成立。即使将范围限制在可分希尔伯特空间上也无济于事：由文献[BOT13] 中的构造可知，如果一个可数群包含自由子群，那么可分希尔伯特空间本身就足以见证强乌拉姆稳定性失效。

在这一更一般的设定下，同样可以通过渐近上同调构建稳定性框架，其中的对偶渐近巴拿赫模并非有限维的。因此，

上述反例表明，定理 1.7确实需要有限性假设（见备注4.6）。我们能够得到由可分空间的超积构成的对偶渐近巴拿赫模，这一点与 [Mon22], 类似，但并无助益，因为无限维希尔伯特空间上的渐近稳定性问题所产生的对偶渐近巴拿赫模并非这种形式，即使该希尔伯特空间是可分的也是如此。

注 6.2. 我们在命题 1.5 中证明了，若 Λ 在 Γ 中是余 amenable，且 Λ 是具有线性估计的$\mathfrak{U}$-稳定的，那么 Γ也如此。反过来则不成立。设 F_n 是秩为 $n \geq 2$的自由群。那么 $\Lambda := \bigoplus_{n\geq 1} F_n$ 存在非平凡拟同态，因此它不是一致 $U(1)$-稳定的 [BOT13], ，尤其不是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的。然而， Λ 在 $F_n \wr \mathbb{Z}$中是余 amenable，而根据定理 1.3，后者具有线性估计且是一致

另一方面，若将“余 amenable”替换为“有限指数”，则反向结论成立。这可由 [BOT 13] 中关于乌拉姆稳定性的归纳过程推出，详见 [Gam11，引理 II。22]；同一证明可推广至所有次乘性范数[GLMR23，引理 4.3。6]。

注 6.3。 我们在命题 1.6 中证明了， N 是 Γ的可和正规子群，且 Γ 是统一 $\mathfrak{U}$-稳定的，并满足线性估计，那么 Γ/N也如此。反过来则不成立。设 Γ 为 Thompson群 T的提升，也就是说，它是 $\mathbb{R}$ 上的保向同胚群，与 $\mathbb{Z}$ 整数平移群相交换，并在商 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上诱导出 T。这些群构成一个中心扩张

$$1 \to \mathbb{Z} \to \Gamma \to T \to 1.$$

现在， T 由推论 $\mathfrak{U}$可知是统一5.11-稳定的，并满足线性估计；然而， Γ 则不是：根据 U，它甚至不是统一 [BOT13], (1)-稳定的，因为它有一个非平凡拟同态[GS87]。

The 接下来的两条注释表明，[GLMR23] 中的一些结果也是尖锐的。

注 6.4。 GLMR [的基本结果是，渐近上同调消失意味着一致 $\mathfrak{U}$-稳定性。反过来则不成立。事实上，由于 $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$具有平凡伴随作用（因为 $U(1)$是阿贝尔群），可知定理2.6 中的蕴含可具体表述为：若 $\mathrm{H}^2_a(\Gamma, {}^*\mathbb{R}) = 0$，则 Γ 是统一 $U(1)$-稳定的，其中 ${}^*\mathbb{R}$ 被视为一个对偶渐近 ${}^*\Gamma$-模，具有平凡的 ${}^*\Gamma$ 作用。

现在，再令 Γ 为 Thompson群 T的提升，因此 Γ 包含一个中心子群$\mathbb{Z}$，满足 $\Gamma/\mathbb{Z} \cong T$。 Γ 不是一致 $U(1)$-稳定的这一事实意味着 $\mathrm{H}^2_a(\Gamma, {}^*\mathbb{R}) \neq 0$。但命题 1.9 随即表明，$\mathrm{H}^2_a(T, {}^*\mathbb{R}) \neq 0$ 也不成立。然而，根据推论 5.11， T 是一致 $\mathfrak{U}$-稳定的，且具有线性估计。从本质上说，这是因为 $\mathrm{H}^2_b(\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathrm{H}^2_b(T, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$，但前者由拟同态张成，而后者不是（例如参见 [Cal09，第 5]章）。

注 6.5. 在 [BOT13] 中证明了，存在非平凡拟同态的群并非一致 $U(1)$-稳定。在 [GLMR23，命题 1.0。6] 这一结果得到了加强：作者证明了 Γ 是一致 $U(1)$-稳定，当且仅当 $\mathrm{H}^2_b(\Gamma, \mathbb{Z})$ 在 $\mathrm{H}^2_b(\Gamma, \mathbb{R})$ 中像里的非零元素，其格罗莫夫范数 $\|\cdot\|$有一个正下界。他们据此证明，一个有限表示群一致 $U(1)$-稳定，当且仅当它不存在非平凡拟同态 [GLMR23，推论 1.0。10]。

有限表示性的假设是必要的。令 Γ_n 表示 Thompson群 T 到 $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$的提升。也就是说， Γ_n 是保向同胚群，

拓扑圆 $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$，它们与旋转循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 交换，并在商 T 上诱导出 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。现在， T 没有无界拟同态（参见例如 [Cal09，第5]章），因此 Γ_n 也没有无界拟同态（这可由拟同态函子 [Cal09，注释 2.90]的左正合性推出）。因此，群 $\Gamma := \bigoplus_{n\geq 2}\Gamma_n$ 没有无界拟同态。

然而，我们声称 Γ 并非一致 $U(1)$-稳定。根据 [GLMR23，命题 1.0.6]，只需证明存在有界上同调类 $0 \neq \rho_n \in \mathrm{im}(\mathrm{H}_b^2(\Gamma,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_b^2(\Gamma,\mathbb{R})$ 使得 $\|\rho_n\| \to 0$。我们令 ρ_n 为表示 $\Gamma \to \Gamma_n \to \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}/n\mathbb{Z})$ 的欧拉类，它有一个整数系数代表元，因此属于 $\mathrm{H}_b^2(\Gamma,\mathbb{Z})$ 的像（关于圆周作用的欧拉类，更多信息见 [Ghy01]）。此外，使用 [Bur11]，的术语，该表示是极小的、无界的，且其中心化子的阶为 n。因此，根据 [Bur11，推论 1.6]，，我们得出结论 $\|\rho_n\| = 1/2n$。

注意， Γ是可数的，但无限生成。若能构造一个有限生成的例子（它必然是无限呈示的），将会很有意思。

7 近似性质

本节讨论本文所研究的群的近似性质相关的开放问题，以及这些问题与本文结果之间的关系。我们回顾以下概念：

定义 7.1. 设 $\mathcal{G}$ 是一族度量群。若存在一个（逐点、统一）渐近同态 $\phi_n : \Gamma \to G_n \in \mathcal{G}$，且它还是渐近单射的，即对所有 $g \in \Gamma, g \neq 1$，都有 $\liminf_{n\to\infty} \phi_n(g) > 0$，则称 Γ 是（逐点、统一）$\mathcal{G}$-可逼近的。

上述术语并非标准用法：大多数文献只讨论逐点概念，并将其称为 $\mathcal{G}$-可逼近性。一致可逼近性的概念见于 [FF21]，其名称为 强 $\mathcal{G}$-可逼近性。

例 7.2. 若 $\mathcal{G}$ 是一族配备归一化汉明距离的对称群，则逐点 $\mathcal{G}$-可逼近群称为 sofic [Gro99、Wei00]。

若 $\mathcal{G}$ 是配备希尔伯特–施密特距离的酉群族，那么逐点 $\mathcal{G}$-可逼近群称为 超线性 [Rŏ8]。

所有可和群和剩余有限群都是 sofic 群，而所有 sofic 群都是超线性的。判断是否存在非 sofic 群是一个重要的开放问题。

在我们关于酉群上的次乘性范数的讨论中，以下两种可逼近性概念已得到研究：

例 7.3。 设 $\mathcal{G}$ 是配备算子范数的酉群族。那么逐点 $\mathcal{G}$-可逼近群称为 MF [CDE13]。所有可和群都是 MF [TWW17]。是否存在非 MF 群仍是一个开放问题。

设 $\mathcal{G}$ 是配备弗罗贝尼乌斯范数，或更一般地配备 Schatten p-范数的酉群族，其中 $1 < p < \infty$。在 $\mathcal{G}$中构造出了非逐点 [DCGLT20，LO20]-可逼近的群。这是已知存在逐点可逼近性反例的极少数情形之一。

以下观察是众所周知的，归功于 Glebsky 和 Rivera [GR09] 以及 Arzhantseva 和 P˘aunescu 在逐点对称情形下 [AP15]。我们给出一个一般性证明，以供参考：

命题 7.4。设 $\mathcal{G}$ 是一族局部剩余有限的度量群，并设 Γ 是一个有限生成群。假设 Γ 是（逐点、统一） $\mathcal{G}$-稳定的，并且是（逐点、统一） $\mathcal{G}$-可逼近的。那么 Γ 是剩余有限的。

关于 $\mathcal{G}$ 的假设涵盖了以上所有情形。当 $\mathcal{G}$ 中的群是有限群时，这一点显然成立；当它们是线性群时，则由马尔采夫定理 [Mal40] 得出。

证明。我们给出证明时不具体说明渐近同态、接近性和可逼近性的类型：读者应将所有内容都理解为逐点的，或都理解为一致的。

设 $\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$ 是一个渐近单射的渐近同态。由稳定性，存在一列同态 $\psi : \Gamma \to \mathcal{G}$，它们与 ϕ渐近接近。由于 ϕ 是渐近单射的，对每个 $g \in \Gamma$，都存在 N，使得对所有$n \geq N$ 以及某个 $\rho = \rho(g) > 0$，均有 $\phi_n(g) \geq \rho$。取更大的 N后，我们还可得到 $\psi_n(g) \geq \rho/2$，特别是 $\psi_n(g) \neq 1$。由于 $\psi_n(\Gamma)$ 是 $G_n \in \mathcal{G}$ 的有限生成子群，根据假设，它是剩余有限的，因此 $\psi_n(g)$ 在 $\psi_n(\Gamma)$ 的某个有限商群中仍非平凡。由于这也是 Γ 的一个有限商群，我们得出 Γ是剩余有限的。 □

对于逐点稳定性和 Thompson群 F的特殊情形，我们得到了 Arzhantseva 和 Paunescu 一条评论的以下更一般版本 [AP15，开放问题]:

推论 7.5. 设 $\mathcal{G}$ 为以下群族之一：赋予归一化汉明距离的对称群、赋予希尔伯特–施密特范数的酉群，或赋予算子范数的酉群。若 Thompson群 F 是逐点 $\mathcal{G}$-稳定的，则它不是逐点 $\mathcal{G}$-可逼近的，尤其是非 amenable 的。

正如我们在引言中提到的，Thompson群 F 的 amenability 是现代群论中最引人注目的开放问题之一。

证明。 Thompson群 F 不是剩余有限的 [CFP96]。因此，由命题7.4可知，它不可能同时逐点 $\mathcal{G}$稳定且逐点 $\mathcal{G}$可逼近。最后一个结论源于可和群是 sofic、超线性且 MF 的事实。 □

另一方面，我们的结果可以解决汤普森群关于酉群和次乘性范数的一致可逼近性问题：

推论 7.6. 按照惯例，设 $\mathfrak{U}$ 为配备次乘性范数的酉群族。那么，汤普森群 F、F'、T和 V都不是一致 $\mathfrak{U}$-可逼近的。对于 $\Gamma \wr \Lambda$，只要 Λ 是无限可和的，且 Γ 是非阿贝尔的，结论也成立。

我们指出，汤普森群 T 和 V 通常被认为是可逼近性问题中反例的理想候选对象。

证明。 关于 F、T和 V的结论1.2 由定理 和命题 7.4以及它们不是剩余有限群这一事实可得；关于 F' 的结论（它不是有限生成群）则是因为 F' 含有 F [CFP96]的一个副本。灯笼群的情形由定理 1.3和命题 7.4得出，并结合了这类灯笼群不是剩余有限群这一事实 [Gru57]。 □

我们尚不清楚，当 $\mathcal{G}$ 是赋予希尔伯特–施密特范数的酉群族时，汤普森群是否是统一的 $\mathcal{G}$-可近似群；我们猜想情况并非如此。下一节中，我们将通过一种更直接的论证考察对称群的情形。

7.1 通过对称群进行逼近

最后，我们将通过一种无上同调论证证明，本文研究的某些群不能被对称群统一近似，而且这一结论具有很强的意义。在本节余下部分，我们用 $\mathcal{S}$ 表示赋予归一化汉明距离的对称群族。我们的主要结果是该近似族对应于推论 5.2 的一个类似结果（相关定义见第 5.2 节）：

命题 7.7. 设 Γ 是一个作用近端、有界支撑的直线保向同胚群。那么，每个一致渐近同态 $\phi_n : \Gamma' \to S_{k_n} \in \mathcal{S}$ 都一致渐近地接近平凡同态。特别地，Γ' 是一致$\mathcal{S}$-稳定的，且不可一致 $\mathcal{S}$-逼近。

不可逼近性源于以下事实：Γ' 是非平凡的（见引理 7.8）。注意，对于 Γ，如陈述所述，Γ' 是单群 [GG17，定理 1。1], 因此，特别地，每个同态 $\Gamma' \to S_{k_n}$ 都是平凡的。

证明依赖于关于可和群的灵活一致稳定性的已知结果[BC20]以及关于具有近端作用的群的一致完美性的已知结果 [GG17]。群 $\mathcal{S}$ 的有限性将发挥关键作用。我们先给出以下引理：

引理 7.8。设 Γ 如命题 7.7所述。那么 Γ' 非平凡，且 Γ' 在线上的作用没有全局不动点。

证明。若 Γ' 是平凡的，则 Γ 是阿贝尔的。这与该作用是近端且有界支撑相矛盾。事实上，给定 $g \in \Gamma$，由于 g 被中心化，Γ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用必定保持 g的支集，而它是 $\mathbb{R}$的真子集。但这样一来，该作用就不可能是近端的。

现在，Γ' 的全局不动点集合是 $X \subset \mathbb{R}$的闭子集。由于 Γ' 是 Γ的正规子群，Γ 的作用保持 X。但 Γ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用是近端的，特别是每个轨道都是稠密的；又由于 X 是闭的，我们得到 $X = \mathbb{R}$。也就是说，Γ' 在 $\mathbb{R}$上作用平凡。由于 Γ是 $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$的子群，这意味着 Γ' 是平凡的，这与上一段矛盾。 □

我们继续证明：

命题 7.7 的证明。由 [GG17, 定理 1.1]可知，Γ' 是 2-一致完美的；也就是说，Γ' 中的每个元素都可以写成至多 2 个交换子的乘积（这里用到了近端性假设）。因此，只需证明存在常数 C，使得对所有 $g, h \in \Gamma'$，都有 $d_{k_n}(\phi_n([g,h]), \mathrm{id}_{k_n}) \leq C\varepsilon_n$，其中 d_{k_n} 表示 S_{k_n} 上的汉明距离，且 $\varepsilon_n :=\mathrm{def}(\phi_n)$。为清晰起见，我们省略 ϕ 和 ε 上的下标 n。

现在令 g、$h \in \Gamma'$，并令 I、$J \subset \mathbb{R}$ 为有界区间，使得 g 的支集包含于 I，且 h 的支集包含于 J。由引理 7.8 可知，Γ' 的作用没有全局不动点，因此存在 $t \in \Gamma'$，使得 $t \cdot \inf(J) > \sup(I)$。由于 Γ' 是保向的，同样的结论对 t 的所有幂都成立。特别地，对所有 $i \geq 1$，都有 $[g, t^i h t^{-i}] = 1$。接下来，我们将 BC20 定理 1.2] 应用于可和群 $\langle t \rangle$，得到一个整数 N，使得 $k_n \leq N \leq (1 + 1218\varepsilon)k_n$，以及一个置换 τ，属于 S_N，使得对所有 $i \in \mathbb{Z}$，都有 $d_N(\phi(t)^i, \tau^i) \leq 2039\varepsilon$。这里，$d_N$ 表示对称群 S_N 上的归一化汉明距离，而 ϕ 扩展为一个映射

ϕ： $\Gamma' \to S_N$，其中每个 $\phi(g)$ 都固定 $\{k_n+1,\dots,N\}$ 中的每个点。我们计算（利用 $\tau^{N!}=\mathrm{id}_N$）：

$$\begin{aligned} d_{k_n}(\phi([g,h]),\mathrm{id}_{k_n}) &\le d_N(\phi([g,h]),\mathrm{id}_N) \le d_N([\phi(g),\phi(h)],\mathrm{id}_N)+O(\varepsilon)\\ &= d_N([\phi(g),\tau^{N!}\phi(h)\tau^{-N!}],\mathrm{id}_N)+O(\varepsilon)\\ &\le d_N([\phi(g),\phi(t^{N!})\phi(h)\phi(t^{-N!})],\mathrm{id}_N)+O(\varepsilon)\\ &\le d_N(\phi([g,t^{N!}ht^{-N!}]),\mathrm{id}_N)+O(\varepsilon)\\ &= d_N(\phi(1),\mathrm{id}_N)+O(\varepsilon)\le O(\varepsilon). \end{aligned}$$

因此，存在一个与 g 和 h 无关的常数 C （$C=20000$ 已足够），使得 $d_{k_n}(\phi([g,h]),\mathrm{id}_{k_n}) \le C\varepsilon$，由此证明得证。 □

推论 7.9。考虑汤普森群 F'、F、T。

1. 每个渐近同态 $\phi_n: F' \to S_{k_n} \in \mathcal{S}$ 都一致地渐近接近平凡映射。2. 每个渐近同态 $\phi_n: F \to S_{k_n} \in \mathcal{S}$ 都一致地渐近接近一个经由阿贝尔化分解的映射。3. 每个渐近同态 $\phi_n: T \to S_{k_n} \in \mathcal{S}$ 都一致地渐近接近平凡映射。

证明。第 1 项是命题 7.7 的一个应用：事实上，F' 满足关于 Γ 的假设，而 $F''=F'$ 也满足，因为 F' 是单群。对于第 2 项，取一个截面 $\sigma\colon \mathrm{Ab}(F) \to F$，并定义 $\psi_n(g) := \phi_n(\sigma(\mathrm{Ab}(g)))$. 利用 $\psi_n|_{F'}$ 一致地渐近接近平凡映射序列这一事实，可得 ϕ_n 和 ψ_n 一致地渐近接近，并且 ψ_n 经由 $F \to \mathrm{Ab}(F) \xrightarrow{\phi_n\circ\sigma} S_{k_n}$ 分解。最后，第 3 项再次由第 1 项以及这样一个事实得出：T 中的每个元素都可以写成两个分别属于 F' 的同构副本的元素之积（见推论 5.11 的证明）。 □

该推论立即表明 F、F' 和 T 不可一致地 $\mathcal{S}$-逼近，并且 F' 和 T 是一致 $\mathcal{S}$-稳定的。由于 F 具有无限阿贝尔化，由[BC20定理 14] 可知，它不是一致 $\mathcal{S}$-稳定的。然而，该推论结合[BC20定理 12] 表明它是灵活一致 $\mathcal{S}$-稳定的；也就是说，每个一致渐近同态都与一列同态一致接近，这些同态取值于度数稍大的对称群中。Thompson群 V 的情形也可以用类似方法处理（见推论5.12的证明概要）。

参考文献

[AEG94] S. Adams、G. A. Elliott 和 T. Giordano。群的可 amenable 作用。《美国数学会汇刊》，344(2)：803–822，1994。[Alp20] A. Alpeev。非 amenable 群上的灯笼群并非强乌拉姆稳定。arXiv 预印本 arXiv:2009.11738，2020。[And22] K. Andritsch。作用于康托尔集的群的有界上同调。arXiv 预印本 arXiv:2210.00459，2022。

[AP15] G. Arzhantseva 和 L. P˘aunescu。几乎可交换的置换接近于可交换置换。《函数分析杂志》，269(3)：745–757，2015。[BC20] O. Becker 和 M. Chapman。近似群作用的稳定性：一致性与概率性。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），即将出版。arXiv：2005.06652，2020。[BLR18] J. Burillo、Y. Lodha 和 L. Reeves。分段射影同胚群中的交换子。《数学进展》，332：34–56，2018。[BM99] M. Burger 和 N. Monod。高秩李群中格的有界上同调。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），1(2)：199–235，1999。[BM02] M. Burger 和 N. Monod。连续有界上同调及其在刚性理论中的应用。《几何、函数分析》，12(2)：219–280，2002。[BNR21] J. Burillo、B. Nucinkis 和 L. Reeves。无理斜率汤普森群。《数学出版物》，65(2)：809–839，2021。[BOT13] M. Burger、N. Ozawa 和 A. Thom。论乌拉姆稳定性。《以色列数学杂志》，193(1)：109–129，2013。[BS16] R. Bieri 和 R. Strebel。关于实直线上的分段线性同胚群，《数学调查与专著》第215卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016。[Bur11] M. Burger。圆上格作用的延拓判据。载于《几何、刚性与群作用》，《芝加哥数学讲座》，第3–31页。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，2011。[Cal09] D. Calegari。稳定交换子长度，《日本数学会回忆录》第20卷。日本数学会，东京，2009。[Cal10] D. Calegari。拟同态与群恒等律。《代数与几何拓扑》，10(1)：215–217，2010。[CDE13] J. R. Carri´on、M. Dadarlat 和 C. Eckhardt。关于具有拟对角 C^*-代数的群。《函数分析杂志》，265(1)：135–152，2013。[CFP96] J. W. Cannon、W. J. Floyd 和 W. R. Parry。理查德·汤普森群导论。《数学教学》（2），42(3-4)：215–256，1996。[Cle00] S. Cleary。整数群中的正则细分。《伊利诺伊数学杂志》，44(3)：453–464，2000。[$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$]DCGLT[M. De Chiffre、L. Glebsky、A. Lubotzky 和 A. Thom。稳定性、上同调消失与不可逼近群。《数学论坛·西格玛》，8：论文编号 e18，共37页，2020。20] FF[F. Fournier-Facio。群乌拉姆稳定性的超度量类比。arXiv 预印本 arXiv:2105.00516，2021。21] FFL[F. Fournier-Facio 和 Y. Lodha。作用于一维流形的群的二阶有界上同调及其在谱问题中的应用。《数学进展》，428：论文编号109162，2023。23] FFLM[F. Fournier-Facio、C. L21] oh 和 M. Moraschini。有界上同调与双合群。《澳大利亚数学学会杂志》，即将出版。arXiv:2111.04305，2021。¨Fri[R. Frigerio。离散群的有界上同调，《数学调查与专著》第227卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。17] Gam[C. Gamm。11] -表示的群与乌拉姆稳定性。硕士论文，哥廷根乔治-奥古斯特大学，2011。 εGG¨S. R. Gal 和 J. Gismatullin。具有近端作用的群的一致单性。《美国数学会汇刊 B辑》，4：110–130，2017。附录作者：N. Lazarovich。¨Ghy[E. Ghys。作用于圆上的群。《数学教学》（2），47(3-4)：329–407，2001。17] GLMR[L. Glebsky、A. Lubotzky、N. Monod 和 B. Rangarajan。半单群中格的渐近上同调与一致稳定性。arXiv 预印本 arXiv:2301.00476，2023。01] GR[L. Glebsky 和 L. M. Rivera。置换方程的近似解。《台湾数学杂志》，13(2A)：493–500，2009。23] Gro[M. Gromov。体积与有界上同调。《高等科学研究院数学出版物》，(56)：5–99（1983），1982。

[Gro99] M. Gromov. 符号代数簇的自同态。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），1(2):109–197，1999。[Gru57] K. W. Gruenberg. 无限可解群的剩余性质。Proc. London Math. Soc. (3), 7:29–62，1957。[GS87] E. Ghys 和 V. Sergiescu. 关于圆周上一个著名的微分同胚群。Comment. Math. Helv.，62(2):185–239，1987。[HNN49] G. Higman、B. H. Neumann 和 H. Neumann. 群的嵌入定理。J. London Math. Soc.，24:247–254，1949。[Iva85] N. V. Ivanov. 有界上同调理论基础。第143卷，第69–109、177–178页。1985。Studies in topology, V.[Joh72] B. E. Johnson. Banach代数中的上同调。美国数学会回忆录，第127号。美国数学会，普罗维登斯，R.I.，1972。[Kaz82] D. Kazhdan. 关于 ε-表示。Israel J. Math.，43(4):315–323，1982。[LM16] Y. Lodha 和 J. T. Moore. 一个由分段射影同胚构成的非 amenable 有限表示群。Groups Geom. Dyn.，10(1):177–200，2016。[LO20] A. Lubotzky 和 I. Oppenheim. 非 p-范数可逼近群。J. Anal. Math.，141(1):305–321，2020。[Mal40] A. Malcev. 关于无限群的同构矩阵表示。Rec. Math. /Mat. Sbornik/N.S.，8 (50):405–422，1940。[Man05] J. F. Manning. 伪特征标的几何。Geom. Topol.，9:1147–1185，2005。[MN23] N. Monod 和 S. Nariman. 同胚群和微分同胚群的有界与无界上同调。Invent. Math.，232(3):1439–1475，2023。[Mon01] N. Monod. 局部紧群的连续有界上同调，《数学讲义》第1758卷。Springer-Verlag，柏林，2001。[Mon13] N. Monod. 分段射影同胚群。Proc. Natl. Acad. Sci. USA，110(12):4524–4527，2013。[Mon22] N. Monod. 灯笼群与Thompson群的有界上同调。Geom. Funct. Anal.，32(3):662–675，2022。[MP03] N. Monod 和 S. Popa. 关于群与冯·诺依曼代数的余amenability。C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.，25(3):82–87，2003。[MS04] N. Monod 和 Y. Shalom. 负曲率空间的余循环超刚性与有界上同调。J. Differential Geom.，67(3):395–455，2004。[Neu37] B. H. Neumann. 关于无限群的一些评述。J. Lond. Math. Soc.，1(2):120–127，1937。[RŭS] F. R˘adulescu. 非剩余有限 Baumslag 群的冯·诺依曼代数$\langle a,\ b|ab^3a^{-1}=b^2\rangle$ 嵌入 R^ω。载于《算子理论热点》，Theta Ser. Adv. Math. 第9卷，第173–185页。Theta，布加勒斯特，2008。[Ste92] M. Stein. 分段线性同胚群。Trans. Amer. Math. Soc.，332(2):477–514，1992。[Tur38] A. M. Turing. 李群的有限逼近。Ann. of Math. (2)，39(1):105–111，1938。[TWW17] A. Tikuisis、S. White 和 W. Winter. 核 C^*-代数的拟对角性。Ann. of Math. (2)，185(1):229–284，2017。[Ula60] S. M. Ulam. 数学问题集。纯数学与应用数学丛书，第8号。Interscience Publishers，纽约-伦敦，1960。[vN29] J. von Neumann. 新力学中遍历定理与H定理的证明。Z. Phys.，57(1):30–70，1929。

[Wei00] B. Weiss. 索菲群与动力系统。Sankhy ¯a Ser. A，62(3):350–359，2000。遍历理论与调和分析（孟买，1999）。

Department of Mathematics, ETH Zürich, Switzerland电子邮箱地址： francesco.fournier@math.ethz.ch

Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem, Israel电子邮箱地址： bharatrm.rangarajan@mail.huji.ac.il