arXiv:2301.04001v1 [stat.AP] 10 Jan 2023

体育分析中的重要理念及其研究所用的统计工具

预印本

BenjaminS. Baumer
统计与数据科学 史密斯学院
马萨诸塞州北安普顿 01063
bbaumer@smith.edu

Gregory J. Matthews数学与统计学 芝加哥洛约拉大学
伊利诺伊州芝加哥 60660
gmatthews1@luc.edu

Quang Nguyen统计学与数据科学 卡内基梅隆大学 宾夕法尼亚州匹兹堡 15213nmquang@cmu.edu

2023年1月11日

摘要

体育分析——广义而言，是通过分析数据来提升运动表现——在过去30年里，无论是在职业体育产业还是学术界，其影响力都不断扩大。本文将体育运动中普遍存在的四个重要理念联系起来：比赛状态的期望值、获胜概率、衡量球队实力的方法，以及体育博彩市场数据的应用。对于每个理念，我们都会探讨不同体育项目中分析方法的共通之处和各自的特点。尽管本文着重讨论各类分析背后的概念，但任何实际应用都必然涉及统计方法、计算工具和数据来源。在适当之处，我们会说明如何结合数据、模型、工具以及对该项体育运动的了解，来产生可执行的洞见。我们还会介绍分享分析成果的机会，但不深入讨论个别球员评估，因为这超出了本文的范围。本文旨在为任何有兴趣开始研究体育分析的人提供有益的概览。

关键词 体育分析 · R 软件包 · 体育数据 · 成对比较 · 数据集 ts

1 引言

过去几十年来，从数据分析中得出的洞见改变了体育世界。棒球是一项天然离散的体育运动，拥有一个多世纪的职业数据；它或许是与体育分析渊源最久的运动，但如今要找出一项未受体育分析影响的职业体育运动，恐怕并不容易。在篮球领域，分析推动了人们对传统投篮选择观念的转变。大多数球队增加了三分球出手，减少了远距离两分球出手，派出更多全能型防守球员，也不再那么依赖将坏球猛攻至禁区、以求获得高命中率投篮机会的策略（Schuhmann，2021）。在美式橄榄球中，球队选择在第四档继续进攻的频率远高于以往，这直接源于统计分析表明，多数球队过去过于保守（Lopez，2020）。当然，在棒球领域，球队会采用防守布阵调整，以最大限度地提高出局概率；鼓励击球手改善击球仰角；并优化投手球种组合，以尽量减少击球接触（Healey，2017）。

这些只是体育分析从业者利用数据提取洞见、推动战略变革的几个最显而易见的例子。如今，在一些不那么显眼的领域中，也正在产生类似的洞见，包括电子竞技（Clark等人，2020；Maymin，2021）。这些洞见既来自学术界——研究人员通常利用公开数据开展高水平的同行评审科学研究；也来自业界——训练有素的分析师与球员、教练和球队管理人员合作，借助高分辨率且往往为专有数据的新想法立即付诸

实践。越来越多的人能够在这两个领域之间自如转换，从而促成合作关系的形成与思想的交融。

每项体育运动都有所不同，各自拥有一套规则、策略、数据收集方法、球员数量，以及受偶然因素影响程度各异的比赛特点。与此同时，许多体育运动又存在相似之处，这可能是因为其中一项运动由另一项演变而来，也可能是因为这些比赛的结构具有某些共同属性。历史渊源密切的体育运动未必会采用相同的分析方法。例如，尽管棒球和板球同属球棒与球类运动，但它们在击球顺序或牺牲打战术等策略上存在差异。反过来，只需进行少量调整，某些分析指标就可能同样适用于彼此无关且差异显著的体育运动。例如，Elo 等级分既适用于国际象棋棋手，也同样适用于冰球队。

本文探讨四个适用于众多体育运动的核心理念：比赛状态的期望值（第2节）、获胜概率（第3节）、衡量球队实力的方法（第4节），以及体育博彩市场数据的使用（第5节）。在每种情况下，我们都会从数学上定义这一概念，解释其起源，并给出它在多种体育运动中的应用实例。我们的目标是在统一这些概念脉络的同时，充分考虑使某项指标对特定体育运动具有实际意义所必需的定制化调整。文中还引用了大量原创学术研究。

开展体育分析工作需要对数据进行计算。体育数据来源多不胜数，无法一一列举；我们将在第 6 节介绍几种让这类工作得以实现的计算工具（包括一张 R 软件包列表）。第 7 节列出了若干公开传播研究成果的途径。最后，我们将在第 8 节简要讨论本文未探讨的一些观点。值得一提的是，我们没有讨论团队运动中的个人球员等级分，因为 Albert（2015）已在本书中对此作了详尽论述；若将其纳入，本文篇幅将增加一倍。不过，我们会在单人对抗项目（如国际象棋、网球）的语境下，于第 4 节讨论个人球员等级分。

我们鼓励读者阅读 Cochran 等人（2017）和 Albert 等人（2016），其中汇集了体育分析领域的多篇文章，对该领域作了广泛介绍。

2 比赛状态的期望值

在许多体育运动中，进行分析性理解的第一步，是估算比赛在任意给定时点的比赛状态的期望值。用数学语言来说，我们将 X 定义为一个随机变量，表示一支球队在一段确定的时间内（例如比赛剩余时间、某一节、某个比赛时段或某一局）将取得的得分（或得分）数量。令 $s \in S$ 为一个编码比赛状态 的元组。那么我们的任务是估算：

$$\mathbb{E}[X|s] = \sum_{x \geq 0} \Pr[X = x|s] \cdot x \,, \tag{1}$$

对于任意状态 $s \in S$，其中 $\Pr[X = x|s]$ 表示比赛处于状态 s 时得分 x 分的概率，而 S 是所有可能状态的集合。

在可以建模为离散（即离散事件模拟意义上的离散）的体育运动中，状态这一概念更容易理解。所谓离散，是指这种体育运动可以轻松划分为简短、明确的行动片段，而这些片段通常以类别来概括。每个片段都可以代表一种状态 s。例如，棒球中的每次投球都可以是坏球或好球。如果球被击入场内，球员可能会进行一连串复杂的移动，但最终（几秒钟内）这一连串动作会结束，直到下一次投球前都不会再有其他动作。在每个行动阶段的开始和结束时，我们都能明确知道哪支球队正在进攻、哪支球队正在防守，哪些跑垒员在哪些垒上、比分如何、出局数是多少，等等。网球也可以被视为一系列由每分界定的离散动作。说一名球员以 6 比 2、3 比 1、40 比 15 领先，且正在发球并已出现一次发球失误，就是在描述比赛状态。在美式橄榄球中，比赛可以根据每个进攻档数划分为离散的序列。相比之下，长曲棍球、足球或任何形式的冰球等体育运动，通常采用连续计时，球员也持续移动。在这些体育运动中，如何将动作划分为离散片段并不明显。

在本节中，我们将展示比赛状态的期望值这一基本概念如何在各种体育运动中带来引人注目的发现。

表1：George Lindsey 的预期得分矩阵。请注意（沿行横向阅读时），在跑垒员配置相同的情况下，出局数增加，预期得分会减少；而（沿列纵向阅读时），随着跑垒员推进，预期得分通常会增加。000 表示垒上无人，110 表示跑垒员分别位于二垒和三垒。

	Out		
Base	0	1	2
000	0.461	0.243	0.102
001	0.813	0.498	0.219
010	1.194	0.671	0.297
011	1.390	0.980	0.355
100	1.471	0.939	0.403
101	1.940	1.115	0.532
110	1.960	1.560	0.687
111	2.220	1.642	0.823

2.1 离散事件分析

首先，我们探讨在离散事件分析十分常见的体育项目中，根据状态的期望值推导出的结果。我们主要以棒球和美式橄榄球为例，但这种方法也常见于其他体育项目（例如网球；参见 Kovalchik & Reid（2019））。

2.1.1 棒球中的预期得分矩阵

在棒球中， s 通常由两个因素决定：跑垒员在垒上的配置（共有 8 种可能）和出局数（共有 3 种可能）。因此，棒球一局有 $|S| = 24 = 8 \cdot 3$ 种基本状态[1],，我们通常关注从某种状态开始到该局结束时将得到多少分。在这个棒球示例中， $\mathbb{E}[X|s]$ 是指当前一局处于状态 s 时，从现在到该局结束预计可得的分数。所有 24 种状态的估计值集合 $\mathbb{E}[X|s]$ 称为预期得分矩阵 [2]，它是棒球分析的基础。

关于这一主题的早期研究见 Lindsey（1963）：他利用逐球数据，计算出每种可能的 24 种局面下，该局剩余部分平均得分数的经验估计值。这一研究方向促成了对各种常见棒球战术的分析。例如，许多棒球队会选择在一垒有跑垒员且无人出局时尝试牺牲短打，目的是让跑垒员推进到二垒，代价则是击球手出局。图1重现了 Lindsey（1963）的原始计算结果，表1则以最常见的形式展示了预期得分矩阵。

Tango 等（2007）以及此后许多研究得出的结论是，牺牲短打很少值得尝试，因为大多数球队在一垒有跑垒员且无人出局时，预期得分会高于二垒有跑垒员且一人出局时。

值得强调的是， $\mathbb{E}[X|s]$ 中的数值只是估计值，而这些估计值的精确度涉及许多微妙之处。

首先，预期得分矩阵中的数值会随时间变化。例如，基于高得分时代（如 2000 年代初期）的数据估算预期得分矩阵中的数值，其结果会与在低得分时代进行同等分析所得的结果不同。在得分较高、本垒打很多的环境中，四坏保送的价值可能更高，因为被保送的球员更有可能在随后的一次本垒打中得分。相反，在得分较低、安打难以出现的环境中，盗垒和牺牲短打的价值可能相对更高。因此，要谨慎估算 $\mathbb{E}[X|s]$ ，就应纳入时间参数 t，以指明该估算适用于何时。

[1]25, 如果纳入描述一局结束的 3 出局吸收状态，[2] $\mathbb{E}[X|s]$就没有固有的维度。之所以称为 矩阵 ，是因为其中的数值通常以 8×3 网格形式呈现。不过，在使用 $\mathbb{E}[X|s]$进行计算时，通常将其视为 24×1向量更为方便。

TABLE I

DISTRIBUTION OF SCORES IN REMAINDER OF HALF-INNING

Data	B	T	$N(T,B)$	$P(0\|T,B)$	$P(1\|T,B)$	$P(2\|T,B)$	$P(>2\|T,B)$	$E(T,B)$	$\sigma/\sqrt{N}$
59/60	0	0	6561	.747	.136	.068	.049	.461	.012
	0	1	4664	.855	.085	.039	.021	.243	.011
	0	2	3710	.933	.042	.018	.007	.102	.008
59/60	1	0	1728	.604	.166	.127	.103	.813	.031
	1	1	2063	.734	.124	.092	.050	.498	.022
	1	2	2119	.886	.045	.048	.021	.219	.016
59/60	2	0	294	.381	.344	.129	.146	1.194	.083
	2	1	657	.610	.224	.104	.062	.671	.043
	2	2	779	.788	.158	.038	.016	.297	.024
59/60	3	0	67	.12	.64	.11	.13	1.39	.09
	3	1	202	.307	.529	.104	.060	.980	.072
	3	2	327	.738	.208	.030	.024	.355	.040
59/60	12	0	367	.395	.220	.131	.254	1.471	.087
	12	1	700	.571	.163	.119	.147	.939	.051
	12	2	896	.791	.100	.061	.048	.403	.032
59/60	13	0	119	.13	.41	.18	.28	1.94	.15
	13	1	305	.367	.400	.105	.128	1.115	.077
	13	2	419	.717	.167	.045	.071	.532	.054
59/60	23	0	73	.18	.25	.26	.31	1.96	.18
	23	1	176	.27	.24	.28	.21	1.56	.10
	23	2	211	.668	.095	.170	.067	.687	.080
59/60	F	0	92	.18	.26	.21	.35	2.22	.20
	F	1	215	.303	.242	.172	.283	1.642	.105
	F	2	283	.671	.092	.102	.135	.823	.085
			$\sum N = 27027$						
52/60	F	0	173	.17	.27	.17	.39	2.254	.145
	F	1	419	.310	.242	.186	.262	1.632	.080
	F	2	527	.645	.114	.110	.131	.861	.06

图1：Lindsey 原论文中的表1。标记为 $E(T,\ B)$ 的列以向量形式给出了预期得分矩阵，该矩阵基于 Lindsey 对1959年和1960年美国职业棒球大联盟数据的分析。

TABLE I

THE EXPECTED POINT VALUES OF POSSESSION OF THE FOOTBALL WITH FIRST DOWN AND TEN YARDS TO GO FOR VARIOUS TEN-YARD STRIPS

Center of the ten-yard strip (yards from the target goal line): X	Expected point value: $E(X)$
95	−1.245
85	−0.637
75	+0.236
65	0.923
55	1.538
45	2.392
35	3.167
25	3.681
15	4.572
5	6.041

图2：Carter和Machol原始论文中的表1。请注意，随着球队越来越接近达阵区，预期得分价值会单调增加。

其次，将 S 描述为具有24种状态，只是最简单的情况。局数、比赛比分，甚至天气，都可以纳入 S，因为这些条件可能会合理地影响对 $\mathbb{E}[X|s]$的估计。更确切地说，当前击球手、投手或下一位击球手的身份，也可能影响对 $\mathbb{E}[X|s]$的估计。事实上，Tango 等人（2007）表明，当一名击球能力特别弱的击球手（即投手）上场时，牺牲短打会成为更有效的策略。

关于在棒球中使用预期得分矩阵的更全面讨论，请参见Albert & Bennett（2001）；关于如何使用Retrosheet数据和R统计计算语言（R 核心团队，2022）估算预期得分矩阵的示例，请参见Marchi等人（2018）。

2.1.2 美式橄榄球中的预期得分

将比赛状态价值的估算这一概念扩展到其他体育项目并不困难。例如，在美式橄榄球中， s 由进攻档数、距下一次首攻的码数、比赛剩余时间以及场上位置等情境变量决定。

美式橄榄球控球权预期得分的估算可追溯至Carter和Machol（1971）。他们针对NFL中的一档十码进攻，估算了橄榄球场上任意码线对应的预期得分。由于收集到的数据量有限，作者将橄榄球场划分为以中点为中心的十码区间（例如5、15、25、35码等），然后对全场各位置的下一次得分事件价值取平均，以得出预期得分。图2展示了Carter和Machol（1971）的估算结果复现图。不出所料，随着球队越来越接近达阵区，估算的预期得分单调上升。这种方法的一个局限是采用了线性假设，导致进攻方距离对方球门线95码时，预期得分值会非常低且为负。

关于美式橄榄球预期得分价值的早期研究也见于Carroll等（1988）。作者尤其借鉴了Carter和Machol（1971）的类似方法，并提出了一个用于预测NFL预期得分的线性模型。他们发现，平均而言，球队每多推进25码，得分就会增加2分。

Goldner（2012）和Goldner（2017）也尝试对美式橄榄球的预期得分进行建模，并提出了马尔可夫框架。作者尤其将一个橄榄球进攻回合视为由不同吸收状态组成的吸收马尔可夫链，这些吸收状态包括达阵、射门得分以及其他球权结果。吸收状态是马尔可夫链中无法再发生状态转移的环节（即链的终点）。对于任意一次进攻，预期得分是根据不同得分事件的吸收概率计算得出的。

关于体育运动中预期得分历史的更深入概述，见 Yurko 等人（2019）（第 1.1 节）。最重要的是，Yurko 等人（2019）使用 **nflscrapR** 软件包提供的公开数据（Horowitz 等人，2020），在美式橄榄球逐档比赛层面建立预期得分模型。作者提出了一种多项逻辑回归方法，将当前档数、剩余时间、距达阵区码数、尚需推进码数，以及目标线进攻情形和半场剩余时间不足两分钟的指示变量纳入考量。该模型估算每次进攻后可能出现的以下得分结果的概率：进攻队和防守队均可能出现的无得分、安全分、射门得分和达阵，每种结果都有相应的分值。随后，可以通过将各得分事件的分值与相应概率相乘并求和，计算该次进攻的预期得分（见公式 1）。
此外，Pelechrinis 等人（2019）以与先前研究相同的思路构建了预期得分框架，但在方法中考虑了对手实力。他们指出，如果未能恰当地考虑对手实力，那么每支球队每个赛季约有 124.8 分（或约 3.8 场胜利）无法得到正确归属。在一个包含 16 场比赛的赛季中，这是相当大的数目。

2.1.3 美式橄榄球中的第四档策略

预期得分这一概念在美式橄榄球中有许多应用。其中最受关注、研究最深入的主题之一，是对第四档策略的评估。文献中几乎普遍认为，NFL 球队过去在做出第四档决策时过于保守。

Romer（2006）利用预期得分研究 NFL 中的第四档决策，并只关注比赛第一节的案例（以避免半场结束和比赛结束时决策所带来的问题）。他们得出的结论是，如果球队试图最大限度地提高赢得比赛的概率，那么他们选择继续进攻的次数还不够。

另有许多论文（详情请参见 Lopez（2020年））通过分析预期得分来改进第四档策略。除了 Romer（2006年）之外，Yam & Lopez（2019年）的后续研究采用获胜概率（见第 3 节）而非预期得分，并运用因果推断框架，得出了类似结论：NFL球队在第四档选择继续进攻时过于保守。此外，他们估计，更好的策略平均每个赛季可带来约 0.4 场胜利，这一数值相当可观，与上文 Pelechrinis 等人（2019年）报告的效应量相近。

Lopez（2020年）介绍了NFL追踪数据，并以四档进攻行为为例，探讨随着追踪数据的粒度提高，相比传统NFL数据，哪些问题能够得到更深入的研究。过去，研究NFL教练是否正确决策、是否应在四档选择“继续进攻”或弃踢时，通常会查看档数与距离数据；其中的距离数据只是对实际“还需推进的距离”的取整近似值（也就是说，1码、1英尺和1英寸都会被记录为四档还需推进1码。事实上，还需推进不足2码的情况都会被记为四档还需推进1码（Lopez，2022年））。然而，比赛中场上的教练显然能够看出1英寸与1码的差别，这些信息也会影响他们的决策。借助追踪数据，可以更准确地评估还需推进的距离，因此，评估四档进攻教练决策时，如今可以纳入教练在场上能够获取、但传统NFL数据未予记录的这类“额外”信息。过去许多关于四档是否继续进攻的分析都得出结论：NFL教练在决策时过于保守。Lopez（2020年）也认为教练在四档决策上过于保守，但进一步指出，由于过去记录还需推进码数时仅采用近似值，对教练在四档进攻时保守程度的既往估计可能偏高。

2.1.4 预期得分在美式橄榄球中的其他应用

研究人员还将预期得分的概念应用于研究美式橄榄球比赛的其他方面，包括四分卫表现和教练决策。

在四分卫评估方面，White & Berry（2002）提出了一种分层逻辑回归方法，通常可应用于任何具有多分类响应的回归情境。利用这一方法，他们估算了

国家橄榄球联盟比赛回合的价值，并使用一个以进攻档数、尚需推进码数和距达阵区码数为预测变量的简单预期得分模型。因此，他们利用模型结果为NFL传球手评定等级分并进行排名。
Alamar（2010）采用预期得分框架来研究NFL中的战术呼叫。不过，他们并非单独评估每次战术，而是结合进攻回合的背景来评估。根据2005年至2008年的逐球数据，他们发现，球队在某些情况下没有充分利用传球战术。

Urschel 和 Zhuang（2011）展示了预期得分的另一种应用：评估橄榄球教练做出的开球决策。具体而言，他们研究了出其不意的越位开球与常规开球之间的选择，以及接受触回还是回攻开球的决策。根据2009年NFL赛季的数据，他们得出的结论与许多人的看法一致：NFL教练往往会做出保守决策。

2.2 连续事件分析

即使在状态概念较难界定的体育运动中，也可以借助追踪数据来估算控球权的价值。在过去十年左右，职业体育联盟一直在收集追踪数据，记录比赛中所有球员以及坏球（或冰球）的位置。这些高分辨率数据使研究人员能够对采集到的时空信息进行深入分析，从而更好地理解比赛。与传统的比赛统计结果和逐球数据等较早的数据资源相比，这是一次巨大的进步。

2.2.1 篮球中的预期得分值

在篮球领域，Cervone 等人（2014）和 Cervone 等人（2016）提出了预期控球价值（EPV），用于评估球员的场上表现。该指标通过球员和坏球的位置，连续估计进攻方在某次控球权中预期获得的得分。EPV 会考虑持球球员在特定情况下所有可能的选择（投篮尝试、传球等），并为每种选择赋予不同的权重。EPV 统计值通过一个以空间位置为条件的马尔可夫模型计算得出（严格来说，该模型是离散的）。因此，作者提出了一项名为增加的预期控球价值（EPVA）的指标，用于衡量在特定情况下，球员对 EPV 的贡献相对于联盟平均水平球员的差异。

Cervone 等人（2016）介绍的 EPV 模型演示可通过 `https://github.com/dcervone/EPVDemo` 查看。图3 展示了追踪数据如何反映一次进攻过程中 EPV 的变化。图中截取了 2013年11月1日 NBA 常规赛中迈阿密热火队与布鲁克林篮网队比赛的一次控球权。此次控球权中，迈阿密热火队是进攻方，最终由马里奥·钱莫斯在 26 英尺处三分球投失。该图由两部分组成：1）（下方）此次控球权某一时刻球员在球场上的位置，即钱莫斯刚刚出手传球的时刻；2）（上方）折线图，显示 EPV 在整个进攻过程中如何持续变化，直至三分球出手。对于这次控球权，迈阿密热火队的预期 EPV 在投篮出手时达到峰值，为 1.276 分。

请注意，迈阿密队在这次进攻开始时的预期得分值约为 1.0 分，这表示其平均每次控球权的隐含得分。钱莫斯的投篮值 3 分，因此，预期得分值为 1.276 分意味着模型估计钱莫斯投进这球的概率为 42.5%。这项研究的一项突破是，该估计以篮球场上其他 9 名球员的位置为条件。

Sicilia 等人（2019）提出了另一种估算篮球预期得分的框架。作者从不同角度看待预期得分：他们首先使用一个分类模型，估计球员是否会犯规（投篮犯规或非投篮犯规）、失误或尝试投篮的概率。随后，他们利用与每种“终结动作”相关的数值，计算一次篮球进攻中的预期得分。

另请参阅 Bornn 等人（2017），了解近年来追踪数据如何推动篮球高级统计分析的发展。最大化篮球预期得分的策略直接促使 NBA 三分球投篮日益普及。

2.2.2 美式橄榄球中的推进码数

在第 2.1.2 节中，我们讨论了基于离散比赛状态的美式橄榄球分析进展，这些状态由进攻档数、距首攻线码数、场上位置等因素定义。球员追踪数据的出现使我们能够利用连续状态分析美式橄榄球。例如，Yurko 等人（2020）使用 2019 年 NFL 大数据碗提供的追踪数据（见第 7 节），对持球球员在一次进攻

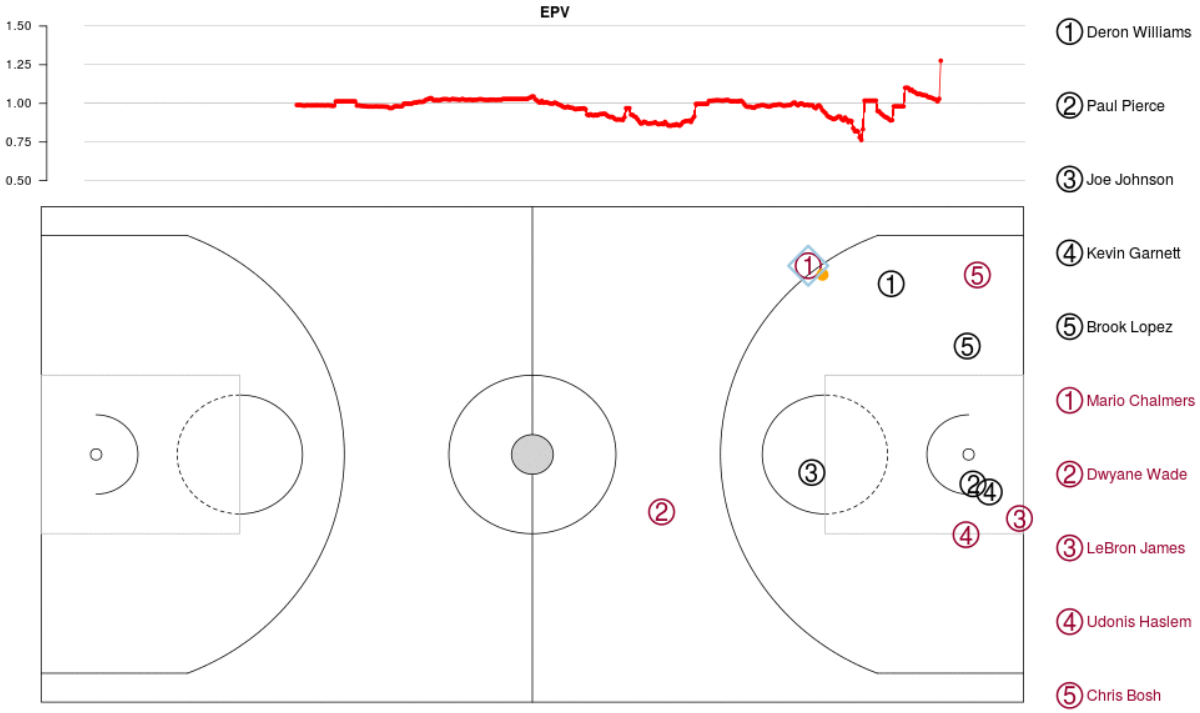


图3：2013年11月1日，迈阿密热火队（红色）对阵布鲁克林篮网队（黑色）的 NBA 比赛中，某次控球期间球员的位置及估算的 EPV。画面捕捉到迈阿密热火队的马里奥·钱莫斯刚刚出手三分球，最终投篮未中。图由 Cervone 等人制作。`https://github.com/dcervone/EPVDemo`

过程中的预期推进码数进行建模。作为对既有方法的扩展，作者使用条件密度估计，得出进攻过程中推进码数的概率分布，而非仅仅给出预期推进码数的单一估计值。因此，可以根据进攻结束时码线的分布，计算达阵或首攻推进等不同结果发生的概率。

预期得分价值也是 Reyers 和 Swartz（2021）提出的一种新型 NFL 四分卫评估指标的主要组成部分。作者利用球员追踪数据，考量四分卫在橄榄球场上可选择的不同传球和跑动方式。通过堆叠集成学习方法，估算四分卫各种可能选择对应的预期得分和概率。

2.2.3 其他体育项目

预期控球价值的概念也已扩展至协会足球（足球）。Fernandez 等人（2021）采用深度学习方法，研究足球控球的瞬时期望值。该方法将足球中的传球、带球推进和射门视为计算 EPV 指标所用的主要动作。基于这一框架可以开展许多应用，包括预测球场上的哪位足球运动员最有可能接到当前持球队员的下一次传球。

Macdonald（2012）使用预期进球来评估冰球球员，但无法获取评估控球权所需的球员追踪数据。Kumagai 等人（2021）通过贝叶斯时空框架提出了一种冰球 EPV指标。

2.3 不以最大化预期得分为目标的最优策略

在第2节中，我们根据比赛的状态 s，将控球权的预期价值定义为某一时段剩余时间内预计得到的得分（得分）数量 X。随后，我们说明了如何利用这一价值分析某些策略的相对有效性，其依据是一个简单的想法：

带来更高期望值的策略更可取。通常，任何体育运动的目标都是比对方球队得到更多分，这往往意味着尽可能多得分，因此通常采取最大化预期得分的策略。不过，在某些情况下，最大化预期得分数量并非理想策略。

例如，在一场比分打平的棒球比赛第九局下半，赢得比赛的最优策略是最大限度地提高至少取得一分的概率，这可能与最大化预期得分的策略不同。设 U 为所有策略的集合，那么我们可以断言，最大化预期得分的策略 $u \in U$ 并不总能最大化获胜概率：

$$\arg\max_{u \in U} \Pr[X > 0 | s, u] \neq \arg\max_{u \in U} \mathbb{E}[X | s, u] \,.$$

设想这样一种局面：一垒和三垒上都有跑垒员，第九局下半，双方比分打平，且无人出局。表1中的信息显示，本局剩余时间预计可得1.94分，而一分未得的概率为0.13。防守方面临严峻局面，输掉比赛的概率高达87%。然而，如果他们故意四坏保送击球手，使垒上满员，就有机会在本垒迫使领先跑垒员出局，从而将对手得分的概率降至82%，尽管预计得分会增加到2.22分。在这种情况下，防守方明智的做法是采取最大化预期得分的策略，因为这降低了对手至少得一分的概率。

在任何骤死赛制中，最大化得分概率都是最优策略；美式橄榄球曾采用加时赛骤死制（Martin等人，2018），但目前已不再如此。

当球队同时调整进攻和防守策略时，情况会变得更加有趣。例如，在冰球比赛中，球队在最后一节落后时，往往会撤下守门员。这一策略会大幅削弱防守，但能增强进攻。球队希望快速进球，扳回比分，但也有可能进一步落后。Beaudoin和Swartz（2010）指出，国家冰球联盟的教练并不总是采用最优策略，通常是因为他们撤下守门员的时机太晚。Skinner（2011）提出了一个关于这些孤注一掷策略的通用框架，其中包括美式橄榄球中的合法接球踢球、棒球中让内野和／或外野球员前移，当然也包括篮球中著名的砍鲨战术。

3 获胜概率

与预期得分相关但有所不同的概念是获胜概率。获胜概率只是根据球队当前的状态 s，估算该球队赢得比赛的概率。扩展我们在第2节中定义的数学框架，令 W_i 为一个表示球队 i获胜的二元随机变量。那么，

$$\Pr[W_i | s] \,,$$

是球队 i 在状态 s下的获胜概率。

这一获胜概率与状态的期望值密切相关。Albert（2015）将获胜概率定义为：

$$\Pr[W_i | s] = \sum_{X \geq 0} \Pr[X | s] \cdot \Pr[W_i | X, s] \,,$$

其中，$\Pr[W_i | X, s]$ 表示球队 i 处于状态s且取得 X 分时赢得比赛的概率。

正如 Albert（2015）所述，获胜概率很容易扩展为衡量体育比赛行动和球员个人贡献影响的一种指标。由于获胜概率广受欢迎，近期关于体育分析的书籍往往会专门用数章篇幅讨论这一主题，包括 Albert & Bennett（2001）、Schwarz（2004）、Tango 等（2007）、Albert 等人（2016）以及 Winston 等人（2022）。

本节将讨论棒球、美式橄榄球、篮球及其他几种体育项目中有关获胜概率的重要早期研究。

3.1 棒球

棒球中的获胜概率这一概念，至少可以追溯到 Lindsey（1961）。Lindsey 根据每局得分的分布，计算每局结束后的预期获胜概率。受

Lindsey（1961）的研究启发，Mills & Mills（1970）利用获胜概率提出了球员获胜平均值（PWA），用来衡量球员对比赛结果的贡献。具体而言，PWA 的计算方式为

$$PWA = \frac{Win\ Points}{Win\ Points + Loss\ Points},$$

其中，胜分和负分表示球员在每次进攻后对所在球队获胜概率产生的正面和负面影响。实际上，胜分就是从一种状态转变到下一种状态时 $\Pr[W_i|s]$ 变化量的总和。

此外，Tango等（2007）提出了一个用于估算棒球获胜概率的数学模型。作者利用马尔可夫链考察棒球比赛进程中的获胜预期。该方法会考虑比赛的不同状态，例如垒上情况、局、出局数和比分，并据此输出获胜概率。

关于获胜概率在棒球中的应用的更详细历史综述，请参见 Albert（2015）。

3.2 美式橄榄球

近年来，人们运用多种统计方法，在美式橄榄球中构建校准良好的获胜概率模型。这些灵活的算法具有较强的预测能力，能够考虑解释变量之间的非线性交互作用，只需较少的假设，并能生成特征重要性得分。

Lock & Nettleton（2014）采用随机森林框架，在美式橄榄球比赛的每次进攻前估算获胜概率。这种基于树的方法纳入的协变量包括当前档数、分差、剩余时间、调整后比分、让分、每支球队剩余的暂停次数、总得分、当前码线，以及首攻尚需推进的码数。根据该模型，在 NFL 比赛的任意时刻，两队之间的比分差是预测获胜概率时最重要的特征。

此外，Yurko 等人（2019）使用广义加性模型（GAM）估算 NFL 比赛中的获胜概率，该模型是 **nflscrapR** 软件包（Horowitz 等人，2020）和 nflWAR 框架的一部分。该模型将根据第2节所述模型估算的预期得分，以及时间、当前半场和暂停等其他预测变量纳入考量。Lock & Nettleton（2014）和 Yurko 等人（2019）提出的两种获胜概率框架，也由 Yam & Lopez（2019）在仅作少量修改后加以实现。具体而言，作者结合了这两种方法来估算每次进攻的获胜概率，最终目的是评估美式橄榄球中的第四档决策。

Yurko 等人（2019）的获胜概率模型有一项重要亮点：该模型完全可复现，并使用公开可获取的数据。Yurko 等人（2019）的目标之一也是鼓励研究人员“使用、探索并改进我们的工作”，这最终促成了 **nflfastR** （Carl & Baldwin（2022））的诞生；如今，它被视为**nflscrapR**的继任者。

图4展示了2018年1月14日举行的2018年NFL季后赛分区轮新奥尔良圣徒队对阵明尼苏达维京人队的获胜概率图。我们使用**nflfastR** R程序包，获取每支球队的获胜概率估计值。该程序包通过**xgboost** 库（Chen等（2022））实现梯度提升模型，以估算获胜概率。比赛前三节，明尼苏达维京人队一直领先，在第一、第二和第三节结束时的获胜概率分别为0.869、0.941和0.742。第四节后段，双方的获胜概率逐渐接近，此时圣徒队在比赛还剩3分01秒时取得领先。这场比赛的最后一档进攻——著名的“明尼阿波利斯奇迹”——使双方的获胜概率发生了巨大变化。比赛还剩10秒时，维京人队开始最后一次进攻，获胜概率为25.3%。随着比赛计时结束，斯蒂芬·迪格斯接球完成61码制胜达阵，球队的获胜概率随之升至1。

3.3 篮球

Stern（1994）使用布朗运动模型，研究了篮球比赛中的比赛内获胜概率和得分过程。设 $p(l,t)$ 表示比赛进行 t 秒后，主队领先 l 分时的获胜概率。Stern（1994）提出的模型是一个概率单位回归模型，该模型

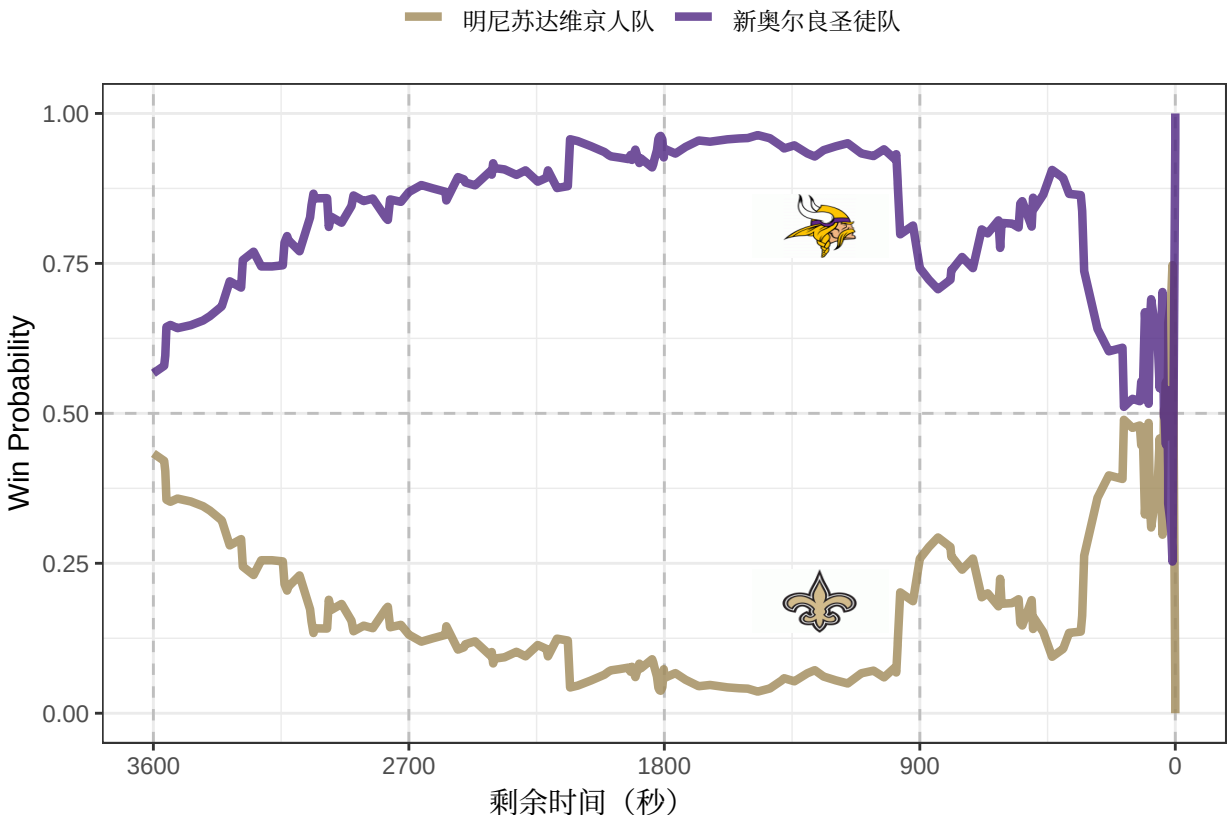


图4：胜率图　　展示2017–18赛季NFL季后赛新奥尔良圣徒队对阵明尼苏达维京人队　　s.

用于估计 $p(l,t)$。具体而言，

$$p(l,t) = \Phi\left(\frac{l + (1-t)\mu}{\sqrt{(1-t)\sigma^2}}\right).$$

这里使用带漂移的布朗运动过程对主队和客队之间的比分差进行建模，其中漂移为主队领先 μ 分，方差为 σ^2 。

相关地，Deshpande & Jensen（2016）将 Stern（1994）的框架应用于贝叶斯框架，对其进行了扩展。Deshpande & Jensen（2016）提出了一种贝叶斯线性回归模型，用于评估在篮球比赛的任意时刻，个别球员对其球队获胜机会的影响。该模型假设观测值相互独立，且获胜概率的变异性恒定。

此外，McFarlane（2019）使用逻辑回归估算获胜概率，以评估 NBA 比赛结束阶段的决策。该方法考虑了比赛剩余时间、比分差和让分。随后，该获胜概率模型被用于计算比赛结束阶段战术指标（ETM），以衡量在最优决策与场上实际决策下，篮球比赛的获胜机会有何差异。

3.4 其他体育项目

获胜概率的理念也应用于其他体育项目，人们采用多种统计方法来估算球员或球队获胜的概率。Brenzel等人（2019）使用三维马尔可夫模型，估算冰壶比赛中的获胜概率。具体而言，作者提出了齐次和非齐次马尔可夫模型，用于估算冰壶比赛中的获胜概率，并对表现与比赛当前状态之间的关系作出了不同的独立性假设。在电子竞技领域，Maymin（2021）采用逻辑回归，为《英雄联盟》比赛中的每个特定时刻构建经过良好校准的比赛中的获胜概率模型。此外，Guan等人（2022）运用函数型数据分析，为国家橄榄球联盟开发了比赛中的获胜概率模型。在这一

方法中，橄榄球逐回合事件数据被视为函数，获胜概率则表示为比赛时间的函数。

4 球队实力

体育分析中的第三个关键理念是估算球队实力。首先，我们简要介绍一种根据胜负记录估算球队实力的简单方法。接下来，我们详细介绍另外三种更复杂的方法，通过两两比较来估算体育运动中的球队实力。本节中的方法同样适用于多人团队和单人团队。

所有球队实力估算方法的出发点，都是认识到胜负记录是衡量球队实力时带有噪声的指标。胜负属于二元结果，而且所有体育运动（也许国际象棋除外）都包含一定的偶然性因素，因此胜负能反映部分球队实力信息，但我们还能做得更好。

4.1 预期胜率

一种在体育分析中已广受欢迎的估算球队实力的简单方法是预期胜率，通常称为毕达哥拉斯期望，由James（2003）提出。后来，Miller（2007）推导出该公式，并指出它可由以下假设得出：棒球中的得分由两个相互独立的威布尔过程产生。

预期胜率就是：

$$\widehat{wpct} = \frac{X^\alpha}{X^\alpha + Y^\alpha}\,,$$

其中， X 是球队在指定时间段内得到的得分（得分）， Y 是球队在该时间段内失去的得分（得分）。James最初是在棒球领域开展这项研究的，他提出了 $\alpha = 2$的取值。该公式与计算直角三角形斜边长度的公式相似，因而向毕达哥拉斯致意。

此后，分析师尝试为不同的时间段找出 α 的最佳取值。观察到以下关系后，只需几行代码即可完成计算：

$$\frac{X^\alpha}{X^\alpha + Y^\alpha} = \frac{1}{1 + (Y/X)^\alpha}$$

然后拟合一个非线性模型（类似讨论见Baumer等（2021））。图5展示了自1954年以来美国职业棒球大联盟中的拟合效果，其中 α 的最佳取值为1.84。

许多作者都曾为其他体育项目拟合预期胜率模型，数量太多，无法一一列举。例如，Hamilton（2011）研究了足球（足球），Caro等（2013）研究了一级大学橄榄球；值得一提的是，未来的NBA总经理Daryl Morey也曾研究篮球（Dewan & Zminda，1993）。

4.2 Bradley-Terry模型

在预测成对比较结果的概率模型中，应用最广泛的或许是Bradley-Terry模型（BTM）（Bradley和Terry，1952年）。对于一对球员（或球队） i 和 j，设 Π_{ij} 表示 i 胜过 j的概率。那么，BTM是一个参数为 β_i， β_j 的逻辑回归模型，使得

$$\log\left(\frac{\Pi_{ij}}{\Pi_{ji}}\right) = \beta_i - \beta_j\,.$$

这里，exp（β_i）通常被视为球队 i实力的表示。

可以通过**BradleyTerry2** 软件包在R中实现BTM（Turner和Firth，2020年）。例如，我们考虑Agresti（2018年，第247页）中给出的2014年至2018年五名男子职业选手的网球比赛结果数据：Novak Djokovic、Roger Federer、Andy Murray、Rafael Nadal和Stan Wawrinka。我们拟合一个BTM，以估计每对球员的获胜概率，并为这五名球员排名。

表2展示了拟合的BTM的估计系数。根据球员的能力，2014年至2018年间的排名如下：1）德约科维奇，2）费德勒，3）瓦林卡，4）纳达尔，5）穆雷。除了给出排名之外，表2中系数的大小还能衡量相对实力。

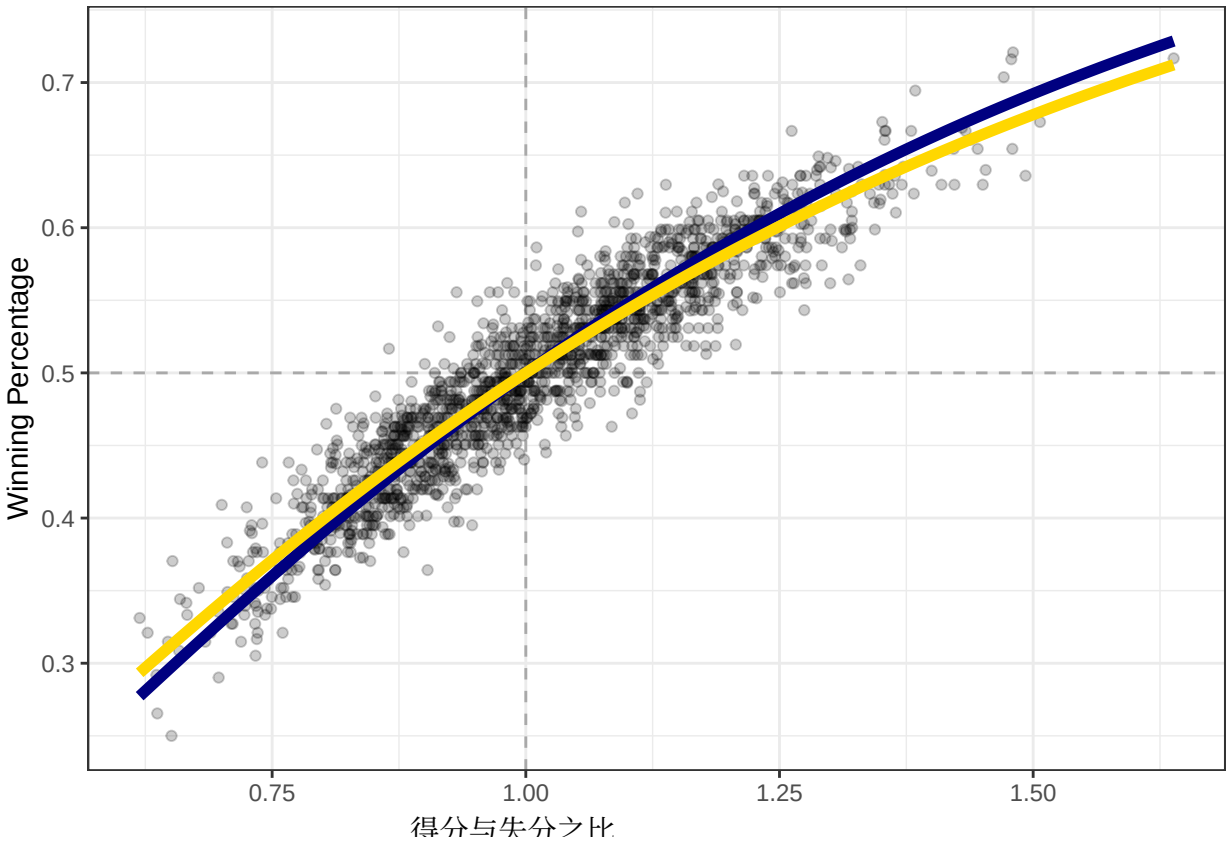


图5：1954–2021年棒球的胜率与得分及失分的关系。深蓝色线表示James提出的预期胜率模型，其指数值为2。金色线表示采用最优指数1.84的同一模型。

表2：根据拟合的Bradley-Terry模型得出的各网球球员相对于瓦林卡的估计能力（含标准误）。

球员	能力	SE
德约科维奇	1.176	0.500
费德勒	1.136	0.511
瓦林卡	0.000	0.000
纳达尔	-0.062	0.515
穆雷	-0.569	0.568

例如，要计算费德勒与纳达尔对决的获胜概率，可以估算费德勒获胜的概率：

$$\hat{\Pi}_{24} = \frac{\exp(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_4)}{1 + \exp(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_4)} = \frac{\exp(1.136 + 0.062)}{1 + \exp(1.136 + 0.062)} = 0.768\,.$$

4.3 Elo 等级分

另一种广为人知的衡量球队实力的工具是 Elo 等级分系统（Elo，1978），它最初是为国际象棋开发的。假设两名球员 i 和 j 的等级分分别为未知数 R_i 和 R_j，那么Π_{ij} i 战胜 j 的概率定义为

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{1 + K^{(R_j - R_i)/400}}\,.$$

在这个公式中， K 通常称为 K因子，或发展系数。国际棋联（FIDE）对曾达到至少 2400 等级分的球员使用 $K = 10$ 。最后，$K = 40$ 适用于参赛场次少于 30 场的新球员，以及等级分低于 2300 且年龄未满 18 岁的球员（FIDE，2022）。

Π_{ij} 的另一种解释是玩家 i 在这场比赛中的预期得分。0、0.5 和 1 这三个比分分别对应三种可能的比赛结果：负、和、胜。比赛结束后，玩家 i 更新后的 Elo 等级分 R_i^* 为

$$R_i^* = R_i + K(S_i - \Pi_{ij}) ,$$

其中 $S_i \in \{0,0.5,1\}$。锦标赛结束后，根据每位玩家在所有已进行比赛中的等级分更新，计算出其赛后等级分。

举例来说，我们考察作者之一于 2022年6月1日 在 Chess.com 上进行的一场国际象棋比赛，数据取自 **chessR** 软件包（Zivkovic，2022）（见第 6.1 节）。比赛前，该作者的等级分为 1732，而对手的等级分为 1683。由于双方等级分均低于 2400，我们在此例中采用发展系数 $K = 20$ 。作者（a）击败对手（b）的概率为

$$\Pi_{ab} = \frac{1}{1 + 20^{(1683-1732)/400}} = 0.591 .$$

作者赢得了比赛：这一结果对应的比分为 $S_a = 1$。因此，作者赛后的 Elo 等级分为

$$R_a^* = 1732 + 20(1 - 0.591) = 1740 .$$

除了国际象棋，Elo 系统也已应用于其他体育项目，用于估算球队实力。关于 Elo 等级分在足球中的应用，详见 Koning（2017）；关于网球中的 Elo 等级分，详见 Kovalchik & Reid（2019）和 Kovalchik（2016）。此外，FiveThirtyEight.com 的数据记者还广泛使用 Elo 等级分为众多体育项目中的球队排名。

4.4 贝叶斯状态空间模型

Glickman & Stern（1998）提出了一种用于成对比较的贝叶斯状态空间模型，以预测 NFL 比赛，并允许球队实力参数随时间变化。具体而言，他们通过引入每周和每赛季这两个球队实力变化的主要来源，对 NFL 的分差进行建模。关于美式橄榄球队实力估算的更多讨论，另见 Glickman & Stern（2017）。

最近，Lopez 等人（2018）扩展了 Glickman & Stern（1998）的状态空间模型，以了解美国四大体育联盟中的随机性。他们使用博彩胜负赔率代替分差来估算球队实力，该框架也考虑了主场优势。这两篇论文通过证明基于模型的球队实力指标优于分辨率较低的胜负记录，说明了这类指标的实用性。除了体育博彩之外，准确估算球队实力也有助于球队管理人员；他们需要持续监测并预测球队的能力。

在类似的贝叶斯框架下，Koopman & Lit（2015）通过假设球队实力随时间变化且服从二元泊松分布，研究英格兰足球超级联赛的足球比赛结果。这种状态空间方法似乎优于博彩公司赔率。

5 体育博彩市场数据

体育分析领域的大多数研究都以分析体育赛事结果数据为基础。不过，越来越多的研究也借助体育博彩市场的数据。自2018年美国最高法院就*Murphy*诉全国大学体育协会案作出裁决以来，美国的体育博彩活动急剧增长。人们对体育博彩的兴趣日益浓厚，也带动了对体育博彩数据的关注，而这些数据已至少在两个重要方面证明了对研究人员的价值。

首先，博彩市场数据可能是估算一支球队赢得一场比赛的真实概率的最佳来源。博彩市场数据在这方面的效率已一次又一次得到证明。这些估算的实用价值，进而为相关研究提供了依据，帮助我们深入了解体育运动本身。从这个意义上说，体育博彩产生的数据一直是体育分析的重要数据来源（见第5.2节）。

表3：2023年NBA总冠军赔率，排名前6和后6的球队。数据于2023年1月9日取自 FanDuel 体育博彩。

Rank	Team	Line	Odds	概率	归一化概率
1	波士顿凯尔特人	390	4.9	0.204	0.163
2	密尔沃基雄鹿队	500	6.0	0.167	0.133
3	布鲁克林篮网队	800	9.0	0.111	0.089
4	金州勇士队	900	10.0	0.100	0.080
5	洛杉矶快船队	1000	11.0	0.091	0.073
6	丹佛掘金	1100	12.0	0.083	0.067
25	俄克拉荷马城雷霆	50000	501.0	0.002	0.002
26	奥兰多魔术	50000	501.0	0.002	0.002
27	夏洛特黄蜂	50000	501.0	0.002	0.002
28	休斯敦火箭	50000	501.0	0.002	0.002
29	圣安东尼奥马刺	50000	501.0	0.002	0.002
30	底特律活塞	50000	501.0	0.002	0.002
总计	-	496590	4995.9	1.253	1.000

其次，体育分析研究人员研究了各种类型的体育博彩平台（包括梦幻体育）。这些研究估算了概率、评估了常见策略，并为各种不同的机会游戏提供了优化方案（见第5.3节）。随后，一些研究人员尝试证明某些投注策略能够带来正收益，但成效非常有限。

5.1 示例：根据博彩市场数据计算获胜概率

要了解如何使用博彩市场数据估算球队实力，可以参考表3所示的FanDuel 体育博彩于2023年1月9日发布的2023年NBA冠军赔率。这属于期货市场，因为要到2023年6月才会确定NBA冠军归属。波士顿凯尔特人是最被看好的夺冠球队，独赢赔率为 $+390$，这意味着如果凯尔特人最终夺冠，那么在凯尔特人队身上押注100美元，投注者不仅能收回本金，还能额外获得390美元。这种赔率形式有时称为美式赔率。相应的分数赔率显示，凯尔特人夺冠的赔率为4.9:1。相反，有六支球队的赔率并列最低，为 $+50000$。

The这些独赢赔率（ℓ_i）可以使用以下公式换算为隐含概率（p_i） a:

$$p_i = \frac{100}{100 + \ell_i}.$$

这些概率之和大于1——这就是无论哪支球队夺冠，体育博彩公司都能盈利的原因。不过，将隐含概率除以它们的总和，就可以对其进行归一化，从而得出各支球队夺冠的真实概率。许多不同的研究人员已经表明，这些归一化后的隐含概率能够准确、无偏且有效地估算无法确知的真实概率（相关讨论及大量参考文献见 Lopez 等人（2018））。

在这个例子中，FanDuel 期货市场显示，凯尔特人队赢得冠军的概率为 16.3%，而密尔沃基雄鹿队的夺冠概率排名第二，为 13.3%。这些隐含概率可用于拟合各种球队实力模型，具体如第4节所述。

5.2 博彩市场数据在体育分析中的应用

Lopez 等人（2018）利用博彩市场数据对球队实力建模，但没有直接探讨博彩策略或博彩市场中的低效现象。Gandar 等人（1988）的早期研究考察了 NFL 博彩市场的理性，并得出结论：统计检验未能拒绝理性假设。Lacey（1990）和 Boulier 等人（2006）等相关研究分别探讨了 20 世纪 80 年代中期和 90 年代末 NFL 博彩市场的效率。两篇论文都未发现市场存在低效现象的有力证据。Boulier 和 Stekler（2003）比较了实力排名、媒体专家和博彩市场对 NFL 比赛结果的预测表现，发现博彩市场最擅长预测获胜者。Lopez 和 Matthews（2015）表明，博彩市场数据在预测男子大学篮球锦标赛结果方面最有用。

体育博彩市场数据也被用于研究联赛中的竞争行为。Soebbing 和 Humphreys（2013）发现，有证据表明体育博彩者认为NBA 中存在摆烂现象，不过对于摆烂是否确实发生，现有证据仍不明确。

5.3 体育博彩分析

体育运动中可以进行许多不同类型的投注。针对单场比赛，投注方式包括让分盘口、独赢赔率（示例见第 5.1 节）、赔率，或其他用于判断哪支球队会获胜的让分方式。人们也可以对未来赛事投注下注，即提前押注可能发生、也可能不会发生的事件（例如，某支球队进入季后赛，或某位球员获得最有价值球员奖）。本文将重点讨论博彩竞猜池：一群人通过预测多场比赛（通常是锦标赛）的获胜者来相互竞争。我们还将探讨一个不可避免的问题：是否存在能够持续战胜市场的策略。

5.3.1 博彩竞猜池

一种广受欢迎的博彩竞猜池是生存者竞猜池，参与者只要能持续正确选出获胜者，就能留在比赛中。Bergman 和 Imbrogno（2017）提出了针对 NFL 幸存者竞猜池的形式化优化方法，并得出结论：只规划赛季的一部分，就能在最大化存活概率方面取得最优结果。Imbrogno 和 Bergman（2022）估算了 NFL 幸存者竞猜池中需要共享奖池的概率。

或许，研究最多的体育博彩市场就是围绕美国大学体育协会男子大学篮球锦标赛形成的市场。Breiter 和 Carlin（1997）使用蒙特卡罗方法研究标准的“办公室竞猜池”。Kaplan 和 Garstka（2001）考察了各种美国大学体育协会大学篮球竞猜池，发现选择种子排名较高的球队这一简单策略通常是最优的，但并非总是如此。Metrick（1996）发现，投注者过度押注于赔率最低的热门选手。Niemi 等人（2008）表明，先选出一支被低估的冠军人选，再根据公布的赔率填写锦标赛对阵表的其余部分，可以提高投资回报率。Clair 和 Letscher（2007）提出并检验了在生存者竞猜池和锦标赛形式的竞猜池中实现预期回报最大化的策略。

5.3.2 战胜市场

研究体育博彩市场的效率后，研究人员自然会尝试寻找可供利用以获取经济收益的低效现象。不出所料（考虑到这些市场的效率），这样的收益很难获得。

Sauer（1998）发现，虽然赛马场博彩市场总体上是有效的，但信息不对称会导致市场效率低下。Nichols（2014）得出结论，旅行的影响并未完全反映在博彩市场中，但其影响太小，不足以带来任何有利可图的优势。Paul 和 Weinbach（2014）研究了竞争较不激烈的 WNBA 博彩市场，但未能找到能实现正投资回报率的策略。Spann 和 Skiera（2009）表明，鉴于投注所涉及的高额费用，在德国顶级足球联赛中没有战胜市场的办法。

Buttrey（2016）取得了更好的成果：他研究了国家冰球联盟博彩市场，建立了一个模型，用于预测特定比赛的获胜概率；随后，他在预测概率与市场概率不同的比赛中，按照市场赔率投注，以此检验该模型。他们发现，这些方法能够带来正投资回报率。

6 工具

体育分析工作要求熟练运用不断变化的计算工具来处理数据。有关体育运动的权威数据来源众多，不胜枚举。用于体育分析的软件工具也同样种类繁多。对于 R，我们维护着体育分析 CRAN 任务视图，收录并按体育项目分类综合 R 档案网络（CRAN）上发布的 R 软件包（Baumer 等，2022）。表 4 概述了目前可用的、针对特定体育项目的 CRAN 软件包。近期，Casals 等人（2022）对 CRAN 上与体育相关的软件包进行了系统综述。此外，SportsDataverse 计划也在整理一套更通用的软件工具（Gilani，2022）。

在本节余下部分，我们将介绍几种具有普遍应用价值的体育分析工具，并说明如何将这些工具结合使用的一种常见模式。

表 4：截至 2022年10月16日，综合 R 档案网络（CRAN）上提供的体育专项软件包汇总。尽管北美主要体育项目占据了列表的大部分，电子竞技的软件包或许是增长最快的类别。

体育运动	软件包数量	软件包列表
美式橄榄球	12	nflverse ，nflfastR ，nflreadr ，nfl4th ，nflseedR ，nflplotR、NFLSimulatoR、fflr、ffscrapr, ffsimulator, gsisdecoder, cfbfastR
协会足球（足球）	9	worldfootballR、engsoccerdata、socceR、ggsoccer, footballpenaltiesBL, footBayes, itscalledsoccer ，FPLdata ，EUfootball
篮球	8	BAwiR ，AdvancedBasketballStats ，uncmbb ，BasketballAnalyzeR、NBAloveR、wehoop, hoopR、toRvik
棒球/垒球	7	Lahman、Retrosheet、pitchRx、mlbstats, baseballDBR、Baseballr、runexp
国际象棋	5	chess、Stockfish、bigchess、rchess、chessR
电子竞技	5	CSGo，rbedrock，ROpenData，opendotaR, RDota2
冰球	5	hockeyR, NHLData, nhlapi, nhlscrape, fastRhockey
板球	4	yorkr、cricketr、cricketdata、howzatR
GPS 活动追踪	3	trackeR, trackeRapp, rStrava
田径	2	combinedevents, JumpeR
澳式足球	1	fitzRoy
游泳	1	SwimmeR
排球	1	volleystat

6.1 工具如何协同运作的案例研究：国际象棋

许多体育分析工具都能读取、写入和绘制以特定体育运动格式存储的数据。例如，国际象棋对局中的走棋顺序通常记录为便携式棋谱（PGN）。围绕这种定义明确的格式，可以构建相应的软件工具。**国际象棋** 软件包（Lente，2020年）为 R 用户提供了读取、写入、显示和操作 PGN 格式国际象棋数据的功能。

应用程序编程接口（API）也是获取数据的常见来源。在国际象棋领域，**chessR**程序包（Zivkovic，2022）允许 R 用户从 Chess.com API 下载比赛数据。这种基础设施十分常见于体育分析：一个程序包充当“主力工具”，负责常见的通用数据操作，其他程序包则在此基础上添加特定功能。第4.3节介绍了如何使用 **chessR** 程序包计算 Elo 等级分。
图6展示了通过**chess** 程序包生成的国际象棋初始棋盘图，以及此前在第4.3节提到的一位作者所赢比赛的最终局面（数据通过**chessR** 程序包下载）。我们注意到，棋盘提供的背景信息对于帮助读者理解数据至关重要（我们当中有多少人能直接想象出 PGN 的内容呢？）。在第6.2节中，我们将概述一系列图形工具，它们能为不同的比赛场地提供类似的背景信息。

6.2 图形工具

制作有效的数据图形是统计传播的重要组成部分，体育运动也不例外。下面介绍几个有助于制作体育运动相关数据图形的软件包。
每支职业运动队都有自己的品牌，最明显的标志是球队标志和一套颜色。**teamcolors** R程序包（Baumer & Matthews，2020年）提供男子和女子职业及大学运动队的色彩调色板和标志，以及兼容**ggplot2** （Wickham 等，2022年）的颜色和填充比例函数。例如，图4中展示的 NFL 球队颜色和标志由**teamcolors** 程序包提供。图7展示了如何利用球队颜色——许多体育迷对这些颜色有天然的熟悉感——帮助理清原本杂乱的数据图形。在图

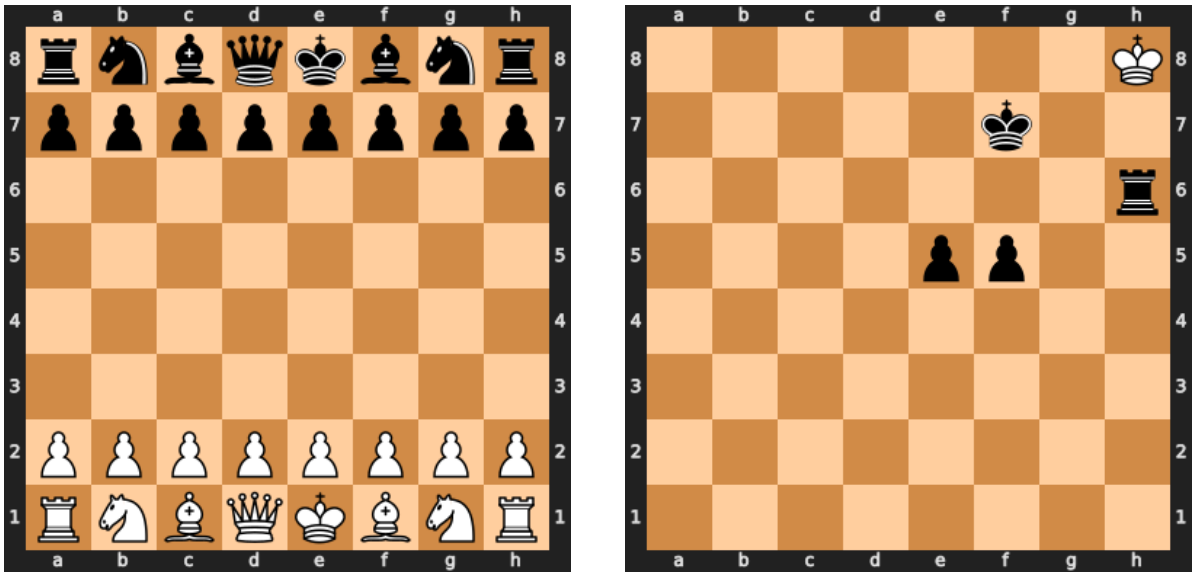


图6：左侧是通过**国际象棋**软件包打印出的初始国际象棋棋盘。右侧是作者近期一次作者最新的胜局（执黑棋将死对手）。

7中，30条不同的线绘制在一起，以各种难以预测的方式交错和相交。不过，使用球队颜色来区分线条，就能追踪大多数球队在整个赛季中的走势。

nflplotR（Carl，2022）的目标与**teamcolors**类似。它也提供**ggplot2**扩展，但专为 NFL 设计。**nflplotR**的一大特色是提供了一组`geom_*()`（几何对象）函数，可借助**ggplot2**绘制高质量的 NFL 球队标志和球员图像。图8展示了 2021 年常规赛 NFL 球队进攻和防守预期得分增加值的散点图。图中以美式橄榄球俱乐部的标志代替常见的点，便于读者辨认每个数据点代表哪支球队。

球员追踪数据包含揭示球员移动情况的坐标，而这些坐标总是结合特定体育运动的球场、球场、冰面、棋盘或投球区上的参考点来理解。要在图形中标示这些点，可能需要绘制一套复杂的辅助线，为读者提供相应背景。值得庆幸的是，**sportyR** 程序包（Drucker，2022）包含棒球、篮球、冰壶、美式橄榄球、冰球、足球和网球的通用场地，只需调用一个函数即可将其添加到**ggplot** 图形中。图 9 中绘制的场地有助于为球员追踪数据（例如图3所示的数据）提供背景；若要每位分析人员都自行创建这些场地，将会十分费力。随着球员追踪数据日益普及，这项工具的使用率也应会随之提高。

6.3 工具与研究演进案例研究：棒球

随着棒球数据的粒度不断演变，用于建模这些数据的统计方法以及处理这些数据的工具也随之发展。

例如，在 George Lindsey 的研究问世之前（参见第2节），大多数公开可得的棒球数据都是赛季数据：只显示每位球员整个赛季的总数据。这些数据如今可通过 **Lahman** 软件包获取（Friendly 等人，2022），足以用于研究棒球的总体趋势，并带来了诸如预期胜率的价值（参见第4.1节）以及上垒率相较于打击率的重要性等见解。这些相对简单的见解推动了《点球成金》（Lewis，2004）时代体育分析领域的变革（B. Baumer 和 Zimbalist，2014）。
随着时间推移，棒球数据的分辨率不断提高，涵盖了逐球数据、逐投球数据，如今还包括球员追踪数据。

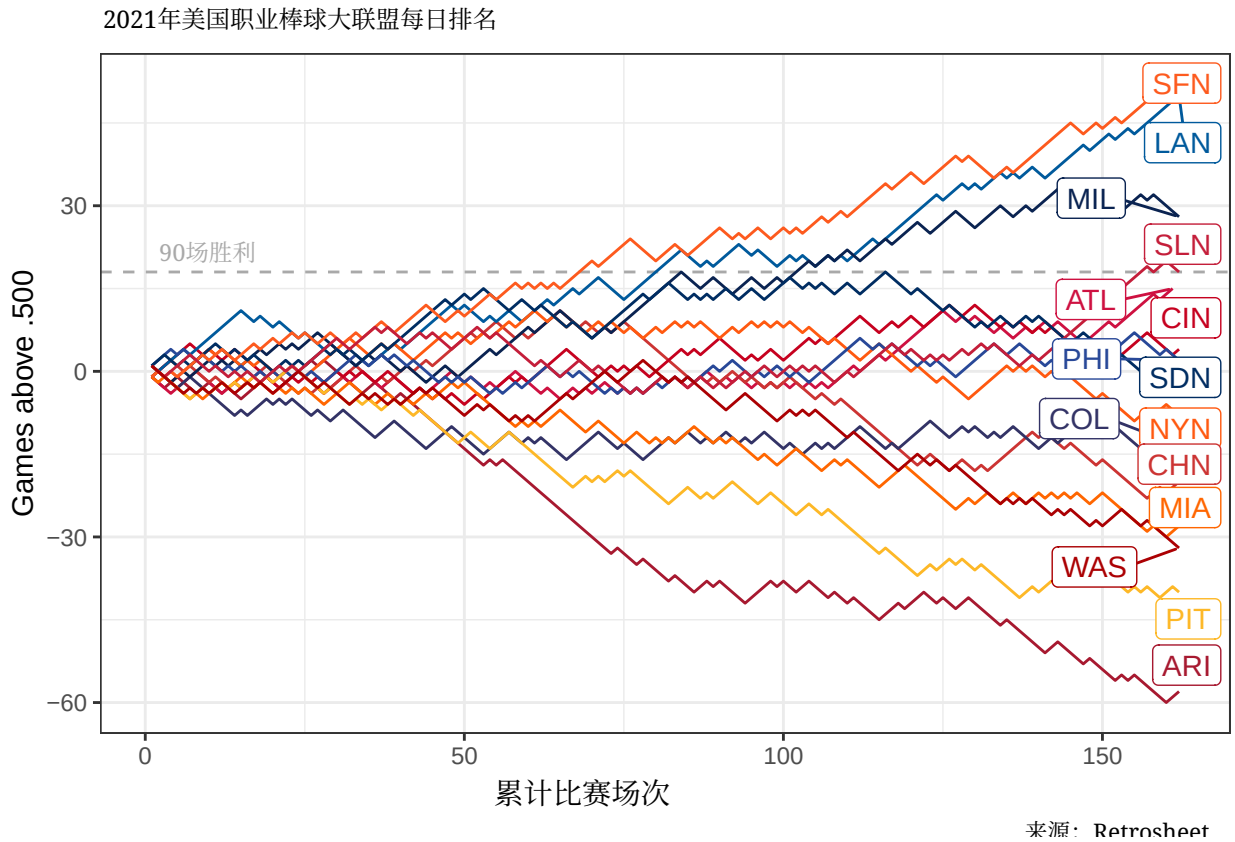


图 7：2021 年美国职业棒球大联盟赛季期间，国家联盟各球队排名的变化。请注意，球队颜色的运用如何让原本杂乱、难以区分的线条变得清晰易辨。数据由 **retrosheet** 提供，颜色由 **teamcolors**提供。

该**retrosheet** 软件包（Douglas 和 Scriven，2021）如今可用于访问 Retrosheet 提供的历史逐球数据（这是一个完整版本的数据，内容相当于 Lindsay 为其研究收集的数据）。这些逐球数据使研究人员得以了解各种策略，例如我们在第2节讨论过的那些策略。在棒球领域，这加深了我们对短打、盗垒、左右打击习惯、击球顺序以及比赛其他诸多方面的理解。Tango等（2007）的许多分析都以逐球数据为基础。**pitchRx** 软件包（Sievert，2015）提供了逐投球数据，推动了关于捕手框定（Deshpande & Wyner，2017）、投球价值（Healey，2019）和投球分类（Sidle & Tran，2018）的创新研究。捕手框定是一个典型例子：球探们讨论这一概念已有数十年，但直到有了分辨率适当的数据，分析师才能对其进行量化。

逐球数据让我们能够在不同回合之间进行评估，而球员追踪数据则让我们能够在回合之内进行评估。**baseballr** 软件包（Petti & Gilani，2022）如今提供了访问 Statcast 球员追踪数据的途径。这些数据促成了对防守布阵调整如何影响击球表现（Bouzarth 等，2021），以及击球仰角如何影响击出本垒打的概率（Marchi 等，2018）的研究。

正如上文讨论国际象棋时所见，棒球领域的程序包可以通过富有创意的方式相互配合。在图 7 中，我们展示了如何利用 **teamcolors** 为从 **retrosheet** 提取的数据增添视觉效果，从而制作出一张内容丰富的数据图表。同样，也可以使用 **sportyR** 生成球场图示，再叠加从 **baseballr** 获取的球员追踪数据，以呈现防守布阵调整。

因此，这些 R 软件包让数据更容易获取，从而推动研究开展。此外，由于 R 支持脚本编写，这些软件包也让分享可复现的研究成果变得更加容易。近期的一些会议，例如卡内基梅隆体育分析会议，举办了可复现研究竞赛，以促进这类工作（参见第 7 节）。

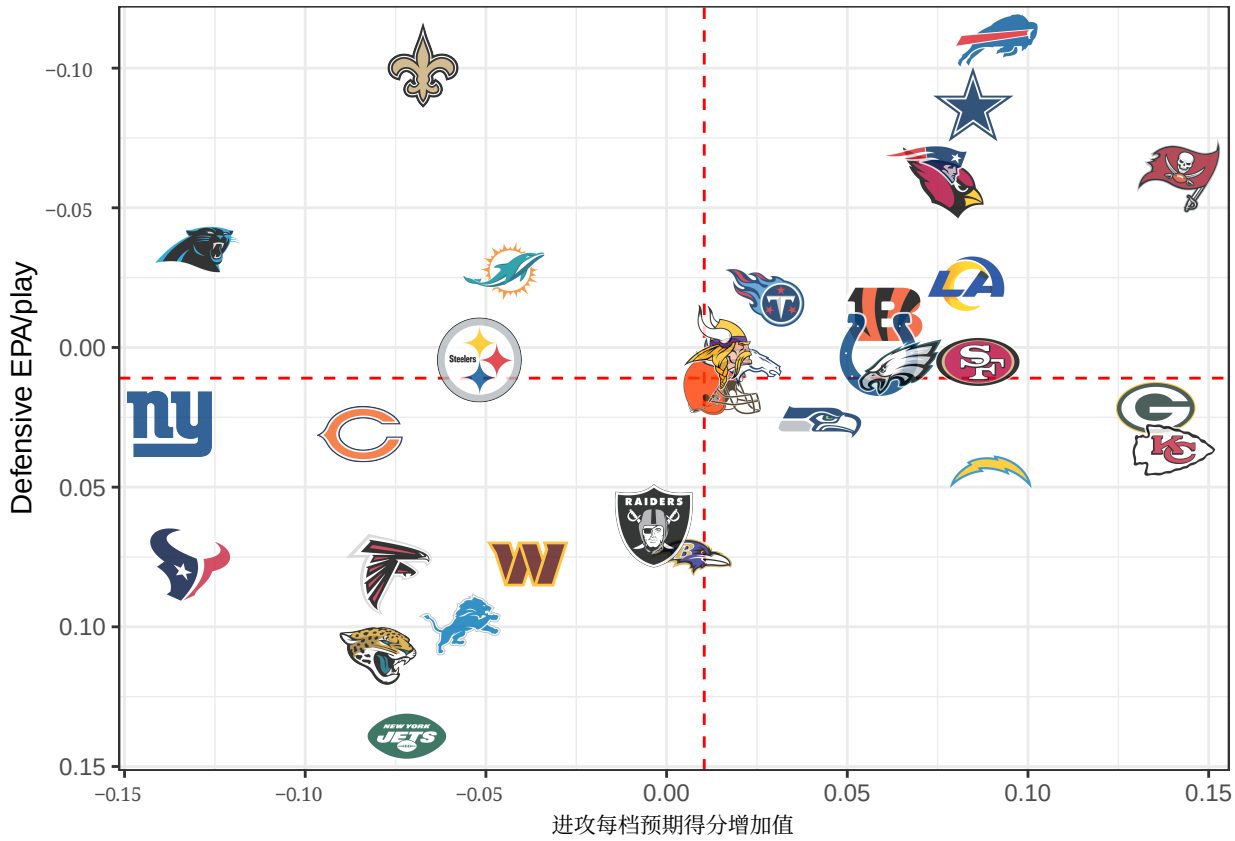


图8：使用来自**nflfastR**的数据，通过**nflplotR** 绘制的2021年NFL常规赛每档进攻和防守预期得分增加值。

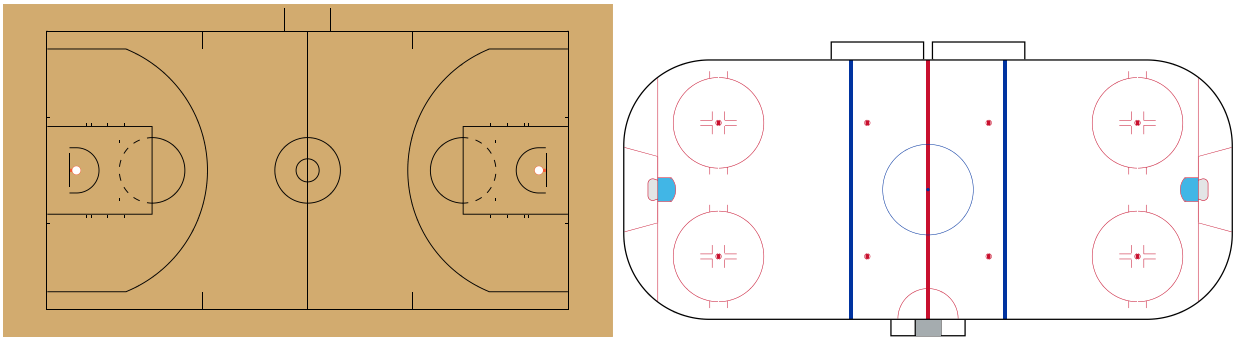


图 9：左侧是由**sportyR**绘制的NBA篮球场。右侧是由**sportyR**绘制的国家冰球联盟冰球场。

7 个机遇

体育分析领域的公开研究，部分受到若干知名竞赛和会议的推动。这些平台一直是新思想的重要来源，并通过降低入门门槛，促进了这一领域的多元化发展。

2014 年，Kaggle 举办了首届 March Machine Learning Mania 竞赛，旨在预测美国大学体育协会男子篮球锦标赛的结果。共有 243 名参赛者提交了锦标赛中 68 支大学篮球球队之间所有可能对阵的胜出概率，以争夺 15,000 美元奖金（Glickman & Sonas，2015）。此后，《体育定量分析杂志》（JQAS）推出了一期关于美国大学体育协会男子篮球锦标赛预测方法的特刊。在发表的论文中，我们了解到，获胜作品基于一个相当简单的逻辑回归模型，该模型使用博彩市场数据进行训练（Lopez & Matthews，2015）。因此，这项竞赛不仅激发了人们对体育分析的兴趣，还促成了同行评审研究；在该案例中，研究展示了优质数据胜过复杂建模的价值。

或许是受在 Kaggle 疯狂三月竞赛中取得成功的激励，Michael Lopez 加入了国家橄榄球联盟，并于 2019 年发起了 Big Data Bowl。这项年度竞赛同样推动了美式橄榄球领域的新研究方向，并促成了一期探讨国家橄榄球联盟球员追踪数据的*JQAS* 专题刊（Lopez，2020）。表现出色的参赛作品及其相关发表成果（Chu 等人，2020；Deshpande 和 Evans，2020；Yurko 等人，2020），为多位体育分析领域最杰出的早期职业研究人员开启了职业生涯。
为有志研究人员提供机会、让他们解决体育分析问题的类似竞赛还包括冰球领域的 Big Data Cup、棒球领域的 SABR DiamondDollars 案例竞赛，以及赛马领域的 Big Data Derby。

随着体育分析领域不断发展，各类面向特定体育项目及地区的体育分析会议也纷纷涌现。每两年举办一次的新英格兰体育统计研讨会，可能是历史最悠久的专注于体育分析的学术会议。其西海岸对应会议是卡斯卡迪亚体育统计研讨会。许多有影响力的研究成果都曾在这些会议上首次展示。其他知名的体育分析会议还包括卡内基梅隆体育分析会议、康涅狄格大学体育分析研讨会和 MathSport International。

最受瞩目的体育分析会议无疑是斯隆体育分析会议，它吸引了学者、业界人士、供应商和媒体机构。会议举办了一项研究竞赛，确实让人们更加关注体育分析，但也因各种不足而受到批评。这些批评包括研究竞赛未能重视可重复性、门票价格高昂、组织者获得的薪酬丰厚，以及与会者和演讲者缺乏多样性（Funt，2022）。

还值得注意的是，相当一部分最具创新性的研究由职业体育队开展，但具体比例不得而知。这些研究很可能永远不会发表，因为各支球队都会利用研究成果来获得竞争优势。这些研究得以开展，部分得益于更优质的数据。例如，职业体育队可以收集自家球员的生物特征数据，并利用这些数据了解锻炼、睡眠模式和饮食如何影响他们的运动表现。这类研究或许可算作“新兴方法”，但遗憾的是，公众要从中受益还需要数年时间，甚至可能永远无法受益。

8 结论

作为一门应用科学，体育分析可能缺乏一种大统一理论，能够简洁地概括所有体育运动中的比赛过程。然而，作为一门日益成熟的学科，体育分析已经能够回答许多体育运动共同面临的基本问题。本文探讨其中三个重要问题：哪些球队最优秀，它们的实力如何？在比赛的任意时刻，各球队获胜的可能性有多大？是否存在一个通用框架，用于评估比赛任意时刻的策略？
其他一些基础问题在别处有所探讨。偶然性因素在某项体育运动中有多重要？既然我们知道哪些球队最强，那么哪些球员最优秀？我们又该如何量化他们各自的贡献？在某项体育运动中，哪些球员组合配合得最好？关于四项主要体育项目中偶然性因素的估算，具体请参阅 Lopez 等人（2018）。第二个问题通常通过一种称为替代球员以上胜场数 （WAR）的公式来探讨——详见 Baumer 等（2015）以及

Yurko 等人（2019）关于棒球和美式橄榄球的详细研究。Che 和 Glickman（2022）的近期研究也探讨了这一问题，并涵盖多项体育运动。第三个问题在篮球、冰球和足球等体育运动中尤为引人关注，因为这些项目经常换人，而且显而易见，拥有不同技能组合的球员搭配在一起，会使球队呈现出各异的优势与劣势。正负值以及调整后的 正负值的概念常用于探讨这一问题（有关应用的全面概述，请参阅 Hvattum（2019））。

在将体育分析中的这三个重要理念融会贯通时，我们也关注了体育博彩市场数据的新用途、开展体育分析工作的一些计算工具，以及展示这些工作的机会。我们在第6.3节中的讨论表明，可用数据分辨率的提升如何推动棒球领域出现新的研究方向，而这一趋势也正在所有体育运动中上演。正是通过交流理念、工具、模型和数据，分析才能推动我们对体育运动的集体认识不断向前发展。

致谢

我们感谢 Michael Lopez 和 Katherine Evans 对本文早期版本提出的宝贵意见。
生成本文的 R Markdown 文件（包括所有 R 代码）可通过 https://github.com/beanumber/wire21 获取。

参考文献

Agresti, A.（2018）。《分类数据分析导论》（第3版）。新泽西州霍博肯：约翰·威立父子公司。Alamar, B.（2010）。衡量NFL战术指挥中的风险。《体育定量分析杂志》，*6*（2），11。https://doi.org/10.2202/1559-0410.1235Albert, J.（2015）。运用体育竞赛中的获胜概率评估球员。《*Wiley*跨学科评论：计算统计学》，*7*（5），316–325。 https://doi.org/10.1002/wics.1358Albert, J. 与 Bennett, J.（2001）。《曲线球：棒球、统计学与比赛中的偶然性》。纽约：施普林格。Albert, J.、Glickman, M. E.、Swartz, T. B. 与 Koning, R. H.（2016）。《体育统计方法与分析手册》（第520页）。纽约：Chapman; Hall/CRC出版社。 https://doi.org/10.1201/9781315166070 Baumer, B. S.、Jensen, S. T. 与 Matthews, G. J.（2015）。openWAR：用于评估美国职业棒球大联盟球员整体表现的开源系统。《体育定量分析杂志》，*11*（2），69–84。 https://doi.org/10.1515/jqas-2014-0098Baumer, B. S.、Kaplan, D. T. 与 Horton, N. J.（2021）。《*R*语言现代数据科学》（第2版，第1–673页）。佛罗里达州博卡拉顿：Chapman; Hall/CRC出版社。 https://mdsr-book.github.io/mdsr2e/Baumer, B. S. 与 Matthews, G. J.（2020）。*Teamcolors*：职业体育球队的色彩调色板。 http://github.com/beanumber/teamcolorsBaumer, B. S.、Nguyen, Q. 与 Matthews, G. J.（2022）。*CRAN*任务视图：体育分析。 https://CRAN.R-project.org/view=SportsAnalyticsBaumer, B. 与 Zimbalist, A.（2014）。《赛伯计量革命：评估棒球分析的发展》（第187页）。费城：宾夕法尼亚大学出版社。Beaudoin, D. 与 Swartz, T. B.（2010）。冰球比赛中何时撤下守门员的策略。《美国统计学家》，*64*（3），197–204。 https://doi.org/10.1198/tast.2010.09147Bergman, D. 与 Imbrogno, J.（2017）。在国家橄榄球联盟生存者竞猜中胜出。《运筹学》，*65*，1343–1354。 https://doi.org/10.1287/opre.2017.1633Bornn, L.、Cervone, D.、Franks, A. 与 Miller, A.（2017）。透过球员追踪数据的视角研究篮球。载于《体育统计方法与分析手册》（第261–286页）。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社。Boulier, B. L. 与 Stekler, H. O.（2003）。预测国家橄榄球联盟比赛的结果。《预测学杂志》，*19*（2），257–270。 https://doi.org/10.1016/s0169-2070(01)00144-3Boulier, B. L.、Stekler, H. O. 与 Amundson, S.（2006）。检验国家橄榄球联盟博彩市场的效率。《应用经济学》，*38*（3），279–284。 https://doi.org/10.1080/00036840500368904Bouzarth, E.、Grannan, B.、Harris, J.、Hartley, A.、Hutson, K. 与 Morton, E.（2021）。《挥棒换位：棒球防守站位的数学方法》。《体育定量分析杂志》，*17*（1），47–55。 https://doi.org/10.1515/jqas-2020-0027

Bradley, R. A. 与 Terry, M. E.（1952年）。不完全区组设计的秩分析：I. 配对比较法。《Biometrika》，39（3/4），324–345。 https://doi.org/10.2307/2334029Breiter, D. J. 与 Carlin, B. P.（1997）。如果非参加办公室竞猜不可，该怎么玩。《Chance》，10（1），5–11。 https://doi.org/10.1080/09332480.1997.10554789Brenzel, P.、Shock, W. 与 Yang, H.（2019）。使用三维马尔可夫模型分析冰壶。《体育分析杂志》，5（2），101–119。 https://doi.org/10.3233/jsa-180279Buttrey, S. E.（2016）。投注国家冰球联盟冰球比赛，击败市场。《体育定量分析杂志》，12（2），87–98。 https://doi.org/10.1515/jqas-2015-0003Carl, S.（2022）。nflplotR：使用ggplot2绘制NFL标志图。 https://CRAN.R-project.org/package=nflplotRCarl, S. 与 Baldwin, B.（2022）。nflfastR：高效访问NFL逐档比赛数据的函数。 https://CRAN.R-project.org/package=nflfastRCaro, C. A.、Machtmes, R. 等（2013）。检验毕达哥拉斯期望公式在一级大学美式橄榄球中的效用：与Morey模型的考察和比较。《商业与经济研究杂志》（JBER），11（12），537–542。 https://doi.org/10.19030/jber.v11i12.8261Carroll, B. N.、Palmer, P.、Thorn, J. 与 Pietrusza, D.（1988）。《橄榄球的隐秘比赛》（第415页）。纽约：Total Sports公司。Carter, Virgil. 与 Machol, R. E.（1971）。技术札记——美式橄榄球中的运筹学。《运筹学》，19（2），541–544。 https://doi.org/10.1287/opre.19.2.541Casals, M.、Fernández, J.、Martínez, V.、Lopez, M.、Langohr, K. 与 Cortés, J.（2022）。R CRAN仓库中体育相关软件包的系统综述。《International Journal of Sports Science & Coaching》，1。 https://doi.org/10.1177/17479541221136238Cervone, D.、D'Amour, A.、Bornn, L. 与 Goldsberry, K.（2014）。Pointwise：利用NBA光学追踪数据实时预测得分并评估决策。28，3。 http://www.lukebornn.com/papers/cervone_ssac_2014.pdfCervone, D.、D'Amour, A.、Bornn, L. 与 Goldsberry, K.（2016）。用于预测篮球控球结果的多分辨率随机过程模型。《Journal of the American Statistical Association》，111（514），585–599。 https://doi.org/10.1080/01621459.2016.1141685Che, J. 与 Glickman, M.（2022）。通过单调变换，根据计分结果评定多参赛者比赛中的运动员等级分。arXiv预印本，arXiv:2205.10746。 https://arxiv.org/pdf/2205.10746Chen, T.、He, T.、Benesty, M.、Khotilovich, V.、Tang, Y.、Cho, H.、Chen, K.、Mitchell, R.、Cano, I.、Zhou, T.、Li, M.、Xie, J.、Lin, M.、Geng, Y.、Li, Y. 与 Yuan, J.（2022）。Xgboost：极端梯度提升。https://github.com/dmlc/xgboostChu, D.、Reyers, M.、Thomson, J. 与 Wu, L. Y.（2020）。国家橄榄球联盟中的路线识别：基于模型的曲线聚类与EM算法的应用。《体育定量分析杂志》，16（2），121–132。 https://doi.org/10.1515/jqas-2019-0047Clair, B. 与 Letscher, D.（2007）。体育博彩池的最优策略。《运筹学》，55（6），1163–1177。 https://doi.org/10.1287/opre.1070.0448Clark, N.、Macdonald, B. 与 Kloo, I.（2020）。针对电子竞技Dota 2的贝叶斯调整正负值分析。《体育定量分析杂志》，16（4），325–341。 https://doi.org/10.1515/jqas-2019-0103Cochran, J.、Bennett, J. 与 Albert, J.（编）。（2017）。《牛津体育统计学选集》，第1卷：2000–2004年（第544页）。伦敦：牛津大学出版社。 https://global.oup.com/academic/product/the-oxford-anthology-of-statistics-in-sports-9780198724926Deshpande, S. K. 与 Evans, K.（2020）。预期假设完成概率。《体育定量分析杂志》，16（2），85–94。 https://doi.org/10.1515/jqas-2019-0050 Deshpande, S. K. 与 Jensen, S. T.（2016）。估算一名NBA球员对球队获胜机会的影响。《体育定量分析杂志》，12（2）。 https://doi.org/10.1515/jqas-2015-0027Deshpande, S. K. 与 Wyner, A.（2017）。好球框架接球的层次贝叶斯模型。《体育定量分析杂志》，13（3），95–112。 https://doi.org/10.1515/jqas-2017-0027Dewan, J. 与 Zminda, D.（1993）。STATS篮球计分板1993–1994（第288页）。HarperPerennial。Douglas, C. 与 Scriven, R.（2021）。Retrosheet：从Retrosheet导入职业棒球数据。 https://github.com/colindouglas/retrosheetDrucker, R.（2022）。sportyR：绘制按比例缩放的ggplot运动场地表面图。 https://github.com/sportsdataverse/sportyRElo, A. E.（1978）。《昔日与当今国际象棋棋手的等级分》。纽约：Arco出版社。Fernandez, J.、Bornn, L. 与 Cervone, D.（2021）。足球控球瞬时期望值细粒度评估框架。《Machine Learning》，110（6），1389–1427。 https://doi.org/10.1007/s10994-021-05989-6FIDE。（2022）。等级分计算器。 https://ratings.fide.com/calc.phtml

Friendly, M., Dalzell, C., Monkman, M., & Murphy, D. (2022). Lahman：Sean Lahman棒球数据库。 https://CRAN.R-project.org/package=LahmanFunt, D. (2022). 斯隆体育会议上，关于多元化与参与机会的批评日益增多。《华盛顿邮报》。 https://www.washingtonpost.com/sports/2022/06/13/sloan-sports-conference-diversity/Gandar, J., Zuber, R., O'Brien, T., & Russo, B. (1988). 检验让分投注市场中的理性。《金融学杂志》，43 (4), 995–1008. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1988.tb02617.xGilani, S. (2022). SportsDataverse. https://sportsdataverse.orgGlickman, M. E., & Sonas, J. (2015). NCAA男子篮球预测方法专题介绍。《体育定量分析杂志》，11 (1), 1–3. https://doi.org/10.1515/jqas-2015-0013Glickman, M. E., & Stern, H. S. (1998). 国家橄榄球联盟比分的状态空间模型。《Journal of the American Statistical Association》，93 (441), 25–35. https://doi.org/10.1080/01621459.1998.10474084Glickman, M. E., & Stern, H. S. (2017). 估算NFL球队实力。载于《体育统计方法与分析手册》（第113–136页）。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社。 http://glicko.net/research/nfl-chapter.pdfGoldner, K. (2012). 橄榄球的马尔可夫模型：运用随机过程为橄榄球进攻回合建模。《体育定量分析杂志》，8 (1). https://doi.org/10.1515/1559-0410.1400 Goldner, K. (2017). 情境成功：评估橄榄球中的决策。《体育统计方法与分析手册》（第199–214页）。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社。Guan, T., Nguyen, R., Cao, J., & Swartz, T. (2022). 国家橄榄球联盟的比赛内获胜概率。《应用统计年刊》，16 (1). https://doi.org/10.1214/21-aoas1514Hamilton, H. H. (2011). 毕达哥拉斯期望在足球中的扩展。《体育定量分析杂志》，7 (2). https://doi.org/10.2202/1559-0410.1335Healey, G. (2017). 新《点球成金》：棒球场传感器如何改变棒球。《IEEE会刊》，105 (11), 1999–2002. https://doi.org/10.1109/JPROC.2017.2756740Healey, G. (2019). 运用核密度和非参数回归估计计算内在投球价值的贝叶斯方法。《体育定量分析杂志》，15 (1), 59–74. https://doi.org/10.1515/jqas-2017-0058 Horowitz, M., Yurko, R., Ventura, S., & Dutta, R. (2020). NflscrapR：汇编NFL逐回合数据API，便于使用R。 https://github.com/maksimhorowitz/nflscrapRHvattum, L. M. (2019). 用于评估团队运动中个体球员的正负值评分综合综述。《国际体育计算机科学杂志》，18 (1). https://doi.org/10.2478/ijcss-2019-0001 Imbrogno, J., & Bergman, D. (2022). 计算NFL幸存者竞猜池中获胜参赛项的数量。《大学数学杂志》，53 (4), 282–291. https://doi.org/10.1080/07468342.2022.2099704James, B. (2003). 《比尔·詹姆斯棒球历史新论》。自由出版社。Kaplan, E. H., & Garstka, S. J. (2001). 疯狂三月与办公室竞猜池。《管理科学》，47 (3), 369–382. https://doi.org/10.1287/mnsc.47.3.369.9769Koning, R. H. (2017). 足球球队实力评级。载于《体育统计方法与分析手册》（第371–388页）。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社。Koopman, S. J., & Lit, R. (2015). 用于分析和预测英格兰足球超级联赛比赛结果的动态双变量泊松模型。《皇家统计学会杂志：A辑》（《社会统计学》），178 (1), 167–186. https://doi.org/10.1111/rssa.12042Kovalchik, S. A. (2016). 寻找网球获胜预测领域的史上最佳。《体育定量分析杂志》，12 (3), 127–138. https://doi.org/10.1515/jqas-2015-0059 Kovalchik, S. A., & Reid, M. (2019). 一种通过动态更新预测网球比赛中获胜情况的校准方法。《国际预测学杂志》，35 (2), 756–766. https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2017.11.008Kumagai, B., Nahabedian, M., Châtel, T., & Stokes, T. (2021). 预期控球增加值的贝叶斯时空模型。Hockey-Graphs. https://hockey-graphs.com/2021/07/06/bayesian-space-time-models-for-expected-possession-added-value-part-1-of-2/Lacey, N. J. (1990). 对NFL让分投注市场效率的估计。《应用经济学》，22 (1), 117–129. https://doi.org/10.1080/00036849000000056Lente, C. (2020). 国际象棋：阅读、书写、创作和探索国际象棋对局。 https://github.com/curso-r/chessLewis, M. (2004). 《点球成金：赢得不公平比赛的艺术》（第336页）。纽约：W·W·诺顿公司。Lindsey, G. R. (1961). 棒球比赛中比分的变化过程。《Journal of the American Statistical Association》，56 (295), 703–728. https://doi.org/10.1080/01621459.1961.10480656Lindsey, G. R. (1963). 棒球策略研究。《运筹学》，11 (4), 477–501。https://doi.org/10.1287/opre.11.4.477

Lock, D., & Nettleton, D. (2014). 使用随机森林估算NFL比赛每个回合开始前的获胜概率。《体育定量分析杂志》，10 (2). https://doi.org/10.1515/jqas-2013-0100Lopez, M. J. (2022). 个人通信。Lopez, M. J. (2020). 更多数据、更好的问题，以及回归第四档进攻行为：国家橄榄球联盟追踪数据专题导论。《体育定量分析杂志》，16 (2), 73–79. https://doi.org/10.1515/jqas-2020-0057Lopez, M. J., & Matthews, G. J. (2015). 构建美国大学男子篮球预测模型并量化其成效。《体育定量分析杂志》，11 (1), 5–12. https://doi.org/10.1515/jqas-2014-0058Lopez, M. J., Matthews, G. J., & Baumer, B. S. (2018). 最强球队有多常获胜？理解北美体育中随机性的统一方法。《应用统计年刊》，12 (4). https://doi.org/10.1214/18-aoas1165Macdonald, B. (2012). 用于评估国家冰球联盟球队和球员的预期进球模型。2012年麻省理工学院斯隆体育分析会议论文集。 https://assets.pubpub.org/mku181yp/ee0d61ed-af35-4b1f-ba86-71c216935690.pdfMarchi, M., Albert, J., & Baumer, B. S. (2018). 《使用 R 分析棒球数据》（第2版，第360页）。佛罗里达州博卡拉顿：Chapman; Hall/CRC出版社。 https://doi.org/10.1201/9781351107099Martin, R., Timmons, L., & Powell, M. (2018). 国家橄榄球联盟加时赛规则的马尔可夫链分析。《体育分析杂志》，4 (2), 95–105. https://doi.org/10.3233/JSA-170198Maymin, P. Z. (2021). 明智击杀与无谓阵亡：英雄联盟电子竞技分析。《体育定量分析杂志》，17 (1), 11–27. https://doi.org/10.1515/jqas-2019-0096 McFarlane, P. (2019). 评估NBA比赛末段决策。《体育分析杂志》，5 (1), 17–22. https://doi.org/10.3233/jsa-180231Metrick, A. (1996). 疯狂三月？美国大学篮球锦标赛博彩池中的策略行为。《经济行为与组织杂志》，30 (2), 159–172. https://doi.org/10.1016/S0167-2681(96)00855-4Miller, S. J. (2007). 棒球毕达哥拉斯胜负公式的推导。《Chance》，20 (1), 40–48。 https://doi.org/10.1080/09332480.2007.10722831Mills, E. G., & Mills, H. D. (1970). 球员胜场均值：制胜棒球球员完全指南。哈兰·D·米尔斯馆藏。 https://trace.tennessee.edu/utk_harlan/6/Nichols, M. W. (2014). 客队旅行对比赛结果及NFL博彩市场偏差的影响。《体育经济学杂志》，15 (1), 78–96. https://doi.org/10.1177/1527002512440580Niemi, J. B., Carlin, B. P., & Alexander, J. M. (2008). 美国大学体育协会锦标赛博彩池的逆向策略：治疗疯狂三月的良方？《Chance》，21 (1), 35–42. https://doi.org/10.1080/09332480.2008.10722884Paul, R. J., & Weinbach, A. P. (2014). WNBA博彩市场的市场效率与行为偏差。《国际金融研究杂志》，2, 193–202. https://doi.org/10.3390/ijfs2020193Pelechrinis, K., Winston, W., Sagarin, J., & Cabot, V. (2019). 评估NFL比赛回合：根据赛程调整的预期得分。体育分析机器学习与数据挖掘国际研讨会，11330, 106–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17274-9_9Petti, B., & Gilani, S. (2022). Baseballr：获取和分析棒球数据。 https://CRAN.R-project.org/package=baseballrR 核心团队。(2022). R：一种用于统计计算的语言和环境。R 统计计算基金会。 https://www.R-project.org/Reyers, M., & Swartz, T. B. (2021). 利用追踪数据评估国家橄榄球联盟四分卫。《AStA 统计分析进展》。 https://doi.org/10.1007/s10182-021-00406-8Romer, D. (2006). 企业会追求利润最大化吗？来自职业橄榄球的证据。《政治经济学杂志》，114 (2), 340–365. https://doi.org/10.1086/501171Sauer, R. D. (1998). 博彩市场经济学。《经济文献杂志》，36 (4), 2021–2064。 https://www.jstor.org/stable/2565046Schuhmann, J. (2021). NBA三分球革命：一记投篮如何改变比赛。NBA.com. https://www.nba.com/news/3-point-era-nba-75Schwarz, A. (2004). 《数字游戏：棒球对统计学长久不衰的迷恋》。纽约：Thomas Dunne Books/St. Martin’s Press。Sicilia, A., Pelechrinis, K., & Goldsberry, K. (2019, July). DeepHoops：利用时空数据的深度特征表示评估篮球微动作。《第25届ACM SIGKDD知识发现与数据挖掘国际会议论文集》。 https://doi.org/10.1145/3292500.3330719 Sidle, G., & Tran, H. (2018). 使用多类别分类方法预测棒球投球类型。《体育分析杂志》，4 (1), 85–93. https://doi.org/10.3233/JSA-170171

Sievert, C. (2015). pitchRx：利用美国职业棒球大联盟高级媒体“gameday”数据并可视化Pitchfx的工具。 http://cpsievert.github.com/pitchRxSkinner, B. (2011). 弱势队的得分策略：一种确定最佳体育策略的通用定量方法。《体育定量分析杂志》， 7 (4)。 https://doi.org/10.2202/1559-0410.1364 Soebbing, B. P., & Humphreys, B. R. (2013). 赌徒认为球队会摆烂吗？来自NBA的证据。《当代经济政策》， 31 (2), 301–313。 https://doi.org/10.1111/j.1465-7287.2011.00298.xSpann, M., & Skiera, B. (2009). 体育预测：预测市场、赔率和投注技巧师的预测准确度比较。《预测学杂志》， 28 (1), 55–72。 https://doi.org/10.1002/for.1091Stern, H. S. (1994). 体育比分进程的布朗运动模型。《Journal of the American Statistical Association》， 89 (427), 1128–1134。 https://doi.org/10.1080/01621459.1994.10476851Tango, T. M., Lichtman, M. G., & Dolphin, A. E. (2007). 《The book: Playing the percentages in baseball》。弗吉尼亚州斯特林：Potomac Books。 Turner, H., & Firth, D. (2020). BradleyTerry2：Bradley-Terry模型。 https://github.com/hturner/BradleyTerry2Urschel, J., & Zhuang, J. (2011). NFL教练是否风险厌恶且损失厌恶？来自其开球策略使用情况的证据。《体育定量分析杂志》， 7 (3), 14。 https://doi.org/10.2202/1559-0410.1311 White, C., & Berry, S. (2002). 分层多分类回归：NFL四分卫排名。《美国统计学家》， 56 (1), 10–21。 https://doi.org/10.1198/000313002753631312Wickham, H., Chang, W., Henry, L., Pedersen, T. L., Takahashi, K., Wilke, C., Woo, K., Yutani, H., & Dunnington, D. (2022). ggplot2：使用图形语法创建优雅的数据可视化。https://CRAN.R-project.org/package=ggplot2Winston, W. L., Nestler, S., & Pelechrinis, K. (2022). 《Mathletics：赌徒、经理和球迷如何在体育运动中运用数学》（第2版）。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社。Yam, D. R., & Lopez, M. J. (2019). 失去了什么？对国家橄榄球联盟第四档进攻行为的因果估计。《体育分析杂志》， 5 (3), 153–167。 https://doi.org/10.3233/jsa-190294 Yurko, R., Matano, F., Richardson, L. F., Granered, N., Pospisil, T., Pelechrinis, K., & Ventura, S. L. (2020). 深入探究：利用追踪数据对美式橄榄球比赛中比赛结果进行连续时间场内估值的模型。《体育定量分析杂志》， 16 (2), 163–182。 https://doi.org/10.1515/jqas-2019-0056Yurko, R., Ventura, S., & Horowitz, M. (2019). nflWAR：一种可复现的美式橄榄球进攻球员评估方法。《体育定量分析杂志》， 15 (3), 163–183。 https://doi.org/10.1515/jqas-2018-0010Zivkovic, J. (2022). chessR：提取、清理和分析在线棋局数据的函数。 https://github.com/JaseZiv/chessR