arXiv:2301.04014v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

Ozawa 的主体间性定理对 QBism 个体主体视角的反驳

Andrei Khrennikov 林奈大学，物理与认知科学数学建模国际中心 V¨axj¨o，SE-351 95，瑞典

2023年1月11日

摘要

QBism 的基础性主张——“对可观测量的测量结果是个人的”——与 Ozawa 的主体间性定理（OIT）直接矛盾。后者（在量子形式体系内证明）指出，两位观察者，即 QBism 术语中的两个主体，对处于量子态 ψ 的系统 S 上同一可观测量 A 进行联合测量，应当得到相同的结果$A = x.$。在 Ozawa 的术语中，这一结果具有主体间性，不能被视为个人的。这是对 QBism 的有力反驳，QBism 若不更新其原则便无法应对。理解 OIT 对 QBism 基础的影响，关键在于量子可观测量这一概念。本文补充讨论了精确的冯·诺伊曼量子可观测量与不精确的噪声量子可观测量之间的差异，前者和后者分别由投影值测度和正算子值测度表示。此外，我们还讨论了 OIT 对量子力学哥本哈根诠释的影响。

1 引言

本文继续推进我对 QBism 基础的批判性分析（关于 QBism 的基本内容，参见例如 [1]–[4] ）。本文与我此前发表的两篇文章 [5, 6], 一样，直接批评测量结果的个体主体视角 [7]。我此前的评估

促使 QBism 支持者明确主体个体性的层级。与一般的主观概率论不同，主体的范围应受到限制，至少应限于受过量子理论基础教育的主体。因此，住在西伯利亚村庄、忙于打猎的 Ivan，不能被视为 QBism 的主体。

现在，我打算借助 Ozawa 的主体间性定理（OIT）[8]来反驳 QBism。QBism 关于“对某个可观测量进行测量的结果是个人的”这一说法，与 OIT 直接矛盾。这个定理尚不广为人知，本文的目的之一便是介绍这一理论。OIT 指出，两位观察者——按照 QBism 的术语，即两位主体——对处于量子态 ψ 的系统 S 上的同一可观测量 A 进行联合测量，应以概率 1 得到相同的结果 $A = x$ 。因此，结果具有主体间性 [8], ，将量子观测的结果视为主体的个人体验并不自然。

OIT 是在量子形式体系内证明的，是一项严格的数学论断。但与许多对量子基础产生影响的定理一样，它的解释并非显而易见。分析 OIT 对 QBism 的影响，离不开量子测量理论的基础，尤其是量子可观测量这一概念。因此，本文还包含补充讨论，着重阐明精确的冯·诺依曼量子可观测量与不精确的噪声量子可观测量之间的区别；它们分别以投影值测度（PVM）和正算子值测度（POVM）在数学上表示。OIT 讨论的是能够进行精确联合测量的主体。对于这样的主体，测量结果不再是个人的，而具有主体间性。

我们的分析得出的结论是，QBism 应当考虑 OIT，并据此调整其理念。不过，如何调整？请见第 6 节。因此，我赞同文章[8]中对 QBism 的批评。不过，我不同意其关于 OIT 与哥本哈根诠释相矛盾的结论；相反，OIT 与这一诠释可以和谐共存。这里还需指出，QBism 在根本上不同于哥本哈根诠释 [2]。

我们直接从 OIT 的数学表述及其证明开始。我们将尽可能简要地介绍（详情见[8] ）。间接测量方案是 OIT 的核心。接下来，我们回顾量子可观测量的概念，即厄米算子或投影值测度，以及广义量子可观测量（正算子值测度），并介绍生成这些量的间接测量方案。

2 量子可观测量与广义量子可观测量

在量子力学的公理体系中，冯·诺伊曼 [9] 将量子可观测量引入为作用于复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的厄米算子，而复希尔伯特空间是系统的状态空间。[1] 谱分解是这一框架的核心部分。

我们将讨论范围限定为由具有完全离散谱的算子表示的可观测量 $X \subset \mathbb{R}$. 此处

$$A = \sum_x x E_A(x), \tag{1}$$

其中 $E_A(x)$ 是对应于特征值 x 的特征子空间上的投影；这些投影算子构成单位分解:

$$I = \sum_x E_A(x). \tag{2}$$

玻恩规则确定了系统 $\mathcal{S}$ 处于量子态 ψ 时测量结果的概率,

$$P(A = x|\psi) = \langle \psi | E_A(x) | \psi \rangle. \tag{3}$$

后来，人们提出了广义量子可观测量。这类可观测量由正算子值测度表示。我们将讨论范围限定为定义域离散的正算子值测度 X. 正算子值测度是一个映射$x \to \Pi(x)$：对于每个 $x \in X$， $\Pi(x)$ 都是正压缩自伴算子（即 $0 \leq \Pi(x) \leq I$）（称为效应），且这些效应构成单位分解

$$\sum_x \Pi(x) = I. \tag{4}$$

该映射在集合 X. 的所有子集构成的代数上定义了一个算子值测度。对于 $O \subset X$,

$$\Pi(O) = \sum_{x \in O} \Pi(x).$$

条件（4）是算子测度对应于通常概率测度归一化为 1 的条件。

[1]他为什么选择厄米算子来数学表示量子理论中的可观测量？此外，他只将这类可观测量视为真正的量子可观测量。我猜他遵循了薛定谔的量子化规则，将位置和动量可观测量表示为 L_2空间中的厄米算子。根据这一规则，相空间上的实值函数$A = A(q, p)$所表示的每个经典可观测量，都对应于 L_2空间中的一个厄米算子。

正算子值测度 Π 表示可观测量 A的测量统计，其遵循以下对玻恩定则的推广：

$$P(\Pi = x|\psi) = \langle\psi|\Pi(x)|\psi\rangle. \tag{5}$$

我们指出，等式 (4) 意味着

$$\sum_x P(A = x|\psi) = 1.$$

任意量子可观测量 A 也可以表示为一种特殊类型的正算子值测度——投影值测度 E_A =(E_A(x))。

由投影值测度给出的量子可观测量，曾被冯·诺伊曼 [9] 解释为描述精确测量。而由非投影值测度给出的广义可观测量，则被解释为代表不精确测量。在冯·诺伊曼的 [9], 理论中，测量精度的概念并未得到完全形式化。直到最近，这一概念才得到一致的形式化表述[11]。

我们将坚持使用“量子可观测量”这一表述，指冯·诺伊曼 [9] 公理化引入并由投影值测度表示的可观测量；而“广义量子可观测量”则专指正算子值测度。

3 间接测量方案中的广义量子可观测量

间接测量方案包含以下组成部分

- 系统 $\mathcal{S}$ 和用于测量某个可观测量 A的仪器$\mathcal{M}$ 的状态空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ ；
- 表示系统 $\mathcal{S} + \mathcal{M}$相互作用动力学的演化算符 $U = U(t)$;
- 给出仪器 $\mathcal{M}$.指针输出的仪表可观测量 M

这里，量子可观测量 A 和 M 可表示为投影值测度，E_A =(E_A(x)) E_M =(E_M(x))，其中 $E_A(x)$ $E_M(x)$分别是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 中的投影算子。假设复合系统的演化由薛定谔方程驱动，因此演化算符是酉算符。

形式上，对于可观测量 A 的间接测量模型（在 [10] 中作为“测量过程”引入）是一个四元组

$$(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$$

其中 $|\xi\rangle \in \mathcal{K}$ 表示仪器态。

我们探讨海森堡绘景。为了描述测量仪的演化，我们将其表示在复合系统的状态空间中，即表示为$I \otimes M$. 测量仪可观测量的演化为

$$M(t) = U^{\star}(t)(I \otimes M)U(t). \tag{6}$$

根据玻恩规则

$$P(M(t) = x|\psi\xi) = \langle\psi\xi|E_{M(t)}(x)|\psi\xi\rangle. \tag{7}$$

这是由仪器执行、并由测量仪给出的测量结果的概率分布。原则上，可以忽略将测量过程表示为系统-测量仪器相互作用这一步骤，而只处理系统态。在这种图景中，我们使用由正算子值测度给出的广义可观测量。测量仪可观测量生成正算子值测度 $\Pi = (\Pi(x))$

$$\Pi(x) = \langle\xi|E_{M(T)}(x)|\xi\rangle, \tag{8}$$

其中 T 是完成该实验所需的时间。

由正算子值测度给出的广义可观测量的概率分布由式（5）确定。

通常，测量过程产生的概率分布与该过程旨在测量的量子可观测量 A 的概率分布并不一致，即通常

$$P(\Pi = x|\psi) = \langle\psi|\Pi(x)|\psi\rangle \neq P(A = x|\psi) = \langle\psi|E_A(x)|\psi\rangle, \tag{9}$$

我们指出，正如 Ozawa [10], 所证明的，任何广义可观测量（正算子值测度）都可以通过间接测量方案实现。通常，人们只使用广义可观测量，而忽略间接测量方案。这简化了讨论，但可能导致对量子测量理论基础的误解。

4 概率可再现性条件

定义。若测量过程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ 再现量子可观测量 A （精确冯·诺伊曼可观测量）的概率分布，则称其满足

$$P(A = x|\psi) = P(M(T) = x|\psi\xi). \tag{10}$$

在这种情况下

$$\langle\psi\xi|E_{M(T)}(x)|\psi\xi\rangle = \langle\psi|E(x)|\psi\rangle. \tag{11}$$

or

$$\langle\psi|\Pi(x)|\psi\rangle = \langle\psi|E(x)|\psi\rangle, \tag{12}$$

因此,

$$\Pi(x) = E(x),$$

命题。测量过程满足概率可复现条件，当且仅当相应广义可观测量可表示为被测量子可观测量 $A.$ 的投影值测度 E_A

5 量子可观测量结果的主体间性

根据 [8], ，考虑两位远程观察者 O_1 和 O_2 对系统 $\mathcal{S}$ 进行联合测量；用数学术语来说，这意味着相应测量过程的测量仪量子可观测量彼此对易，

$$[M_1(t), M_2(t)] = 0.$$

此处，每台仪器都有其自身的状态空间，即 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2.$ 。我们将此类测量称为局域测量。在这种情况下，联合概率分布是良定义的

$$P(M_1(t) = x, M_1(t) = y|\psi\xi_1\xi_2) = \langle\psi\xi_1\xi_2|E_{M_1(t)}(x)E_{M_1(t)}(y)|\psi\xi_1\xi_2\rangle \tag{13}$$

假设两位观察者都对由投影值测度 $E_A =$（E_A（x））给出的量子可观测量 A 进行精确测量。那么，相应的正算子值测度 Π_j、$j = 1$，2，与 E_A 相同:

$$\Pi_1(x) = \Pi_2(x) = E_A(x). \tag{14}$$

这个等式意味着:

定理。（OIT [8]）两位观察者对系统 $\mathcal{S}$ 上的同一量子可观测量 A 进行联合的局部概率可重复测量时，应以概率 1 得到相同的结果:

$$P(M_1(T) = x, M_1(T) = y|\psi\xi_1\xi_2) = \delta(x - y)P(E = x|\psi) = \|E(x)\psi\|^2. \tag{15}$$

6 主体间性对 QBism 的挑战

我们先引用 Fuchs 和 Schack [2] 的如下论述:

“QBism的基本原始概念是经验。按照QBism，量子力学是一种理论，任何主体都可以用它来评估自己对个人经验内容的预期。...

在QBism中，测量是主体为引发某种经验而采取的行动。测量结果就是由此引发的经验。因此，测量结果对于采取测量行动的主体而言是个人的。从这个意义上说，量子力学和概率论一样，是一种单用户理论。测量不会揭示预先存在的数值，而是在测量行动中创造测量结果。”

然而，OIT意味着，对于准确的局域可观测量，测量结果具有主体间性，这正是对QBism的强烈反驳。该理论并未涉及个人经验，因此QBism支持者应当回应这一反驳。我的建议（另见 [7]）是遵循Brukner的研究 [12]：他不以个体主体及其个人经验为出发点，而是采用一个普适主体。我想指出，在一般决策理论中，考虑普适主体是很常见的。然而，对QBism支持者而言，这种解决方案似乎不可接受，因为它会破坏QBism私人主体性视角的一致性。这会使QBism更接近Zeilinger-Brukner量子力学信息诠释 [13, 14, 15]。

这一对 QBism 的反对意见在基础层面颇有意义，并引出了关于量子可观测量概念的讨论。得益于 Helstrom、Holevo 和 Ozawa [16]–[19], [10], 的努力，以正算子值测度在数学上表示的广义量子可观测量成为量子信息论的基本工具之一。如今，人们不再强调以投影值测度表示的精确可观测量所具有的特殊地位。尤其是，QBism 将可观测量的概念等同于由正算子值测度给出的广义量子可观测量。然而，QBism 与 OIT 之间的冲突促使人们强调，精确的投影值测度才是真正的量子可观测量，而那些不精确的正算子值测度所表示的广义量子可观测量，则应视为不精确且带噪声的可观测量。当然，这是众所周知的事实，但 OIT 与 QBism 之间的冲突恰好提供了强调这种区别的良机。

精确的投影值测度可观测量与带噪声的正算子值测度可观测量之间的这种区别，对 QBism 意味着什么?

我对这一情形的理解如下。OIT 仅适用于精确的 PVM 可观测量；对于广义量子可观测量，它

可能被违反，而且通常无法为观察者 O_1 and O_2. 指定相同的测量结果。因此，对于这类广义可观测量，QBism 关于观察者（主体）个人经验的理念仍然可以保留。但是，个体性从何而来？个人经验源自噪声！因此，不同观察者进行不精确测量时，会与不同的噪声环境耦合。这只是我个人对 IOT 对 QBism 所产生影响的看法。

总之，QBism 或许可以通过考虑能够进行精确测量的普适主体来回应 OIT 挑战；主体经验的个体性可归结为测量过程中产生的噪声的个体性。

7 主体间性与哥本哈根诠释

按照哥本哈根诠释（至少按照玻尔的版本[2]），测量结果不能被视为系统的客观属性 $\mathcal{S}$. 。它们是系统与仪器相互作用这一复杂过程的结果，参见玻尔 [21]:

“这一关键点.....意味着，原子客体的行为与其同测量仪器的相互作用之间，不可能截然分开；这些仪器用于界定现象出现的条件。事实上，典型量子效应的个体性，恰当地体现在这样一种情形中：任何试图将现象细分的做法，都必然要求改变实验安排，从而引入客体与测量仪器之间新的相互作用可能性，而这些可能性原则上无法加以控制。因此，在不同实验条件下获得的证据无法纳入同一幅图景来理解，而必须视为互补；因为只有全部现象的整体才能穷尽关于这些客体的可能信息。”

间接测量方案与哥本哈根诠释完全吻合。因此，OIT 与之相矛盾令人惊讶。OIT 与哥本哈根诠释之间的冲突，在 OIT 论文 [8] 的结论部分得到了强调：

[2]正如Plotnitsky [20], 所强调的，我们应当认识到人们对哥本哈根诠释持有多种不同观点。他建议将其称为哥本哈根精神的诠释。就连玻尔一生中也曾数次改变自己的观点 [20]。

“Schr¨odinger *[22]* 认为，测量并不能确定可观测量预先存在的取值，测量只需能够重复即可。自量子力学创立以来，这一观点长期被视为量子力学的基本原则之一。与此相反，我们已经证明，任何概率可重复的测量确实都能确定可观测量所具有的取值，无论是否满足可重复性。”

我不同意 [8] 的作者。这种误解的根源在于忽视了物理理论的双层结构：本体论层面和认识论层面 [23, 24, 25]。前者关乎实在本身，后者关乎对实在的认识。玻尔和 Schr¨odinger 讨论的是本体论的实在，认为不可能为量子系统赋予预先存在的值；这里的“预先存在”是“客观的”“本体论的”的同义词。但 OIT 讨论的并非这类值，而是认识论的实在，即关于测量可能结果的知识之实在。

因此，在我看来，OIT 完全可以与哥本哈根诠释并存。

但是，正如前文所强调的，OIT 对 QBism 构成了挑战，因为 QBism 立足于量子现象科学描述的认识论层面。此处正好可以提醒大家，QBism 应当与哥本哈根诠释截然区分，参见 Fuchs 和 Schack [2]:

“根据 QBism，量子力学可以应用于任何物理系统。QBism 一视同仁地看待所有物理系统，包括原子、分束器、斯特恩-盖拉赫磁体、制备装置、测量仪器，乃至有生命的存在和其他主体。在这一点上，QBism 与哥本哈根诠释的各种版本有着根本区别。”

致谢

本文是基于与小泽正直的长期讨论撰写的，我谨向他致谢；Arkady Plotnitsky 向我详细介绍了哥本哈根诠释和玻尔的观点，我谨向他致谢；Christopher Fuchs 在第二届 V¨axj¨o 会议（2001年）上激发了我对 QBism 的兴趣，如果本文会令 QBism支持者感到不快，我深表歉意；我也感谢 Harald Atmanspacher，是他向我介绍了用于表征自然现象的本体论—认识论方法。

参考文献

[1] Fuchs, C. A. 和 Schack, R.（2011年）。通往量子态空间的量子贝叶斯路径，《Found. Phys.》41，第345页。[2] Fuchs, C. A. 和 Schack, R.（2014年）。QBism与古希腊人：为何量子态并不代表物理实在的一个要素，《Phys. Scr.》，90，015104。[3] Fuchs, C. A.、Mermin, N. D. 和 Schack, R.（2014年）。QBism导论及其在量子力学局域性问题上的应用，《Am. J. Phys.》82，第749页。[4] DeBrota, J. B.、Fuchs, C. A.、Pienaar, J. L. 和 Stacey, B. C.（2021年）。作为贝叶斯一致性的量子扩展的玻恩定则。《Physical Review A》，104(2)，022207。[5]Khrennikov, A.（2018年）。外部观察者对QBism、其可能的修正及新应用的思考，载于：量子基础，STEAM-H：科学、技术、工程、农业、数学与健康；Khrennikov A. 和 Toni B. 编；Springer，Cham，第93–118页。[6] Khrennikov, A.（2018年）。迈向对QBism的更好理解，《Found. Sc.》23（1），181–195。[7] Khrennikov, A. 关于蔡林格–布鲁克纳量子力学信息诠释的思考。《Found Phys》46，836–844（2016年）。[8] Ozawa, M.（2019年）。量子测量结果的主体间性。https://arxiv.org/abs/1911.10893[9]von Neuman, J.（1955年）。《量子力学的数学基础》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿） [最初发表于：《量子力学的数学基础》，Springer，柏林，1932]。[10] Ozawa, M.（1984年）。连续可观测量的量子测量过程。《J. Math. Phys.》25，79–87[11] Ozawa, M. 量子均方误差的可靠性与完备性。《Quant. Inf.》5，文章编号：1（2019年）[12] Brukner, C. 论量子测量问题。https://arxiv.org/abs/1507.05255。[13] Zeilinger, A.：量子力学的一项基础原理。《Found. Phys.》29，31–641（1999年）[14] Brukner, C.、Zeilinger, A.：马吕斯定律与量子信息。《Acta Phys. Slovava》49，647–652（1999年）

[15] Brukner, C., Zeilinger, A.：信息不变性与量子概率。《Found. Phys.》39，677（2009）[16] C. W. Helstrom，《量子检测与估计理论》。纽约：Academic，1976。[17] A. S. Holevo，《量子理论的概率与统计方面》。阿姆斯特丹：North-Holland，1982。[18] M. Ozawa，一般量子系统的最优测量。《数学物理报告》18，1980，11–28[19]M. Ozawa，测量的实现与标准量子极限。见《压缩光与非经典光》，P. Tombesi 和 E. R. Pike 编，纽约：Plenum，1989，第263–286页，arXiv:1505.01083 [量子物理]。[20] Plotnitsky, A.（2012）。尼尔斯·玻尔与互补性：导论。柏林和纽约：Springer。[21] Bohr, N.：（1987）。《尼尔斯·玻尔哲学文集》，3卷。（Ox Bow Press，康涅狄格州伍德布里奇）。[22] 薛定谔，E.《量子力学的现状：薛定谔“猫悖论”论文译文》（译者：J. D. Trimmer）。《美国哲学学会会刊》124，323–338（1980）。[原文发表于：Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik，《自然科学》23，807–812、823–828、844–849（1935）]Atmanspacher, H.（1994）。本体论／认识论之分是否足以全面描述量子系统？载于《现代物理学基础研讨会》（第15–32页）。[24] Atmanspacher, H. 和 Primas, H.（2003）。认识论与本体论的量子实在。载于《时间、量子与信息》（第301–321页）。柏林：Springer。[25] Khrennikov, A.（2017）。从亚量子本体论出发的量子认识论：从经典随机场理论看量子力学。《物理学年鉴》377，147–163。