arXiv:2301.04040v1 [math.DG] 10 Jan 2023

# 托普利兹算子与完整渐近挠率形式

Qiaochu Ma

Abstract. 本文旨在研究与某一系列平坦丛相关的解析挠率形式的渐近展开 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$。我们证明了完整展开的存在性，并给出次主导项的公式，而 Bismut-Ma-Zhang [9] 已经研究了一阶展开，并将首项表示为一个可局部计算的微分形式的积分。

## Introduction

0.1. 背景。20世纪30年代，Reidemeister挠率由 Reide- meister [39] 和 Franz [19] 在研究透镜空间时引入。Reidemeister挠率是第一个非同伦不变的同胚不变量。设 $(F,\nabla^F)$ 是紧流形 $X$ 上的酉平坦向量丛。我们假设 $H^\bullet(X,F)=0$。Reidemeister挠率是一个实数，由取值于 $F$ 的单纯复形通过 $X$ 的三角剖分得到，事实证明它与三角剖分无关。

Ray 和 Singer 提出了 Reidemeister 挠率是否存在解析解释的问题。他们将解析挠率 [38] 定义为 Hodge 拉普拉斯算子正则化行列式的交错乘积，并猜想，对于酉平坦丛，该解析挠率与 Reidemeister 挠率相等。Cheeger [16] 和 M¨uller[32] 分别独立地证明了这一猜想。Bismut-Zhang [12]和 M¨uller [33]同时考虑了这一结果的推广。M¨uller [33]将其推广到 $F$ 为幺模、$X$ 定向且维数为奇数的情形。Bismut-Zhang [12] 则将其推广到任意带有厄米度量的平坦向量丛。

本文研究解析挠率的渐近性质。设 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ 是 $M$上的一族平坦向量丛，我们得到了当 $p\to+\infty$时 $F_p$ 的解析挠率的完整渐近展开。

现在我们简要介绍本文结果的背景。

在[16, 例 1.3], Cheeger 观察到了单纯复形的Reidemeister挠率与其同调挠子子群大小之间的关系。Bergeron-Venkatesh [3]利用这一关系，并讨论了李群中一列递减格所对应的对称空间商的解析挠率的渐近行为，研究了算术群同调中挠元素大小的增长。这是解析挠率在算术中的首次应用。

在 [34], M¨uller 将紧致三维双曲流形上一族平坦丛的解析挠率渐近行为视为 Bismut-Vasserot 关于全纯挠率 [11] 的结果的实类比。设 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 为截面曲率恒定的紧致三维双曲流形 $-4$。对于 $p\in\mathbb{N}^*$，令 $F_p=\mathrm{Sym}^p\mathbb{C}^2$，其中 $\mathbb{C}^2$ 是 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 上与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的典范表示相关联的平坦丛，$\mathrm{Sym}^p$ 表示 $p$ 次对称幂。令 $\mathcal{T}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3,\nabla^{F_p})$

是这个的 解析挠率 $F_p$。利用塞尔伯格迹公式，M¨uller [34] 得出

$$\lim_{p\to+\infty} p^{-2}\mathcal{T}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3,\nabla^{F_p}) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3). \tag{0.1}$$

在 [8] 和 [9], 中，Bismut-Ma-Zhang 为任意紧流形上的一族平坦向量丛 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ 给出了一般性构造，并将解析挠率的渐近行为表示为底流形上一个局部可计算微分形式的积分。事实上，他们在 Bismut-Lott 解析挠率形式的一般框架下开展了研究 [7]。

我们的主要结果是将 Bismut-Ma-Zhang 的工作加以扩展，从而得到挠率的完整展开，并给出次主导项的显式公式。下面我们将详细说明。

0.2. 挠率完整展开的存在性。在[7], 中，Bismut-Lott 将解析挠率形式构造为 Ray-Singer 挠率的族扩展。设 $\pi\colon\ M\to S$ 是一个纤维为紧流形 $X$ 、维数为 $m$ 的流形纤维化。我们在相对切丛 $TX$ 上取度量 $g^{TX}$，并取水平丛 $T^HM\subset TM$，使得

$$TM = T^HM\oplus TX. \tag{0.2}$$

对于 $M$ 上任意带有厄米度量 $g^F$ 的平坦向量丛 $(F,\nabla^F)$，Bismut-Lott 的挠率形式是一个微分形式 $\mathcal{T}(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F)\ \in\Omega^{\mathrm{even}}(S)$，其 0 次分量 $\mathcal{T}_0(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F)$ 是一个函数，它将 $b\in S$ 映射为纤维 $(X_b,g^{TX_b})$ 上的 Ray-Singer 挠率，该挠率是利用平坦丛 $(F|_{X_b},\nabla^F|_{X_b},g^{F|_{X_b}})$ 计算得到的。

设 $N$ 是一个紧致 K¨ahler 流形，$\dim_{\mathbb{C}}N=n$, $L$ 是一个正全纯线丛， $\xi$ 是 $N$ 上的一个全纯向量丛。设 $G$ 是一个李群，它在 $N$ 上全纯作用，且此作用可提升到 $L$ 和 $\xi$。设 $P_G\to M$ 是一个平坦主 $G$-丛。令 $\mathcal{N}=P_G\times_G N$，我们有一个自然投影 $q$: $\mathcal{N}\to M$，以及实相对切丛 $T_{\mathbb{R}}N=\ker q_{*}$。对于 $p\in\mathbb{N}^*$，设 $L^p$ 是 $L$ 的 $p$ 次张量幂。令 $(F,\nabla^F)$ 是 $M$ 上另一个带度量 $g^F$ 的平坦向量丛。令

$$F_p = \left(P_G\times_G H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)\right)\otimes F, \tag{0.3}$$

其中， $G$ 自然作用于 $H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)$。我们总结如下几何设置：我们有一个由 $P_G$ 和 $\nabla^F$ 上的平坦联络诱导的平坦联络$\nabla^{F_p}$ 。我们还

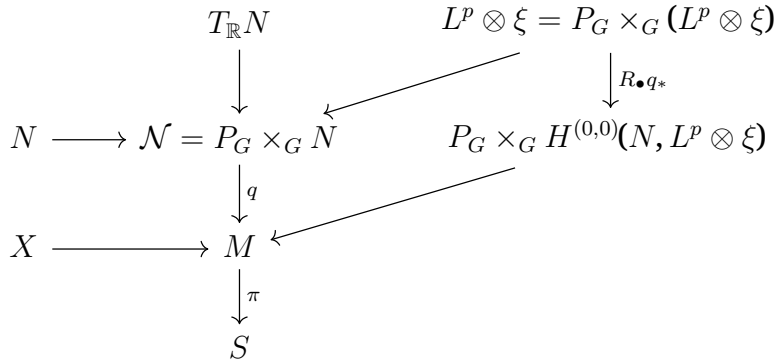


FIGURE 1.

用 $L$ （分别用 $\xi$）表示 $P_G\times_G L$ （分别用 $P_G\times_G\xi$）。给定 $T_{\mathbb{R}}N$ 上的度量 $g^{T_{\mathbb{R}}N}$，它诱导出沿纤维的体积形式 $dv_N\in\Omega^{2n}(\mathcal{N})$，以及 $P_G$。设 $L$（分别为 $\xi$）上有度量 $g^L$ （分别为 $g^\xi$），且这些度量定义在 $\mathcal{N}$ 上。由 $(dv_N,g^L,g^\xi)$ 和 $g^F$ 给出的 $H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)$ 上的 $L^2$-度量，在 $F_p$ 上定义了一个度量 $g^{F_p}$。

在 [9, 定义 9。13], Bismut-Ma-Zhang 为$g^L$ （参见 § 3.5）引入了一个非退化条件。在该条件下，Bismut-Ma-Zhang [9, §4.3, §9。10] 证明，对于$p \in \mathbb{N}^*$ 充分大时，有 $H^\bullet(M, F_p) = 0$。在本节余下部分，我们始终假设 $L$ 满足非退化条件。

对于 $a \in \mathbb{R}$，设 $\psi_a$ 是 $\Lambda^\bullet(T^*S$的自同构，使得若 $\alpha \in \Lambda^k(T^*S)$，则$\psi_a\alpha = a^k\alpha$。设 $o(TX$是 $TX$的定向线。我们的主要结果如下定理（见定理5.1）。

定理 0.1. 存在局部可计算的微分形式 $W^{L,\xi}_{,i} \in \Omega^\bullet(M, o(TX))$，使得对于任意 $k$, $\ell \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，当 $p \to +\infty$ 时，我们有

$$\left| p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right) - \sum_{i=0}^{k} p^{-i}\int_X W_i^{L,\xi}\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)} \leqslant Cp^{-k-1}. \tag{0.4}$$

注意，若 dim $X = m$为奇数，则根据 Bismut-Lott 的反常公式 [7,定理 3.24],，当 $p \in \mathbb{N}^*$ 足够大时，$\mathcal{T}\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right) \in \Omega^{\mathrm{even}}(S)/d\Omega^{\mathrm{odd}}(S)$ 是一个拓扑不变量，且它与 $(T^HM, g^{TX}, g^{F_p})$ 无关。因此，对于 $i \in \mathbb{N}$，每个 $W^{L,\xi}_{,i}$都是一个拓扑不变量。在 [9, 定理 9.32], 中，Bismut-Ma-Zhang 对 $k = 0$ 证明了定理 0.1，并给出了 $W^{L,\xi}_{,0}$ 的显式公式。

Let $\widehat{M} \to S$ 是一个纤维为 $X$，并设 $\Gamma$ 是一个离散群，它在 $\widehat{M}$ 上按纤维自由且适当不连续地作用，满足 $\Gamma\backslash M = M$。如 (5.14) 中所示，我们有Γ-挠率形式 $\mathcal{T}^\Gamma\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right) \in \Omega^{\mathrm{even}}(S)$（另见 [1], [24] 和 [31]）。那么，$\mathcal{T}^\Gamma\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right)$ 具有与 (0.4) 中相同的渐近展开。事实上，我们有如下更强的结果（见定理 5.2）。

定理 0.2。两种挠率的渐近行为仅相差一个指数衰减项：存在 $a > 0$，使得对于 $\ell \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，当 $p \to +\infty$ 时，我们有

$$\left|\mathcal{T}^\Gamma\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right) - \mathcal{T}\left(T^HM, g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right)\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)} \leqslant Ce^{-ap}. \tag{0.5}$$

定理 0.2 最初由 Bismut-Ma-Zhang [9, § 7.6] 在 $S = \{\mathrm{pt}\}$ 为一点时证明。若 $S = \{\mathrm{pt}\}$ 是一个紧致局部对称流形，且 $F_p$ 由不可约 $\boldsymbol{U}$-表示的最高权 $\lambda \in \mathfrak{u}^*$ 的倍数诱导，其中 $\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的紧实形式，其李代数为 $\mathfrak{u}$，Bismut-Ma-Zhang [9, 命题 8.12] 证明了非退化条件与 $W_{\boldsymbol{U}} \cdot \lambda \cap \mathfrak{t}^* = \emptyset$相同，其中$W_{\boldsymbol{U}}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的魏尔群，而 $\mathfrak{t}$ 是 $\boldsymbol{K}$中极大环面的李代数；这正是 $\theta\Lambda \neq \Lambda$ [14, 命题 II.6.12], 中的强无环条件。Müller-Pfaff[35, 命题 1.2、1.3] 给出了 (0.5) 的一种新证明，并证明了 $\mathcal{T}^\Gamma\left(g^{TX}, \nabla^{F_p}, g^{F_p}\right)$ 是 $p \in \mathbb{N}^*$的多项式，另见 Liu [22, 定理 7.4.3] ，其中给出了这一多项式性质的另一种证明。

0.3. 约化 $G$的 $W^{L,\xi}_{,1}$ 的显式公式。现在我们介绍另一项主要结果：当 $G$ 是连通约化线性李群，$\mathrm{rk}\xi = 1$ 且 $F = \mathbb{C}$ 平凡时，$W^{L,\xi}_{,1}$ 的显式公式。

设 $G$ 是一个连通约化线性李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $K \subset G$ 是 $G$的一个极大紧子群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。我们有 Cartan 分解$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$。设 $U$ 是 $G$ 的一个紧实形式，其李代数为$\mathfrak{u} = \sqrt{-1}\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$。

回忆一下，$N$是一个维数为$_{\mathbb{C}} N = n$ 的紧复流形，且 $(L, g^L)$ 是 $N$ 上的一个正线丛，其第一陈形式为 $c_1(L, g^L)$。我们进一步假设

$U$ 在 $N$ 上全纯作用，且该作用提升为 $L$上的全纯酉作用。于是， $c_1(L,g^L)$ 是一个 $U$-不变形式。令 $\mu_L\colon N\to\mathfrak{u}^*$ 为由 Kostant 公式（6.7）得到的相应动量映射。

令 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 为 $P_G$ 上取值于 $\mathfrak{g}$ 的平坦联络形式。令 $P_K$ 为 $P_G$ 到 $K$-主丛的约化。设 $\mathfrak{g}_r=P_K\times_K\mathfrak{g}$。将 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 关于 Cartan 分解投影到 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{k}$ 上，得到 $\theta^{\mathfrak{g}}=\theta^{\mathfrak{p}}+\theta^{\mathfrak{k}}$。

对于 $A\in\mathfrak{u}$，令 $R_L(A)$ 为 Duistermaat-Heckman 积分

$$R_L(A)=\int_N\exp\big(2\pi i\langle\mu_L,A\rangle+c_1(L,g^L)\big),\tag{0.6}$$

于是我们自然地将 $R_L(\cdot)$ 延拓为定义在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\cong\mathfrak{u}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上的全纯函数 .

令 $S\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对称代数，并用 $\overline{S}\mathfrak{g}$ 表示其形式完备化。自然地， $S\mathfrak{g}$ 可识别为 $\mathfrak{g}$ 上具有常系数的实微分算子代数。于是，$\overline{S}\mathfrak{g}$ 自然作用于 $R_L(\cdot)$（另见 [9, § 1.4]）。

令 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 为 $TX$ 的局部标准正交标架，其对偶标架为 $\{e^i\}_{i=1}^m$。令 $\widehat{TX}$ 为 $TX$ 的另一个副本，并令 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 为 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 在 $TX$ 上的限制。设

$$\begin{aligned}|\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}|^2&=\sum_{i=1}^m\big(\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}(e_i)\big)^2\in\mathscr{C}^\infty(M,S^2\mathfrak{g}_r),\\ \widehat{\theta}^{\mathfrak{p},2}&=\frac{1}{2}\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j[\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}(\widehat{e}_i),\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}(\widehat{e}_j)]\in\mathscr{C}^\infty(M,\Lambda^2(\widehat{T^*X})\otimes\mathfrak{g}_r).\end{aligned}\tag{0.7}$$

令 $\nabla^{\mathfrak{g}_r,\,u}$ 为由 $\theta^{\mathfrak{k}}$诱导的 $\mathfrak{g}_r$ 上的联络。对于 $t\geqslant 0$，令 $\sigma_t$ 为$\Lambda^\bullet(T^*M)\,\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(\widehat{T^*X})\otimes S\mathfrak{g}_r$的一个截面，其定义如下：

$$\sigma_t=-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\theta^{\mathfrak{p},2}+\sqrt{t}\nabla^{\widehat{T^*X}\otimes\mathfrak{g}_r,u}\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}+t|\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}|^2+t\widehat{\theta}^{\mathfrak{p},2}.\tag{0.8}$$

记 $\int^B\colon\Lambda^\bullet(TM)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(\widehat{TX})\to\Lambda^\bullet(TM)$ 为 Berezin 积分（参见（4.58））。令 $\varphi$为 $\Lambda^\bullet(T^*M)\otimes\mathbb{C}$上的端omorphism，它将 $\alpha\in\Lambda^k(T^*M)\otimes\mathbb{C}$映射为 $(2\pi i)^{-k/2}\alpha$。

若 $\xi$是平凡线丛，则将（$W^{L,\,\xi}_{\,i}$）中（0.4）的形式 $W_i^L$记为[9,。Bismut-Ma-Zhang 定义 211] 给出了 $W_0^L$的下列公式：

$$W_0^L=-\sqrt{2\pi i}\varphi\int_0^{+\infty}\int^{\widehat{B}}\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}}{2}\exp(-\sigma_t)R_L(0)\frac{dt}{\sqrt{t}}\in\Omega^\bullet(M,o(TX)),\tag{0.9}$$

其中，算子 $\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\widehat{\theta}^{\mathfrak{p}}}{2}\exp(-\sigma_t)\ \in\Lambda^\bullet(T^*M)\,\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(\widehat{T^*X})\otimes\overline{S}\mathfrak{g}_r$作用于函数$R_L(\cdot)$，并在 0 处取值。

现在我们假设 $(\xi,g^\xi)$ 是 $N$ 上的全纯 Hermitian 线丛。设 $(TN,g^{TN})$ 是 $N$ 的全纯切丛，其中 $g^{TN}$由 $c_1(L,g^L)$ 诱导：若 $A\in TN$，则 $g^{TN}=-ic_1(L,g^L)(A,\overline{A})$。我们假设 $U$ 在 $N$ 上的作用提升为对 $(\xi,g^\xi)$ 和 $(TN,g^{TN})$ 的全纯酉作用，其动量映射分别为 $\mu_\xi$ 和 $\mu_{\det TN}$。

形式上，对于 $p\in\mathbb{N}^*$，令 $\xi^{\frac{1}{p}}$ 为 $L$ 的 $p$ 次根，并令 $(\det TN)^{\frac{1}{2p}}$ 为上同调和动量映射意义下 $\det TN$ 的 $2p$ 次根（参见（6.16）），则 $R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}},\,1}$ 和 $W^{L\otimes\xi^p\otimes(\det TN)^{-\frac{1}{2p}},\,0}_{\,1}$ 定义良好，即使 $\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}$ 可能未定义。

我们有以下关于 $W^{L,\,\xi}_{\,1}$ (参见定理 6.4)。

定理 0.3。 对于 $k=1$ 在 (0.4)中，当 $p\to+\infty$ 我们有

$$p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)=\int_X W_0^{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big)\in\Omega^\bullet(S). \quad (0.10)$$

换句话说，

$$W_0^{L,\xi}+p^{-1}W_1^{L,\xi}=W_0^{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \quad (0.11)$$

在 § 6.6 我们讨论定理 0.3 在 $N$ 是 $\mathfrak{u}^*$的余伴随轨道时的一个特殊情形，并利用这一点计算 § 6.7 中若干具体例子的挠率渐近行为。

Liu 研究了紧致局部对称空间 [23] 上的等变挠率渐近行为，以及紧致局部对称轨形 [22]上的渐近挠率。全纯情形下也有类似结果：Bismut-Vasserot [10] 研究了 K¨ahler 流形上正线丛幂次递增时相应全纯挠率的渐近行为，并给出了首项公式。这一渐近展开在 Gillet–Soul´e [21]的算术 Hilbert–Samuel 定理中发挥了重要作用。他们还在 [11], 中推广了结果，将正线丛的幂次替换为 Griffiths 正全纯向量丛的对称幂。在 [18], 中，Finski 将 [10] 推广到完整渐近展开，并给出了展开式第二项的公式。Puchol [36] 研究了全纯挠率形式的渐近行为，将 [10, 11] 推广到族的情形。Savale [40, 41] 利用半经典分析得到了 eta 不变量的渐近行为。

0.4. 主要技术。 现在我们简要介绍证明定理 0.1-0.3 所用的技术，以及本文的主要内容。

0.4.1. Toeplitz 算子。 我们回顾 Toeplitz 算子理论（见 § 2）。尤其是，关键结果之一是托普利兹算子的指数增长（见定理 2.7），该结果用于对算子进行一致估计。

0.4.2. 谱隙。 在非退化条件下（见§ 3.5），Bismut-Ma- Zhang [9, §9.10] 证明了 Hodge-de Rham 拉普拉斯算子（见（1.13））具有谱隙： $D^{F_p}{}_X{}^2\geqslant Cp^2$ 当 $p\in\mathbb{N}^*$ 足够大时，这一条件在分析中至关重要，例如，它确保 $W^L{}_i{}^\xi$ 在（0.4）中有定义（见定理 5.1）。

0.4.3. 解析局部化方法。 定理 0.1 和 0.3 的证明依赖于对 Bismut-Ma-Zhang 论证的进一步改进 [9]。获得完整展开的策略是研究某些热核的局部渐近行为。我们将使用 Bismut-Lebeau 的解析局部化方法 [6]。Bismut 在族背景下发展的族局部指标理论 [4, 5]也发挥着重要作用，特别是我们采用了 [12, 第4章d）]中针对两个 Clifford 变量的重新缩放方法。

根据 [6, 第 11]和 [9, § 9.12], 中的 § 4.2，我们证明，用于定义解析挠率形式的某些热核的迹的极限（见（4.4））可以通过波算子的有限传播速度实现局部化（见 [25, 附录D]）。此外，正如在 § 4.3-§ 4.9中的分析所示，我们采用 [25, 第4]章中的技巧，获得预解式和热核高阶展开的估计。

与 [9] 和 [36], 相比，要得到首项，只需得到热迹的一致有界性和逐点收敛，然后应用控制收敛定理；而要给出如（0.4）所示的完整展开，我们需要对热核局部展开中的每一项以及余项给出精确估计。为此

最重要的技巧是在局部化和重新缩放过程中保留所得拉普拉斯算子的谱隙性质。因此，我们应在分析的每一步仔细选择参数，尤其是加权范数（见（4.78））以及相应的椭圆正则性（见定理 4.18）。

0.5. 论文结构。本文安排如下。第1节回顾 Bismut-Lott 关于解析挠率形式的主要结果。在第2节中，我们回顾关于托普利兹算子的一些结果，并分析托普利兹算子的指数的渐近行为。在第3节中，我们回顾 Bismut-Ma-Zhang 对一系列平坦丛在 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ 上的定义，这些丛是全文的主要几何对象。在第4节中，我们给出奇超联络形式$h\big(A', g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)$ 在 $p\to+\infty$时的完整展开。在第5节中，我们陈述并证明主定理，该定理给出了与 $F_p$相关的解析挠率和 $\Gamma$-挠率存在完整展开的结论。在第6节中，我们考虑 $G$ 为约化李群的情形，并给出第5节中得到的挠率渐近展开的次主导项的显式公式。

全文中，我们采用 Quillen 的超联络形式体系（参见 [37] and[4, § 1]）。若 $E=E_+\oplus E_-$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-向量空间，且 $\tau=\pm1$ 定义了 $Z_2$-分次；若$A\in\mathrm{End}(E)$，则用 $\mathrm{Tr}_s[A]$ 表示超迹：

$$\mathrm{Tr}_s[A]=\mathrm{Tr}[\tau A]. \tag{0.12}$$

对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k$和多变量 $Z=(Z_1,\cdots,Z_k)$，定义

$$|\alpha|=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i,\quad Z^\alpha=Z_1^{\alpha_1}\cdots Z_k^{\alpha_k},\quad \frac{\partial^\alpha}{\partial Z^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial Z^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial Z^{\alpha_k}}. \tag{0.13}$$

我们还采用爱因斯坦求和约定：若某项中的同一指标出现两次，则默认对该指标的所有可能取值求和。

致谢。本文是我们博士论文的主要成果，论文完成于巴黎城大学。我衷心感谢我的论文导师马晓南教授的耐心指导和诸多建议。本项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号754362）。

## 1. The analytic torsion forms

本节将概述关于解析挠率形式的主要结果，这些结果沿袭 Bismut-Lott [7], ，并推广了经典的 Ray-Singer 解析挠率 [38]。

本节安排如下。在 § 1.1 中，我们介绍光滑纤维化$\pi$： $M\to S$ ，并定义一些相关张量。在 § 1.2 中，给定一个带有厄米度量 $g^F$ 的平坦复向量丛 $(F,\nabla^F)$，我们定义一个自然的酉联络$\nabla^{F,u}$ 及其相关的奇特征形式。在 § 1.3 中，我们将德拉姆算子 $d^F$ 重新诠释为丛 $\Omega^\bullet(X,F)$ 上的平坦超联络，该丛定义在 $S$ 上。在 § 1.4 中，我们推导出奇闭形式 $h(A',g_t^{\Omega(X,F)})\in\Omega^\bullet(S)$ 的转移公式，并定义解析挠率形式。在 § 1.5 中，我们回顾 Bismut-Lott 关于该奇闭形式的 Lichnerowicz公式。

1.1. 光滑纤维化。设 $\pi\colon M \to S$ 是一个以紧纤维 $X$ 为纤维、维数为 $m$ 的光滑流形纤维化。设 $TX \subset TM$ 为纤维的切丛$X$。设 $T^HM \subset TM$为满足 (0.2) 的水平子丛，且 $P^{TX}\colon TM \to TX$为投影映射。由于 $T^HM \cong \pi^*TS$，对于 $U \in TS$，令 $U^H \in T^HM$为 $U$的水平提升，使得 $\pi_*U^H = U$。令 $T^H(\cdot,\cdot) \in \Lambda^2(TS) \otimes TX$为 $(\pi, T^HM)$ 的曲率：

$$T^H(U^H, V^H) = -P^{TX}[U^H, V^H], \quad \text{for } U, V \in TS. \tag{1.1}$$

我们还可以通过水平提升得到丛之间的一个同一化

$$\pi^*\Lambda(T^*S)\,\widehat{\otimes}\,\Lambda(T^*X) \cong \Lambda(T^*M). \tag{1.2}$$

设 $g^{TX}$和 $g^{TS}$分别是 $TX$和 $TS$上的黎曼度量。我们在 $TM$上取度量 $g^{TM} = g^{TX} \oplus \pi^*g^{TS}$及其对应的 Levi-Civita 联络 $\nabla^{TM}$。设 $\nabla^{TX}$是 $TX$上的联络，其定义见 [5, 定义 1.6]:

$$\nabla^{TX} = P^{TX}\nabla^{TM}P^{TX}, \tag{1.3}$$

并用 $R^{TX}$表示其曲率。设 $\nabla^{TS}$是 $(TS, g^{TS})$ 的 Levi-Civita 联络。设 $\nabla^{TM,\oplus}$是 $TM$上的联络，由 $\nabla^{TM,\oplus} = \pi^*\nabla^{TS} \oplus \nabla^{TX}$给出。令

$$S(\cdot) = \nabla^{TM}_{\cdot} - \nabla^{TM,\oplus}_{\cdot} \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(TM)). \tag{1.4}$$

1.2. 平坦丛及其奇形式。设 $(F, \nabla^F)$ 是 $M$ 上的复平坦向量丛，带有厄米度量 $g^F$。按照 [12, 定义 4.1], ，令

$$\omega\big(\nabla^F, g^F\big) = \big(g^F\big)^{-1}\nabla^F g^F \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(F)), \tag{1.5}$$

且其取值属于 $F$ 的自伴元素。

根据 [12, 定义 4.2、命题 4.3], ，我们得到如下酉联络$\nabla^{F,\,u}$ 在 $F$ 上，其曲率为：

$$\nabla^{F,u} = \nabla^F + \frac{1}{2}\omega\big(\nabla^F, g^F\big), \quad R^{F,u} = -\frac{1}{4}\omega\big(\nabla^F, g^F\big)^2. \tag{1.6}$$

对于 $x \in \mathbb{R}$，令

$$h(x) = x\exp\left(x^2\right), \tag{1.7}$$

令 $\varphi$ 端 态射 $\Lambda^\bullet(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$将 $\alpha \in \Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$映射到 $(2\pi i)^{-k/2}\alpha$。令

$$h\big(\nabla^F, g^F\big) = (2\pi i)^{1/2}\,\varphi\mathrm{Tr}\big[h\big(\omega\big(\nabla^F, g^F\big)/2\big)\big]. \tag{1.8}$$

定理 1.1（[7, 定理 1.8、1.9 和 1.11]）。奇形式 $h\left(\nabla^F,\ g^F\right)$是实的且闭的，其上同调类与 $g^F$ 无关。

1.3. 超联络与奇形式。 我们采用与 § 1.1 中相同的假设。令 $\Omega^\bullet(X, F)$ 为一个形式上的光滑无限维 $\mathbb{Z}$-分次向量丛，定义在 $S$上，其在 $b \in S$处的纤维为 $C^\infty(X_b, \Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F|_b$。由 (1.2) 可得 $\mathbb{Z}$-分次向量空间

$$\Omega^\bullet(M, F) \cong \Omega^\bullet(S, \Omega^\bullet(X, F)). \tag{1.9}$$

作用于 $\Omega$ 上的外微分算子 $d^{F\bullet}(M, F)$，根据 (1.9)，它可视为 $\Omega^\bullet(X, F)$ 上的平坦超联络，我们也用 $A' = d^F$ 表示它。

若 $U \in TS$，Lie 导数算子 $L_{U^H}$自然作用于 $\Omega^\bullet(X, F)$。令 $\nabla^{\Omega^\bullet(X,F)}$为 $\Omega^\bullet(X, F)$ 上的联络，使得若 $U \in TM$且 $s \in \Omega^\bullet(X, F)$,

$$\nabla^{\Omega^\bullet(X,F)}_{U^H} s = L_{U^H} s. \tag{1.10}$$

我们定义 $i_{T^H}=\frac{1}{2}f^\alpha\wedge f^\beta\wedge i_{T^H(f_\alpha,f_\beta)}$（见（1.1）），它自然作用于 $\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F$。令 $d_X^F$ 为 $\Omega$ 上的纤维外微分算子$^\bullet(X,F)$.

命题1.2（[7, 命题3.4]）。超联络 $A'(=d^F)$满足

$$A'=d_X^F+\nabla^{\Omega^\bullet(X,F)}+i_{T^H}. \tag{1.11}$$

设 $g^{\Omega^\bullet(X,F)}$为$\Omega^\bullet(X,F)$上由$(g^{TX},g^F)$诱导的 $L^2$-度量。再设 $d^{F,X^*}$为 $d_X^F$的纤维上的形式伴随算子。设 $\nabla^{\Omega^\bullet(X,F)*}$为$\nabla^{\Omega^\bullet(X,F)}$的伴随联络。通过 $g^{TX}$识别 $TX$与 $T^*X$，我们可将 $T^H$视为$\Lambda^2(T^*S)\widehat{\otimes}T^*X$的一个截面。于是 $T^H\wedge$自然作用于 $\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F$。

设 $A''$为相对于度量 $g^{\Omega^\bullet(X,F)}$而言 $A'$的伴随算子，意义见[7, § 1.4]，它也是一个平坦超联络。根据[7,命题3.7]，，我们有

$$A''=d_X^{F,*}+\nabla^{\Omega^\bullet(X,F),*}-T^H\wedge. \tag{1.12}$$

Set

$$A=\frac{1}{2}(A'+A''),\quad B=\frac{1}{2}(A''-A'),\quad D_X^F=d_X^F+d_X^{F,*}, \tag{1.13}$$

那么，$A$是$\Omega^\bullet(X,F)$上的超联络，$B$是$(\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\mathrm{End}(\Omega^\bullet(X,F)))^{\mathrm{odd}}$的一个截面，而 $D_X^F$ 是纤维上的Dirac算子。

令 $\varphi$ 表示作用在 $\Lambda(T^*S)\otimes\mathbb{C}$ 上的作用，如（1.8）所示。

定义1.3。对于 $B$ （1.13）中给出的对象，我们定义如下与（1.8）类似的奇形式：

$$h\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=(2\pi i)^{1/2}\varphi\mathrm{Tr_s}\left[h(B)\right]\in\Omega^\bullet(S). \tag{1.14}$$

1.4. 解析挠率形式。按照 [9, 第5节4], 中关于 $t>0$的做法，我们定义缩放度量 $g_t^{TX}=g^{TX}/t$及其关联度量 $g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}$于 $\Omega^\bullet(X,F)$ 上。

对于 $a\in\mathbb{R}$，令 $\psi_a$为 $\Lambda^\bullet(T^*S)$ 的自同构，使得若 $\alpha\in\Lambda^k(T^*S)$，则$\psi_a\alpha=a^k\alpha$。对于 $t>0$，置

$$C_t=\psi_{\sqrt{t}}^{-1}\sqrt{t}A\psi_{\sqrt{t}},\quad D_t=\psi_{\sqrt{t}}^{-1}\sqrt{t}B\psi_{\sqrt{t}}. \tag{1.15}$$

对于 $t>0$，令 $h\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F)_t}\big)$为与 $g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}$相对应的、如（1.14）所示的形式。由 [9,(5.28)],可得

$$h\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=(2\pi i)^{1/2}\varphi\mathrm{Tr_s}\left[h(D_t)\right]. \tag{1.16}$$

由（1.13）和（1.15），可得 $C_t^2=-D_t^2$，结合（1.7）和（1.16），得到

$$h\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=(2\pi i)^{1/2}\varphi\mathrm{Tr_s}\Big[D_t\exp\big(-C_t^2\big)\Big]. \tag{1.17}$$

令 $H^\bullet(X,F)=\oplus_{i=0}^{\dim X}H^i(X,F)$ 为 $\mathbb{Z}$-分次向量丛，其定义在 $S$上的纤维 $b\in S$为层上同调 $H^\bullet(X_b,F|_{X_b})$，该层由 $F|_{X_b}$在 $X_b$上的局部平坦截面构成。对于式（$D_X^F$ 中的纤维上的Dirac算子1.13），由霍奇定理可得

$$H^i(X,F)\cong\ker D_X^{F,2}\big|_{\Omega^i(X,F)}\quad\text{for any } i\in\mathbb{N}. \tag{1.18}$$

根据 [7, § 2a], $H^\bullet(X,F)$ 自然带有平坦联络 $\nabla^{H^\bullet(X,F)}$ 和厄米度量 $g^{H^\bullet(X,F)}$。令 $e(TX,\nabla^{TX})\in\Omega^\bullet(M)$ 为 $TX$ 的欧拉形式（见 [9,(1.43)]），并设 $h(\nabla^{H^\bullet(X,F)}\ g^{H^\bullet(X,F)})=\sum_j(-1)^j h(\nabla^{H^j(X,F)}\ g^{H^j(X,F)})$。

定理 1.4 ([7, 定理 3.16])。这些形式 $h\big(A', g^{\Omega^\bullet(X,F)}{}_t\big)$ 是实的、奇数次的且闭的，其上同调类不依赖于 $t>0$。此外，作为 $t\to 0$，我们有

$$h\big(A', g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=\begin{cases}\int_X e(TX,\nabla^{TX})h\big(\nabla^F,g^F\big)+\mathcal{O}(\sqrt{t}), & as\ t\to 0,\\ h\big(\nabla^{H^\bullet(X,F)},g^{H^\bullet(X,F)}\big)+\mathcal{O}(1/\sqrt{t}), & as\ t\to+\infty.\end{cases}\tag{1.19}$$

现在我们按照 [7, § 3.9]回顾转移过程。我们将 $M,S$ 扩展为 $\sim M=M\times\mathbb{R}_+^*, S=S\times\mathbb{R}_+^*$。根据 $\tilde{\pi}(x,s)=(\pi(x),s)$，定义 $\tilde{\pi}\colon M\to S$。令 $\rho_0\colon M\to M$，并令 $\sim\rho_1\colon M\to\mathbb{R}_+^*$ 为投影映射。令 $X$ 为 $\tilde{\pi}$ 的纤维，则有 $TX=\rho^*TX$.~，并且我们在 $M\times\{s\}$ 上赋予 $TX$ 度量 $\rho^*g^{TX}/s$。我们有

$$\nabla^{T\tilde{X}}=\rho^*\nabla^{TX}+ds\Big(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{2s}\Big),\quad R^{T\tilde{X}}=\rho_0^*R^{TX}.\tag{1.20}$$

在 $\widetilde{S}$ 上，我们有奇形式 $h\big(\widetilde{A}',\tilde{g}_t^{\Omega(X,F)}\big)$，它类似于 $S$ 上的 $h\big(A',g_t^{\Omega(X,F)}\big)$。

定义 1.5. 设 $h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega(X,F)}\big)$ 为 $S$ 上满足（见 [7, (3.114)]）的偶形式

$$h\big(\widetilde{A}',\tilde{g}_t^{\Omega(X,F)}\big)\big|_{s=1}=h\big(A',g_t^{\Omega(X,F)}\big)+ds\wedge h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega(X,F)}\big).\tag{1.21}$$

Set

$$\chi'(X,F)=\sum_{j=0}^m(-1)^j j\dim H^j(X,F),\quad \chi(X,F)=\sum_{j=0}^m(-1)^j\dim H^j(X,F).\tag{1.22}$$

根据定理 1.4 和（1.21），我们有：

定理 1.6（[7, 定理 3.20，3.21]）。形式 $h^\wedge\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F)}{}_t\big)$ 为偶形式，并且

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}h\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=\frac{1}{t}h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big),\\ &h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=\begin{cases}\mathcal{O}(\sqrt{t}), & as\ t\to 0,\\ \big(\frac{1}{2}\chi'(X,F)-\frac{m}{2}\chi(X,F)\big)h'(0)+\mathcal{O}(1/\sqrt{t}), & as\ t\to+\infty.\end{cases}\end{aligned}\tag{1.23}$$

现在给出解析挠率形式 $\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F\big)$ 的定义。

定义 1.7（见 [7,定义 3.22]）。置

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F\big)=-\int_0^{+\infty}&\Big[h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)\\ &+\Big(\frac{m}{4}\chi(X,F)-\frac{1}{2}\chi'(X,F)\Big)\big(h'(0)-h'(i\sqrt{t}/2)\big)\Big]\frac{dt}{t}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

根据定理 1.4 和 1.6，上述积分定义良好。

定理 1.8（[7, 定理 3.23]）。形式 $\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F\big)$ 是偶的且为实，并满足以下转移公式：

$$d\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^F,g^F\big)=\int_X e(TX,\nabla^{TX})h\big(\nabla^F,g^F\big)-h\big(\nabla^{H^\bullet(X,F)},g^{H^\bullet(X,F)}\big).\tag{1.25}$$

1.5. Lichnerowicz 型公式。设 $z$ 是一个奇 Grassmann 变量，与我们之前使用的奇变量反对易。若 $a\in\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)$，则定义

$$[a]^z=c,\quad \text{for } a=b+zc \text{ where } b,c\in\pi^*\Lambda^\bullet\left(T^*S\right)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet\left(T^*X\right). \tag{1.26}$$

由（1.17），可得

$$h\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F)}\big)=(2\pi i)^{1/2}\,\varphi\mathrm{Tr_s}\Big[\exp\big(-\big(C_t^2-zD_t\big)\big)\Big]^z. \tag{1.27}$$

今后，我们始终用拉丁指标 $i,j,\cdots$ 表示垂直变量，用希腊指标 $\alpha,\beta,\cdots$ 表示水平变量。设 $e_1,\cdots,e_m$ 是$TX$的局部标准正交标架，$f_1,\cdots,f_r$ 是 $TS$的一组基。相应的对偶基用上指标表示。我们在 $\Lambda(T^*X)$上定义如下 Clifford 作用：

$$c(e_j)=e^j\wedge-i_{e_j},\qquad \widehat{c}(e_j)=e^j\wedge+i_{e_j}, \tag{1.28}$$

于是，对于 $1\leqslant i,j\leqslant m$，有

$$[c(e_i),c(e_j)]=-2\delta_{ij},\quad [\widehat{c}(e_i),\widehat{c}(e_j)]=2\delta_{ij},\quad [c(e_i),\widehat{c}(e_j)]=0. \tag{1.29}$$

由（1.29），（1.28）中的作用延拓为代数同构

$$c\widehat{\otimes}\widehat{c}\colon\ c(TX)\widehat{\otimes}\widehat{c}(TX)\to\mathrm{End}(\Lambda(T^*X)). \tag{1.30}$$

Put

$$\mathcal{R}^F=-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle\widehat{c}\left(e_i\right)\widehat{c}\left(e_j\right)-\frac{1}{4}\omega^2\big(\nabla^F,g^F\big). \tag{1.31}$$

设 $r^X$为纤维 $\big(X,g^{TX}\big)$的标量曲率。

定义 1.9. 设 $\Lambda^F$ 是 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*S)\ \widehat{\otimes}$端omorphism$(\Lambda(T^*X))\ \otimes$端omorphism$(F)$ 的一个截面，其定义如下：

$$\begin{aligned}\Lambda^F=&\frac{1}{4}r^X+\frac{1}{2}c(e_i)c(e_j)\mathcal{R}\left(e_i,e_j\right)+\frac{1}{2}f_\alpha f_\beta\mathcal{R}\big(f_\alpha^H,f_\beta^H\big)+c(e_i)f_\alpha\mathcal{R}\big(e_i,f_\alpha^H\big)\\&+\frac{1}{4}\omega\big(\nabla^F,g^F\big)(e_i)^2+\frac{1}{8}\widehat{c}(e_i)\widehat{c}(e_j)\omega\big(\nabla^F,g^F\big)^2\left(e_i,e_j\right)\\&-\frac{1}{2}f_\alpha^H\widehat{c}(e_i)\nabla^{TX\otimes F_p,u}_{f_\alpha^H}\omega\big(\nabla^F,g^F\big)\left(e_i\right)-\frac{1}{2}c(e_i)\widehat{c}(e_j)\nabla^{TX\otimes F_p,u}_{e_i}\omega\big(\nabla^F,g^F\big)(e_j)\\&-\frac{1}{2}zc(e_i)\omega\big(\nabla^F,g^F\big)(e_i)-\frac{1}{2}zf_\alpha\omega\big(\nabla^F,g^F\big)\big(f_\alpha^H\big).\end{aligned} \tag{1.32}$$

定义 1.10. 设 ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}$为沿 $X$ 的纤维方向联络，定义如下：

$$\begin{aligned}{}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}=&\nabla^{\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}+\frac{1}{2}\big\langle Se_i,f_\alpha^H\big\rangle c\left(e_i\right)f^\alpha\\&+\frac{1}{4}\big\langle Sf_\alpha^H,f_\beta^H\big\rangle f^\alpha f^\beta-\frac{z}{2}e^i\wedge\widehat{c}(e_i).\end{aligned} \tag{1.33}$$

由定理 4.14],可知，${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}$的曲率为

$$\begin{aligned}{}^0R^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}(e_i,e_j)=&\frac{1}{2}\big\langle R^{TX}(e_k,e_\ell)e_i,e_j\big\rangle\big(c(e_k)c(e_\ell)-\widehat{c}(e_k)\widehat{c}(e_\ell)\big)\\&+\big\langle R^{TX}(f_\alpha,e_\ell)e_i,e_j\big\rangle f^\alpha c(e_\ell)+\frac{1}{2}\big\langle R^{TX}(f_\alpha,f_\beta)e_i,e_j\big\rangle f^\alpha\wedge f^\beta.\end{aligned} \tag{1.34}$$

在 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F$ 上，令 ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F,\ u}$ 为由 ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)}$和 $\nabla^{F,\ u}$ 诱导的纤维方向联络。

令 $\mathcal{L}_t^F = C_t^2 - zD_t$，它出现在（1.27）中，并设 $\mathcal{L}^F = \mathcal{L}_4^F$。令 $N_1$ 为外代数 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)$ 的数算子，其作用是将每一项乘以其总次数。由（1.15），我们有

$$\mathcal{L}_{4t}^F = \theta_{\sqrt{t}}^{-1} t\mathcal{L}^F\theta_{\sqrt{t}}, \quad \text{where } \theta_{\sqrt{t}} = \sqrt{t}^{N_1}. \tag{1.35}$$

定理 1.11（[7,定理 3.11]）。下述 Lichnerowicz 型公式成立：

$$\mathcal{L}^F = -\left({}^0\nabla_{e_i}^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F,u}\right)^2 + {}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F,u}_{\nabla^{TX}_{e_i}e_i} + \Lambda^F. \tag{1.36}$$

## 2. Toeplitz operators

本节介绍由 Berezin [2]和 Boutet de Monvel-Guillemin [15], 提出，并由 Bordemann-Meinrenken-Schlichenmaier [13], Schlichenmaier [42] 和 Ma-Marinescu [25], [26], [27]发展的托普利兹算子形式体系。

本节结构如下。在 § 2.1 中，我们介绍紧致 K $L$上的正线丛¨ahler 流形 $N$ 以及 Berezin-Toeplitz 量子化，随后给出一些将在后文使用的一致估计。在 § 2.2 中，我们研究托普利兹算子的指数，并对展开中的各项及余项给出估计。

### 2.1. 托普利兹算子的代数。

设 $N$ 是一个维数为 $_{\mathbb{C}}N = n$、复结构为 $J$ 的紧复流形。设 $g^{T_{\mathbb{R}}N}$ 是 $T_{\mathbb{R}}N$ 上一个 $J$-不变的黎曼度量。记其诱导的黎曼体积形式为 $dv_N$。

设 $(L, g^L)$（分别为 $(\xi, h^\xi)$）是 $N$ 上的全纯线丛（分别为全纯向量丛）。设 $\nabla^L$（分别为 $\nabla^\xi$）是 $L$（分别为 $\xi$）上的相应 Chern联络，其曲率为 $R^L$（分别为 $R^\xi$）。我们假设 $(L, g^L, \nabla^L)$ 是一个正线丛。那么，$c_1(L, g^L) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^L$ 在 $N$ 上定义了一个 K¨ahler 形式。注意，$g^{T_{\mathbb{R}}N}$ 不一定是由 $c_1(L, g^L)$ 诱导的 K¨ahler 度量。

对于 $p \in \mathbb{N}^*$，令 $L^p = L^{\otimes p}$ 为 $L$ 的 $p$ 阶张量幂。由 $(g^{T_{\mathbb{R}}N}, g^L, h^\xi)$ 诱导出 $\mathscr{C}^\infty(N, L^p\otimes\xi)$ 上的 $L^2$ 内积。相应的范数记为 $\|\cdot\|_{L^2}$，而 $L^2(N, L^p\otimes\xi)$ 表示 $\mathscr{C}^\infty(N, L^p\otimes\xi)$ 关于 $L^2$ 范数的完备化。

我们考虑 $L^p\otimes\xi$ 的全纯截面空间 $H^{(0,0)}(N, L^p\otimes\xi)$，并令

$$P_p\colon L^2(N, L^p\otimes\xi) \longrightarrow H^{(0,0)}(N, L^p\otimes\xi) \tag{2.1}$$

为关于 $L^2$ 内积的正交投影。

定义 2.1（[25, (7.2.6)]）。光滑截面$\mathcal{H} \in \mathscr{C}^\infty(N,$ End$(\xi))$ 的 Berezin-Toeplitz 量子化是由下式给出的一列线性算子 $\{T_{\mathcal{H},p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$

$$T_{\mathcal{H},p}\colon L^2(N, L^p\otimes\xi) \to L^2(N, L^p\otimes\xi), \quad T_{\mathcal{H},p} = P_p\mathcal{H}P_p. \tag{2.2}$$

算子 $T_{\mathcal{H},\,p}$关于 $dv_N$ 具有光滑核 $T_{\mathcal{H},\,p}(x, x')$。在对角线上，$T_{\mathcal{H},\,p}(x, x) \in$端omorphism$(L^p\otimes\xi)$ $=$端omorphism$(\xi)$。对于 $\ell \in \mathbb{N}$，令 $|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell(N)}$ 为由 $(\nabla^{T_{\mathbb{R}}N}, \nabla^E, g^{T_{\mathbb{R}}N}, h^\xi)$ 诱导的 $\ell$ 阶光滑范数，定义在 $\mathscr{C}^\infty(N,$ 端omorphism$(\xi))$ 上。由 [25, 引理 7.2.4], 的证明，我们得到以下展开式，其余项满足一致估计。

定理 2.2. 存在一系列阶数不超过 $2i$ 的微分算子 $\{A_i\}_{i=0}^{+\infty}$，使得对于任意 $k$、$\ell \in \mathbb{N}$，都存在 $C > 0$，使得对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$ 和

$\mathcal{H} \in \mathscr{C}^{\infty}(N$, 端omorphism($\xi$)),

$$\left|p^{-n} T_{\mathcal{H},p}(x,x) - \sum_{i=0}^{k} p^{-i} A_i(\mathcal{H})(x)\right|_{\mathscr{C}^{\ell}(N)} \leqslant C\,|\mathcal{H}|_{\mathscr{C}^{2k+2}(N)}\, p^{-k-1}. \tag{2.3}$$

并且算子 $\{A_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 关于 $(J, g^{T_{\mathbb{R}}N}, h^L, h^{\xi})$ 光滑变化。特别地,

$$A_0(\mathcal{H}) dv_N = \frac{c_1(L, g^L)^n}{n!}. \tag{2.4}$$

根据 Kodaira 消失定理 [25, 定理 1.5。4] 以及 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理 [25, 定理 1.4。6], 对于 $p \in \mathbb{N}^*$ 充分大时，$\dim H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi)$ 是关于 $p \in \mathbb{N}^*$ 的一个多项式，其首项为

$$\dim H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi) = \dim_{\mathbb{C}} \xi \cdot \int_N \frac{c_1(L, g^L)^n}{n!} p^n + \mathcal{O}\left(p^{n-1}\right), \tag{2.5}$$

并且显然 (2.4) 是 (2.5) 的局部版本。

若 $A \in \mathrm{End}\left(L^2(N, L^p \otimes \xi)\right)$，记 $\|A\|$ 为其算子范数。若 $A$ 是迹类，则将其迹范数记为 $\|A\|_1$。若 $A = P_p A P_p$，则 $A$ 是迹类；由 (2.5)，存在$C > 0$ 使得对任意 $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A\|_1 \leqslant \|A\| \dim_{\mathbb{C}} H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi) \leqslant C\,\|A\|\, p^n. \tag{2.6}$$

根据 Ma-Marinescu [25, 定义 7.2.1]，我们现在定义托普利兹算子。

定义 2.3. 托普利兹算子是一个算子族 $\left\{T_p \mid T_p \in \mathrm{End}(L^2(N, L^p \otimes \xi))\right\}_{p \in \mathbb{N}^*}$，它关于 $L^2$-范数有界，满足 $T_p = P_p T_p P_p$，并且存在$\{\mathcal{H}_i \mid \mathcal{H}_i \in \mathscr{C}^{\infty}(N, \mathrm{End}(\xi))\}_{i \in \mathbb{N}}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 都存在 $\boldsymbol{c}_k > 0$，使得

$$\left\|T_p - \sum_{i=0}^{k} p^{-i} T_{\mathcal{H}_i,p}\right\| \leqslant \boldsymbol{c}_k p^{-k-1}. \tag{2.7}$$

如 [25, (7 .2.4)、(7.2.5)], 中一样，我们使用形式展开的记号来表示 (2.7) 为

$$T_p = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{-i} T_{\mathcal{H}_i,p} + \mathcal{O}\left(p^{-\infty}\right), \tag{2.8}$$

如果我们只涉及前 $k$ 项，就用 $\sum_{i=0}^{k}$ 替换 $\sum_{i=0}^{+\infty}$。

现在，为了简化记号，我们引入渐近迹符号。对于式 ( $\{T_p\}_{p \in \mathbb{N}^*}$ 2.7) 中的托普利兹算子 $k \in \mathbb{N}$，若令

$$\mathrm{Tr}_{[k]}[T_p] = \sum_{i+j=k} \int_N \mathrm{Tr}^{\xi}[A_i(\mathcal{H}_j)] dv_N, \tag{2.9}$$

那么根据（2.3）、（2.6）和（2.7），存在 $C_{\boldsymbol{c}_k,\ \{|\mathcal{H}_i|_{\mathscr{C}^{2i}(N)}\}_{i=1}^{k+1}} > 0$ 它依赖于 $\boldsymbol{c}_k$ 和 $\{|\mathcal{H}_i|_{\mathscr{C}^{2i}(N)}\}_{i=1}^{k+1}$，使得

$$\left|p^{-n} \mathrm{Tr}^{H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi)}[T_p] - \sum_{i=0}^{k} p^{-i} \mathrm{Tr}_{[i]}[T_p]\right| \leqslant C_{\boldsymbol{c}_k, \{|\mathcal{H}_i|_{\mathscr{C}^{2i}(N)}\}_{i=1}^{k+1}} p^{-k-1}. \tag{2.10}$$

根据 [25, 定理 7.4.1]和 [27, 定理 0.3], 的证明，我们得到以下托普利兹算子的乘积公式及余项估计。

定理 2.4. Toeplitz 算子的集合构成一个代数。特别地，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于任意 $\mathcal{H},\mathcal{H}'\in\mathscr{C}^\infty$(N, 端omorphism(ξ)) 和 $p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\left\|T_{\mathcal{H},p}T_{\mathcal{H}',p}-\sum_{j=0}^{k}p^{-i}T_{C_j(\mathcal{H},\mathcal{H}'),p}\right\|\leqslant Cp^{-k-1}\,|\mathcal{H}|_{\mathscr{C}^{2k+2}(N)}\cdot|\mathcal{H}'|_{\mathscr{C}^{2k+2}(N)}\,. \tag{2.11}$$

其中 $C_j(\cdot,\cdot)$ 是总次数不超过 $2j$ 的光滑双微分算子，并且

$$C_0(\mathcal{H},\mathcal{H}')=\mathcal{H}\mathcal{H}',\quad C_1(\mathcal{H},\mathcal{H}')-C_1(\mathcal{H}',\mathcal{H})=i\{\mathcal{H},\mathcal{H}'\}\text{ 若 }\mathcal{H},\mathcal{H}'\in\mathscr{C}^\infty(N,\mathbb{C}), \tag{2.12}$$

其中 $\{\mathcal{H},\mathcal{H}'\}$ 是 $2\pi c_1(L,g^L)$ 的泊松括号。

2.2. 托普利兹算子的指数。 为了讨论托普利兹算子的指数，我们先研究托普利兹算子的逆。我们沿用 Ma-Zhang [29,引理 4。1] 其中他们证明了，如果主符号 $\mathcal{H}_0$ 的 $T_p$ 如式（2.7）所示可逆，那么 $T_p^{-1}$也是一个托普利兹算子；这里我们对展开式中的余项给出一致估计。

引理 2.5。 设 $T_p$ 是式 (2.7)中的托普利兹算子。若 $\mathcal{H}_0(x)$ 对所有$x\in N$均可逆，则 $T_p$在 $p$充分大时可逆，且 $T_p^{-1}$也是一个托普利兹算子。此外，若我们按式 (2.8)将 $T_p^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,\,p}+\mathcal{O}(p^{-\infty})$ 写成，则有 $\mathcal{G}_0=\mathcal{H}_0^{-1}$。

证明。回顾一个基本事实：对于可逆算子 $A$ 和 $B$，有

$$A^{-1}-B=B((1-(1-AB))^{-1}-1)=B(1-AB)(1-(1-AB))^{-1}. \tag{2.13}$$

对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $C_i(\cdot,\ \cdot)$，它们在定理 2.4中给出。令

$$\mathcal{G}_0=\mathcal{H}_0^{-1},\quad \mathcal{G}_{k+1}=-\mathcal{H}_0^{-1}\sum_{\substack{i+j\leqslant k+1\\(i,j)\neq(0,0)}}C_i\big(\mathcal{H}_j,\mathcal{G}_{k+1-i-j}\big). \tag{2.14}$$

由式 (2.7)、(2.11) 和 (2.14)，可归纳证明

$$\left\|T_p\Big(\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,p}\Big)-1\right\|\leqslant \boldsymbol{C}p^{-k-1},\quad \left\|\Big(\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,p}\Big)T_p-1\right\|\leqslant \boldsymbol{C}p^{-k-1}. \tag{2.15}$$

由式 (2.15)，$T_p$ 和 $\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,\,p}$ 对于 $p\in\mathbb{N}^*$ 充分大时均有左逆和右逆，因此它们可逆。我们在式 $A=T_p$，$B=\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,\,p}$ 中取 (2.13)，由式 (2.15及显然的不等式 $\|(1-(1-AB))^{-1}\|\leqslant(1-\|(1-AB)\|)^{-1}$，可得

$$\left\|T_p^{-1}-\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{G}_i,p}\right\|\leqslant \boldsymbol{C}p^{-k-1}, \tag{2.16}$$

至此，证明完毕。 □

注 2.6. 根据上述证明，我们确实可以将 $\boldsymbol{C}$ 取为式（2.15）和式（2.16）中以下形式的项之和：

$$C|\mathcal{H}_0^{-1}|^{\alpha}_{\mathscr{C}^0(N)}\cdot\prod_{i=0}^{k}\boldsymbol{c_i}^{\beta_i}|\mathcal{H}_i|^{\gamma_i}_{\mathscr{C}^{2(k+1)}(N)} \tag{2.17}$$

其中 $C>0$、$\alpha\in\mathbb{N}$ 和 $\beta$、$\gamma\in\mathbb{N}^{k+1}$。

定理2.7。 如果 $T_p$ 是一个具有展开式 (2.7)的托普利兹算子，则 $\exp(-tT_p)$ 对于任意 $t \geqslant 0$ 也是一个托普利兹算子，并且在 (2.8)意义下具有如下展开式：

$$\exp(-tT_p) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{-i} T_{\mathcal{J}_i(t),p} + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad \mathcal{J}_0(t) = e^{-t\mathcal{H}_0}. \tag{2.18}$$

令 $\boldsymbol{h} = \inf_{x\in N} \mathrm{Re}\big(\mathrm{Spec}\mathcal{H}_0(x)\big)$，则对任意 $\varepsilon > 0$、$i$、$k$、$\ell \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，使得对任意 $p \in \mathbb{N}^*$，

$$\begin{aligned} &|\mathcal{J}_i(t)|_{\mathscr{C}^k(N)} \leqslant C \exp(-(\boldsymbol{h} - \varepsilon)t), \\ &\left\| \exp(-tT_p) - \sum_{i=0}^{k} p^{-i} T_{\mathcal{J}_i(t),p} \right\| \leqslant C \exp(-(\boldsymbol{h} - \varepsilon)t) p^{-k-1}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

证明。由乘积公式（2.11）和（2.12），对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $T_p^k = T_{\mathcal{H}_0^k,\ p} + \mathcal{O}\ (p^{-1})$ 。若忽略余项无穷级数的发散性，则得到 $\exp(T_p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T_{\mathcal{H}_0^k,\ p} + \mathcal{O}\ (p^{-1}) = T_{\exp(\mathcal{H}_0)\ p} + \mathcal{O}\ (p^{-1})$，这正是（2.18）的一阶项。

现在给出严格证明。由引理 2.5，若 $\lambda \notin \mathrm{Spec}(\mathcal{H}_0)$，则 $\lambda - T_p$ 在 $p \in \mathbb{N}^*$ 充分大时可逆，并且我们有以下按（2.8）意义理解的展开式：

$$(\lambda - T_p)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{-i} T_{\mathcal{I}_i(\lambda),p} \tag{2.20}$$

其中 $\mathcal{I}_i(\lambda) \in \mathscr{C}^\infty(N$，端omorphism($\xi$）。与定理 2.4中一样， $C_i(\cdot,\ \cdot)$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$都是双线性微分算子，因此由（2.14），每个 $\mathcal{I}_i(\lambda)$ 对于 $i \in \mathbb{N}$ 都是以下形式各项之和：

$$(\lambda - \mathcal{H}_0)^{-n_0} f_1(\lambda) (\lambda - \mathcal{H}_0)^{-n_1} \cdots f_j(\lambda) (\lambda - \mathcal{H}_0)^{-n_j} \tag{2.21}$$

其中 $n_j \in \mathbb{N}$ 以及 $f_j(\lambda) \in \mathscr{C}^\infty(N$, 端omorphism($\xi$))$[\lambda]$，这是系数取自 $\mathscr{C}^\infty(N$, 端omorphism($\xi$)) 的 $\lambda$ 多项式空间。特别地，首项为

$$\mathcal{I}_0(\lambda) = (\lambda - \mathcal{H}_0)^{-1}. \tag{2.22}$$

对于 $\varepsilon > 0$，我们选取一条有界曲线 $\Gamma_\varepsilon$，使其在复平面上逆时针包围 Spec($\mathcal{H}_0$)，并满足 $\inf_{\lambda\in\Gamma_\varepsilon} \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant \boldsymbol{h} - \epsilon$。由柯西积分公式可得

$$\exp(-tT_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{-t\lambda} (\lambda - T_p)^{-1} d\lambda. \tag{2.23}$$

我们将与托普利兹算子 $\big((\lambda - T_p)\big)$ 相关联的 $\boldsymbol{C}$ （2.16）$^{-1}$ 记为 $\boldsymbol{C}_\lambda$。由（2.17），$\boldsymbol{C}_\lambda$ 对 $\lambda \in \Gamma$一致有界。由（2.20）和（2.23），可得

$$\left\| \exp(-tT_p) - \sum_{i=0}^{k} p^{-i} T_{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} e^{-t\lambda}\mathcal{I}_i(\lambda)d\lambda,p} \right\| \leqslant p^{-k-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{-t\mathrm{Re}(\lambda)} \boldsymbol{C}_\lambda d\lambda, \tag{2.24}$$

由此可得（2.18），以及（2.19）中的第一个不等式，其中

$$\mathcal{J}_i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{-t\lambda} \mathcal{I}_i(\lambda) d\lambda. \tag{2.25}$$

由2.22式可得 $\mathcal{J}_0\ (t)$ 成立于2.18式中。由2.21式和2.25式可得2.19式的第二个不等式。□

注2.8. 本文中，对2.19式中各项以及余项的估计至关重要。由2.9式和2.19式可知，对任意 $t \geqslant 0$，有

$$\left|\mathrm{Tr}_{[k]}\left[\exp(-tT_p)\right]\right| \leqslant Ce^{-(\boldsymbol{h}-\epsilon)t}. \tag{2.26}$$

此外，由（2.10）、（2.18）和（2.19），可得

$$\left|p^{-n}\mathrm{Tr}^{H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)}[\exp(-tT_p)] - \sum_{i=0}^{k} p^{-i}\mathrm{Tr}_{[i]}[\exp(-tT_p)]\right| \leqslant Cp^{-k-1}e^{-(\boldsymbol{h}-\epsilon)t}. \tag{2.27}$$

等式（2.26）和（2.27）保证了展开式中每一项及余项在 $t \to +\infty$ 时均呈指数衰减，这些性质在 § 4 和 § 5 中发挥着重要作用。

## 3. The geometry of bundles $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$

我们采用与 §§ 1.1 和 2.1 中相同的假设。本节旨在回顾关于如下丛的一些性质：它们定义在 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ 上，并遵循 [9, § 9]。

本节安排如下。在 § 3.1 中，我们介绍纤维化 $\mathcal{N} = P_G \times_G N \to M$ 和线丛 $L \to \mathcal{N}$ 的几何。在 § 3.2 中，我们引入 $M$ 上的丛 $\{F_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$，并计算酉联络 $\nabla^{F_p}$,$^u$的曲率。在 § 3.3 中，对于 Toeplitz 算子的光滑族 $\{T_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$，我们分析当 $p \to +\infty$时 $\mathrm{Tr}^{F_p}[T_p]$的渐近行为。在 § 3.4 中，对于$p \to +\infty$，我们求得奇形式 $h(\nabla^{F_p},g^{F_p})$ 的渐近行为。在 § 3.5 中，我们回顾 $L$ 的非退化条件。

3.1. 几何设置。设 $N$ 是一个复维数为 $n$ 的紧复流形。设 $L$ 和 $\xi$ 是 $N$ 上的全纯丛，且 $\dim_{\mathbb{C}}(L) = 1$。设 $G$ 是一个在 $N$ 上全纯作用的李群，且该作用提升为在 $L$ 和 $\xi$ 上的全纯作用。

设 $p\colon P_G \to M$ 是一个主平坦 $G$-丛。令

$$\mathcal{N} = P_G \times_G N. \tag{3.1}$$

我们将投影 $q\colon \mathcal{N} \to M$（其纤维为 $N$）记为 $q$。我们仍将 $\mathcal{N}$ 上的丛 $P_G \times_G L$（分别为 $P_G \times_G \xi$）记为 $L$（分别为 $\xi$）。

设 $T_0^H\mathcal{N} \subset T\mathcal{N}$ 是由 $P_G$ 的平坦联络确定的水平丛。置 $T_{\mathbb{R}}N = \ker q_*$，即实相对切丛，并设 $TN$ 为全纯相对切丛。设 $T_{\mathbb{R}}N$ 上的复结构为 $J^N$。显然有 $T_0^H\mathcal{N} \cong q^*TM$，于是对于 $U \in TM$，我们将其水平提升记为 $U_0^H \in T_0^H\mathcal{N}$。

令 $g^L$（分别为 $g^\xi$）是 $\mathcal{N}$ 上 $L$（分别为 $\xi$）的厄米度量。令 $\nabla^L$（分别为 $\nabla^\xi$）是 $L$（分别为 $\xi$）上的逐纤维 Chern 联络。利用 $P_G$ 上的平坦联络，我们可以分别将 $\nabla^L$ 和 $\nabla^\xi$ 延拓为 $L$ 和 $\xi$ 上的联络：对于 $U \in TM$，令

$$\nabla^L_{U_0^H}\ (\text{or } \nabla^\xi_{U_0^H}) = L_{U_0^H} \tag{3.2}$$

这些联络一般是非酉的，我们令

$$\omega\big(L, g^L\big)(U) = \big(g^L\big)^{-1} L_{U_0^H} g^L, \quad \omega\big(\xi, g^\xi\big)(U) = \big(g^\xi\big)^{-1} L_{U_0^H} g^\xi. \tag{3.3}$$

下文中，我们假设第一陈形式

$$c_1(L, g^L) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\big(\nabla^L\big)^2 \in \Omega^2(\mathcal{N}) \tag{3.4}$$

是沿纤维正定的。令 $\partial^N$ 表示纤维上的 Dolbeault 算子。我们有以下恒等式（参见[9, (9.7)]）：对于 $U$，$V\in TM$以及 $Y\in T_{\mathbb{R}}N$，

$$c_1(L,g^L)(U_0^H,V_0^H)=0,\quad c_1(L,g^L)(U_0^H,Y)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial_Y^N\omega\big(L,g^L\big)(U). \tag{3.5}$$

设 $g^{T_{\mathbb{R}}N}$ 是 $T_{\mathbb{R}}N$上的光滑厄米度量，并令 $dv_N$ 为相应的纤维体积形式。接着将 $dv_N$ 扩展为 $\mathcal{N}$ 上的一个形式，使其沿水平方向为零，并仍记作 $dv_N\in\Omega^\bullet(\mathcal{N})$。回忆一下，若 $U\in TM$，则纤维上的李导数算子 $L_{U_0^H}$自然作用于 $\Lambda^\bullet(T^*_{\mathbb{R}}\mathcal{N})$的光滑截面。我们将 $\mathrm{div}_N(U)$ 定义为

$$L_{U_0^H}dv_N=\mathrm{div}_N(U)dv_N. \tag{3.6}$$

由（3.5），当 $g^{T_{\mathbb{R}}N}$恰为 K¨ahler 度量 $g^{T_{\mathbb{R}}N}(\cdot,\cdot)=c_1(L,g^L)(\cdot,J^N\cdot)$ 时，对于任意 $U\in TM$，我们可以证明以下公式：

$$\mathrm{div}_N(U)=\frac{1}{4\pi}\Delta_N\omega\big(L,g^L\big)(U), \tag{3.7}$$

其中 $\Delta_N$ 是相对于 K¨ahler 度量的纤维非负拉普拉斯算子，它作用于 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{N})$。

3.2. 的曲率 $\nabla^{F_p,\,u}$。回顾 ( $F_p$ （0.3）中的定义：

$$F_p=\big(P_G\times_G H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)\big)\otimes F, \tag{3.8}$$

其中，带度量 $g^F$ 的平坦丛 $(F,\nabla^F)$ 起到平移的作用。令 $\mathbb{F}(F)$ 为 $F$ 的标架丛，它是 $M$ 上的 $\mathrm{GL}(\dim_{\mathbb{C}}(F))$ 主丛。由于$H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi\otimes\mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}}(F)})\cong H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)\otimes\mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}}(F)}$，在下文中我们总可以假设 $F=\mathbb{C}$ 是平凡的，或者可以用 $(G\times\mathrm{GL}(\dim_{\mathbb{C}}(F))$ $N,L,\xi\otimes\mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}}(F)})$ 替换 $(G,N,L,\xi)$。

令 $\mathscr{F}_p=P_G\times_G\mathscr{C}^\infty(N,L^p\otimes\xi)$，它是 $M$ 上的一个无限维丛，并且$F_p$ 是 $\mathscr{F}_p$ 的子丛。联络 $\nabla^{L^p\otimes\xi}$ 自然地在$\nabla^{\mathscr{F}_p}$上诱导出一个平坦联络：若 $s$是 $\mathscr{F}_p$ 的光滑截面且 $U\in TM$，则令

$$\nabla_U^{\mathscr{F}_p}s=\nabla_{U_0^H}^{L^p\otimes\xi}s. \tag{3.9}$$

此联络保留 $F_p$，并在 $F_p$上诱导出平坦联络 $\nabla^{F_p}$。我们赋予 $\mathscr{F}_p$由（$g^{L^p}$、$h^\xi$、$dv_N$）诱导的 $L^2$度量 $g^{\mathscr{F}_p}$，由此在 $F_p$上得到度量 $g^{F_p}$。令$P_p$ 表示纤维上的正交投影 $\mathscr{F}_p\to F_p$。

设 $\nabla^{\mathcal{N}}$为无限维丛 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{N})\to M$上的一个联络，定义如下：若 $U\in TM$且 $\mathcal{H}\in\mathscr{C}^\infty(\mathcal{N})$，则令 $\nabla_U^{\mathcal{N}}=U_0^H(\mathcal{H})$。按照[9,(9.34)]，我们定义

$$\vartheta^L=-\frac{1}{2}\omega\big(L,g^L\big),\qquad\vartheta^\xi=-\frac{1}{2}\omega\big(\xi,g^\xi\big). \tag{3.10}$$

我们用 $\widehat{TX}$表示 $TX$的一个副本。我们用 $\widehat{\omega}\big(\nabla^F、g^F\big)$、$\widehat{\vartheta}^L$、$\widehat{\ }\mathrm{div}_N$表示 $\omega\big(\nabla^F、g^F\big)$、$\vartheta^L$、$\mathrm{div}_N$在 $\widehat{TX}$上的限制。令 $\{e_i\}_{i=1}^m$和 $\{\widehat{e}_i\}_{i=1}^m$分别为$\widehat{\ }TX$和 $TX$的局部标准正交标架。我们用 $[\cdot,\cdot]_+$表示反对易子。

定理 3.1（[9,定理 9.27]）。我们有以下恒等式：

$$\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)=T_{-\vartheta^L-\vartheta^\xi/p+\mathrm{div}_N/2p,p}. \tag{3.11}$$

如果 $\mathcal{H}\in\mathscr{C}^\infty(N,$ 端omorphism$(\xi))$ 是光滑截面，则有

$$\nabla^{F_p,u}T_{\mathcal{H},p}=T_{\nabla^{\mathcal{N}}\mathcal{H},p}+p[T_{\vartheta^L+\vartheta^\xi/p-\mathrm{div}_N/2p,p},T_{\mathcal{H},p}]_+-2pT_{(\vartheta^L+\vartheta^\xi/p-\mathrm{div}_N/2p)\mathcal{H}\,p}. \tag{3.12}$$

此外，结合定理2.4与（3.11）和（3.12），可知 $\frac{1}{4p}\omega(\nabla^{F_p},g^{F_p})^2,\frac{1}{4p^2}\widehat{\omega}(\nabla^{F_p},g^{F_p})(e_i)^2$ 和 $\nabla^{F_p,\,u}T_{\mathcal{H},\,p}$ 都是Toeplitz 算子。

注记 3.2. 对于一般的纤维化，Ma-Zhang [30, 定理 1.18、1.19], [28] 证明了 $F_p$ 上的曲率算子是一个托普利兹算子。

3.3. 托普利兹算子的光滑丛。类似于定义2.1，若存在 $\{T_p\mid T_p\in\mathscr{C}^\infty\big(M,\mathrm{End}(F_p)\big)\}_{p\in\mathbb{N}^*}$，使得对任意 $\{\mathcal{H}_i\mid\mathcal{H}_i\in\mathscr{C}^\infty(\mathcal{N},\ \mathrm{End}(\xi))\}_{i\in\mathbb{N}}$，$k,\ \ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 满足

$$\Big|T_p-\sum_{i=0}^{k}p^{-i}T_{\mathcal{H}_i,p}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M,\mathrm{End}(F_p))}\leqslant Cp^{-k-1}, \tag{3.13}$$

其中，范数 $|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell(M,\ \mathrm{End}(F_p)}$ 由 $(\nabla^{F_p},\ g^{F_p})$ 诱导。

注记 3.3. 由于 § 2 中的所有展开都光滑地依赖于几何数据（$J,\ g^{T_{\mathbb{R}}N},\ h^L,\ h^E$），§ 2 中的所有结果对 $F_p$ 也有类似版本。特别地，由（2.11）可知，定理 3.1 中的所有算子及其导数都是 Toeplitz 算子的光滑截面。此外，对于（3.13）中的 $\{T_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$，$\mathrm{Tr}^{F_p}[T_p]$ 和 $\mathrm{Tr}_{[k]}[T_p]$ 是 $M$ 上的光滑函数，并且可以将（2.10）、（2.26）和（2.27）左边的绝对值 $|\cdot|$ 替换为光滑范数 $|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell}$（$M$）

3.4. 关于 $h(\nabla^{F_p},\ g^{F_p})$ 的渐近性。回顾奇形式 $h(\nabla^{F_p},\ g^{F_p})$，其属于 $F_p$，如（1.8）所示。

命题 3.4. 如 $p\to+\infty$，我们有光滑的奇形式 $\gamma_i\in\Omega^{\mathrm{odd}}(M)$ $i\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $k,\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得

$$\Big|p^{-n}\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}h\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\sum_{i=0}^{k}\gamma_ip^{-i}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Cp^{-k-1}. \tag{3.14}$$

证明。由定理 3.1、注 3.3 以及（1.8），如果取

$$\gamma_i=(2\pi i)^{1/2}\varphi\mathrm{Tr}_{[k]}\left[\exp\left(\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2+\frac{1}{2p}z\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)\right)\right]^z, \tag{3.15}$$

那么我们得到展开式（3.14）。 □

3.5. 谱　隙。现在我们回顾非退化条件 [9,定义 9.13 ].

**Defi义 3.5.** 如果存在 $\boldsymbol{a}>0$，使得.....，我们就称 $\widehat{\vartheta}^L$ 为非退化的

$$\sum_{i=1}^{m}\widehat{\vartheta}^L(e_i)^2\geqslant\boldsymbol{a}\ \ \text{on}\ \mathcal{N}, \tag{3.16}$$

或者等价地，$\widehat{\vartheta}^L\in\mathscr{C}^\infty(\mathcal{N},q^*\widehat{T^*X})$ 在 $\mathcal{N}$ 上处处不为零。

定理 3.6 ([9, 定理 4.4])。若 $\widehat{\vartheta}^L$ 是非退化的，则对任意 $\varepsilon>0$ 以及 $p\in\mathbb{N}^*$充分大时，$F_p$ (见 (1.18)) 的纤维方向狄拉克算子满足

$$D_X^{F_p,2}\geqslant(\boldsymbol{a}-\varepsilon)p^2. \tag{3.17}$$

特别地，当 $p\in\mathbb{N}^*$ 足够大时，$D^{F_p,\,2}_{X}$ 可逆，因此 $H^\bullet(X,\ F_p)\ =0$。由霍奇定理 (1.18)。

## 4. The asymptotics of the odd superconnection forms

本节旨在求得奇形式 $h\big(A',\ g^{\Omega^\bullet(\ X\ F_p\ )}_{4t/p^2},\ )$ 当 $p\to+\infty$ 时的渐近行为。我们采用的主要技术是 Bismut-Lebeau 的解析局部化方法 [6]，该方法由 Dai-Liu-Ma 进一步发展 [17]，并由 Ma-Marinescu [25, §4]。

我们分别在 $1\leqslant t<+\infty$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中处理这两种情形§ 4.1-§ 4.7 以及§ 4.8。主要困难在于，当 $t\to+\infty$ 如定理4.1所述时，如何得到一个指数衰减项。为此，本节大部分内容都用于仔细处理局部化过程，以确保每一步得到的算子始终是“非负的”，如 $p^{-2}D^{F_p,\ X\ 2}$ 定理3.6 （见§ 4.3-§ 4.4）。

现在我们进一步介绍本节的主要内容。在§ 4.1中，我们陈述本节的主定理，并用热核表示奇超联络形式。在§4.2中，利用$\mathcal{L}^{F_p}$的谱隙性质，我们可以运用双曲方程解的有限传播速度，将原问题局部化为关于$\mathbb{R}^m$的问题。在§ 4.3中，我们对算子 $\theta^{-1}_{1/\sqrt{p}}p^{-2}\mathcal{L}^{F_p}\theta_{1/\sqrt{p}}$施行 Bismut-Zhang 重新缩放，
接着，我们引入如式（4.66）中的微分算子光滑族 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v|_{0\leqslant v\leqslant 1/p}$，它连接重标度算子与极限算子，并研究 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v$ 关于参数 $v$ 的泰勒展开。在第4.4节中，我们引入带权分次 Sobolev 范数$\|\cdot\|_{\mu、\ k、\ p}$，并给出 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v$ 的一些基本椭圆估计。其中一个重要步骤是仔细分析 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v$ 的结构，并选择合适的权重 $\mu$，以保持 Spec($\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v$) 的“正性”。在第4.5节中，我们研究预解式 $(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v)^{-1}$ 的 Sobolev 估计。在第4.6节中，我们建立相应的热核收敛。在第4.7节中，当 $p\to+\infty$ 时，我们利用第2.2节的结果和高斯积分的性质，分析极限核的渐近迹。在第4.8节中，我们处理情形 $0<t\leqslant 1$。在第4.9节中，我们证明本节的主定理（见定理 4.1）。

**4.1.** 奇形式的渐近展开。下文中出现的常数取决于我们所考虑的 $S$ 的紧子集。为简化下文的陈述，我们总是假设 $S$ 是紧的。以下定理是本节的主要结果，本节其余部分将用于证明该定理。

回顾奇形式 $h\big(A',\ g^{\Omega^\bullet(X,\ F_p)\ t}\ \ \ \ \ \ \big)$ 以及 $\theta_a$ 分别见（1.16）和（1.35）。

定理 4.1。 若 $\widehat{\vartheta}^L$ 如 (3.16)所示为非退化的，则存在 $\{c_i(t)\in\mathbf{\Omega}^\bullet(M)\mid t>0\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得对任意 $\gamma>0$，$k$，$\ell\in\mathbb{N}$，我们有 $C>0$ 对于 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $t>0$，

$$\left|p^{-n}\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}h\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X c_i(t)p^{-i}\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(\boldsymbol{a}-\gamma)t}p^{-k-1},\tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{a}\geqslant 0$ 由 (3.16)给出。此外，存在 $C>0$，使得对于 $t>0$，我们有

$$\left|\int_X c_k(t)\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(\boldsymbol{a}-\gamma)t}.\tag{4.2}$$

对于 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $t>0$，设

$$\mathcal{M}^{F_p}=\theta_{\sqrt{p}}p^{-2}\mathcal{L}^{F_p}\theta_{1/\sqrt{p}},\quad \mathcal{M}^{F_p}_t=\theta_{\sqrt{p}/\sqrt{t}}tp^{-2}\mathcal{L}^{F_p}\theta_{\sqrt{t}/\sqrt{p}}.\tag{4.3}$$

设 $\exp(-t\mathcal{M}^{F_p})(x,\ x')$ 和 $\exp(-t'\mathcal{M}_t^{F_p})(x,\ x')$ 分别是与 $\mathcal{M}^{F_p}$ 和 $\mathcal{M}_t^{F_p}$ 相关的光滑热核 $dv_X(x')$。由 (1.16) 和 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}h\big(A', g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)\\
&=\sqrt{2\pi i}\varphi\left[\theta_{1/\sqrt{p}}\int_X \mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-\mathcal{L}^{F_p}_{4t/p^2})(x,x)\big]dv_X(x)\right]^z\\
&=\sqrt{2\pi i}\varphi\left[\theta^{-1}_{\sqrt{t}}\int_X \mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-t\mathcal{M}^{F_p})(x,x)\big]dv_X(x)\right]^z\\
&=\sqrt{2\pi i}\varphi\left[\int_X \mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-\mathcal{M}^{F_p}_t)(x,x)\big]dv_X(x)\right]^z.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

注意，为了证明定理4.1，我们只需考虑以下情形： $\boldsymbol{a}=0$；或者，我们可以将$\mathcal{L}^{F_p}$ 替换为 $\mathcal{L}^{F_p}-\boldsymbol{a}p^2$ ，从而得到额外的 $e^{-\boldsymbol{a}t}$。

4.2. 问题的局部化。对于 $x_0\in M$，令 $X$ 为包含 $x_0$的纤维，我们主要沿着该纤维进行研究。对于 $\varepsilon>0$，令 $B^X(x_0,\varepsilon)$ 和 $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ 分别为 $X$ 和 $T_{x_0}X$ 中的开球，其中心分别为 $x_0$ 和 0，半径均为 $\varepsilon$ 。令 $\exp^X_{x_0}$为 $(X,g^{TX})$ 的指数映射。当 $\varepsilon$足够小时，$\exp^X_{x_0}$：$B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)\to B^X(x_0,\varepsilon)$ 是一个微分同胚。通过使用 $T_{x_0}X$的标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 将 $T_{x_0}X$ 与 $\mathbb{R}^m$ 等同，即可得到局部坐标：

$$Z=(Z_1,\cdots,Z_m)\in\mathbb{R}^m\longmapsto Z_ie_i\in T_{x_0}X.\tag{4.5}$$

我们将始终通过 ( $B^X(x_0,\ \varepsilon)$ 与 $B^{T_{x_0}X}(0,\ \varepsilon)$ 之间的同构，将二者视为相同（4.5）。对于 $b\in S$，令 $\mathrm{inj}(X_b)$ 表示 $X_b=\pi^{-1}(b)$ 的注入半径。对于任意 $\varepsilon>0$ 满足以下条件的

$$0<\varepsilon<\min_{b\in S}\mathrm{inj}(X_b)/8,\tag{4.6}$$

(我们有 $\min_{b\in S}\mathrm{inj}(X_b)>0$，因为 $S$ 是紧致的。由 $X$的紧致性，我们可以选取一个 有限集 $\{x_i\}_{i\geqslant1}\subset X$，使得 $\{B^X(x_i,\ \varepsilon)\}_{i\geqslant1}$构成 $X$的一个开覆盖。目前， $\varepsilon$尚未被固定，我们将在定理 4.15之后为其赋予一个合适的值。

对于 $Z\in B^{T_{x_i}X}(0,\varepsilon)$，我们通过沿曲线 $s\to sZ$ （ $s\in[0,1]$）对联络 $\nabla^{F_p}$ 和 ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)}$ 作平行移动，将 $F_p$、$z$ 和 $\big(\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\ \big)_Z$ 分别与 $F_{p,x_i}$ 和 $\big(\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\big)_{x_i}$ 识别。令 $\Gamma^0$ 和 $\Gamma^{F_p}$、$u$ 分别表示在此平凡化下， ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)}$ 及 $\nabla^{F_p}$ 在 $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ 上对应的联络形式。

定义 4.2. 设 $\{f_{x_i}\}_{i\geqslant1}$ 是关于 $\{B^X(x_i,\varepsilon)\}_{i\geqslant1}$的一个单位分解。对于$k\in\mathbb{N}$，我们在 $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\ \otimes F_p)$ 上定义索об列夫范数$\|\cdot\|_{H^{k,\ p}}$：

$$\|s\|^2_{H^{k,p}}=\sum_i\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m,\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f_{x_i}s\|^2_{L^2},\tag{4.7}$$

并将其关于范数$\|\cdot\|^2_{H^{k,\ p}}$的完备化记作 $H^{k,\ p}$。

注 4.3. 注意， $\nabla^{F_p,\ u}$ 保持度量 $g^{F_p}$ 不变。因此，对于 $p$，两个范数$\|\cdot\|_{H^{0,\ p}}$和$\|\cdot\|_{L^2(X,\ F_p)}$ 一致等价，我们将不加区分地使用它们。

类似地 由[25, 引理 1.6.2]和 [36, 引理 3.6], ， 可得以下引理。

引理 4。 4. 对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $s\in H^{2k,\,p}$，我们有

$$\|s\|_{H^{2k,p}}\leqslant Cp^{2k}\sum_{j=0}^{k}p^{-2j}\left\|\mathcal{L}^{F_p,j}s\right\|_{L^2}. \tag{4.8}$$

证明。由（1.36），在 $B^X$（$x_i$，$\varepsilon$）上有

$$\mathcal{L}^{F_p}=-\left(e_i+\Gamma^{F_p,u}(e_i)+\Gamma^0(e_i)\right)^2+\left(\nabla^{TX}_{e_i}e_i+\Gamma^{F_p,u}(\nabla^{TX}_{e_i}e_i)+\Gamma^0(\nabla^{TX}_{e_i}e_i)\right)+\Lambda^{F_p}. \tag{4.9}$$

Fo对于任意 $Z\in B^X(x_i,\varepsilon)$，我们有一个经典关系（见 [4, 命题 1.18 ]）

$$\Gamma^{F_p,u}_Z(\partial_j)=\int_0^1 R^{F_p,u}_{tZ}(\mathcal{R},\partial_j)dt,\quad \text{for } \mathcal{R}=Z_i\partial_i. \tag{4.10}$$

由定理 3.1、（1.6）、（1.32）和（4.10），可知 $p^{-1}\Gamma^{F_p,\,u}_{\,Z}(\partial_j)$ 和 $p^{-2}\Lambda^{F_p}$ 构成 Toeplitz 算子的光滑族。对于 Toeplitz 算子的光滑族 $T_p$，由（2.12）和（3.12），$dT_p=\nabla^{F_p,\,u}T_p-[\Gamma^{F_p,u},T_p]$ 也构成 Toeplitz 算子的光滑族。

由（4.9）及上述论证可知，$p^{-1}\Gamma^{F_p,\,u}$ 和 $p^{-2}\Lambda^{F_p}$ 的算子范数对 $p\in\mathbb{N}^*$ 及其导数均一致有界，因此我们恰好得到（4.8），与 [25, 引理 1.6 的证明2]。 □

备注 4.5。 注意，如果将（4.8）中的 $\mathcal{L}^{F_p}$ 替换为 $\mathcal{L}^{F_p,\,*}$ 或 $D^{F_p,\,2}_{\,X}$，该式仍然成立，因为它们与（4.9）具有相同的结构。

取 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 为偶函数，且当 $t\geqslant 0$ 时单调不增，并且

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{if } |t|\leqslant\frac{1}{2},\\ 0 & \text{if } |t|\geqslant 1.\end{cases} \tag{4.11}$$

定义 4.6。对于 $t$、$h>0$ 和 $a\in\mathbb{C}$，令

$$\begin{aligned}F_{t,h}(a)&=\int_{\mathbb{R}}e^{\sqrt{2}iva}\exp\left(-v^2/2\right)f\left(\sqrt{t}v/h\right)\frac{dv}{\sqrt{2\pi}},\\ G_{t,h}(a)&=\int_{\mathbb{R}}e^{\sqrt{2}iva}\exp\left(-v^2/2\right)\left(1-f\left(\sqrt{t}v/h\right)\right)\frac{dv}{\sqrt{2\pi}},\\ H_{t,h}(a)&=\int_{\mathbb{R}}e^{\sqrt{2}iva}\exp\left(-v^2/2t\right)\left(1-f\left(v/h\right)\right)\frac{dv}{\sqrt{2\pi t}}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

函数 $F_{t,\,h}(a)G_{t,\,h}(a)\,H_{t,\,h}(a)$ 是偶全纯函数，因此存在$\widetilde{\phantom{x}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$全纯函数 $F_{t,\,h}(a)$、$G_{t,\,h}(a)$ 和 $H_{t,\,h}(a)$，使得

$$\widetilde{F}_{t,h}\left(a^2\right)=F_{t,h}(a),\quad \widetilde{G}_{t,h}\left(a^2\right)=G_{t,h}(a),\quad \widetilde{H}_{t,h}\left(a^2\right)=H_{t,h}(a). \tag{4.13}$$

此外 $\widetilde{\phantom{x}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$，$F_t$ 和 $G_t$ 在 $\mathbb{R}$ 上的限制属于施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$，并且

$$F_{t,h}(a)+G_{t,h}(a)=\exp\left(-a^2\right),\qquad H_{t,h}(a)=G_{t,h}\left(\sqrt{t}a\right). \tag{4.14}$$

现在固定一个 $c>0$，令 $V_c$ 为复平面的以下子集：

$$V_c=\left\{a\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(a)\geqslant\frac{1}{4c^2}\mathrm{Im}(a)^2-c^2\right\}. \tag{4.15}$$

引理 4.7. 对任意 $h>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C$、$c_1$、$c_2>0$，使得对于 $t>0$，有

$$\sup_{a\in V_c}\left|a^k\widetilde{H}_{t,h}(a)\right|\leqslant C\exp\left(c_1t-\frac{c_2}{t}\right). \tag{4.16}$$

证明。仿照[25, 定理 4.2。5], 当 $|\mathrm{Im}(a)|\leqslant c$时，随着 $i^ka^ke^{iva}=\frac{\partial^k}{\partial v^k}e^{iva}$，对 $(a^kH_{t,\ h}(a)$ 在（4.12）中给出的表达式作分部积分，可得

$$\sup_{|\mathrm{Im}(a)|\leqslant c}|a^kH_{t,h}(a)|\leqslant C\exp\left(c_1t-\frac{c_2}{t}\right). \tag{4.17}$$

注意，对于 $c>0$，$V_c$ 只是 $\{a\in\mathbb{C}$的像：$|\mathrm{Im}(a)|\leqslant c\}$ 在映射 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$: $a\mapsto a^2$下的像。由（4.13）和（4.17），可得（4.16）。□

对于任意 $\delta>0$，令 $\Gamma$ 为 $\mathbb{C}$ 中由 $\{x\pm\delta\mathrm{i}\ |\ x\geqslant-\delta\}\cup\{-\delta+x\mathrm{i}\ |-\delta\leqslant x\leqslant\delta\}$定义的围道。我们选取适当的 $\delta$ 使得 $\Gamma\subset V_c$ 且 $\min_{a\in\Gamma,\ b\in V_c}|a-b|=c^2/2$（见（4.15））, 并将此围道 $\Gamma$ 记为 $\Gamma_c$。

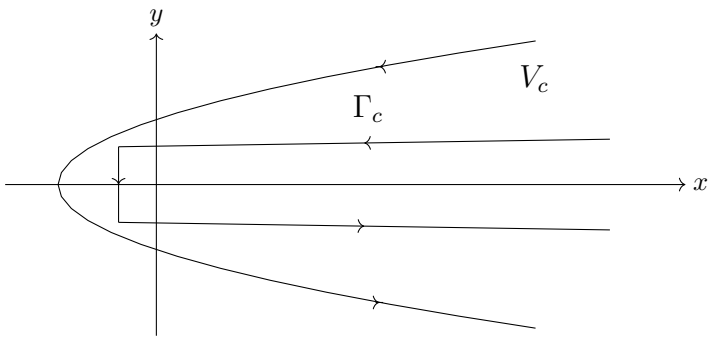


FIGURE 2.

引理 4.8. 对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0,\ell\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $p\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\Gamma_c$,

$$\left\|\left(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\right)^{-1}s\right\|_{H^{2k+2,p}}\leqslant Cp^\ell|\lambda|^\ell\|s\|_{H^{2k,p}}. \tag{4.18}$$

证明。 首先，按照 [36, (3.65)] 我们证明存在某个 $C>0$，$i\in\mathbb{N}^*$,

$$\left\|\left(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\right)^{-1}s\right\|_{L^2}\leqslant Cp^i|\lambda|^i\|s\|_{L^2}. \tag{4.19}$$

根据定理 1.11，我们写作 $\mathcal{L}^{F_p}=D^{F_p,\ 2}_X+\mathscr{G}^{F_p}$ 其中 $\mathscr{G}^{F_p}$ 是一个关于 $\pi^*\Lambda(T^*S)$ 的一阶纤维微分算子，且其次数为正，并且

$$\left(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{\dim S}\left(\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}\mathscr{G}^{F_p}\right)^i\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}. \tag{4.20}$$

注意到 $D^{F_p,\ 2}_X$ 的自伴性，对于任意 $\lambda\in\Gamma_c$和 $x\geqslant0$，我们有 $\max\{\frac{1}{|\lambda-x|},\frac{x}{|\lambda-x|}\}\leqslant C\frac{|\lambda|}{|\lambda-x|}+1\leqslant C|\lambda|$，因此存在 $C>0$，使得

$$\left\|\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\right\|_{L^2}\leqslant C\|s\|_{L^2},\quad\left\|D_X^{F_p,2}\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\right\|_{L^2}\leqslant C|\lambda|\cdot\|s\|_{L^2}. \tag{4.21}$$

根据定理 3.1、引理 4.4、备注 4.5、(1.32) 和 (1.36)，存在 $C>0$，使得对于任意 $\lambda\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}&\left\|\mathscr{G}^{F_p}\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\right\|_{L^2}\leqslant Cp^2\left\|\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\right\|_{H^{2,p}}\\&\leqslant Cp^2\left(\left\|D_X^{F_p,2}\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\right\|_{L^2}+p^2\|\left(\lambda-D_X^{F_p,2}\right)^{-1}s\|_{L^2}\right)\\&\leqslant Cp^4|\lambda|\cdot\|s\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

由（4.20）、（4.21）和（4.22），得到（4.19）。由（4.20）并采用类似于（4.22）的论证，对于某些 $C>0$，$j\in\mathbb{N}$，有

$$\left\|\mathcal{L}^{F_p}(\lambda-\mathcal{L}^{F_p})^{-1}s\right\|_{L^2}\leqslant Cp^j|\lambda|^j\|s\|_{L^2}\tag{4.23}$$

由（4.23），对于任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，$\ell\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{L}^{F_p,k+1}(\lambda-\mathcal{L}^{F_p})^{-1}s\right\|_{L^2}&=\left\|\mathcal{L}^{F_p}(\lambda-\mathcal{L}^{F_p})^{-1}\mathcal{L}^{F_p,k}s\right\|_{L^2}\\&\leqslant Cp^j|\lambda|^j\|\mathcal{L}^{F_p,k}s\|_{L^2}\leqslant Cp^\ell|\lambda|^\ell\|s\|_{H^{2k,p}}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

由（4.8）和（4.24），得到（4.18）。 □

令纤维积 $M\times_S M=\{(x_1,x_2)\in M\times M\mid\pi(x_1)=\pi(x_2)\}$ 带有投影 $\mathrm{pr}_i(x_1,x_2)\to x_i$。对于 $M$ 上的任意两个丛 $V,V'$，令 $V\times_S V'$ 为 $M\times_S M$ 上由 $\mathrm{pr}_1^*(V)\otimes\mathrm{pr}_2^*(V')$ 给出的丛。若我们在 $V$ 和 $V'$ 上有两个联络 $\nabla^V,\nabla^{V'}$，令 $\nabla^{V\times_S V'}$ 为 $V\times_S V'$ 上的诱导联络。我们定义一个丛

$$\mathbb{E}_p=\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda\left(T^*S\right)\widehat{\otimes}\Big(\left(\Lambda(T^*X)\otimes F_p\right)\times_S\left((\Lambda(T^*X))^*\otimes F_p^*\right)\Big)\tag{4.25}$$

在 $M\times_S M$ 上。令 $\nabla^{\mathbb{E}_p}$ 为 $\mathbb{E}_p$ 上由 ${}^0\nabla^{\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda^\bullet(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^\bullet(T^*X)\otimes F_p,\ u}$ 和 $\nabla^{F_p,\ u}$ 所诱导的联络（见（1.6）和（1.33））。注意到 $G_{t,\ \varepsilon}(t\mathcal{L}^{F_p})$ 是 $M\times_S M$ 上 $\mathbb{E}_p$ 的光滑截面。

我们还将 $\mathbb{E}_p$ 沿对角嵌入 $M\to M\times_S M$（由 $x_0\mapsto(x_0,x_0)$ 给出）的拉回丛记为

$$\mathbb{E}_{p,x_0}=\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda\left(T^*_{\pi(x_0)}S\right)\widehat{\otimes}\mathrm{End}(\Lambda(T^*_{x_0}X))\otimes\mathrm{End}(F_{p,x_0}).\tag{4.26}$$

**定理4.9.** 对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$，存在 $c_1$、$c_2>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得对任意 $t>0$ 和 $p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\left|\widetilde{G}_{t,\varepsilon}\left(t\mathcal{L}^{F_p}\right)\right|_{\mathscr{C}^\ell(M\times_S M)}\leqslant Cp^k\exp\left(c_1t-\frac{c_2}{t}\right),\tag{4.27}$$

其中 $\mathscr{C}^\ell(M\times_S M)$-范数由 $\nabla^{\mathbb{E}_p}$ 诱导。

~证明。由（4.16），对于 $r\in\mathbb{N}^*$，存在一个定义在 $V_c$ 邻域内的全纯函数 $H_{t,\ h,\ r}(a)$（另见 [6, 定理13.32]）

$$\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{da^{r-1}}\widetilde{H}_{t,h,r}(a)=\widetilde{H}_{t,h}(a),\tag{4.28}$$

并且对于任意 $h>0$，存在 $C,c_1,c_2>0$，使得对于任意 $t>0$，我们有

$$\sup_{a\in V_c}|a^k\widetilde{H}_{t,h,r}(a)|\leqslant C\exp\left(c_1t-\frac{c_2}{t}\right).\tag{4.29}$$

设 $\{U_i\}_{i=1}^{\dim S}$是 $S$上的一组局部向量场。设 $\{U_i^H\}$表示相应水平提升局部向量场的集合。对于任意多重指标 $\alpha=(i_1,i_2,\cdots)$，其中 $1\leqslant i_j\leqslant$维数 $S$，记 $U_\alpha^H=\nabla^{\mathbb{E}_p}_{U_{i_1}^H}\nabla^{\mathbb{E}_p}_{U_{i_2}^H}\cdots$。由 (4.14) 和 (4.28)，可得

$$U_\alpha^H\big(\widetilde{G}_{t,\varepsilon}\big(t\mathcal{L}^{F_p}\big)\big)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \widetilde{H}_{t,\varepsilon,r}(\lambda)U_\alpha^H\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r}d\lambda. \tag{4.30}$$

注意，$U_\alpha^H\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r}$ 是以下形式的算子的线性组合

$$\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_0}U_{\alpha_1}^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_1}\cdots U_{\alpha_\ell}^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_\ell}, \tag{4.31}$$

其中 $\alpha_j=(j_1,j_2,\cdots)$ 是多重指标，$\ell\in\mathbb{N}$, $r_i\geqslant 1$, $\sum r_i=r+\ell$。注意，对于任意多重指标 $\alpha$, $U_\alpha^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)$，是一个满足以下条件的二阶纤维微分算子

$$\big\|U_\alpha^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)s\big\|_{H^{k,p}}\leqslant Cp^2\big\|s\big\|_{H^{k+2,p}}. \tag{4.32}$$

由（4.18）和（4.32）可知，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $i$，$i'\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\big\|U_\alpha^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-1}s\big\|_{H^{2k,p}}\leqslant p^i|\lambda|^{i'}\|s\|_{H^{2k,p}}. \tag{4.33}$$

设 $P,Q$ 是阶数分别为 $2q$ 和 $2q'$ 的微分算子，它们具有标量主符号，且支集分别紧支撑于 $B^X(x,\varepsilon)$ 和 $B^X(x',\varepsilon)$。在 (4.30) 中取 $r\geqslant(2q+2q'+2)|\alpha|$，则存在一个 $r_j\geqslant 2(q+q')$。由 (4.31)，我们将算子 $PU_\alpha^H\big((\lambda-\mathcal{L}^{F_p})^{-k}\big)Q$ 分解为两部分的乘积

$$\begin{aligned}&P\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_0}U_{\alpha_1}^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_1}\cdots U_{\alpha_j}^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-1}\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-2q},\\&\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{r_j-2q'-2q-2}\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-2q'-1}\cdots U_{\alpha_\ell}^H\big(\mathcal{L}^{F_p}\big)\big(\lambda-\mathcal{L}^{F_p}\big)^{-r_\ell}Q.\end{aligned} \tag{4.34}$$

根据（4.18）和（4.33），上面的第一部分是从 $L^2$-空间到其自身的映射，且其算子范数被 $Cp^{j_0}|\lambda|^{j_0'}$所控制。根据注4.5，第二部分的伴随具有与第一部分相同的结构，且其算子范数也被$Cp^{j_1}|\lambda|^{j_1'}$所控制。因此，对于某些 $j$，$j'\in\mathbb{N}^*$，有

$$\big\|PU_\alpha^H\big((\lambda-\mathcal{L}^{F_p})^{-k}\big)Qs\big\|_{L^2}\leqslant Cp^j|\lambda|^{j'}\|s\|_{L^2}. \tag{4.35}$$

由（4.29）、（4.30）、（4.35）以及 Sobolev 不等式，我们得到

$$\big|U_\alpha^H\big(\widetilde{G}_{t,\varepsilon}\big(t\mathcal{L}^{F_p}\big)\big)(\cdot,\cdot)\big|_{\mathscr{C}^q(X\times X)}\leqslant Cp^k\exp\Big(c_1t-\frac{c_2}{t}\Big), \tag{4.36}$$

这给出了（4.27）。这里我们强调，Sobolev 不等式中的常数 不依赖于丛 $F_p$ 的维数。□

4.3. 算子 $\mathcal{L}^{F_p}$ 的重新缩放。现在，对于两类 Clifford 变量，我们使用 Bismut-Zhang 在[12, 第 4] 章[20]中的重新缩放，这类似于 Getzler 的重新缩放。

沿用第 § 4.2 节开头的记号，我们固定 $x_0\in M$ 并将 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)$ 和 $F_p$ 识别为 $\big(\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\ \big)_{x_0}$ 和 $F_{p,x_0}$ 在 $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ 上。令 $\Gamma^0$ 和 $\Gamma^{F_p,u}$ 为相应的联络形式。

令 $X_0=T_{x_0}X\cong\mathbb{R}^m$。设 $g^{TX_0}$是 $X_0$上的黎曼度量，使得

$$g^{TX_0}=\begin{cases}g^{TX}, & \text{on } B^{T_{x_0}X}\left(0,\operatorname{inj}(X)/2\right),\\ g^{T_{x_0}X}, & \text{outside } B^{T_{x_0}X}\left(0,\operatorname{inj}(X)\right),\end{cases} \tag{4.37}$$

并设 $dv_{X_0}$ 为相应的体积形式。设 $dv_{TX}$ 为 $\left(T_{x_0}X\text{的黎曼体积形式}, \ g^{T_{x_0}X}\right)$，且 $\kappa(x)$ 为由下式定义的光滑正函数

$$dv_{X_0} = \kappa\left(Z\right) dv_{TX}, \quad \kappa\left(0\right) = 1. \tag{4.38}$$

回忆函数 $f$ 在（4.11）中的定义。对于任意满足（ $\varepsilon > 0$ 4.6）的 $f_\varepsilon$，令： $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$f_\varepsilon(Z) = f(|Z|/\varepsilon). \tag{4.39}$$

Put

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\otimes F_p. \tag{4.40}$$

在平凡丛 $\mathbb{F}_{p,x_0}$ 上（底空间为 $X_0$），我们定义

$$\nabla^{\mathbb{F}_{p,x_0}} = \nabla + f_\varepsilon(Z)\left(\Gamma_Z^0 + \Gamma_Z^{F_p,u}\right). \tag{4.41}$$

令 $\Delta^{\mathbb{F}_{p,x_0}}$ 为与 $\nabla^{\mathbb{F}_{p,x_0}}$ 和 $g^{TX_0}$ 相关联的拉普拉斯算子。令 $\nabla^{TX_0}$ 为 $\left(X_0\text{上的 Levi-Civita 联络}, \ g^{TX_0}\right)$，并令 $\left(g^{ij}\right)$ 为 $\left(g_{ij}\right) = \left(g^{TX_0}\left(\partial_i, \partial_j\right)\right)$的逆，则

$$\Delta^{\mathbb{F}_{p,x_0}} = -g^{ij}\left(\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{E}_{p,x_0}}\nabla_{\partial_j}^{\mathbb{E}_{p,x_0}} - \nabla_{\nabla_{\partial_i}^{TX_0}\partial_j}^{\mathbb{E}_{p,x_0}}\right). \tag{4.42}$$

回忆 $\Lambda^{F_p}$ 在（1.32）中的定义。局部地，我们将 $\Lambda^{F_p}$ 视为 $\mathscr{C}^\infty\left(B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)\,\mathbb{E}_{p,x_0}\right)$ 中的一个元素（参见（4.26））。令

$$\Lambda_{x_0,p} = f_\varepsilon(Z)\Lambda^{F_p} \in \mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X, \mathbb{E}_{p,x_0}), \qquad \mathscr{L}_{x_0}^{F_p} = \Delta^{\mathbb{E}_{p,x_0}} + \Lambda_{x_0,p}. \tag{4.43}$$

那么 $\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}$i s 是一族作用于 $\mathscr{C}^\infty(T_{x_0}X, \mathbb{F}_{p,\ x_0})$ 的微分算子，其中 $x_0 \in M$。

令 $\exp(-t\mathcal{L}^{F_p})\,(x,x')$、$(x,x')$ 为 $\exp(-t\mathcal{L}^{F_p})$ 关于 $dv_X$的光滑核，其中 $\in M \times_S M$；令 $\exp(-t\mathscr{L}_{x_0}^{F_p})\,(Z,Z')$ 为 $\exp(-t\mathscr{L}_{x_0}^{F_p})$ 关于 $dv_{X_0}$的光滑核，其中 $(Z,Z')$ $\in T_{x_0}X \times T_{x_0}X$。与 (4.26) 中一样，我们仍将 $\mathbb{E}_p$ 经投影 $TX\times_M TX \to M$ 的拉回丛记为 $\mathbb{E}_p$，于是可以将 $\exp(-t\mathscr{L}_{x_0}^{F_p})\,(Z,Z')$ 视为 $TX \times_M TX$ 上的 $\mathbb{E}_p$ 的光滑截面。

定理 4.10。 对于 $\varepsilon > 0$ 满足 (4.6) 且 $\ell \in \mathbb{N}$，存在 $C$， $c_1$， $c_2 > 0$ 和$k \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$， $t > 0$，有

$$\left|\exp(-t\mathcal{L}^{F_p})(x_0,x_0) - \exp(-t\mathscr{L}_{x_0}^{F_p})(0,0)\right|_{\mathscr{C}^\ell(M)} \leqslant Cp^k e^{c_1 t - \frac{c_2}{t}}, \tag{4.44}$$

其中$|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell(M)}$是关于参数 $x_0 \in M$ 的 $\mathscr{C}^\ell$范数。

证明。 由 (4.41)、(4.42) 和 (4.43) 可知，$\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}$和 $\mathcal{L}^{F_p}$在 $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ 上重合。于是由 (4.11)、(4.12)、(4.13) 以及波算子的有限传播速度（见 [25, 定理 D.2。1]），可得

$$\widetilde{F}_{t,\varepsilon}\left(t\mathcal{L}^{F_p}\right)(x_0,\cdot) = \widetilde{F}_{t,\varepsilon}\left(t\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}\right)(0,\cdot). \tag{4.45}$$

由（4.43）， $\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}$具有与$\mathcal{L}^{F_p}$相同的结构；特别地，若将4.4 和4.9 中的$\mathcal{L}^{F_p}$ 替换为 $\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}$，则这些引理仍然成立。于是， （4.44）由（4.14）得出。□

Put

$$\mathscr{M}_{x_0}^{F_p} = \theta_{\sqrt{p}}p^{-2}\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}\theta_{1/\sqrt{p}}. \tag{4.46}$$

推论 4.11。 对于任意满足 $\varepsilon>0$ (4.6)的 $\gamma>0$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C$， $c_1$， $c_2>0$，使得对任意 $t>0$ 和 $p\in\mathbb{N}^*$ 充分大的情形，均有

$$\left|\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\left[\exp(-t\mathcal{M}^{F_p})(x_0,x_0)-\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})(0,0)\right]\right|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Ce^{\gamma t-\frac{c_2}{4t}-\sqrt{\gamma c_2}p}, \tag{4.47}$$

其中 $|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell(M)}$ 是关于 $\mathscr{C}^\ell$ 的范数 $x_0\in M$，而 $c_1$ 和 $c_2$ 由 (4.16)给出。

证明。由 (2.6), (4.3), (4.46) 和 (4.44)，将 $t$ 替换为 $t/p^2$，可得 $C>0$ 其中

$$\begin{aligned}&\left|\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\left[\exp\left(-t\mathcal{M}^{F_p}\right)(x_0,x_0)-\exp\left(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p}\right)(0,0)\right]\right|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\\ =&\left|\theta_{\sqrt{\frac{p}{t}}}\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\left[\exp\left(-tp^{-2}\mathcal{L}^{F_p}\right)(x_0,x_0)-\exp\left(-tp^{-2}\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}\right)(0,0)\right]\right|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\\ \leqslant&C(1+t^{-\dim S/2})p^{\dim S/2}\exp\left(c_1tp^{-2}-\frac{c_2p^2}{t}\right).\end{aligned} \tag{4.48}$$

由中值不等式可得

$$c_1tp^{-2}-\frac{c_2p^2}{t}\leqslant\gamma t-\frac{c_2}{2t}-\left(\frac{\gamma t}{2}+\frac{c_2p^2}{2t}\right)\leqslant\gamma t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p. \tag{4.49}$$

显然，$p^{\dim S/2}e^{-\sqrt{\gamma c_2}p}$ 和 $(1+t^{-\text{维数}S})e^{-c_2/4t}$ 在 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $t>0$ 上一致有界。因此，由 (4.47) 可由 (4.48) 和 (4.49) 得到。 □

对于 $s\in\mathscr{C}^\infty\left(T_{x_0}X,\mathbb{E}_{p,\,x_0}\right),Z\in\mathbb{R}^m,u>0$，我们定义 $(K_us)(Z)=s(uZ)$，并且

$$\mathscr{N}_{x_0}^{F_p}=K_{1/p}\mathscr{M}_{x_0}^{F_p}K_p. \tag{4.50}$$

设 $\exp(-t\mathscr{N}_{x_0}^{F_p})(Z,Z')$ 是相对于 $dv_{TX}$ 的 $\exp(-t\mathscr{N}_{x_0}^{F_p})$ 的核，则

$$\begin{aligned}\left(\exp(-t\mathscr{N}_{x_0}^{F_p})s\right)(Z)&=\left(K_{1/p}\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})K_ps\right)(Z)\\ &=\int_{\mathbb{R}^m}\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})(p^{-1}Z,Z')s(pZ')\kappa(Z')dv_{TX}(Z')\\ &=p^{-m}\int_{\mathbb{R}^m}\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})(p^{-1}Z,p^{-1}Z')\kappa(p^{-1}Z')s(Z')dv_{TX}(Z').\end{aligned} \tag{4.51}$$

由（4.38）和（4.51），可得

$$\exp(-t\mathscr{N}_{x_0}^{F_p})(0,0)=p^{-m}\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})(0,0). \tag{4.52}$$

$\widehat{\ }$ 我们引入 $T_{x_0}X$ 的另一个副本 $T_{x_0}X$。当提及 $T_{x_0}X$ 中的元素时，我们会在其上方加一个帽子 $\widehat{\ }$。对于 $s>0$，令

$$c_s(e_j)=\frac{1}{\sqrt{s}}e^j\wedge-\sqrt{s}i_{e_j}\qquad\widehat{c}_s(e_j)=\frac{1}{\sqrt{s}}e^j\wedge+\sqrt{s}i_{e_j}. \tag{4.53}$$

我们用 $\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p}$ 表示由 $\mathscr{N}_{x_0}^{F_p}$ 得到的算子，即分别将 $c(e_i)$ $\widehat{c}(e_i)$ 替换为 $c_{1/p}(e_i)$ 和 $\widehat{c}_{1/p}(e_i)$。令

$$\widehat{\mathbb{F}}_p=\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda\left(T^*S\right)\widehat{\otimes}\Lambda\left(T^*X\right)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})\otimes F_p, \tag{4.54}$$

于是，$\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p}$ 自然作用于 $\mathscr{C}^\infty(T_{x_0}X,\widehat{\mathbb{F}}_{p,\,x_0})$。我们用 $\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p})(Z,Z')$ 表示 $\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p})$ 关于 $dv_{TX}(Z')$ 的光滑核。令

$$\widehat{\mathbb{E}}_p=\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\widehat{\otimes}\mathrm{End}\left(\Lambda(T^*X)\right)\widehat{\otimes}\mathrm{End}\left(\Lambda(\widehat{T^*X})\right)\otimes\mathrm{End}(F_p), \tag{4.55}$$

并记 $\pi\colon TX\times_M TX\to M$ 为自然投影，则 $\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0})(Z,Z')$ 是 $\pi^*\mathbb{E}_p$ 在 $TX\times_M TX$ 上的光滑截面。

对于任意 $H\in\mathrm{End}\big(\Lambda(T^*X)\big)\widehat{\otimes}\mathrm{End}\big(\Lambda(\widehat{T^*X})\big)$，它都可以唯一地展开为以下形式：

$$H=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant m\\ 1\leqslant i'_1<\cdots<i'_{p'}\leqslant m}}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant m\\ 1\leqslant j'_1<\cdots<j'_{q'}\leqslant m}} Q^{j_1,\cdots,j_q,j'_1,\cdots,j'_{q'}}_{i_1,\cdots,i_p,i'_1,\cdots,i'_{p'}}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}\wedge i_{e_{j_1}}\cdots i_{\widehat{e}_{j_q}} \wedge\widehat{e}^{i'_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e}^{i'_{p'}}\wedge i_{\widehat{e}_{j'_1}}\cdots i_{e_{j'_{q'}}}, \tag{4.56}$$

并且我们定义

$$[H]^{\max}=Q_{1,\cdots,n,1,\cdots,n}e^1\wedge\cdots\wedge e^n\wedge\widehat{e}^1\wedge\cdots\wedge\widehat{e}^n. \tag{4.57}$$

现在我们定义一个线性映射 $\int^{\widehat{B}}\colon\Lambda(T^*X)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})\to\Lambda(T^*X)$，称为 Berezin 积分：首先假设 $\widehat{TX}$ 由形式 $\widehat{e}^1\wedge\cdots\wedge\widehat{e}^m$ 定向，则对于 $\alpha\in\Lambda(T^*X)\widehat{\ }$ 和 $\beta\in\Lambda(T^*X)$，

$$\int^{\widehat{B}}\alpha\widehat{\beta}=0\ \text{ if }\ \deg\widehat{\beta}<m,\quad \int^{\widehat{B}}\alpha\widehat{e}^1\wedge\cdots\wedge\widehat{e}^m=\frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{\pi^{m/2}}\alpha, \tag{4.58}$$

若 $TX$ 未定向，令 $o(\widehat{TX})$ 为 $\widehat{TX}$ 的定向线，则 $\int^B$ 确实定义了一个从 $\Lambda(T^*X)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})$ 到 $\Lambda(T^*X)\widehat{\otimes}o(\widehat{TX})$ 的线性映射。

若 $G\in$ 端omorphism$\big(\Lambda(T^*X)\big)$，通过（1.30），我们将 $\widehat{c}(e)$ 中的每个 $G$ 替换为 $\widehat{c}(\widehat{e})$，得到$\widehat{G}\in$端omorphism$\big(\Lambda(T^*X)\big)\widehat{\otimes}$端omorphism$\big(\Lambda(\widehat{T^*X})\big)$。

由[12, 命题4.9]，可知，在 $c(e_i)$ 和 $\widehat{c}(e_j)$ 的单项式中，只有项$c(e_1)\widehat{c}(e_1)\cdots c(e_m)\widehat{c}(e_m)$ 的超迹非零，并且

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}^{\Lambda(T^*X)}[c(e_1)\widehat{c}(e_1)\cdots c(e_m)\widehat{c}(e_m)]=(-2)^m. \tag{4.59}$$

由（4.58）和（4.59），得到

$$\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)}[G]\cdot e^1\wedge\cdots\wedge e^n=(4\pi)^{\frac{m}{2}}s^m\int^{\widehat{B}}[\widehat{G}]^{\max}. \tag{4.60}$$

**命题4.12**。对于任意 $p\in\mathbb{N}^*,t>0$ 和 $x_0\in M$，有

$$\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-t\mathscr{M}^{F_p}_{x_0})(0,0)\big]dv_X=(4\pi)^{\frac{m}{2}}\mathrm{Tr}^{F_p}\int^{\widehat{B}}\big[\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0})(0,0)\big]^{\max}. \tag{4.61}$$

证明。根据 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$的定义以及（4.60），得到

$$\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-t\mathscr{N}^{F_p}_{x_0})(0,0)\big]dv_X(x_0)=(4\pi)^{\frac{m}{2}}p^{-m}\mathrm{Tr}^{F_p}\int^{\widehat{B}}\big[\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0})(0,0)\big]^{\max}, \tag{4.62}$$

于是（4.61）由（4.52）和（4.62）立即得出。 □

令 $\widehat{N}$ 为作用于 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)\ \widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\ \widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})$ 的数算子，其作用方式是乘以该外代数的总次数。对于任意 $a>0$，定义

$$\widehat{\theta}_a=a^{\widehat{N}}. \tag{4.63}$$

回顾第4.3节开头的联络形式 $\Gamma^0_Z$ 和 $\Gamma^{F_p,u}_Z$、(4.39) 中的 $f_\varepsilon(Z)$ 以及 (4.42) 中的$g^{ij}$。那么 $f_\varepsilon(Z)\Gamma^0_Z$是一个取值于 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*_\pi(x_0)S)\ \widehat{\otimes}$端omorphism$(\Lambda(T^*_{x_0}X))$ 中的 1-形式。将 $f_\varepsilon(Z)\Gamma^0_Z$ 中的 $\widehat{c}(e_i)$ 替换为 $\widehat{c}(\widehat{e}_i)$，得到一个定义在 $T_{x_0}X$ 上、取值于$\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*_\pi($ $_{x_0})S)\ \widehat{\otimes}$端omorphism$(\Lambda(T^*_{x_0}X))\ \widehat{\otimes}$端omorphism$(\Lambda(\widehat{T^*_{x_0}X}))$ 的 1-形式 $\widehat{\Gamma}^0_Z$。定义

$$\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_Z = f_\varepsilon(Z)\Gamma^{F_p,u}_Z. \tag{4.64}$$

由（4.50）以及 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$的构造，通过在 $Z/p$处计算等式右端的张量，我们得到以下恒等式:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0,Z} = -g^{ij}\Big\{&\big(\partial_i + \frac{1}{p}\widehat{\theta}^{-1}_{1/p}\widehat{\Gamma}^0(\partial_i)\,\widehat{\theta}_{1/p} + p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}(\partial_i)\big)\\
&\cdot\big(\partial_j + \frac{1}{p}\widehat{\theta}^{-1}_{1/p}\widehat{\Gamma}^0(\partial_j)\,\widehat{\theta}_{1/p} + p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}(\partial_j)\big)\\
&+\frac{1}{p}\big(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j + \frac{1}{p}\widehat{\theta}^{-1}_{1/p}\widehat{\Gamma}^0\big(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j\big)\widehat{\theta}_{1/p} + p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}\big(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j\big)\big)\Big\}\\
+f_\varepsilon\Big\{&\frac{r^X}{4p^2} - \frac{1}{8p^2}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_\ell\big\rangle c_{1/p}(e_i)c_{1/p}(e_j)\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{1}{8p}\big\langle R^{TX}(f^H_\alpha,f^H_\beta)e_k,e_\ell\big\rangle f^\alpha f^\beta\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{1}{4p^{3/2}}\big\langle R^{TX}(e_i,f^H_\alpha)e_k,e_\ell\big\rangle c_{1/p}(e_i)f^\alpha\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{1}{2p}c_{1/p}(e_i)c_{1/p}(e_j)\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2(e_i,e_j)\\
&-\frac{1}{2}f^\alpha f^\beta\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2\big(f^H_\alpha,f^H_\beta\big)\\
&-\frac{1}{p^{1/2}}c_{1/p}(e_i)f^\alpha\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2\big(e_i,f^H_\alpha\big)\\
&+\frac{1}{4p^2}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i)^2 + \frac{1}{2p}\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_i)\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_j)\frac{1}{4p}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2(e_i,e_j)\\
&-\frac{1}{p^{1/2}}f^\alpha\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_i)\frac{1}{2p}\widehat{\nabla^{TX\otimes F_p,u}_{f^H_\alpha}}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i)\\
&-\frac{1}{p}c_{1/p}(e_i)\widehat{c}_{1/p}(\widehat{e}_j)\frac{1}{2p}\widehat{\nabla^{TX\otimes F_p,u}_{e_i}}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_j)\\
&-\frac{1}{p^{1/2}}zc_{1/p}(e_i)\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i) - zf^\alpha\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)\big(f^H_\alpha\big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

注意，局部而言，$\dim F_p$ 随 $p\in\mathbb{N}^*$呈多项式增长，我们无法将 $F_p$ 化为固定丛，因此天真地考虑极限算子 $\lim_{p\to+\infty}\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$，$z$ 毫无意义。在 [9, (9.148)], 中，Bismut-Ma-Zhang 将 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$，$z$ 视为以托普利兹算子（2.8）为系数的微分算子，并在托普利兹算子的意义下得到了 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$，$z$ 关于 $p\in\mathbb{N}^*$ 的一阶展开。

现在我们应该描述它的完整“展开”。我们并不直接以托普利兹算子的意义展开 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$。相反，我们引入一个算子级数 $\{\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v\}_{0\leqslant v\leqslant 1/p}$，使得

$\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{1/p}=\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$，并将泰勒展开 $\sum_{i=0}^{\ell}\frac{1}{i!}\,p^i\frac{\partial^i\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v}{\partial v^i}|_{v=0}$ 视为 $\ell$ 阶“展开” $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$。这种方法的优点是，$v$ 是一个光滑参数，因此我们可以使用 Ma-Marinescu [25, §4.1], 中的技巧；此外，这也便于计算 § 6中的二阶展开。

现在我们给出作用于算子 $\{$的定义 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v\}_{0\leqslant v\leqslant 1/p}$ 作用于 $\mathscr{C}^\infty_0(T_{x_0}X,\widehat{\mathbb{F}}_{p,\,x_0})$。通过在 $vZ$ 处计算等式右侧的张量，我们取

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v=&-g^{ij}\Big\{\big(\partial_i+v\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\partial_i)\,\widehat{\theta}_v+p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\partial_i)\big)\\
&\qquad\cdot\big(\partial_j+v\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\partial_j)\,\widehat{\theta}_v+p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\partial_j)\big)\\
&\qquad+v\big(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j+v\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j)\widehat{\theta}_v+p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\nabla^{TX_0}_{\partial_i}\partial_j)\big)\Big\}\\
&+f_\varepsilon\Big\{\frac{v^2}{4}r^X-\frac{v^2}{8}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_\ell\big\rangle c_v(e_i)c_v(e_j)\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{v}{8}\big\langle R^{TX}(f^H_\alpha,f^H_\beta)e_k,e_\ell\big\rangle f^\alpha f^\beta\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{v^{3/2}}{4}\big\langle R^{TX}(e_i,f^H_\alpha)e_k,e_\ell\big\rangle c_v(e_i)f^\alpha\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{v}{2}c_v(e_i)c_v(e_j)\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2(e_i,e_j)\\
&-\frac{1}{2}f^\alpha f^\beta\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2\big(f^H_\alpha,f^H_\beta\big)+\frac{1}{4p^2}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i)^2\\
&-v^{1/2}c_v(e_i)f^\alpha\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2\big(e_i,f^H_\alpha\big)\\
&+\frac{v}{2}\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)\widehat{c}_v(\widehat{e}_j)\frac{1}{4p}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2(e_i,e_j)\\
&-v^{1/2}f^\alpha\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{f^H_\alpha}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i)\\
&-vc_v(e_i)\widehat{c}_v(\widehat{e}_j)\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{e_i}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_j)\\
&-v^{1/2}zc_v(e_i)\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)(e_i)-zf^\alpha\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)\big(f^H_\alpha\big)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

结合（4.65）和（4.66），显然有 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{1/p}=\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{x_0}$。现在我们讨论关于 $v$ 的 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v$泰勒展开。令

$$
\begin{aligned}
\widehat{R^{TX}}&=\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle\wedge\widehat{e}^j\wedge i_{\widehat{e}_i},\\
\widehat{R}^{TX}&=\frac{1}{2}\big\langle R^{TX}(e_k,e_\ell)e_i,e_j\big\rangle\widehat{e}^k\wedge\widehat{e}^\ell\wedge e^j\wedge i_{e_i}.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

定理 4.13。对于 $r\in\mathbb{N}$、$p\in\mathbb{N}^*$、$0\leqslant v\leqslant 1/p$，我们可以写成

$$
\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_v}{\partial v^r}=\mathscr{X}^{F_p,(r)}_{v,ij}(Z)\partial_i\partial_j+\mathscr{Y}^{F_p,(r)}_{v,i}(Z)\partial_i+\mathscr{Z}^{F_p,(r)}_v(Z),\quad for\ \mathscr{X}^{F_p,(r)}_{v,ij}(Z)=-\frac{\partial^r g^{ij}_{vZ}}{\partial v^r}
\tag{4.68}
$$

and $\mathscr{Y}^{F_p,\,(r)\,v,\,i}(Z)$ $\mathscr{Z}^{F_p,\,(r)v}(Z)\in\mathscr{C}^\infty(T_{x_0}X,\widehat{\mathbb{E}}_{p,\,x_0})$ 具有以下性质：

(1) 函数 $\mathscr{X}^{F_p,\,(r)\,v,\,ij}$ 在 $T_{x_0}X$ 的某个紧集之外为常数。此外，若 $v\neq 0$，$\mathscr{Y}^{F_p,\,(r)\,v,\,i}(Z)$ 和 $\mathscr{Z}^{F_p,\,(r)v}(Z)$ 都具有紧支撑。

(2) 存在 $C>0$，使得对于 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $0\leqslant v\leqslant 1/p$，$\mathscr{X}^{F_p,(r)\,v,ij}(Z)$ $\mathscr{Y}^{F_p,(r)\,v,i}(Z)$ 以及 $\mathscr{Z}^{F_p,(r)v}(Z)$ 的算子范数 $\|\cdot\|_{\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}}$ 均由 $C(1+|Z|^r)$ 控制。

(3) 算子 $\mathscr{X}^{F_p,(r)\,0,ij}(Z)$ 是关于 $Z$ 的多项式（相应地，$\mathscr{Y}^{F_p,(r)\,0,i}(Z)$ $\mathscr{Z}^{F_p,(r)\,0}(Z)$ 是关于 $Z$ 的多项式，其系数属于 $\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}$）。此外，$\mathscr{X}^{F_p,(r)\,0,ij}(Z)$ 是一个 $Z$ 次数为 $r$ 的齐次多项式；$Z$ 中的次数，即 $\mathscr{Y}^{F_p,(r)\,0,i}(Z)$（$\mathscr{Z}^{F_p,(r)\,0}(Z)$）的次数，不超过 $r$。

（4）特别地，

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{L}}_0^{F_p}=&-\Delta^{T_{x_0}X}-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle_{x_0}\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2_{x_0}\\&+\frac{1}{4p^2}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)_{x_0}(e_i)^2+\frac{1}{4p}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2_{x_0}\\&-\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)_{x_0}-\frac{1}{2p}z\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)_{x_0},\end{aligned}\tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v}\Big|_{v=0}=&-\frac{Z_j}{4}\Big\{\big\langle R^{TX}_{x_0}\partial_i,\partial_j\big\rangle-\big\langle\widehat{R}^{TX}_{x_0}\partial_i,\partial_j\big\rangle-\frac{1}{2p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2_{x_0}\big(\partial_i,\partial_j\big)\Big\}\partial_i\\&+\mathscr{Q}^{F_p}(Z)+\mathscr{Q}^{F_p\prime},\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{Q}^{F_p}(Z)$（分别为 $\mathscr{Q}^{F_p\prime}$）是 $Z$ 中次数为 1（分别为 0）的齐次多项式，其系数属于 $\widehat{\mathbb{E}}_{p,\,x_0}$，且

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}^{F_p\prime}=&\frac{1}{2}R^{\widehat{TX}}-\frac{1}{2}\widehat{R}^{TX}-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}(f^H_\alpha,e_i)e_k,e_l\big\rangle\widehat{e}^k\wedge\widehat{e}^l\wedge f^\alpha\wedge i_{e_i}\\&+e^i\wedge i_{e_j}\frac{1}{4p}\omega_p^2(e_i,e_j)+f^\alpha\wedge i_{e_i}\frac{1}{4p}\omega_p^2\big(f^H_\alpha,e_i\big)+\widehat{e}^i\wedge i_{\widehat{e}_j}\frac{1}{4p}\widehat{\omega}_p^2(\widehat{e}_i,\widehat{e}_j)\\&-f^\alpha\wedge i_{\widehat{e}_i}\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{f^H_\alpha}\widehat{\omega}_p(e_i)-e^i\wedge i_{\widehat{e}_j}\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{e_i}\widehat{\omega}_p(e_j)\\&-\widehat{e}^j\wedge i_{e_i}\frac{1}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{e_i}\widehat{\omega}_p(e_j)+zi_{e_i}\frac{1}{2p}\omega_p(e_i).\end{aligned}\tag{4.70}$$

证明。如引理 4.4 的证明所示，由定理 3.1、（1.6）和（4.10），可得

$$p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}\big(\partial_i\big)\sim\frac{vZ_j}{2}\cdot\frac{1}{4p}\omega\big(\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)^2_{x_0}\big(\partial_i,\partial_j\big)+\mathcal{O}(v^2).\tag{4.71}$$

由（4.53），我们有

$$v^{1/2}c_v(e_i)=e^i\wedge-vi_{e_i},\quad v^{1/2}\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)=\widehat{e}^i\wedge+vi_{\widehat{e}_i}.\tag{4.72}$$

由（4.72），与（4.71）类似，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_v^{-1}(\widehat{\Gamma}^0_{vZ})\widehat{\theta}_v\big(\partial_i\big)\sim-\frac{1}{4}Z_j\Big(&\big\langle R^{TX}_{x_0}(e_k,e_\ell)\partial_i,\partial_j\big\rangle e^k\wedge e^\ell-\big\langle R^{TX}_{x_0}(e_k,e_\ell)\partial_i,\partial_j\big\rangle\widehat{e}^k\wedge\widehat{e}^\ell\\&+\big\langle R^{TX}_{x_0}(f_\alpha,e_\ell)\partial_i,\partial_j\big\rangle f^\alpha\wedge e^\ell+\frac{1}{2}\big\langle R^{TX}_{x_0}(f_\alpha,f_\beta)\partial_i,\partial_j\big\rangle f^\alpha\wedge f^\beta\Big)+\mathcal{O}(v).\end{aligned}\tag{4.73}$$

由（4.66）、（4.71）、（4.72）和（4.73，可写成

$$\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}=\mathscr{X}^{F_p}_{v,ij}\partial_i\partial_j+\mathscr{Y}^{F_p}_{v,i}\partial_i+\mathscr{Z}^{F_p}_v,\quad\text{where }\mathscr{X}^{F_p}_{v,ij}(Z)=-g^{ij}_{vZ},\tag{4.74}$$

且 $\{\mathscr{Y}_{v,i}^{F_p}, \mathscr{Z}_v^{F_p}\}$ 中的每一项都是如下形式的项之和： $v^k\Gamma_{vZ}$，其中 $k\in\mathbb{N}$， $\Gamma\in\mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X, \mathbb{E}_{p,\,x_0})$ 是一个 Toeplitz 算子的光滑族（见§3.3），且其支集包含于$B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$，因此其范数 $|\cdot|_{\mathscr{C}(T_{x_0}X,\,\widehat{\mathbb{E}}_{p,\,x_0})}$ 对于 $p\in\mathbb{N}^*$一致有界，其所有导数也一致有界。对于 $r\in\mathbb{N}$，我们有

$$\frac{d^r}{dv^r}v^k\Gamma_{vZ}=\sum_{\substack{r_1+r_2=r\\ r_1\leqslant k}}\sum_{|\alpha|=r_2}C_\alpha Z^\alpha v^{k-r_1}\Big(\frac{\partial^\alpha\Gamma}{\partial Z^\alpha}\Big)_{vZ}, \tag{4.75}$$

其中 $\alpha$ 是一个多重指标。由（4.75），$\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p}}{\partial v^r}$是以下形式的各项之和

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r}C_\alpha v^kZ^\alpha\Gamma_{\alpha,vZ}\partial_i\partial_j+C'_\alpha v^{k'}Z^\alpha\Gamma'_{\alpha,vZ}\partial_i+C''_\alpha v^{k''}Z^\alpha\Gamma''_{\alpha,vZ}, \tag{4.76}$$

其中 $\Gamma_\alpha$、$\Gamma'_\alpha$、$\Gamma''_\alpha\in\mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X$、$\mathbb{E}_{p,\,x_0})$ 具有与 $\Gamma$类似的性质。由（4.76），我们得到前三个结论。

由（4.66）、（4.71）和（4.73），我们得到（4.69）中的第一个恒等式。此外，结合测地坐标的性质（$\partial_i g^{jk}$）$(0)=0$，我们得到（$\mathscr{X}_{ij\,1}^{F_p}$、$(0)$ 和 $\mathscr{Y}_{i\,1}^{F_p}$、$(0)$ 是（4.69）中第二个恒等式的结果。由（4.72），（4.66）中的前四项对$\mathscr{Q}^{F_p\prime}$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_\ell\big\rangle e^i\wedge e^j\wedge\widehat{e}^k\wedge i_{\widehat{e}_\ell}+\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_\ell\big\rangle\widehat{e}^k\wedge\widehat{e}^\ell\wedge e_i\wedge i_{e_j}\\
&-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}(f_\alpha^H,f_\beta^H)e_k,e_\ell\big\rangle f^\alpha f^\beta\widehat{e}^k\wedge i_{\widehat{e}_\ell}\\
&-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}\big(e_i,f_\alpha^H\big)e_k,e_\ell\big\rangle e^i\wedge f^\alpha\wedge\widehat{e}^k\wedge i_{\widehat{e}_\ell}+\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}\big(e_i,f_\alpha^H\big)e_k,e_\ell\big\rangle\widehat{e}^k\wedge f^\alpha i_{e_i},
\end{aligned} \tag{4.77}$$

这给出了式（4.70）中的前三项。式（4.70）中的其他项由式（4.66）和式（4.72）得到。证明完毕。□

**4.4. 带权 Sobolev 空间与预解式估计。**在本小节中，我们遵循 Bismut-Lebeau [6, § 11 k)-l)] 的策略，并作了一些修改。特别地，我们应仔细选择定理 4.15 中的权以及定理 4.18 中的积分路径，以确保 $\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p}$的“正性”：由 (4.69)，我们看到 $\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p}=\widehat{\mathscr{Z}}_0^{F_p}+\mathcal{O}(v)$，且 $\widehat{\mathscr{Z}}_0^{F_p}$是非负部分 $-\Delta^{T_{x_0}X}+\frac{1}{4p}|\widehat{\omega}(\nabla^{F_p},g^{F_p})|_{x_0}^2$与幂零部分之和。因此，我们希望证明，当 $v$ 较小时，$\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p}$“几乎”是一个非负算子：对于任意 $\gamma>0$，存在 $C>0$，使得当 $t>0$ 充分大时，有$\|\exp(-t\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p})(0,0)\|\leqslant C\exp(\gamma t)$。为消除 $\widehat{\mathscr{Z}}_v^{F_p}$中幂零部分的影响，我们引入带权索伯列夫范数。

从现在起，我们固定一个 $\gamma>0$。注意，$\mathbb{F}_p$ 和 $\theta_\mu$ 分别定义于（4.54）和（4.63）中。

**定义 4.14。**对于 $0<\mu<1$、$k\in\mathbb{N}$和 $s$，$s'\in\mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X$、$\mathbb{F}_{p,\,x_0})$，令

$$\langle s,s'\rangle_{0,p,\mu}=\int_{\mathbb{R}^n}\langle\widehat{\theta}_\mu s,\widehat{\theta}_\mu s'\rangle dv_{TX},\quad \langle s,s'\rangle_{k,p,\mu}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\big\langle\partial^\alpha s,\partial^\alpha s'\big\rangle_{0,p,\mu}, \tag{4.78}$$

并令$\|\cdot\|_{0,p,\mu}$ 和$\|\cdot\|_{k,p,\mu}$ 为相应的范数。令 $H_{k,p,\mu}$ 为 Sobolev 空间，它是关于$\|\cdot\|_{k,p,\mu}$的范数，对 $\mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X,\mathbb{F}_{p,x_0})$ 取完备化所得。令 $H_{-k,p,\mu}$ 为

^负阶 Sobolev 空间，其范数为：对于 $s \in \mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X, \mathbb{F}_{p,x_0})$，

$$\|s\|_{-k,p,,\mu} = \sup_{0\neq s'\in H_{k,p,\mu}} \frac{\left|\langle s, s'\rangle_{0,p,\mu}\right|}{\|s'\|_{k,p,\mu}}. \tag{4.79}$$

对于 $k_1$、$k_2 \in \mathbb{Z}$，在从 $H_{k_1,\ p,\ \mu}$ 到 $H_{k_2,\ p,\ \mu}$ 的有界线性映射空间上，我们将 $\|\cdot\|^{k_1,}_{p\ \mu}{}^{k_2}$ 表示为算子范数。

由（4.78），显然有

$$\left\|e^i\wedge\right\|^{0,0}_{p,\mu} \leqslant \mu, \quad \|i_{e_i}\|^{0,0}_{p,\mu} \leqslant \frac{1}{\mu}, \tag{4.80}$$

而（4.80）正是为下一个定理量身定制的。

定理 4.15（椭圆估计）。存在 $\mu$、$\varepsilon > 0$，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant 4$，有 $C_i > 0$，其中 $C_2 < \gamma/2$，且存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $p \geqslant p_0$、$0 \leqslant v \leqslant 1/p$ 和 $\backsim s$、$s' \in \mathscr{C}_0^\infty$（$T_{x_0}X$、$\mathbb{F}_{p,\ x_0}$），我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\langle \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p} s, s\right\rangle_{0,p,\mu} \geqslant C_1 \|\nabla s\|^2_{0,p,\mu} - C_2\|s\|^2_{0,p,\mu},\\
&\left|\mathrm{Im}\left\langle \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p} s, s\right\rangle_{0,p,\mu}\right| \leqslant C_3\|s\|_{1,p,\mu}\|s\|_{0,p,\mu},\\
&\left|\left\langle \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p} s, s'\right\rangle_{0,p,\mu}\right| \leqslant C_4\|s\|_{1,p,\mu}\cdot\|s'\|_{1,p,\mu}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

证明。现在我们仔细讨论 $\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 的结构。首先，我们聚焦于单个项

$$\left(\partial_i + v\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\partial_i)\,\widehat{\theta}_v + p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\partial_i)\right) \tag{4.82}$$

与（4.66）中一样。令 $\widehat{R}^0$ 为将（$\widehat{c}(e_j)$ 替换为 $\widehat{c}(\widehat{e}_j)$ 后，在（1.34）左端得到的算子。由（1.34）和（4.10），可得

$$\begin{aligned}
v\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\partial_i)\,\widehat{\theta}_v &= -\frac{v}{2}\int_0^1 f_\varepsilon(vZ)vZ_j\left(\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{R}^0_{svZ}\widehat{\theta}_v\right)(\partial_i,\partial_j)ds,\\
p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\partial_i) &= -\int_0^1 f_\varepsilon(vZ)vZ_j\frac{1}{4p}\omega\left(\nabla^{F_p}, g^{F_p}\right)^2_{svZ}(\partial_i,\partial_j)ds.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

这里我们使用积分形式而不是泰勒展开，以便对 $p \in \mathbb{N}^*$一致地得到一个估计。由定理 3.1，$\frac{1}{4p}\omega(\nabla^{F_p}, g^{F_p})^2$ 的算子范数对 $p \in \mathbb{N}^*$ 一致有界。由于 $f_\varepsilon(Z)$ 的支集包含于 $B^{T_{x_0}X}(0, 2\varepsilon)$ 中，由定理3.1 和（4.83），存在 $C > 0$，使得对任意满足（4.6）的 $\varepsilon$，$p \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant v \leqslant 1/p$ 和$Z \in T_{x_0}X$，都有

$$v\|\widehat{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{vZ}(\partial_i)\,\widehat{\theta}_v\|_{\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}} \leqslant Cv, \quad \left\|p^{-1}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}_{vZ}(\partial_i)\right\|_{\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}} \leqslant C\varepsilon. \tag{4.84}$$

考虑（4.74）中的展开

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p} &= \mathscr{X}^{F_p}_{v,ij}(Z)\partial_i\partial_j + \mathscr{Y}^{F_p}_{v,i}(Z)\partial_i + \mathscr{Z}^{F_p}_v(Z)\\
&= \partial_i\mathscr{X}^{F_p}_{v,ij}(Z)\partial_j + \left(\mathscr{Y}^{F_p}_{v,i}(Z) - \partial_j(\mathscr{X}^{F_p}_{v,ji})(Z)\right)\partial_i + \mathscr{Z}^{F_p}_v(Z).
\end{aligned} \tag{4.85}$$

由（4.66）、（4.72）（4.83）和（4.84），可知 $\mathscr{Z}^{F_p}_v(Z)$ 可分为三部分$\mathscr{Z}^{F_p}_v(Z) = \mathscr{Z}^{F_p\prime}_v(Z) + \mathscr{Z}^{F_p\prime\prime}_v(Z) + \mathscr{Z}^{F_p\prime\prime\prime}_v(Z)$，其中 $\mathscr{Z}^{F_p\prime}_v(Z)$ 是一个非负算子，

$\mathscr{Z}_v^{F_p\prime\prime}(Z)$在 $\widehat{\mathbb{F}}$中增加外代数的次数 $\quad_{p,x_0}$ 并且存在 $C>0$ 使得

$$\|\mathscr{Z}_v^{F_p\prime\prime}(Z)\|_{\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}}\leqslant C,\quad \|\mathscr{Z}_v^{F_p\prime\prime\prime}(Z)\|_{\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0}}\leqslant Cv. \tag{4.86}$$

由（4.37）以及矩阵 $\{g_{vZ}^{ij}\}$ 的正定性，存在 $C>0$ 使得 t

$$\big\langle\big(\partial_i\mathscr{X}_{v,ij}^{F_p}(Z)\partial_j\big)s,s\big\rangle_{0,p,\mu}\geqslant C\,\|\nabla s\|_{0,p,\mu}^2\,. \tag{4.87}$$

对于某个 $C>0$，记$C_{\varepsilon,\ \mu,\ v}=C(\varepsilon+\mu+\frac{v}{\varepsilon}+\frac{v}{\mu})$。注意，若令 $\partial_i$ 作用于（4.83）的左端，则会多出一个 $\frac{v}{\varepsilon}$。结合（4.80）和（4.84）可得

$$\big|\big\langle\big(\mathscr{Y}_{v,i}^{F_p}-\partial_j(\mathscr{X}_{v,ji}^{F_p})\big)\partial_i s,s\big\rangle_{0,p,\mu}\big|\leqslant C_{\varepsilon,\mu,v}\|s\|_{1,p,\mu}\|s\|_{0,p,\mu}. \tag{4.88}$$

此外，由（4.80）、（4.84）和（4.86），可得

$$\Big|\big\langle\big(\mathscr{Z}_v^{F_p\prime}+\mathscr{Z}_v^{F_p\prime\prime\prime}\big)s,s\big\rangle_{0,p,\mu}\Big|\leqslant C_{\varepsilon,\mu,v}\|s\|_{0,p,\mu}^2. \tag{4.89}$$

由（4.87）、（4.88）和（4.89），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big\langle\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}s,s\big\rangle_{0,p,\mu}&\geqslant C\,\|\nabla s\|_{0,p,\mu}^2-C_{\varepsilon,\mu,v}\Big(\|\nabla s\|_{0,p,\mu}\|s\|_{0,p,\mu}+\|s\|_{0,p,\mu}^2\Big)\\&\geqslant\Big(C-C_{\varepsilon,\mu,v}\Big)\,\|\nabla s\|_{0,p,\mu}^2-C_{\varepsilon,\mu,v}\,\|s\|_{0,p,\mu}^2\,,\\\Big|\mathrm{Im}\big\langle\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}s,s\big\rangle_{0,p,\mu}\Big|&\leqslant C_{\varepsilon,\mu,v}\Big(\|\nabla s\|_{0,p,\mu}\|s\|_{0,p,\mu}+\|s\|_{0,p,\mu}^2\Big).\end{aligned} \tag{4.90}$$

由（4.90），可得（4.81）中的前两个不等式，而第三个显然成立。 □

注4.16。由（4.83），存在 $C>0$，使得对于任意满足（4.6）的 $h$ $p\in\mathbb{N}^*$，$0\leqslant v\leqslant 1/p$ 且 $Z\in T_{x_0}X$，都有 $p^{-1}\big\|\widehat{\Gamma}^{F_p,\ u}_{\ \ vZ}(\partial_i)\big\|_{\mathrm{End}(F_{p,x_0})}\leqslant Cv|Z|$。即使我们得到一个$\mathcal{O}(v)$，它也不会关于 $Z\in T_{x_0}X$一致有界。这说明了（4.84）的必要性。

在本截面的其余部分，我们将始终固定一对满足定理 $\mu$，$\varepsilon$）的 4.15。

命题**4.17.** 对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 和 $p_0\in\mathbb{N}^*$，使得对于 $p\geqslant p_0$、**0** 6$v\leqslant 1/p$ 以及 $Q_1$、$\cdots Q_k\in\{\partial_i,Z_i\}_{i=1}^m$，我们有

$$\Big|\big\langle\big[Q_1,[Q_2,\cdots[Q_k,\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}]\cdots]\big]s,s'\big\rangle_{0,p,\mu}\Big|\leqslant C\|s\|_{1,p,\mu}\|s'\|_{1,p,\mu}. \tag{4.91}$$

证明。由（4.74）和（4.75），对于 $i$，$j\in\mathbb{N}$，有

$$[Z_j,\partial_i]=\delta_{ij},\quad \partial_i\big(\Gamma_{vZ}\big)=v(\partial_i\Gamma)_{vZ}, \tag{4.92}$$

其中 $\Gamma_Z\in\mathscr{C}_0^\infty\ (T_{x_0}X,\ \widehat{\mathbb{E}}_{p,\ x_0})$。由（4.74）和（4.92），$\big[Q_1,[Q_2,\cdots[Q_k,\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}]\cdots]\big]$与 $\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$在（4.74）中的结构相同。因此，由（4.92）和（4.81）即可容易地得到（□

对于 $d_1,d_2>0$，令

$$V_{d_1,d_2}=\big\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant d_1\mathrm{Im}(\lambda)^2-d_2\big\}, \tag{4.93}$$

并令 $\partial V_{d_1,\ d_2}$ 为其边界，取逆时针定向。回忆一下范数$\|\cdot\|^{k_1,\ p\ \mu}_{\ \ k_2}$，定义于 4.14。

定理 **4.18**（椭圆正则性）。存在 $d$、$C>0$ 和 $p_0\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意$p\geqslant p_0$、$0\leqslant v\leqslant p^{-1}$ 和 $\lambda\in V_{d,\ \gamma/2}$，预解式 $\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-1}$ 存在，并且

$$\big\|\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-1}\big\|_{p,\mu}^{0,0}\leqslant C,\quad \big\|\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-1}\big\|_{p,\mu}^{-1,1}\leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big). \tag{4.94}$$

证明。由于 $\gamma$ 可以任意小，（4.94）几乎确实保证了 Spec( $\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}$)的“非负性”。

对于 $a$、$b\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda=a+ib\in\mathbb{C}$，有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)s,s\right\rangle_{0,p,\mu}\right|&\geqslant\sup\left\{\mathrm{Re}\left\langle\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}s,s\right\rangle_{0,p,\mu}-a\left\|s\right\|_{0,p,\mu}^2,\left|\mathrm{Im}\left\langle\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}s,s\right\rangle_{0,p,\mu}-b\left\|s\right\|_{0,p,\mu}^2\right|\right\}\\&\geqslant\sup\left\{C_1\left\|s\right\|_{1,p,\mu}^2-(a+C_1+C_2)\left\|s\right\|_{0,p,\mu}^2,|b|\left\|s\right\|_{0,p,\mu}^2-C_3\left\|s\right\|_{0,p,\mu}\left\|s\right\|_{1,p,\mu}\right\}.\end{aligned}\tag{4.95}$$

显然，$\|s\|_{0,\ p,\ \mu}\leqslant\|s\|_{1,\ p,\ \mu}$，于是由（4.95）可推得

$$\left|\left\langle\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)s,s\right\rangle_{0,p,\mu}\right|\geqslant C(\lambda)\left\|s\right\|_{0,p,\mu}^2,\tag{4.96}$$

其中 $C(\lambda)$ 由下式给出

$$C(\lambda)=\inf_{w\geqslant1}\sup\left\{C_1w^2-(a+C_1+C_2),|b|-C_3w\right\}.\tag{4.97}$$

对于任意 $\delta>0$，由（4.97），$C(\lambda)\geqslant\delta$ 当且仅当 $\{w\geqslant1\}$ 包含于

$$\left\{w\in\mathbb{R}\mid C_1w^2-(a+C_1+C_2)\geqslant\delta\right\}\cup\left\{v\in\mathbb{R}\mid|b|-C_3w\geqslant\delta\right\},\tag{4.98}$$

这意味着以下条件之一成立

$$\begin{cases}C_1-(a+C_1+C_2)\geqslant\delta,\\\sqrt{C_1^{-1}(a+C_1+C_2+\delta)}\leqslant C_3^{-1}(|b|-\delta).\end{cases}\tag{4.99}$$

由（4.99），$C(\lambda)\geqslant\delta$ 当且仅当下列不等式之一成立时

$$a\leqslant\begin{cases}-C_2-\delta,\\C_1C_3^{-2}\left(|b|-\delta\right)^2-C_1-C_2-\delta,\end{cases}\tag{4.100}$$

这就是下图中的红色部分。根据定理 4.15，取 $\delta$ 足够小，使得

$$C_1C_3^{-2}\delta^2-C_1-C_2-\delta<\gamma/2<-C_2-\delta,\tag{4.101}$$

于是，由下图可知，我们可以选取一个 $d$，使其满足 $0<d<C_1C_3^{-2}$，从而确保 $V_{d,\ \gamma/2}$ 是红色部分的子集。换言之，对于任意 $\lambda=a+bi\in V_{d,\ \gamma/2}$，它都满足两个不等式（4.100）之一。因此，我们有 $\inf_{\lambda\in V_{d,\ \gamma/2}}C(\lambda)\geqslant\delta>0$。然后根据（4.96），若 $\lambda\in V_{d,\ \gamma/2}$，则预解式 $\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}$ 存在，且

$$\left\|\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}\right\|_{p,\mu}^{0,0}\leqslant C.\tag{4.102}$$

由（4.81），显然 $\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}$可以延拓为从 $H_{1,\ p,\ \mu}$到 $H_{-1,\ p,\ \mu}$的连续线性映射。利用（4.95），若固定 $\lambda_0=-1-C_1-C_2$，则

$$\left\|\left(\lambda_0-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}\right\|_{p,\mu}^{-1,1}\leqslant1.\tag{4.103}$$

若 $\lambda\in V_{d,\ \gamma/2}$，则

$$\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}=\left(\lambda_0-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}+(\lambda_0-\lambda)\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}\left(\lambda_0-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}.\tag{4.104}$$

由（4.102）、（4.103）和（4.104），可得

$$\left\|\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}_v^{F_p}}\right)^{-1}\right\|_{p,\mu}^{-1,0}\leqslant1+C\left|\lambda-\lambda_0\right|,\tag{4.105}$$

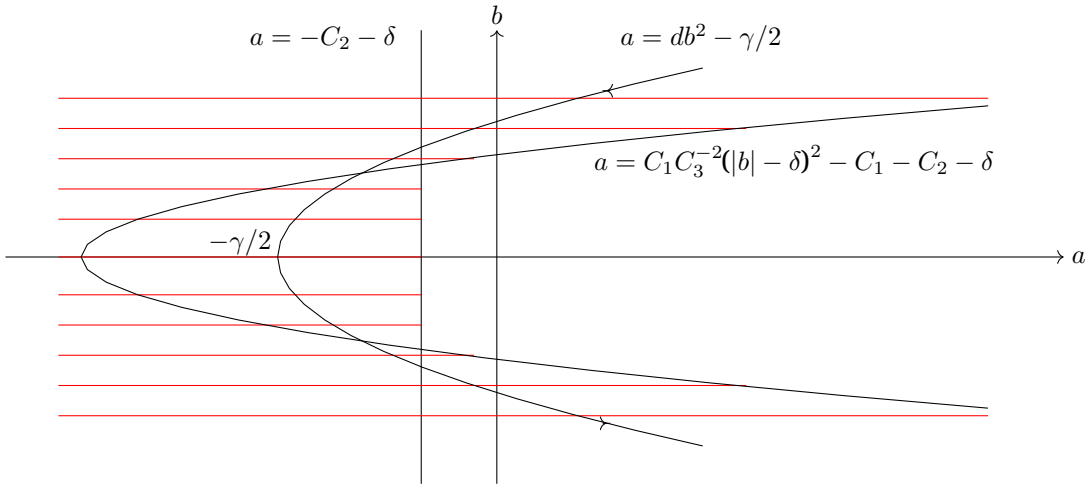


FIGURE 3.

另一方面，我们还有

$$\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}=\left(\lambda_0-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}+(\lambda_0-\lambda)\left(\lambda_0-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}. \tag{4.106}$$

由（4.105）和（4.106），我们得到

$$\left\|\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}\right\|_{p,\mu}^{-1,1}\leqslant 1+C\left|\lambda_0-\lambda\right|\left(1+C\left|\lambda-\lambda_0\right|\right)\leqslant C\left(1+|\lambda|^2\right). \tag{4.107}$$

证明至此完成。 □

在 § 4.5-§4.7中，我们始终假设 $p\geqslant p_0$， $0\leqslant v\leqslant p^{-1}$且 $\lambda\in V_{d,\ \gamma/2}$ 如定理 4.18中所述。

**4.5.** 预解式的正则化性质。在本小节中，我们将紧密遵循 Ma-Marinescu [25, 定理 **4.1.12-4.1.**14]，并作一些必要的修改。

**定理 4.19**（高正则性）。对于任意 $k\in\mathbb{N}$，预解式 $\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}$ 在 (4.94) 中将 $H_{k,p,\mu}$ 映射到 $H_{k+1,p,\mu}$。对于任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^m$，存在 $C>0$ 使得

$$\left\|Z^\alpha\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-1}s\right\|_{k+1,p,\mu}\leqslant C\left(1+|\lambda|^2\right)^{k+|\alpha|+1}\sum_{\alpha'\leqslant\alpha}\left\|Z^{\alpha'}s\right\|_{k,p,\mu} \tag{4.108}$$

证明。以同样的方式运用命题 4.17 和定理 4.18 ，如同 [25, 定理 **1.6**。10] 可由[25, 定理 **1.6.8**、命题 **1.6**。9], 我们得到定理 4.19。□

对于 $k\in\mathbb{N}^*$、$r\in\mathbb{N}$，令

$$I_{k,r}=\left\{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})=(k_i,r_i)\in(\mathbb{N}^*)^{j+1}\times\mathbb{N}^j\ \middle|\ \sum_{i=0}^{j}k_i=k+j,\sum_{i=1}^{j}r_i=r\right\}. \tag{4.109}$$

对于 $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,\ r}$，我们定义

$$A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda,v,p)=\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-k_0}\frac{\partial^{r_1}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^{r_1}}\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-k_1}\cdots\frac{\partial^{r_j}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^{r_j}}\left(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\right)^{-k_j}. \tag{4.110}$$

那么存在 $a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}$，使得

$$\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k} = \sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r}} a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda, v, p)\,. \tag{4.111}$$

**定理 4.20.** 对于任意的 $\ell \in \mathbb{N}$, $k > 2(\ell + r + 1)$ 和 $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}) \in I_{k,\,r}$，存在 $C > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}$，使得对于任意的 $\lambda \in V_{d,\,\gamma/2}$ 和 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^m$，若 $|\alpha|, |\alpha'| \leqslant \ell$，则有

$$\big\|\partial^\alpha A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda, v, p)\,\partial^{\alpha'} s\big\|_{0,p,\mu} \leqslant C(1+|\lambda|)^j \sum_{|\alpha|\leqslant r} \|Z^\alpha s\|_{0,p,\mu}\,. \tag{4.112}$$

证明。由定理 4.19，若 $|\alpha| \leqslant \ell$，则存在 $C > 0$，使得对于任意的 $\lambda \in V_{d,\,\gamma/2}$

$$\big\|\partial^\alpha\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-\ell}\big\|_{p,\mu}^{0,0} \leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big)^{\ell+1}. \tag{4.113}$$

注意，若 $\mu = 1$ 属于 (4.78)，则乘积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\,p,\,1}$ 就是通常的 $L^2$ 内积。令 $\widehat{\mathscr{L}}_{v}^{F_p,\,*}$ 为关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\,p,\,1}$ 的 $\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 的形式伴随算子。于是 $\widehat{\mathscr{L}}_{v}^{F_p,\,*}$ 与算子 $\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 具有基本相同的结构，只是算子 $e^i\wedge, \widehat{e}^i\wedge, i_{e_i}, i_{\widehat{e}_i}$ 分别变为 $i_{e_i}, i_{\widehat{e}_i}, e^i\wedge, \widehat{e}^i\wedge$。我们有

$$\big\langle s, \partial^\alpha\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p,*}\big)^{-\ell} s'\big\rangle_{0,p,1} = (-1)^{|\alpha|}\big\langle\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-\ell}\partial^\alpha s, s'\big\rangle_{0,p,1}. \tag{4.114}$$

注意到

$$\langle s, s'\rangle_{0,p,1} = \langle\widehat{\theta}_\mu s, \widehat{\theta}_{\mu^{-1}} s'\rangle_{0,p,1}, \quad \|s\|_{0,p,\mu} = \big\|\widehat{\theta}_\mu s\big\|_{0,p,1}, \quad \|s'\|_{0,p,\mu^{-1}} = \big\|\widehat{\theta}_{\mu^{-1}} s'\big\|_{0,p,1}. \tag{4.115}$$

现在，若我们考虑加权乘积 $\|\cdot\|_{0,\,p,\,\mu^{-1}}$ 对于 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p,\,*}_{v}$，则 (4.113) 的显然类似结论仍然成立：$\|(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}^{F_p,\,*}_{v})^{-\ell}\|^0_{\,p\,,\,\mu^{-1}} \leqslant C(1+|\lambda|^2)^{\ell+1}$。结合 (4.114) 和 (4.115) 可得

$$\begin{aligned}\big|\big\langle s, \partial^\alpha\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p,*}\big)^{-\ell} s'\big\rangle_{0,p,1}\big| &\leqslant \|s\|_{0,p,\mu}\big\|\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p,*}\big)^{-\ell} s'\big\|_{0,p,\mu^{-1}} \\ &\leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big)^{\ell+1}\|s\|_{0,p,\mu}\|s'\|_{0,p,\mu^{-1}}.\end{aligned} \tag{4.116}$$

由 (4.114)、(4.115) 和 (4.116)，可知

$$\begin{aligned}\big\|\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-\ell}\partial^\alpha s\big\|_{0,p,\mu} &= \sup_{\|s'\|_{0,p,\mu^{-1}}\leqslant 1}\Big|\big\langle\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-\ell}\partial^\alpha s, s'\big\rangle_{0,p,1}\Big| \\ &\leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big)^{\ell+1}\big\|s\big\|_{0,p,\mu}.\end{aligned} \tag{4.117}$$

由 (4.113) 和 (4.117)，我们证明了 (4.112) 对 $r = 0$ 成立。

对于 $r > 0$，由 (4.76) 和 (4.92)，可将 $\frac{\partial^r}{\partial v^r}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 在 (4.110) 中改写为

$$\sum_{|\beta|\leqslant r} C_\beta\Gamma_{\beta,vZ}\partial_i\partial_j Z^\beta + C''_\beta\Gamma'_{\beta,vZ}\partial_i Z^\beta + C''_\beta\Gamma''_{\beta,vZ}Z^\beta, \tag{4.118}$$

其中 $\Gamma_{\beta,\,Z}$，$\Gamma_{\beta',\,Z}$，$\Gamma_{\beta'',\,Z} \in \mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X,\ \mathbb{E}_{p,\,x_0})$ 是光滑的 Toeplitz 算子族（见 § 3.3）。令 $\mathscr{R}'_{v,\,p}$ 为如下形式的算子族

$$\mathscr{R}'_{v,p} = \Big\{\big[\Gamma_1 Q_1, \big[\Gamma_2 Q_2, \cdots\big[\Gamma_k Q_k, \widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big]\cdots\big]\big]\Big\} \tag{4.119}$$

其中 $\Gamma_i \in \mathscr{C}_0^\infty(T_{x_0}X, \mathbb{E}_{p,x_0})$ 关于 $|\cdot|_{\mathscr{C}^0(T_{x_0}X,\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0})}$ 一致有界，且具有所有阶导数，并且 $p \in \mathbb{N}^*$、$Q_1$ 和 $\cdots Q_k \in \{\partial_i, Z_i\}_{i=1}^m$。

现在我们处理算子 $A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda, v, p)\,\partial^{\alpha'}$。对于每个 $\frac{\partial^{r_i}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^{r_i}}$，我们将其写成式 (4.118) 的形式，并如 [25, 定理 4.1.13] 中那样将所有项移到等式右边。于是 $\partial^{\alpha}A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda, v, p)\,\partial^{\alpha'}$ 具有如下形式 $\sum_{|\beta|\leqslant r}\mathscr{L}_{v,\beta}Z^{\beta}$ 其中 $\mathscr{L}_{v,\beta}$ 是若干算子的线性组合，这些算子可以拆分为两部分的乘积:

$$\begin{aligned}&\partial^{\alpha}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k_0'}R_1\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k_1'}\cdots R_i\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k_i''}\\&\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-(k_i'-k_i'')}\cdot R_{i+1}\cdots R_{j'}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k_{j'}'}\partial^{\beta'},\end{aligned}\tag{4.120}$$

其中 $R_i\in\mathscr{R}'_{v,\,p}$, $\sum_{j=0}^{i-1}(k_j'-1)+k_i''-\ell>0$ 和 $\sum_{j=i}^{j'}(k_j'-1)-k_i''>2r+\ell+1$，则每一部分的 $\|\cdot\|^{0,\,p\,\mu}$, 范数均由 $C(1+|\lambda|)^N$控制。至此，证明完成。 □

定理 4.21. 对任意 $r\geqslant 0$ 和 $k>0$，存在 $C>0$ 和 $\ell\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^r}-\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^r}\Big|_{v=0}\Big)s\Big\|_{-1,p,\mu}\leqslant Cv\sum_{|\alpha|\leqslant r+1}\|Z^{\alpha}s\|_{1,p,\mu},\\&\Big\|\Big(\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}-\sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r}}a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda,0,p)\Big)s\Big\|_{0,p,\mu}\leqslant Cv\,(1+|\lambda|)^{\ell}\sum_{|\alpha|\leqslant 4r+1}\|Z^{\alpha}s\|_{0,p,\mu}.\end{aligned}\tag{4.121}$$

证明。 对（4.74）和（4.76）作泰勒展开可得

$$\Big\langle\Big(\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^r}-\frac{\partial^r\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^r}\Big|_{v=0}\Big)s,s'\Big\rangle_{0,p,\mu}\leqslant Cv\,\|s'\|_{1,p,\mu}\sum_{|\alpha|\leqslant r+1}\|Z^{\alpha}s\|_{1,p,\mu},\tag{4.122}$$

由此得到（4.121）的第一个不等式。（4.121）的第二个不等式由定理 4.18、 4.19 以及（4.121）的第一个不等式推出 [25, 定理 4.1。14] 由[25, 定理 4.1.10、4.1。12]。 □

4.6. 热核的一致估计。本节类似于 [25,第4节 4.1.5], ，并作了必要的修改。

定理 4.22. 对任意 $k$、$\ell$、$r\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于满足 $|Z|$、$|Z'|\leqslant 1$ 的 $t\geqslant 1$、$Z$、$Z'\in T_{x_0}X$，有

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leqslant k}\Big|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^{\alpha}\partial Z'^{\alpha'}}\frac{\partial^r}{\partial v^r}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})\,(Z,Z')\Big|_{\mathscr{C}^{\ell}(M)}\leqslant Ce^{\gamma t/2}.\tag{4.123}$$

证明。回忆一下，$V_{d,\,\gamma/2}$ 由（4.93）给出。根据柯西积分公式，对于 $k\in\mathbb{N}^*$，有

$$\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})=\frac{(k-1)!}{2\pi i\,(-t)^{k-1}}\int_{\partial V_{d,\gamma/2}}e^{-t\lambda}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}d\lambda.\tag{4.124}$$

由定理 4.20 和（4.124），我们得到，对于 $|\alpha_i|\leqslant\ell$ 和 $t\geqslant 1$，有

$$\big\|\partial^{\alpha_1}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})\partial^{\alpha'}\big\|_{p,\mu}^{0,0}\leqslant Ce^{\gamma t/2}.\tag{4.125}$$

由此，根据（4.125）和 Sobolev 不等式，对于 $Z$， $Z'\in T_{x_0}X$ 使得 $|Z|$， $|Z'|\leqslant 1$，我们有

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leqslant l}\Big|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^{\alpha}\partial Z'^{\alpha'}}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})\,(Z,Z')\Big|\leqslant Ce^{\gamma t/2}.\tag{4.126}$$

这就得到了 4.123）对 $r=\ell=0$成立。为了证明 4.123）对 $r\geqslant 1$成立，由（4.124）可知，对于 $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^r}{\partial v^r}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})=\frac{(k-1)!}{2\pi i\,(-t)^{k-1}}\int_{\partial V_{d,\gamma/2}}e^{-t\lambda}\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}d\lambda. \tag{4.127}$$

由（4.111）、（4.113）和（4.127），可得

$$\Big\|\frac{\partial^r}{\partial v^r}\partial^{\alpha_1}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})\partial^{\alpha'}s\Big\|_{0,p,\mu}\leqslant Ce^{\gamma t/2}\sum_{|\alpha|\leqslant r}\|Z^\alpha s\|_{0,p,\mu}. \tag{4.128}$$

取 $\mathrm{supp}(s)\in B^{T_{x_0}X}(0,\ 2)$，再次利用 Sobolev 不等式，可得 4.123）对 $\ell=0$成立。

最后，对于 $M$ 上的任意向量 $U$，

$$\nabla_U^{\pi^*\widehat{\mathbb{E}}_p}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})=\frac{(k-1)!}{2\pi i\,(-t)^{k-1}}\int_{\partial V_{d,\gamma/2}}e^{-t\lambda}\nabla_U^{\pi^*\widehat{\mathbb{E}}_p}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}d\lambda. \tag{4.129}$$

现在，我们对 $\nabla_U^{\pi^*\widehat{\mathbb{E}}_p}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}$ 使用与（4.111）类似的公式，将 $\frac{\partial^{r_i}}{\partial v^{r_i}}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 替换为 $\nabla_U^{\pi^*\mathbb{E}_p}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$。注意，$\nabla_U^{\pi^*\mathbb{E}_p}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$是 $T_{x_0}X$ 上具有与 $\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}$ 相同结构的微分算子，因此它与（4.74）属于同一类型。接着利用上述论证，可得（4.111）对 $\ell\geqslant 1$也成立。证明完毕。□

当 $k\in\mathbb{N}^*$ 足够大时，令

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{t,p}^{(r)}&=\frac{(k-1)!}{2\pi i(-t)^{k-1}r!}\int_{\partial V_{d,\gamma/2}}e^{-t\lambda}\sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r}}a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda,0,p)\,d\lambda,\\ \mathscr{S}_{v,t,p}^{(r)}&=\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial v^r}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})-\mathscr{S}_{t,p}^{(r)}(t),\end{aligned} \tag{4.130}$$

则 $\mathscr{S}_{(r)\,t,p}$ 和 $\mathscr{S}_{(r)\,v,t,p}$ 均不依赖于 $k$ 的选取。我们将相对于 $dv_{TX}$ 的 $\mathscr{S}_{(r)p}(t)$（分别为 $\mathscr{S}_{(r)\,v,t,p}$）的光滑核记为 $\mathscr{S}_{(r)\,t,p}(Z,Z')$（分别为 $\mathscr{S}_{(r)\,v,t,p}(Z,Z')$）。

**定理 4.23.** 对任意 $r\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于满足$|Z|,|Z'|\leqslant 1$的 $t\geqslant 1,Z,Z'\in T_{x_0}X$，有

$$\Big|\mathscr{S}_{v,t,p}^{(r)}(Z,Z')\Big|\leqslant Cv^{1/(m+1)}e^{\gamma t/2}. \tag{4.131}$$

证明。由（4.130）和柯西积分公式，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{v,t,p}^{(r)}=\frac{(k-1)!}{2\pi i\,(-t)^{k-1}\,r!}\int_{\partial V_{d,\gamma/2}}e^{-t\lambda}\cdot\Big(\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}\big)^{-k}\\ -\sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r}}a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}A_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(\lambda,0,p)\Big)d\lambda.\end{aligned} \tag{4.132}$$

由（4.121）和（4.132），当 $t\geqslant 1$ 时，有

$$\big\|\mathscr{S}_{v,t,p}^{(r)}(t)s\big\|_{0,p,\mu}\leqslant Cve^{\gamma t/2}\sum_{|\alpha|\leqslant 4r+1}\|Z^\alpha s\|_{0,p,\mu}. \tag{4.133}$$

根据定理 4.22 和（4.133），采用与 [25, 定理 4.17]可由 [25, 定理 4.16, （4.1.67）], 我们得到（4.131）。□

**The理 4.24**。对于任意 $r$、$\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于 $t\geqslant 1$，我们有

$$\left|\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})(0,0)-\sum_{i=0}^{r}\mathscr{S}_{t,p}^{(i)}(0,0)v^i\right|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Cv^{r+1}e^{\gamma t/2}. \tag{4.134}$$

证明。由定理4.23 和（4.130），可得

$$\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial v^r}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})\Big|_{v=0}=\mathscr{S}_{t,p}^{(r)}. \tag{4.135}$$

现在由定理4.22 和（4.130），$\mathscr{S}_t^{(r)}$，$p$ 与 $\frac{\partial^r}{\partial v^r}\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p})$ 在（4.123）中的估计相同。由（4.123）及泰勒展开

$$f(v)-\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r f}{\partial v^r}(0)v^r=\frac{1}{k!}\int_0^v(v-y)^k\frac{\partial^{k+1}f}{\partial v^{k+1}}(y)dy, \tag{4.136}$$

我们得到（4.134）。 □

**4.7.** $\mathscr{S}_{(i)\,t,p}(0,0)$ 的渐近性。令 $\mathscr{P}_t^{F_p}(Z,Z')$ 表示 $\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_0^{F_p})$ 关于 $dv_{TX}$ 的核。设

$$\begin{aligned}\sigma^{F_p}=&-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle_{x_0}\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\frac{1}{4p}\omega_{x_0}^{F_p,2}+\frac{1}{4p^2}\big|\widehat{\omega}^{F_p}\big|_{x_0}^2+\frac{1}{4p}\widehat{\omega}_{x_0}^{F_p,2}\\&-\frac{1}{2p}\big(\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}\big)_{x_0}-\frac{1}{2p}z\omega_{x_0}^{F_p}.\end{aligned} \tag{4.137}$$

由（4.69），可得

$$\mathscr{P}_t^{F_p}(Z,Z')=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\frac{|Z-Z'|^2}{4t}-t\sigma^{F_p}}. \tag{4.138}$$

对于 $k\in\mathbb{N}$，$k$-单纯形 $\triangle_k$ 由 $\{(t_1,\cdots,t_k)\mid 0\leqslant t_1\leqslant t_2\cdots\leqslant t_k\leqslant 1\}$ 给出。对于$t>0$，我们将用 $t\triangle_k$ 表示缩放后的单纯形 $\{(t_1,\cdots,t_k)\mid 0\leqslant t_1\leqslant t_2\cdots\leqslant t_k\leqslant t\}$。对于多重指标 $\boldsymbol{r}=(r_1,\cdots,r_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $r_1,\cdots,r_k\in\mathbb{N}^*$，令

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{t,\boldsymbol{r},p}&=\int_{t\triangle_k}\left(\mathscr{P}_{t-t_k}^{F_p}\frac{\partial^{r_k}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^{r_k}}\Big|_{v=0}\mathscr{P}_{t_k-t_{k-1}}^{F_p}\cdots\frac{\partial^{r_1}\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p}}{\partial v^{r_1}}\Big|_{v=0}\mathscr{P}_{t_1}^{F_p}\right)(0,0)\prod_{j=1}^{k}dt_j\\&=\int_{t\triangle_k}\int_{(TX)^k}\mathscr{P}_{t-t_k}^{F_p}(0,Z^{(k)})\left(\frac{\partial^{r_k}\widehat{\mathscr{L}}_{v,Z^{(k)}}^{F_p}}{\partial v^{r_k}}\Big|_{v=0}\mathscr{P}_{t_k-t_{k-1}}^{F_p}\right)(Z^{(k)},Z^{(k-1)})\\&\qquad\cdots\left(\frac{\partial^{r_1}\widehat{\mathscr{L}}_{v,Z^{(1)}}^{F_p}}{\partial v^{r_1}}\Big|_{v=0}\mathscr{P}_{t_1}^{F_p}\right)(Z^{(1)},0)\prod_{j=1}^{k}dv_{TX}(Z^{(j)})\prod_{j=1}^{k}dt_j\end{aligned} \tag{4.139}$$

其中 $(TX)^k$ 表示关于 $k$份 $T_{x_0}X$的积分：$\big\{Z^{(i)}=\big(Z_1^{(i)},\cdots,Z_m^{(i)}\big)\mid 1\leqslant i\leqslant k\big\}$，而 $Z^{(j)}$ 在 $\partial^{r_j}\widehat{\mathscr{L}}_{v\ Z\text{中的下标，}(j)}^{F_p}\partial v^{r_j}$ 表示作用于坐标 $Z^{(j)}$。根据 Duhamel 原理 [4, §2.7]，定理 4.13、(4.110)、(4.130) 和 (4.135)，可得

$$\mathscr{S}_{t,p}^{(i)}(0,0)=\sum_{r_1+\cdots+r_k=i}\frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}r_j!}\mathscr{S}_{t,\boldsymbol{r},p}. \tag{4.140}$$

特别地,

$$\mathscr{S}_{t,p}^{(0)}(0,0)=\frac{e^{-t\sigma^{F_p}}}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}},\ \mathscr{S}_{t,p}^{(1)}(0,0)=-\int_0^t\int_{T_{x_0}X}\mathscr{P}_{t-t_1}^{F_p}(0,Z)\left(\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}_{v,Z}^{F_p}}{\partial v}\Big|_{v=0}\mathscr{P}_{t_1}^{F_p}\right)(Z,0)dZdt_1. \tag{4.141}$$

由（4.138），我们看到（4.139）的积分中存在奇点，而我们将证明积分后奇点消失。先给出一个辅助结果。设 $P_t(x,y)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的经典热核：$P_t(x,y)=(4\pi t)^{-1/2}e^{-(x-y)^2/4t}$。对于 $t>0$，$(t_1,\cdots,t_k)\in t\triangle_k$ 以及 $\{\alpha_i^{(j)},\beta_i^{(j)}\in\mathbb{N}\}_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant k}$，令

$$\begin{aligned}f_t(t_k,\cdots,t_1)=\prod_{i=1}^m\Bigg\{&P_{t-t_k}(0,Z_i^{(k)})\cdot Z_i^{(k),\alpha_i^{(k)}}\frac{\partial^{\beta_i^{(k)}}}{\partial Z_i^{(k),\beta_i^{(k)}}}P_{t_k-t_{k-1}}(Z_i^{(k)},Z_i^{(k-1)})\\&\cdots Z_i^{(2),\alpha_i^{(2)}}\frac{\partial^{\beta_i^{(2)}}}{\partial Z_i^{(2),\beta_i^{(2)}}}P_{t_2-t_1}(Z_i^{(2)},Z_i^{(1)})\cdot Z_i^{(1),\alpha_i}\frac{\partial^{\beta_i}}{\partial Z_i^{(1),\beta_i}}P_{t_1}(Z_i^{(1)},0)\prod_{j=1}^k dZ_i^{(j)}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.142}$$

引理 4.25。对于 $k\in\mathbb{N}^*$，存在 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $C>0$，使得对于 $t\geqslant 1$ 和 $(t_1,\cdots,t_k)\in t\triangle_k$，有

$$|f_t(t_k,\cdots,t_1)|\leqslant C\big(1+t^\ell\big). \tag{4.143}$$

证明。由（4.142），我们只需证明特殊情形 $m=1$。我们对 $k\in\mathbb{N}^*$作归纳证明。考虑以下形式的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_{t_1}(Z_2,Z_1)Z_1^{\ell'}\frac{\partial^\ell}{\partial Z_1^\ell}P_{t_0}(Z_1,Z_0)dZ_1,\quad\text{for } Z_0,Z_1,Z_2\in\mathbb{R},t_0,t_1>0. \tag{4.144}$$

我们引入（4.144）中积分的生成函数。令

$$f_1(Z_2,Z_0)=\sum_{\ell,\ell'\in\mathbb{N}}\int_{-\infty}^{\infty}P_{t_1}(Z_2,Z_1)\frac{(\mu_1Z_1)^{\ell'}}{(\ell')!}\frac{\lambda_1^\ell}{\ell!}\frac{\partial^\ell}{\partial Z_1^\ell}P_{t_0}(Z_1,Z_0)dZ_1, \tag{4.145}$$

对于任意解析函数 $g(y)$，有 $\sum_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\ \frac{\partial^\ell}{\partial y^\ell}g(y)=g(y+\lambda)$，由此得到

$$\begin{aligned}f_1(Z_2,Z_0)&=\int_{-\infty}^{\infty}P_{t_1}(Z_2,Z_1)\exp(\mu_1Z_1)P_{t_0}(Z_1+\lambda_1,Z_0)dZ_1\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi(t_0t_1)^{\frac12}}\exp\Big(-\frac{t_1+t_0}{4t_1t_0}\Big(Z_1-\frac{t_0Z_2}{t_1+t_0}-\frac{t_1(Z_0-\lambda_1)}{t_1+t_0}-\frac{2t_1t_0\mu_1}{t_1+t_0}\Big)^2\Big)dZ_1\\&\quad\cdot\exp\Big(-\frac{(Z_2-Z_0+\lambda_1)^2}{4(t_0+t_1)}+\mu_1\Big(\frac{t_0Z_2}{t_1+t_0}+\frac{t_1(Z_0-\lambda_1)}{t_1+t_0}\Big)+\frac{\mu_1^2t_0t_1}{(t_1+t_0)}\Big)\\&=P_{t_1+t_0}(Z_2,Z_0-\lambda_1)\exp\Big(\mu_1\Big(\frac{t_0Z_2}{t_1+t_0}+\frac{t_1(Z_0-\lambda_1)}{t_1+t_0}\Big)+\frac{\mu_1^2t_0t_1}{(t_1+t_0)}\Big).\end{aligned} \tag{4.146}$$

与 (4.145) 和 (4.146) 类似，我们定义

$$\begin{aligned}&f_j(Z_{j+1},Z_0)=\int_{-\infty}^{\infty}P_{t_j}(Z_{j+1},Z_j)\exp(\mu_jZ_j)f_{j-1}(Z_j+\lambda_j,Z_0)dZ_j,\\&w_0=0,\quad w_j=\Big(\sum_{i=0}^j t_i\Big)^{-1}\sum_{0\leqslant i<\ell\leqslant j}\mu_\ell t_i\quad\text{for } j\in\mathbb{N}^*.\end{aligned} \tag{4.147}$$

于是我们可以通过归纳法证明

$$f_j(Z_{j+1},Z_0)=P_{\sum_{i=0}^j t_i}\Big(Z_{j+1},Z_0-\sum_{i=1}^j\lambda_j\Big)\exp\Big(w_jZ_{j+1}+\sum_{i=1}^j(\mu_j+w_{j-1})w_it_i \\ +\sum_{i=1}^j(\mu_i+w_{i-1}-w_i)(Z_0-\sum_{\ell=1}^i\lambda_\ell)\Big). \tag{4.148}$$

代入 $Z_0=Z_{j+1}=0$ （4.148）后，我们得到

$$f_j(0,0)=\Big(4\pi\sum_{i=0}^j t_i\Big)^{-\frac{1}{2}}\exp\Big(-\Big(4\sum_{i=0}^j\lambda_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^j\lambda_i\Big)^2+\sum_{i=1}^j(\mu_j+w_{j-1})w_it_i \\ -\sum_{i=1}^j(\mu_i+w_{i-1}-w_i)\Big(\sum_{\ell=1}^i\lambda_\ell\Big)\Big). \tag{4.149}$$

由（??）和（4.149），对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 使得对于任意多重指标 $\alpha$，$\beta\in\mathbb{N}^j$在 $|\alpha|$，$|\beta|\leqslant k$且$\sum_{i=0}^j t_j=t\geqslant 1$的条件下，$\lambda^\alpha\mu^\beta$在 $f_j(0,0)$ 处的系数由以下量控制$C(1+t^k)$，这意味着（4.143）。□

回顾（$_{[i]}[T_p]$ 2.10）中的渐近迹符号 Tr。

定理 4.26。对于 $i$、$j$、$\ell\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$，存在 $C>0$，使得对于 $t\geqslant 1$ ，

$$\Big|\mathrm{Tr}_{[j]}\big[\mathscr{S}^{(i)}_{t,p}(0,0)\big]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Ce^{\delta t}, \\ \Big|p^{-n}\mathrm{Tr}^{F_p}[\mathscr{S}^{(i)}_{t,p}(0,0)]-\sum_{k=0}^j p^{-k}\mathrm{Tr}_{[k]}[\mathscr{S}^{(i)}_{t,p}(0,0)]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Ce^{\delta t}p^{-j-1}. \tag{4.150}$$

证明。根据定理 4.13、(4.138)、(4.139) 和 (4.143)，$\mathscr{S}_{\boldsymbol{r},\ p}$ 是以下形式的积分之和

$$\int_{t\triangle_k}\boldsymbol{f}_t(t_k,\cdots,t_1)e^{-(t-t_k)\sigma^{F_p}}\tau_k e^{-(t_k-t_{k-1})\sigma^{F_p}}\cdots\tau_1e^{-(t_1-t_0)\sigma^{F_p}}, \tag{4.151}$$

其中 $\tau_j$ 是关于参数$x_0\in M$的 Toeplitz算子的光滑族（见§ 3.3），其中 $0\leqslant j\leqslant k$，而 $\boldsymbol{f}_t(t_k,\ \cdots,\ t_1)$是形如（4.142）的函数乘积之和。由（4.143），得到

$$\big|\boldsymbol{f}_t(t_k,\cdots,t_1)\big|\leqslant C(1+t^\ell) \tag{4.152}$$

对于某些 $C>0$，$\ell\in\mathbb{N}$。由（4.137），显然有

$$\mathrm{Spec}\big(\sigma^{F_p}\big)=\mathrm{Spec}\Big(\frac{1}{4p^2}\big|\widehat{\omega}^{F_p}\big|^2_{x_0}\Big). \tag{4.153}$$

由定理 2.7、(4.140)、(4.151)、(4.152)、(4.153)，$\mathscr{S}_{(i)\,t,p}$(0,0) 满足与 (2.26) 和 (2.27) 相同的估计，由此得到 $\ell=0$ 的 (4.150)。由于 $\mathscr{S}_{(i)\,t,p}$(0,0) 关于 $x_0\in M$ 是 Toeplitz算子的光滑族，根据注记 3.3，可得一般范数$|\cdot|_{\mathscr{C}^\ell(M)}$ 下的 (4.150)。□

4.8. 当 $0<t\leqslant 1$. 由于 $t\to 0$，在 (4.134) 中存在奇点，我们仿照 [9, 定理 931] 的证明，考虑另一种重新缩放。本小节中，我们始终假设 $0<t\leqslant 1$。令

$$\mathscr{N}_{t,x_0}^{F_p}=\frac{t}{p^2}\theta_{\sqrt{\frac{p}{t}}}K_{\frac{\sqrt{t}}{p}}\mathscr{L}_{x_0}^{F_p}K_{\frac{p}{\sqrt{t}}}\theta_{\sqrt{\frac{t}{p}}}. \tag{4.154}$$

我们将 $\widehat{\mathscr{L}}_t^{F_p}{}_{,x_0}$ 表示为由 $\mathscr{N}_t^{F_p}{}_{,x_0}$ 通过分别将 $c(e_i)$ $\widehat{c}(e_i)$ 替换为 $^{c}{}_{\frac{t}{p}}(e_i)$ 和 $\widehat{c}_{\frac{1}{p}}(\widehat{e}_i)$ 得到的算子。与 (4.61) 类似，我们有

$$\theta_{\frac{1}{\sqrt{t}}}\mathrm{Tr}_s^{\Lambda(T^*X)\otimes F_p}\big[\exp(-t\mathscr{M}_{x_0}^{F_p})(0,0)\big]dv_X=(4\pi)^{\frac{m}{2}}\mathrm{Tr}^{F_p}\int^{\widehat{B}}\Big[\exp(-\widehat{\mathscr{L}}_{t,x_0}^{F_p})(0,0)\Big]^{\max}. \tag{4.155}$$

设 $N_2$ 和 $N_3$ 分别为外代数 $\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\pi^*\Lambda(T^*S)$ $\widehat{\otimes}\Lambda(T^*X)\widehat{\ }$ 和 $\Lambda(T^*X)$ 上的数算子，其作用为乘以次数。对于任意 $a>0$，令

$$\overline{\theta}_a=a^{N_2},\qquad \widetilde{\theta}_a=a^{N_3}. \tag{4.156}$$

将右侧的张量在 $v\sqrt{t}Z$ 处取值后，我们得到

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}=&-g^{ij}\Big\{\big(\partial_i+v\sqrt{t}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}^{-1}\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}^{-1}\widehat{\Gamma}^0(\partial_i)\,\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}+\frac{\sqrt{t}}{p}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}(\partial_i)\big)\\
&\cdot\big(\partial_j+v\sqrt{t}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}^{-1}\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}^{-1}\widehat{\Gamma}^0(\partial_i)\,\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}+\frac{\sqrt{t}}{p}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}(\partial_j)\big)\\
&+v\sqrt{t}\big(\nabla_{\partial_i}^{TX_0}\partial_j+v\sqrt{t}\overline{\theta}_{v\sqrt{t}}^{-1}\widetilde{\theta}_v^{-1}\widehat{\Gamma}^0(\nabla_{\partial_i}^{TX_0}\partial_j)\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}+\frac{\sqrt{t}}{p}\widehat{\Gamma}^{F_p,u}(\nabla_{\partial_i}^{TX_0}\partial_j)\big)\Big\}\\
&+f_\varepsilon\Big\{\frac{v^2t}{4}r^X-\frac{v^2t}{8}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_\ell\big\rangle c_{vt}(e_i)c_{vt}(e_j)\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{v\sqrt{t}}{8}\big\langle R^{TX}(f_\alpha^H,f_\beta^H)e_k,e_\ell\big\rangle f^\alpha f^\beta\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{v\sqrt{vt}}{4}\big\langle R^{TX}(e_i,f_\alpha^H)e_k,e_\ell\big\rangle c_{vt}(e_i)f^\alpha\widehat{c}_v(\widehat{e}_k)\,\widehat{c}_v(\widehat{e}_\ell)\\
&-\frac{vt}{2}c_{vt}(e_i)c_{vt}(e_j)\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}(e_i,e_j)-\frac{1}{2}f^\alpha f^\beta\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}(f_\alpha^H,f_\beta^H)\\
&-\sqrt{vt}c_{vt}(e_i)f^\alpha\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}(e_i,f_\alpha^H)+\frac{t}{4p^2}\big|\widehat{\omega}^{F_p}\big|^2\\
&+\frac{vt}{2}\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)\widehat{c}_v(\widehat{e}_j)\frac{1}{4p}\widehat{\omega}^{F_p,2}(e_i,e_j)-\sqrt{vt}f^\alpha\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)\frac{1}{2p}\nabla_{f_\alpha^H}^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}(e_i)\\
&-vtc_{vt}(e_i)\widehat{c}_v(\widehat{e}_j)\frac{1}{2p}\nabla_{e_i}^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}(e_j)\\
&-\sqrt{vt}zc_{vt}(e_i)\frac{1}{2p}\omega^{F_p}(e_i)-zf^\alpha\frac{1}{2p}\omega^{F_p}(f_\alpha^H)\Big\},
\end{aligned} \tag{4.157}$$

于是我们得到 $\widehat{\mathscr{L}}_{1/p,\ t}^{F_p}=\widehat{\mathscr{L}}_{t\ x_0,}^{F_p}$。与式（4.71）类似，我们有

$$v\sqrt{t}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}^{-1}\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}^{-1}\widehat{\Gamma}^0_{v\sqrt{t}Z}(\partial_i)\,\widetilde{\theta}_{\sqrt{v}}\overline{\theta}_{\sqrt{vt}}=vZ_j\Gamma'_{ij,v\sqrt{t}Z}-vtZ_j\Gamma''_{ij,v\sqrt{t}Z}, \tag{4.158}$$

其中 $\Gamma'_{i,\ z},\Gamma''_{i,\ z}$的支集包含于 $B^{T_{x_0}X}(0,2\varepsilon)$，并且

$$\begin{aligned}\Gamma'_{ij,0}=&\frac{1}{4}\Big(\sum_{k<\ell}\big\langle R^{TX}(e_k,e_\ell)\partial_i,\partial_j\big\rangle e^k\wedge e^\ell+\sum\big\langle R^{TX}(f_\alpha,e_k)\partial_i,\partial_j\big\rangle f^\alpha\wedge e^k\\&+\sum_{\alpha<\beta}\big\langle R^{TX}(f_\alpha,f_\beta)\partial_i,\partial_j\big\rangle f^\alpha\wedge f^\beta\Big),\\\Gamma''_{ij,0}=&-\frac{1}{4}\sum_{k<\ell}\big\langle R^{TX}(e_k,e_\ell)\partial_i,\partial_j\big\rangle e^k\wedge e^\ell.\end{aligned}\tag{4.159}$$

由于4.158右端的第一项在 $Z\in T_{x_0}X$上无界，因此我们定义一个新的范数，使得下列算子对 $0\leqslant v$一致有界：$t\leqslant 1$:

$$\mathbb{I}^{v\sqrt{t}|Z|\leqslant\varepsilon}\cdot vZ_j(e^i\wedge -vti_{e_i}),\quad \mathbb{I}^{v\sqrt{t}|Z|\leqslant\varepsilon}\cdot(e^i\wedge -vti_{e_i}),\tag{4.160}$$

其中，$\mathbb{I}^A$ 当 $A\subseteq T_{x_0}X$ 时，表示 $A$的示性函数。

定义 4.27。对于 $k,\ \ell\in\mathbb{N}$，若 $N_1 s=\ell s$ (见（4.156）)，我们定义

$$\|s\|^2_{0,p}=\int_{\mathbb{R}^n}\big\|s(Z)\big\|^2(1+|Z|^2)^{m+1-\ell}dZ,\quad \|s\|^2_{k,p}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m,|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha s\|^2_{0,p}.\tag{4.161}$$

设 $H_{k,\ p}$ 为关于$\|\cdot\|_{k,\ p}$的完备化 Sobolev 空间。设 $H_{-k,\ p}$ 为负阶 Sobolev 空间，其范数定义为

$$\|s\|_{-k,p}=\sup_{0\neq s'\in H_{k,p}}\frac{\big|\langle s,s'\rangle_{0,p}\big|}{\|s'\|_{k,p}}\tag{4.162}$$

定理 4.28。对于 $r\in\mathbb{N}$、$0\leqslant v$、$t\leqslant 1$、$p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\frac{\partial^r}{\partial v^r}\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{v,t}=\mathscr{X}^{(r)}_{v,t,ij}(Z)\partial_i\partial_j+\mathscr{Y}^{(r)}_{v,t,i}(Z)\partial_i+\mathscr{Z}^{(r)}_{v,t}(Z),\quad for\ \mathscr{X}^{(r)}_{v,t,ij}(Z)=-\frac{\partial^r g^{ij}_{v\sqrt{t}Z}}{\partial v^r},\tag{4.163}$$

其中 $\mathscr{Y}^{F_p}_{,(r)\ v,t,i},\mathscr{Z}^{F_p}_{,(r)\ v,t}$属于 $\mathscr{C}^\infty(T_{x_0}X,\widehat{\mathbb{E}}_{p,x_0})$，并具有以下性质：

(1) 存在 $C>0$，使得 $\mathscr{X}^{F_p}_{,(\ r\ }\mathscr{Y}^{F_p}_{v,t,}{}_{)\ v,t,},{}_{(r)\ ,i\ }\mathscr{Z}^{F_p}_{,(r)\ v,t}$ 的 $\|\cdot\|_{0,p}$ 范数可由 $C\|(1+|Z|^r)^s\|_{0,p}$ 控制，且该控制对 $0\leqslant v,t\leqslant 1,p\in\mathbb{N}^*$ 一致成立。(2) 算子 $\mathscr{X}^{F_p}_{,(\ r\ ij}\mathscr{Y}^{F_p}_{0\ t})_{0,t,},{}_{(r)\ ,i\ }\mathscr{Z}^{F_p}_{,(r)\ 0,t}$ 是关于 $Z$ 和 $\sqrt{t}$ 的多项式。此外，$\mathscr{X}^{F_p}_{,(r)\ 0,t,ij}(Z)$ 是关于 $Z$ 的次数为 $r$ 的齐次多项式；$\mathscr{Y}^{F_p}_{,(r)\ 0,t,i}(Z)$ 和 $\mathscr{Z}^{F_p}_{,(r)\ 0,t}(Z)$ 关于 $Z$ 的次数均不超过 $r$。

(3) 特别地，

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{0,t}=&-\Delta^{T_{x_0}X}-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle_{x_0}\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}_{x_0}+\frac{t}{4p^2}\big|\widehat{\omega}^{F_p}\big|^2_{x_0}\\&+\frac{t}{4p}\widehat{\omega}^{F_p,2}_{x_0}-\frac{\sqrt{t}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}_{x_0}-\frac{1}{2p}z\omega^{F_p}_{x_0},\\\frac{\partial}{\partial v}\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{v,t}\Big|_{v=0}=&\mathscr{Y}^{F_p,(1)}_{0,t,i}(Z)\partial_i+\mathscr{Z}^{F_p,(1)}_{0,t}(Z)=-\frac{Z_j}{4}\Big\{\big\langle R^{TX}_{x_0}\partial_i,\partial_j\big\rangle\\&-t\big\langle\widehat{R}^{TX}_{x_0}\partial_i,\partial_j\big\rangle-\frac{t}{2p}\omega^{F_p,2}_{x_0}\big(\partial_i,\partial_j\big)\Big\}\partial_i+\mathscr{Q}_t(Z)+\mathscr{Q}'_t,\end{aligned}\tag{4.164}$$

其中，$\mathscr{Q}_t^{F_p}(Z)$ 和 $\mathscr{Q}_t^{F_{p'}}$ 是 $Z$ 中的齐次多项式，次数分别为 1 和 0，$\widehat{\ }$其系数属于 $\mathbb{E}_{p,\ x_0}$，且

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_t^{F_{p'}} =&\frac{t}{2}R^{\widehat{TX}}-\frac{1}{2}\widehat{R}^{TX}-\frac{t}{4}\big\langle R^{TX}(f_\alpha^H,e_i)e_k,e_l\big\rangle\widehat{e}^k\wedge\widehat{e}^l\wedge f^\alpha\wedge i_{e_i}\\&+e^i\wedge i_{e_j}\frac{t}{4p}\omega^{F_p,2}(e_i,e_j)+f^\alpha\wedge i_{e_i}\frac{t}{4p}\omega^{F_p,2}\big(f_\alpha^H,e_i\big)+\widehat{e}^i\wedge i_{\widehat{e}_j}\frac{t}{4p}\widehat{\omega}^{F_p,2}(\widehat{e}_i,\widehat{e}_j)\\&-f^\alpha\wedge i_{\widehat{e}_i}\frac{\sqrt{t}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{f_\alpha^H}\widehat{\omega}^{F_p}(e_i)-e^i\wedge i_{\widehat{e}_j}\frac{\sqrt{t}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{e_i}\widehat{\omega}^{F_p}(e_j)\\&-\widehat{e}^j\wedge i_{e_i}\frac{t^{3/2}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}_{e_i}\widehat{\omega}^{F_p}(e_j)+zi_{e_i}\frac{t}{2p}\omega^{F_p}(e_i).\end{aligned}\tag{4.165}$$

证明。第一条结论由（4.157）、（4.158）以及范数（4.161）中的权重得出。其余部分由（4.157）得出，因为我们由（4.66）得到定理 4.13。□

根据定理 4.28，采用与证明定理 4.15-4.26相同的方法，我们可以证明以下定理 4.29-4.38，它们对 $0\leqslant v$、$t\leqslant 1$、$p\in\mathbb{N}^*$ 均一致成立。

定理 4.29。存在 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\big\langle\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}s,s\big\rangle_{0,p}\geqslant C^{-1}\|\nabla s\|_{0,p}^2-C\|s\|_{0,p}^2,\\&\Big|\mathrm{Im}\big\langle\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}s,s\big\rangle_{0,p}\Big|\leqslant C\|s\|_{1,p}\|s\|_{0,p},\\&\Big|\big\langle\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}s,s'\big\rangle_{0,p}\Big|\leqslant C\|s\|_{1,p}\cdot\|s'\|_{1,p}.\end{aligned}\tag{4.166}$$

命题 4.30。对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对任意 $Q_1$、$\cdots Q_k\in\{\partial_i,Z_i\}_{i=1}^m$，

$$\Big|\big\langle[Q_1,[Q_2,\cdots[Q_k,\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}]\cdots]]s,s'\big\rangle_{0,p}\Big|\leqslant C\|s\|_{1,p}\|s'\|_{1,p}.\tag{4.167}$$

定理 4.31. 存在 $d_1,d_2>0$，使得若 $\lambda\in V_{d_1,d_2}$，其中 $V_{d_1,d_2}$ 由（4.93）给出，则预解式 $\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p},_t\big)^{-1}$ 存在。此外，存在 $C>0$，使得

$$\big\|\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-1}\big\|_p^{0,0}\leqslant C,\qquad\big\|\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-1}\big\|_p^{-1,1}\leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big).\tag{4.168}$$

命题 4.32. 对任意 $\lambda\in V_{d_1,d_2}$, $k\in\mathbb{N}$，预解式 $\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_v^{F_p},_t\big)^{-1}$ 将 $H_{k,p}$ 映射到$H_{k+1,p}$。此外，对任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^m$，存在 $C>0$，使得

$$\big\|Z^\alpha\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-1}s\big\|_{k+1,p}\leqslant C\big(1+|\lambda|^2\big)^{k+|\alpha|+1}\sum_{\alpha'\leqslant\alpha}\big\|Z^{\alpha'}s\big\|_{k,p}.\tag{4.169}$$

对于 $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r},\lambda\in V_{d_1,d_2}$，我们令

$$B_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(v,\lambda,p)=\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-k_0}\frac{\partial^{r_1}\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^{r_1}}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-k_1}\cdots\frac{\partial^{r_j}\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^{r_j}}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-k_j}.\tag{4.170}$$

那么存在 $a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-k}=\sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\in I_{k,r}}a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}B_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(v,\lambda,p)\tag{4.171}$$

定理 4.33. 设 $\ell \in \mathbb{N}$，对于任意多重指标 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^m$，若 $|\alpha_i| \leqslant \ell$ 且 $k > 2(\ell + r + 1)$，如果 $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) \in I_{k,\, r}$，则存在 $C > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $\lambda \in V_{d_1,\, d_2}$，

$$\left\|\partial^{\alpha} B_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(v, \lambda, p)\, \partial^{\alpha'} s\right\|_{0,p} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{j} \sum_{|\alpha| \leqslant r} \left\|Z^{\alpha} s\right\|_{0,p}. \tag{4.172}$$

定理 4.34。对于任意 $r \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}^*$，存在 $C > 0$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$，使得当$\lambda \in V_{d_1,\, d_2}$时，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(\frac{\partial^r \widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^r} - \frac{\partial^r \widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^r}\Big|_{v=0}\Big) s\right\|_{-1,p} \leqslant Cv \sum_{|\alpha| \leqslant r+1} \left\|Z^{\alpha} s\right\|_{1,p}, \\
&\left\|\Big(\frac{\partial^r}{\partial v^r}\big(\lambda - \widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}\big)^{-k} - \sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}) \in I_{k,r}} a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}} B_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(0, \lambda, p)\Big) s\right\|_{0,p} \\
&\qquad\qquad \leqslant Cv\,(1 + |\lambda|)^{\ell} \sum_{|\alpha| \leqslant 4r+1} \left\|Z^{\alpha} s\right\|_{0,p}.
\end{aligned} \tag{4.173}$$

定理 4.35。对于 $k$、$\ell$、$r \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，使得当 $Z$、$Z' \in T_{x_0}X$ 满足$|Z|$、$|Z'| \leqslant 1$时，我们有

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'| \leqslant k} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^{\alpha} \partial Z'^{\alpha'}} \frac{\partial^r}{\partial v^r} \exp(-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p})(Z, Z') \right|_{\mathscr{C}^{\ell}(M)} \leqslant C. \tag{4.174}$$

当 $k$ 足够大时，令

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{t,p}^{(r)} &= \frac{(k-1)!}{2\pi i (-1)^{k-1} r!} \int_{\partial V_{d_1,d_2}} e^{-\lambda} \sum_{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}) \in I_{k,r}} a_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}} B_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{k}}(0, \lambda, p)\, d\lambda, \\
\mathscr{T}_{v,t,p}^{(r)} &= \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial v^r} \exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}) - \mathscr{T}_{t,p}^{(r)}.
\end{aligned} \tag{4.175}$$

则 $\mathscr{T}_{(r)\,t,\,p}$ 和 $\mathscr{T}_{(r)\,v,\,t,\,p}$ 不依赖于 $k$的选择。我们将 $\mathscr{T}_{(r)\,t,\,p}(Z,\, Z')$（分别将 $\mathscr{T}_{(r)\,v,\,t,\,p}(Z,\, Z')$）记为关于 $dv_{TX}$的 $\mathscr{T}_{(r)\,t,\,p}$（分别为 $\mathscr{T}_{(r)\,v,\,t,\,p}$）的光滑核。

定理 4.36. 对于 $r \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，使得对于 $Z$，$Z' \in T_{x_0}X$，其中 $|Z|$，$|Z'| \leqslant 1$，

$$\left|\mathscr{T}_{v,t,p}^{(r)}(Z, Z')\right| \leqslant Cv^{1/(m+1)}. \tag{4.176}$$

定理 4.37. 对于任意 $r$，$\ell \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，使得

$$\left| \exp(-\widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p})(0,0) - \sum_{i=0}^{r} \mathscr{T}_{t,p}^{(i)}(0,0) v^i \right|_{\mathscr{C}^{\ell}(M)} \leqslant Cv^{r+1}. \tag{4.177}$$

对于 $s > 0$，令 $\mathcal{P}_s^{F_p}(x,\ y)$ 为 $\exp(-s\widehat{\mathscr{L}}_{0\,t}^{F_p},\ )$ 关于 $dv_{TX}$的核。对于多重指标 $\boldsymbol{r} = (r_1, \cdots,\ r_k)_{k \in \mathbb{N}}$，其中 $r_1,\ \cdots r_k \in \mathbb{N}^*$，类似于 (4.139)，我们定义

$$\mathscr{T}_{\boldsymbol{r},t,p} = \int_{\triangle_k} \Big(\mathcal{P}_{1-t_k}^{F_p} \frac{\partial^{r_k} \widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^{r_k}}\Big|_{v=0} \mathcal{P}_{t_k - t_{k-1}} \cdots \frac{\partial^{r_1} \widehat{\mathscr{L}}_{v,t}^{F_p}}{\partial v^{r_1}}\Big|_{v=0} \mathcal{P}_{t_1}^{F_p}\Big)(0,0) \prod_{j=1}^{k} dt_j, \tag{4.178}$$

那么根据 Duhamel 原理 [4, § 2.7], 可得

$$\mathscr{T}_{t,p}^{(i)}(0,0) = \sum_{r_1 + \cdots + r_k = i} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k} r_j!} \mathscr{T}_{\boldsymbol{r},t,p}, \quad \mathscr{T}_{t,p}^{(0)}(0,0) = \frac{e^{-\sigma_t^{F_p}}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}}}. \tag{4.179}$$

定理 4.38. 对于 $i,j,\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\Big|\mathrm{Tr}_{[j]}\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(i)}(0,0)\big]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant C,\\&\Big|p^{-n}\mathrm{Tr}^{F_p}[\mathscr{T}_{t,p}^{(i)}(0,0)]-\sum_{k=0}^{j}p^{-k}\mathrm{Tr}_{[k]}[\mathscr{T}_{t,p}^{(i)}(0,0)]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Cp^{-j-1}.\end{aligned}\tag{4.180}$$

注意到，4.178的积分中存在奇点，因此与定理4.26的证明类似，这里我们使用4.143，当 $t=1$ 时得到定理4.38。

4.9. 定理**4.1**的证明。现在我们开始证明本节的主定理。首先，处理 $t\geqslant 1$的情形。回顾 $[\cdot]^z$ 在1.26中、 $[\cdot]^{\max}$ 在（4.57）中以及 $\int^B$ 在4.58）中的记号，令

$$\mathscr{I}_{x_0}=(4\pi)^{\frac{m}{2}}p^{-n}\mathrm{Tr}^{F_p}\Big[\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\int^{\widehat{B}}\big[\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p})(0,0)\big]^{\max}\Big]^z.\tag{4.181}$$

由4.4）、4.47）和4.61），可得

$$\Big|p^{-n}\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}h\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)-\int_X\mathscr{I}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{\gamma t-\sqrt{c_1c_2}c\varepsilon p}.\tag{4.182}$$

将 $v=1/p$ 代入4.134），得到

$$\Big|\exp(-t\widehat{\mathscr{L}}_{x_0}^{F_p})(0,0)-\sum_{i=0}^{r}p^{-i}\mathscr{S}_{t,p}^{(i)}(0,0)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(M)}\leqslant Cp^{-r-1}e^{\gamma t}.\tag{4.183}$$

Put

$$\boldsymbol{c}_i(t)=\sqrt{2\pi i}\varphi\Big[(4\pi)^{\frac{m}{2}}\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\int^{\widehat{B}}\sum_{0\leqslant j\leqslant i}\mathrm{Tr}_{[i-j]}\big[\mathscr{S}_{t,p}^{(j)}(0,0)\big]^{\max}\Big]^z.\tag{4.184}$$

由4.150）、4.181）、4.182）和4.183），得到4.1）和4.2），对于 $t\geqslant 1$。

同样，如果我们取

$$c_i(t)=\sqrt{2\pi i}\varphi\Big[(4\pi)^{\frac{m}{2}}\int^{\widehat{B}}\sum_{0\leqslant j\leqslant i}\mathrm{Tr}_{[i-j]}\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(j)}(0,0)\big]^{\max}\Big]^z,\tag{4.185}$$

那么由（4.4）、（4.47）、（4.155）、（4.177）和（4.180），我们可知（4.1）和（4.2）对 $0<t\leqslant 1$成立。注意，通常 $c_i(t)\neq\boldsymbol{c}_i(t)$，而当按照（1.2）将它们分开时，它们在 $\Lambda(T^*X)$ 的最高次数项中包含相同的分量，因此得到

$$\int_X\boldsymbol{c}_i(t)=\int_X c_i(t)\tag{4.186}$$

对于 $i\in\mathbb{N}$ 和 $t>0$。因此，对于 $t>0$，我们总可以定义 $c_i(t)$，其定义见（4.185）。证明至此完成。

## 5. The full asymptotics of the analytic torsion forms

本节中，当 $\widehat{\vartheta}^L$ 是非退化的时，我们得到解析挠率形式 $\mathcal{T}\big(T^HM、\ g^{TX}、\ \nabla^{F_p}、\ g^{F_p}\big)$ 在 $p\to+\infty$时的完整渐近行为。

本节安排如下。在 § 5.1，我们证明挠率形式的完整渐近展开存在。证明分为两个关键步骤，分别涉及参数 $t>0$ 的大值和小值。在 § 5.2，我们证明 Γ-挠率形式与挠率形式具有相同的渐近行为。在 § 5.3，我们证明 $\mathscr{T}_{1,\ t,\ p}(0,0)$ 不会对挠率形式展开的前两项产生贡献。

5.1. 主要结果：定理 **0.1** 的精确版本。 对于扩大的纤维化$\sim$ $\sim M\to S$，如 § 1.4 中所示，由式（1.21）可得

$$h\big(\widetilde{A}',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)\big|_{s=1}=h\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)+ds\wedge h^\wedge\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big). \tag{5.1}$$

根据定理 4.1，存在如（4.1）所示的光滑形式 $\{\widetilde{c}_i(t)\}_{i\in\mathbb{N}}$，对于 $h\big(\widetilde{A}',g^{\Omega^\bullet(\ \ X\ F_p\ \ )}_{4t/p^2}\big)$，那么对于某些光滑形式 $\{d_i(t)\}_{i\in\mathbb{N}}$，对于 $t>0$，我们有

$$\widetilde{c}_i(t)=c_i(t)+ds\wedge d_i(t). \tag{5.2}$$

根据（4.1）、（5.1）和（5.2），对于 $k$，$\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 使得对于任意 $t>0$,

$$\Big|p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}h^\wedge\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X d_i(t)p^{-i}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(a-\gamma)t}p^{-k-1}, \tag{5.3}$$

此外，

$$\Big|\int_X d_k(t)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(a-\gamma)t}. \tag{5.4}$$

由（1.20），$M\times\{1\}$ 上算子 $\widehat{\mathscr{L}}^{F_p}_{v\ t}$ 在 $\widetilde{M}$ 上的限制正是（4.157）中的算子$\frown$，计及项 $\frac{\partial}{\partial s}$在项 $-\sqrt{vt}f^\alpha\widehat{c}_v\ (\widehat{e}_i)\ \frac{1}{2p}\nabla^{TX\otimes F_p}$中$_{f^H_\alpha}$ $^u\widehat{\omega}^{F_p}\ (e_i)$ 的方向，因此我们只需在（4.157）中添加以下额外项：

$$\frac{1}{2}\sqrt{vt}ds\wedge\widehat{c}_v(\widehat{e}_i)\frac{1}{2p}\widehat{\omega}^{F_p}(e_i). \tag{5.5}$$

由（5.5），$\sqrt{t}$ 在（4.157）中所有含有 $ds$的项里的次数都不小于 1。因此，当 $0<t\leqslant 1$ 时，（5.3）和（5.4）可以替换为

$$\begin{aligned}&\Big|p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}h^\wedge\big(A',g^{\Omega^\bullet(X,F_p)}_{4t/p^2}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X d_i(t)p^{-i}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant C\sqrt{t}p^{-k-1},\\&\Big|\int_X d_k(t)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant C\sqrt{t}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

现在我们陈述并证明本文的主要结果。

定理 5.1. 若 $\widehat{\vartheta}^L$ 非退化，则对任意 $i\in\mathbb{N}$，积分

$$W_i^{L,\xi}=-\sqrt{2\pi i}\varphi\int_0^{+\infty}d_i(t)\frac{dt}{t}\in\Omega^\bullet(M,o(TX)) \tag{5.7}$$

定义良好　收敛。此外，对 $k$、$\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得当 $p\to+\infty$ 时，我们有

$$\left|p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X W_i^{L,\xi}p^{-i}\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Cp^{-k-1}. \tag{5.8}$$

此外，对于微分形式 $\gamma_i$ 定义于(3.14)，我们有

$$dW_i^{L,\xi}=\int_X\big[e\big(TX,\nabla^{TX}\big)\gamma_i\big]. \tag{5.9}$$

证明。由定理3.6，我们有 $H^\bullet(X,\ F_p)\ =0$ 当 $p\in\mathbb{N}^*$ 足够大时，再由（1.24），

$$\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)=-\int_0^{+\infty}h^\wedge\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)\frac{dt}{t}. \tag{5.10}$$

使用变量变　换$t\to\frac{4t}{p^2}$ 在（5.10）右侧，积分变为

$$\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)=-\int_0^{+\infty}h^\wedge\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)\frac{dt}{t}. \tag{5.11}$$

由（5.4）和（5.6），（$W^{L,\ \xi}_{\ i}$）中的形式是良定义的，并且有

$$\begin{aligned}p^{k+1}\left|p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X W_i^{L,\xi}p^{-i}\right|_{\mathscr{C}^\ell(S)}&\\ \leqslant\int_0^1 C\sqrt{t}\frac{dt}{t}+\int_1^{+\infty}Ce^{-at}\frac{dt}{t}\leqslant C,&\end{aligned} \tag{5.12}$$

由此　得到（5.8）。而（5.9）直接由（1.25）、（3.14）和（5.8）推出　　.　□

5.2. Γ-挠形式的渐近性。设 $M\to S$ 是一个光滑纤维丛，其纤维为 $X$，并设 $\Gamma$ 是一个离散群，它在纤维方向上自由且适当不连续地作用于 $M$，使得 $\Gamma\backslash M=M$。设 $\widehat{\pi}\colon M\to M$ 是显然的投影。

设 $F$是 $M$上的一个厄米向量丛。若 $Q(\widehat{x},\widehat{x}')$ 是作用于 $\Omega^\bullet(M,\widehat{\pi}^*F)$ 上、与 $\Gamma$ 可交换的连续纤维方向核，则可定义其冯·诺依曼Γ-超迹。注意到 $\mathbf{Tr}_s[Q(x,x)]$ 是 Γ-不变的，因此它下降到 $M$；我们将 $\mathbf{Tr}_s^\Gamma[Q]$ 定义为 $\mathbf{Tr}_s[Q(x,x)]$ 在 $M$上的纤维积分：对于每个 $b\in S$，设 $\widehat{X}_b$和 $X_b$分别是 $M$ 和 $M$中的对应纤维，则有同构 $\Gamma\backslash X_b\cong X_b$。设$\curvearrowright\mathcal{X}_b\subset X_b$ 为相应的基本区域，则有

设 $F$是 $M$上的一个厄米向量丛。若 $Q$ 是作用于 $\mathscr{C}^\infty(M,\widehat{\pi}^*F)$ 的算子，其光滑纤维核为 $Q(\widehat{x},\widehat{x}')$，其中 $(\widehat{x},\widehat{x}')\in M\times_S M$。若 $Q$ 与 $\Gamma$ 可交换，则 $\mathbf{Tr}[Q(x,x)]$ 是 Γ- 不变的，并下降为 $M$ 上的一个函数。对每个 $b\in S$，令 $X_b$ 和 $X_b$ 分别为 $M$ 和 $M$ 中的对应纤维，则存在一个同构$\curvearrowright\Gamma\backslash X_b\cong X_b$，且 $Q$ 的冯·诺依曼 Γ-迹为

$$\mathrm{Tr}^\Gamma[Q_b]=\int_{X_b}\mathrm{Tr}[Q(x,x)]dv_{X_b}(x). \tag{5.13}$$

现在我们将应用前几节的形式体系。注意，我们可以将 $M$上的几何数据 $(T^HM,g^{TX},F_p,g^{F_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$提升为 $\widehat{M}$上的 $(T^H\widehat{M},g^{\widehat{\pi}^*TX},\widehat{\pi}^*F_p,g^{\widehat{\pi}^*F_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$。

对于 $t>0$，我们可以定义 $h^\wedge,\ \Gamma(A',\ g_t^{\Omega(X,\widehat{\pi}^*F_p)})\in\Omega^\bullet(S)$，其定义方式与（1.21）中的公式相同，只需将超迹替换为相应的 Γ-超迹 $\mathbf{Tr}_s^\Gamma$。我们假设

非退化条件 (3.16) 成立。正如 Bismut-Ma-Zhang [9, § 6.6], 所指出的，当非退化条件 (3.16) 成立时，谱隙性质 (3.17) 在 $\widehat{M}$ 上仍然有效，因此，对于足够大的 $p\in\mathbb{N}^*$，当 $t\to+\infty$, $|h^{\wedge,\Gamma}(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,\widehat{\pi}^*F_p)})|=O(e^{-p^2t})$ 时，我们可以定义如下类似于 (1.24) 和 (5.10) 的 $\Gamma$-挠率形式:

$$\mathcal{T}^{\Gamma}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)=-\int_0^{+\infty}h^{\wedge,\Gamma}\big(A',g_t^{\Omega^\bullet(X,\widehat{\pi}^*F_p)}\big)\frac{dt}{t}\in\Omega^{\mathrm{even}}(S). \tag{5.14}$$

特别地，若 $\widehat{X}$ 是 $X$ 的万有覆盖，则 $\Gamma$-挠率也称为 $L^2$-挠率，记作 $\mathcal{T}_{L^2}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)$。关于 Novikov-Shubin 不变量为正的一般丛的 $\Gamma$-挠率形式的定义，更多详情请参见 [1] 。

定理 5.2。 在非退化条件 (3.16)下，存在 $a>0$ 使得对于$\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 使得当 $p\to+\infty$ 时，

$$\Big|\mathcal{T}^{\Gamma}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-ap}. \tag{5.15}$$

特别 地， $\Gamma$-挠率形式验证了与 (5.8)中相同的渐近展开 :

$$\Big|p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}^{\Gamma}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\sum_{i=0}^{k}\int_X W_i^{L,\xi}p^{-i}\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Cp^{-k-1}. \tag{5.16}$$

证明。 对于 $\widehat{x}_0\in\widehat{M}$，令 $\mathscr{M}_{\widehat{x}_0}^{F_p}=\widehat{\pi}^*\mathscr{M}_{\widehat{\pi}}^{F_p}{}_{(\widehat{x}_0)}$其中 $\mathscr{M}_{\widehat{\pi}}^{F_p}{}_{(\widehat{x}_0)}$定义见（4.46），显然有

$$\exp(-t\mathscr{M}_{\widehat{x}_0}^{\widehat{\pi}^*F_p})(0,0)=\widehat{\pi}^*\big[\exp(-t\mathscr{M}_{\widehat{\pi}(\widehat{x}_0)}^{F_p})(0,0)\big]. \tag{5.17}$$

由于谱估计（3.17）在 $M$ 上成立，由（4.4）和（4.47），可知对于$\ell\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 使得对于 $p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\Big|\mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}\big[\exp(-t\mathcal{M}^{\widehat{\pi}^*F_p})(\widehat{x}_0,\widehat{x}_0)-\exp(-t\mathscr{M}_{\widehat{x}_0}^{\widehat{\pi}^*F_p})(0,0)\big]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(\widehat{M})}\leqslant Ce^{-(a-\gamma)t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p}. \tag{5.18}$$

由（4.47）、（5.17）和（5.18），得到

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}\big[\exp(-t\mathcal{M}^{\widehat{\pi}^*F_p})(\widehat{x}_0,\widehat{x}_0)\big]-\mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}\big[\exp(-t\mathcal{M}^{F_p})(\widehat{\pi}(\widehat{x}_0),\widehat{\pi}(\widehat{x}_0))\big]\Big|_{\mathscr{C}^\ell(\widehat{M})}\\ \leqslant Ce^{-(a-\gamma)t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

类似于（4.4），我们设

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}h^{\Gamma}\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)=\sqrt{2\pi i}\varphi\bigg[\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\mathrm{Tr}_s^{\Gamma}\big[\exp(-t\mathcal{M}^{\widehat{\pi}^*F_p})\big]\bigg]^z. \tag{5.20}$$

由（4.4）、（5.19）和（5.20），有

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\psi_{1/\sqrt{p}}\Big|h^{\Gamma}\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)-h\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(a-\gamma)t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p}. \tag{5.21}$$

如定理 1.6之前的论证所示，我们将（5.21）应用于扩大的流形$\widetilde{\widehat{M}}\to\widetilde{M}\to S$ 和 $M\to S$，限制到 $s=1$时，如（5.1），可得

$$p^{-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\Big|h^{\wedge,\Gamma}\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)-h^{\wedge}\big(A',g_{4t/p^2}^{\Omega^\bullet(X,F_p)}\big)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\leqslant Ce^{-(a-\gamma)t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p}. \tag{5.22}$$

由（5.11）和（5.14），可知存在某个 $c>0$,

$$\begin{aligned}\Big|\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}^{\Gamma}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)-\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}\big(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}\big)\Big|_{\mathscr{C}^\ell(S)}\\ \leqslant\int_0^{+\infty}Cpe^{-(a-\gamma)t-\frac{c_2}{2t}-\sqrt{\gamma c_2}p}\frac{dt}{t}\leqslant Ce^{-cp},\end{aligned}\tag{5.23}$$

由此得到（5.15）。根据（5.8）和（5.15），可得（5.16）。 □

5.3. 关于 $W_1$ 的约化。 在本小节中，在 $\dim_{\mathbb{C}}\xi=1$ 且 $F=\mathbb{C}$ (主要用于（5.36）) 的假设下，我们给出 $W_0,W_1$ 的约化公式。根据（5.2）和（5.7），先来计算 $c_0(t)$ 和 $c_1(t)$。

根据（4.185），可得

$$\begin{aligned}\int_X\big(c_0(t)+p^{-1}c_1(t)\big)=(4\pi)^{\frac{m}{2}}\int_X\bigg[\int^{\widehat{B}}\big(\mathrm{Tr}_{[0]}+p^{-1}\mathrm{Tr}_{[1]}\big)\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(0)}(0,0)\big]^{\max}\\ +p^{-1}\mathrm{Tr}_{[0]}\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(1)}(0,0)\big]^{\max}\bigg]^z.\end{aligned}\tag{5.24}$$

引理 5.3。我们有

$$\int_X\bigg[\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[0]}\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(1)}(0,0)\big]^{\max}\bigg]^z=0.\tag{5.25}$$

证明。令

$$\begin{aligned}\sigma_t^{F_p}=&-\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}e_i,e_j\big\rangle\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}+\frac{t}{4p^2}\big|\widehat{\omega}^{F_p}\big|^2+\frac{t}{4p}\widehat{\omega}^{F_p,2}\\ &-\frac{\sqrt{t}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}-\frac{1}{2p}z\omega^{F_p}.\end{aligned}\tag{5.26}$$

由（4.178）和（4.179），我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{[0]}\big[\mathscr{T}_{t,p}^{(1)}(0,0)\big]=-\mathrm{Tr}_{[0]}\bigg[\int_0^1\int_{TX}\mathcal{P}_{1-t_1}^{F_p}(0,Z)\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}_{v,t,Z}^{F_p}}{\partial v}\bigg|_{v=0}\mathcal{P}_{t_1}^{F_p}(Z,0)dZdt_1\bigg]\\ &=-\mathrm{Tr}_{[0]}\bigg[\int_0^1\int_{TX}(16\pi^2(1-t_1)t_1)^{-\frac{m}{2}}e^{-\frac{|Z|^2}{4(1-t_1)}-(1-t_1)\sigma_t^{F_p}}\frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}_{v,t,Z}^{F_p}}{\partial v}\bigg|_{v=0}e^{-\frac{|Z|^2}{4t_1}-t_1\sigma_t^{F_p}}dZdt_1\bigg].\end{aligned}\tag{5.27}$$

对于 $1\leqslant i、\ j\leqslant m$，我们设

$$a_{t,ij}=Z_iZ_j\Big\{\big\langle R_{x_0}^{TX}\partial_i,\partial_j\big\rangle-t\big\langle\widehat{R}_{x_0}^{TX}\partial_i,\partial_j\big\rangle-\frac{t}{2p}\omega_{x_0}^{F_p,2}\big(\partial_i,\partial_j\big)\Big\},\tag{5.28}$$

它关于 $i$，$j$ 是反对称的。由（4.163）、（4.164）和（5.28），我们得到

$$\sum_i e^{-\frac{|Z|^2}{4(1-t_1)}}\mathscr{Y}_{0,t,i}^{(1)}\partial_ie^{-\frac{|Z|^2}{4t_1}}=-\frac{1}{2t_1}\sum_{i,j}e^{-\frac{|Z|^2}{4(1-t_1)}}a_{t,ij}e^{-\frac{|Z|^2}{4t_1}}=0.\tag{5.29}$$

由 (4.164)，$\mathscr{Q}_t^{F_p}(Z)$ 是一个关于 $Z$ 的一次齐次多项式，因此我们有

$$\int_{T_{x_0}X}e^{-\frac{|Z|^2}{4(1-t_1)}}\mathscr{Q}_t^{F_p}(Z)e^{-\frac{|Z|^2}{4t_1}}dZ=0.\tag{5.30}$$

现在我们考虑项 $\mathscr{Q}_t^{F_p\prime}$，我们声称对于 $0\leqslant t_1\leqslant 1$，有

$$\int_X\left[\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(1-t_1)\sigma_t^{F_p}}\mathscr{Q}_t^{F_p\prime}e^{-t_1\sigma_t^{F_p}}\right]^{\max}\right]^z=0. \tag{5.31}$$

回忆 $\mathscr{Q}^{F_p\prime}$，$\sigma^{F_p}$ 和 $\overline{\theta}_a$ 分别由（4.70）、（4.137）和（4.156）给出，则

$$t\overline{\theta}_{\sqrt{t}}^{-1}\sigma^{F_p}\overline{\theta}_{\sqrt{t}}=\sigma_t^{F_p},\quad t\overline{\theta}_{\sqrt{t}}^{-1}\mathscr{Q}^{F_p\prime}\overline{\theta}_{\sqrt{t}}=\mathscr{Q}_t^{F_p\prime}, \tag{5.32}$$

由此得到

$$\begin{aligned}t^{-\frac{m}{2}}\int_X\left[\theta_{\sqrt{t}}^{-1}\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(t-t_1t)\sigma^{F_p}}t\mathscr{Q}^{F_p\prime}e^{-t_1t\sigma^{F_p}}\right]^{\max}\right]^z\\ =\int_X\left[\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(1-t_1)\sigma_t^{F_p}}\mathscr{Q}_t^{F_p\prime}e^{-t_1\sigma_t^{F_p}}\right]^{\max}\right]^z.\end{aligned} \tag{5.33}$$

因此，我们只需证明，对于 $0\leqslant t'\leqslant t$，有

$$\int_X\left[\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(t-t')\sigma^{F_p}}t\mathscr{Q}^{F_p\prime}e^{-t'\sigma^{F_p}}\right]^{\max}\right]^z=0. \tag{5.34}$$

托普利兹算子代数是非交换的，而在（5.34）中，根据定理2.2，当 $\dim_{\mathbb{C}}\xi=1$ 时，我们只需得到渐近迹的首项，因此可以形式上将它们视为交换的：对于 $k\in\mathbb{N}^*$ 和托普利兹算子 $T_1$、$\cdots$、$T_k$，若 $i_1$、$\cdots$、$i_k$ 是 $\{1,\cdots,k\}$ 的任意一个排列，则 $\mathrm{Tr}_{[0]}[T_1\cdots T_k]=\mathrm{Tr}_{[0]}[T_{i_1}\cdots T_{i_k}]$。于是，由（4.67）和（4.70），$\mathscr{Q}^{F_p\prime}$ 的作用类似于奇导子：对于取值于托普利兹算子的微分形式 $\{\omega_\ell\}_{\ell=0,\,1}$ 在 $M$ 上，有

$$\mathrm{Tr}_{[0]}\left[\mathscr{Q}^{F_p\prime}(\omega_0\wedge\omega_1)\right]=\mathrm{Tr}_{[0]}\left[(\mathscr{Q}^{F_p\prime}\omega_0)\wedge\omega_1\right]+(-1)^{\deg\omega_0}\mathrm{Tr}_{[0]}\left[\omega_0\wedge(\mathscr{Q}^{F_p\prime}\omega_1)\right], \tag{5.35}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(t-t')\sigma^{F_p}}t\mathscr{Q}^{F_p\prime}e^{-t'\sigma^{F_p}}\right]=\mathrm{Tr}_{[0]}\left[e^{-(t-t')\sigma^{F_p}}\cdot t\mathscr{Q}^{F_p\prime}(-t'\sigma^{F_p})\cdot e^{-t'\sigma^{F_p}}\right]\\ &=\mathrm{Tr}_{[0]}\left[t\mathscr{Q}^{F_p\prime}(-t'\sigma^{F_p})\cdot e^{-t\sigma^{F_p}}\right]=t'\mathrm{Tr}_{[0]}\left[\mathscr{Q}^{F_p\prime}\left(e^{-t\sigma^{F_p}}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.36}$$

在（5.34）中，我们只需要 $\Lambda(T^*X)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})$ 中的最高次数项。然而，根据（4.70），$\mathscr{Q}'e^{-t\sigma^{F_p}}$ 不可能是 $\Lambda(T^*X)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})$ 中的最高次数项。证明完毕。□

对于任意具有形式 $a\in\mathbb{R}[z]\widehat{\otimes}\mathbb{R}[ds]\widehat{\otimes}\Lambda(T^*M)$ $a=\alpha_1+z\alpha_2+ds\alpha_3+z\wedge ds\wedge\alpha_4$ 的 $\alpha_i\in\Lambda$，其中 $T^*M$( $[a]^{z\wedge ds}=\alpha_4$)，我们令 。令

$$\begin{aligned}\eta_t^{F_p}=&\sigma_t^{F_p}+\frac{\sqrt{t}}{2}ds\frac{1}{2p}\widehat{\omega}^{F_p}=-\frac{1}{4}\left\langle R^{TX}e_i,e_j\right\rangle\widehat{e}^i\wedge\widehat{e}^j-\frac{1}{4p}\omega^{F_p,2}+\frac{t}{4p^2}\widehat{\omega}^{F_p}(e_i)^2\\ &+\frac{t}{4p}\widehat{\omega}^{F_p,2}-\frac{\sqrt{t}}{2p}\nabla^{\widehat{TX}\otimes F_p,u}\widehat{\omega}^{F_p}-\frac{1}{2p}z\omega^{F_p}+\frac{\sqrt{t}}{2}ds\frac{1}{2p}\widehat{\omega}^{F_p}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

命题 5.4。对于 $i=0$，1，我们有

$$W_i^{L,\xi}=\int_0^{+\infty}\left[\int^{\widehat{B}}\mathrm{Tr}_{[i]}\left[\exp(-\eta_t^{F_p})\right]^{\max}\right]^{z\wedge ds}\frac{dt}{t}. \tag{5.38}$$

证明。由（5.25），$\mathscr{T}_{t,p}^{(1)}(0,0)$不会对（5.24）右端产生贡献。由（4.164）、（4.178）、（4.179）、（5.24）和（5.26），可得

$$\begin{aligned} c_0(t)+p^{-1}c_1(t) &= (4\pi)^{\frac{m}{2}}\left[\int^{\widehat{B}}\left(\mathrm{Tr}_{[0]}+p^{-1}\mathrm{Tr}_{[1]}\right)\left[\mathscr{T}_{t,p}^{(0)}(0,0)\right]^{\max}\right]^{z} \\ &= \left[\int^{\widehat{B}}\left(\mathrm{Tr}_{[0]}+p^{-1}\mathrm{Tr}_{[1]}\right)\left[\exp(-\sigma_t^{F_p})\right]^{\max}\right]^{z}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

由（5.2）、（5.5）、（5.37）和（5.39），可得

$$d_0(t)+p^{-1}d_1(t) = \left[\int^{\widehat{B}}\left(\mathrm{Tr}_{[0]}+p^{-1}\mathrm{Tr}_{[1]}\right)\left[\exp(-\eta_t^{F_p})\right]^{\max}\right]^{z\wedge ds}. \tag{5.40}$$

由（5.7）和（5.40），可得（5.38）。 □

注 5.5. 由定理 2.4，（5.38）对于 $i=0$ 正是 $W_0$ 的公式，该公式由 Bismut-Ma-Zhang [9, (9.89)]给出。由（5.38），我们可以得到 $W_1$ 对于 $i=0$的显式公式，以及高阶项的托普利兹算子乘积公式（2.11）（见 [25]）。然而，直接展开非常复杂，也不够明晰。下一节中，当 $G$ 是约化李群时，我们将把（5.40）改写为简洁明了的形式。

## 6. The case when the structure group of $P_G$ is reductive

本节给出 $W^{L,\xi}_1$（5.8）的显式公式，其中结构群$G$ 的 $P_G$ 是约化线性李群，维数 $\mathbb{C}\xi=1$ 且 $F=\mathbb{C}$ 平凡。

本节安排如下。在 § 6.1 中，我们介绍约化李群 $G$、其紧实形式 $U$ 以及复化 $G_{\mathbb{C}}$。在 § 6.2 中，我们介绍平坦主丛 $P_G\to M$ 的约化。在 § 6.3 中，我们将某些李导数算子表示为托普利兹算子（见定义 2.1）。在 § 6.4 中，对于 $A\in\mathfrak{u}$，我们使用 Kirillov公式求得 $e^{\frac{A}{p}}$ 在 $H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)$ 上的渐近迹。在 § 6.5 中，我们得到 $W^{L,\xi}_1$ 的显式公式。在 § 6.6 中，我们讨论 $W^{L,\xi}_1$ 的一个特殊情形，即 $N$ 是一个伴随轨道。在 § 6.7 中，我们计算若干具体例子中的 $W^{L,\xi}_1$。

6.1. 约化李群。设 $G$ 是一个连通实约化李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\Theta\in\in\mathrm{Aut}(G)$ 是 $G$ 的 Cartan 对合。设 $K\subset G$ 是 $G$ 中 $\Theta$ 的不动点集，它是 $G$ 的极大紧子群，其李代数记为 $\mathfrak{k}$。设 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ 是 $\Theta$ 对应于特征值 $-1$ 的特征子空间。于是我们有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}. \tag{6.1}$$

设 $U$ 是 $G$ 的紧实形式，其李代数为

$$\mathfrak{u}=\sqrt{-1}\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}. \tag{6.2}$$

设 $G_{\mathbb{C}}$ 是 $G$ 的复化，其李代数为

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{u}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} \tag{6.3}$$

那么 $G_{\mathbb{C}}$ 也是到 $U$ 的复化，且 $U$ 是 $G_{\mathbb{C}}$ 的极大紧子群。

6.2. 具有约化结构群的主丛。 现在我们采用与 § 3.1 中相同的假设。特别地， $p$: $P_G \to M$ 是一个平坦主 $G$-丛，其中$G$是 § 6.1 中给出的约化李群。由于 $G/K$ 是可缩的，纤维丛 $P_G \times_G G/K$ 存在光滑截面，且每个截面都对应于将主 $G$-丛 $p$: $P_G \to M$约化为主 $K$-丛 $p$: $P_K \to M$。

令 $\mathfrak{g}_r = P_G \times_G \mathfrak{g} \cong P_K \times_K \mathfrak{g}$。于是，6.1）给出

$$\mathfrak{g}_r = \mathfrak{p}_r \oplus \mathfrak{k}_r. \tag{6.4}$$

我们将 $P_G$ 上的平坦联络记为 $\mathfrak{g}$-值平坦联络形式 $\theta^{\mathfrak{g}}$。将 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 投影到 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{k}$ 上，并相对于分解（6.1），可得

$$\theta^{\mathfrak{g}} = \theta^{\mathfrak{p}} + \theta^{\mathfrak{k}}, \tag{6.5}$$

那么 $\theta^{\mathfrak{k}}$ 可以视为 $P_K$ 上的联络形式，而 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 是 $T^*X \otimes \mathfrak{p}_r$的一个截面。

令 $\Theta^{\mathfrak{k}}$ 为 $\theta^{\mathfrak{k}}$的曲率。由于 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 是平坦的，我们得到

$$\Theta^{\mathfrak{k}} = -\frac{1}{2}\big[\theta^{\mathfrak{p}}, \theta^{\mathfrak{p}}\big] \ (\text{or } \Theta^{\mathfrak{k}} = -\theta^{\mathfrak{p},2}), \quad \big[d + \theta^{\mathfrak{k}}, \theta^{\mathfrak{p}}\big] = 0. \tag{6.6}$$

设 $\nabla^{\mathfrak{g}_r,\ u}$ 为 $\mathfrak{g}_r$ 由 $\theta^{\mathfrak{k}}$诱导的联络，它保持直和分解（6.4）。

6.3. 动量映射与一类托普利兹算子。 我们采用 § 2.1 和 § 3.1中的假设与记号。特别地，$N$ 表示一个复维数为 $n$ 的紧复流形，而（$L$, $g^L$）是其上的全纯 Hermitian 线丛 $N$。设 $\nabla^L$为 $L$ 的陈联络，其中 $c_1(L,\ g^L) = \omega$。

我们假设群 $U$ 在 $N$上全纯作用。若 $A \in \mathfrak{u}$，令 $A^N$ 表示 $N$ 上的相应全纯向量场，其 (1,0) 部分为 $A^{N,\ (1,0)}$ 而 (0,1) 部分为$A^{N,\ (0,1)}$)，因此 $A \in \mathfrak{u} \to -A^N$ 是李代数的一个态射。

我们进一步假设 $U$ 在 $N$ 上的作用可提升为对$L$的全纯酉作用。于是 $\omega$ 是一个 $U$-不变形式。若 $A \in \mathfrak{u}$，令 $L_A$ 表示 $A$ 在 $L$ 的光滑截面上的李导数。若 $A \in \mathfrak{u}$，Kostant 公式 [4, 定义 7.5] 给出

$$L_A = \nabla^L_A - 2\pi i\langle \mu_L, A\rangle, \tag{6.7}$$

其中 $\mu_L$是动量映射 $\mu$: $N \to \mathfrak{u}^*$，满足：若 $u \in U$, $x \in N$,

$$\mu_L(ux) = {}^t\mathrm{Ad}^{-1}(u)\mu(x), \quad d\langle \mu_L, A\rangle - i_{A^N}\omega = 0. \tag{6.8}$$

设 $(\xi, g^\xi)$ 是 $N$ 上的另一个全纯 Hermitian 线丛，且 $U$ 在 $\xi$ 上全纯且幺正地作用，其动量映射为 $\mu_\xi$。

回顾一下， $\mathscr{C}^\infty(N, L^p \otimes \xi)$ 配备了由 $(g^L, g^\xi)$ 诱导的 $L^2$内积，K¨ahler 度量由 $g^{T_{\mathbb{R}}N} = \omega(\cdot, J\cdot)$ 给出，而 $P_p$是从 $\mathscr{C}^\infty(N, L^p \otimes \xi)$ 到 $H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi)$ 的正交投影算子，如第3.2节所述。于是， $U$在 $H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi)$ 上幺正作用。此作用可以扩展为全纯的 $G_{\mathbb{C}}$ 作用。

令 $g^{TN}$ 为由 $g^{T_{\mathbb{R}}N}$ 诱导的 $TN$ 上的度量，并记相应的 Chern 联络为 $\nabla^{TN}$，其曲率为 $R^{TN}$。记 $\nabla^{TN}$ 的 (1, 0) 部分为 $\nabla^{TN\prime}$。若 $A \in \mathfrak{u}$，$\nabla^{TN\prime}A^{N,\ (1,0)}$ 是 $TN$ 的斜自伴端态。

度量 $g^{TN}$在丛 det $TN$上诱导出厄米度量 $g^{\det TN}$。令$\nabla^{\det TN}$表示 det $TN$上相应的陈联络，则

$$c_1(\det TN, g^{\det TN}) = -\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}^{TN}[R^{TN}]. \tag{6.9}$$

群 $U$在 det $TN$上作全纯且酉的作用。相应的动量映射 $\mu_{\det TN}$: $N \to \mathfrak{u}^*$由下式给出:

$$2\pi i\langle \mu_{\det TN}, A\rangle = \mathrm{Tr}^{TN}[\nabla^{TN\prime} A^{N,(1,0)}]. \tag{6.10}$$

定理6.1 ([9, 定理3.1])。 若 $A \in \mathfrak{u}$，则下列恒等式成立:

$$\mathcal{L}_A\big|_{H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)} = -2\pi i P_p\langle p\mu_L + \mu_\xi + \mu_{\det TN}, A\rangle P_p. \tag{6.11}$$

证明。 由（3.7）和（6.10），可知（6.11）是（3.11）的特例。 □

6.4. Kirillov公式。对于矩阵 $B$，若 $\sup_{\lambda\in \mathrm{Spec}(B)}|\lambda| < 2\pi$，我们可知 t

$$\mathrm{Td}(B) = \det\Big[\frac{B}{1-e^{-B}}\Big]. \tag{6.12}$$

若 $B$ 是自伴的，则定义 Td($B$) 时无需对 $B$ 作任何条件限制。由上可知，对于$A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，只要 $|A|$ 足够小，下列形式就是良定义的:

$$\mathrm{Td}_A(N) = \mathrm{Td}\Big[-\frac{R^{TN}}{2\pi i} + \nabla^{TN\prime} A^{N,(1,0)}\Big]. \tag{6.13}$$

下列形式的 Kirillov公式见[9, 定理3.5]。

定理6.2. 对于足够大的 $p$，若 $A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $|A|$ 足够小，

$$\mathrm{Tr}^{H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)}(e^A) = \int_N \mathrm{Td}_A(N)\exp\big(2\pi i\langle p\mu_L + \mu_\xi, A\rangle + pc_1(L,g^L) + c_1(\xi,g^\xi)\big). \tag{6.14}$$

对于 $A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，令 $R_L(A)$为由下式给出的 Duistermaat-Heckman 积分

$$R_L(A) = \int_N \exp\big(2\pi i\langle \mu_L, A\rangle + c_1(L,g^L)\big). \tag{6.15}$$

形式上，对于 $p \in \mathbb{N}^*$，令 $\xi^{\frac{1}{p}}$为 $L$的 $p$次方根，并令(det $TN$) $^{\frac{1}{2p}}$为在上同调和动量映射层面上 det $TN$的 $2p$次方根，则

$$\begin{aligned} c_1\big(\xi^{\frac{1}{p}}\big) &= \frac{1}{p}c_1(\xi,h^\xi), \quad c_1\big((\det TN)^{\frac{1}{2p}}\big) = \frac{1}{2p}c_1(\det TN, g^{\det TN}), \\ \mu_{\xi^{\frac{1}{p}}} &= \frac{1}{p}\mu_\xi, \quad \mu_{(\det TN)^{\frac{1}{2p}}} = \frac{1}{2p}\mu_{\det TN}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

命题6.3. 若 $A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，对于足够大的 $p$，我们有

$$p^{-n}\mathrm{Tr}^{H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)}\big[e^{\frac{A}{p}}\big] = R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}(A) + \mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.17}$$

证明。令 $Q(z)$为0附近由下式给出的全纯函数

$$Q(z) = \ln\frac{z}{1-e^{-z}} = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{24} + \cdots. \tag{6.18}$$

由（6.12）和（6.18），我们得到 Td($B$) $= \exp\big(\mathrm{Tr}\big[Q(B)\big]\big)$。由（6.9）和（6.13），可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Td}_{\frac{A}{p}}\big(N\big) = \mathrm{Td}_0(N)\Big(1 + p^{-1}\mathrm{Tr}\big[Q'(iR^{TN}/2\pi)\nabla^{TN\prime}A^{N,(1,0)}\big]\Big) + \mathcal{O}\big(p^{-2}\big) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{2}c_1(\det TN) + \cdots\Big)\Big(1 + p^{-1}\mathrm{Tr}\big[Q'(iR^{TN}/2\pi)\nabla^{TN\prime}A^{N,(1,0)}\big]\Big) + \mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \end{aligned} \tag{6.19}$$

注意到 $Q'(0)=1/2$。由（2.5）、（6.10）、（6.14）和（6.19），我们得到

$$\begin{aligned} p^{-n}\mathrm{Tr}^{H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi)}\big[e^{\frac{A}{p}}\big] &= \int_N \exp\big(2\pi i\langle\mu_L,A\rangle\big)\frac{c_1^n(L)}{n!} \\ &+\frac{1}{2p}\big(2\pi i\langle\mu_{\det TN},A\rangle+4\pi i\langle\mu_\xi,A\rangle\big)\exp\big(2\pi i\langle\mu_L,A\rangle\big)\frac{c_1^n(L)}{n!} \\ &+\frac{1}{2p}\big(c_1(\det TN)+2c_1(\xi)\big)\exp\big(2\pi i\langle\mu,A\rangle\big)\frac{c_1^{n-1}(L)}{(n-1)!}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \end{aligned} \tag{6.20}$$

由（6.16），我们可以将（6.20）的右端改写为

$$\int_N \exp\Big(2\pi i\big\langle\mu_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}},A\big\rangle+c_1\big(L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}\big)\Big)+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big), \tag{6.21}$$

这正是（6.17）。 □

6.5. 的显式公式 $W^{L,}{}_1{}^{\xi}$。对于 $p\in\mathbb{N}^*$，我们用 $\rho$ 表示全纯表示 $G_{\mathbb{C}}\to$ 端 omorphism$\big(H^{(0,0)}(N,\ L^p\otimes\xi)\big)$。与（0.3）类似，我们有

$$F_p=P_K\times_K H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi). \tag{6.22}$$

令 $g^{F_p}$ 为 $F_p$ 上由 $L^2$-度量在 $H^{(0,0)}(N,\ L^p\otimes\xi)$ 上诱导的厄米度量。联络形式 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 在 $\nabla^{F_p}$ 上诱导出平坦联络 $F_p$，而 $\theta^{\mathfrak{k}}$ 在 $\nabla^{F_p}$上给出酉联络, $^u$于 $F_p$。回顾 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 是 $T^*M\otimes\mathfrak{p}_r$的一个截面。由（6.5），得到

$$\nabla^{F_p,u}=\nabla^{F_p}-\rho\theta^{\mathfrak{p}} \tag{6.23}$$

其中 $\rho\theta^{\mathfrak{p}}\in\Omega^1(M,\mathrm{End}(F_p))$. 由 (1.6) 和 (6.23)，可得

$$\omega\big(\nabla^{F_p,u},g^{F_p}\big)=-2\rho\theta^{\mathfrak{p}},\quad R^{F_p,u}=-\rho\theta^{\mathfrak{p},2}. \tag{6.24}$$

注意，(6.23) 和 (6.24) 是定理 3.1 的约化版本。此外，由 (6.11) 和 (6.24)，对于局部标准正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 上的 $TX$，条件 (3.16变为

$$\sum_{i=1}^m\big|\langle 2\pi\mu_L,\sqrt{-1}\widehat{\theta^{\mathfrak{p}}}(e_i)\rangle\big|^2>0. \tag{6.25}$$

令 $S\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$的对称代数，它可以视为 $\mathfrak{g}$上的常系数实微分算子代数，并将 $\overline{S}_{\mathfrak{g}}$ 其形式$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$完备化。令 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 为 $\theta^{\mathfrak{p}}$ 在 $TX$上的限制。对于 $t\geqslant 0$，回顾一下， $\sigma_t$ 是 $\Lambda(T^*M)\widehat{\otimes}\Lambda(\widehat{T^*X})\otimes S\mathfrak{g}_r$中由 (0.8) 给出的截面。

现在我们陈述并证明本节的主要结果。

定理 6.4。 渐近挠率 (5.8) 的前两项由下式给出

$$\begin{aligned} p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p}) &= W_0^{L,\xi}+p^{-1}W_1^{L,\xi}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big) \\ &=\sqrt{2\pi i}\varphi\int_0^{+\infty}\int^{\widehat{B}}\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\widehat{\theta^{\mathfrak{p}}}}{2}\exp(-\sigma_t)R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}(0)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

它也可以正式地写成如下形式：

$$W_0^{L,\xi}+p^{-1}W_1^{L,\xi}=W_0^{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.27}$$

证明。我们先更详细地解释（6.26）。注意，$\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\theta^{\mathfrak{p}}}{2}\exp(-\sigma_t)$ 是 $\Lambda(\widehat{T^*X})\,\widehat{\otimes}\Lambda(T^*M)\otimes\overline{S}\mathfrak{g}_r$ 的一个光滑截面，它自然作用于 $R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}(\cdot)$；后者是 $0\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 附近的一个函数（更多细节请参见 [9, §1.4] ）。当在 $0\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 处取值时，$\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\theta^{\mathfrak{p}}}{2}\exp(-\sigma_t)R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}(0)$ 是 $\Lambda(\widehat{T^*X})\,\widehat{\otimes}\Lambda(T^*M)$ 的一个光滑截面。

现在我们回到对（6.26）的证明。将（6.23）和（6.24）代入（5.37），再由（5.40）和（6.17），得到

$$d_0(t)+p^{-1}d_1(t)=\int^{\widehat{B}}\sqrt{t}\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\widehat{\theta^{\mathfrak{p}}}}{2}\exp(-\sigma_t)R_{L\otimes\xi^{\frac{1}{p}}\otimes(\det TN)^{\frac{1}{2p}}}(0)+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big),\tag{6.28}$$

由此得到（6.26）以及（5.38）。 □

6.6. 余伴随轨道的一个特殊情形。现在讨论定理6.4的一个特殊情形，其中 $N$ 由一个余伴随轨道给出。

§6.1 中给出的紧致连通李群 $U$，其李代数为 $\mathfrak{u}$。对于 $\lambda\in\mathfrak{u}^*$，记 $\mathcal{O}_\lambda=U\cdot\lambda$ 为余伴随作用的轨道，并赋予其自然的辛形式 $\omega_\lambda$：对于 $A,\ B\in\mathfrak{u}$ 且 $f\in\mathcal{O}_\lambda$，

$$\omega_\lambda(A^{\mathcal{O}_\mu},B^{\mathcal{O}_\mu})_f=\frac{1}{2\pi}\langle f,[A,B]\rangle,\tag{6.29}$$

那么相应的动量映射 $\mu_\lambda$ 验证了 $2\pi\mu_\lambda$ 是包含映射

$$2\pi\mu_\lambda\colon\mathcal{O}_\lambda\hookrightarrow\mathfrak{u}^*.\tag{6.30}$$

与（6.15）类似，对于 $A\in\mathfrak{u}$，令

$$R_\lambda(A)=\int_{\mathcal{O}_\lambda}\exp\big(2\pi i\langle\mu_\lambda,A\rangle+\omega_\lambda\big).\tag{6.31}$$

我们固定 $U$ 的一个极大环面 $T$，其李代数为 $\mathfrak{t}$。注意，如果 $\lambda\in\mathfrak{u}^*$ 是正则的，则有 $\mathcal{O}_\lambda\cong U/T$。整数格 $\Lambda\subset\mathfrak{t}$ 定义为指数映射 $\exp\colon\mathfrak{t}\to T$ 的核，而实权格 $\Lambda^*\subset\mathfrak{t}^*$ 定义为 $\Lambda^*=\mathrm{Hom}(\Lambda,2\pi\mathbb{Z})$。我们固定一组正根 $\Phi^+\subset\Lambda^*$、一个正的开 Weyl 室 $\mathcal{C}^+$ 及其闭包 $\overline{\mathcal{C}^+}$。根据 Weyl 特征标公式，$U$ 的有限维不可约表示由 $\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$ 参数化。

令 $\mathfrak{r}=[\mathfrak{t},\mathfrak{u}]$，则有 $\mathfrak{u}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{r}$，且 $\mathfrak{u}^*=\mathfrak{t}^*\oplus\mathfrak{r}^*$。因此，我们将 $\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$ 视为 $\mathfrak{u}^*$ 的一个子集。对于 $\lambda\in\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$，令 $V_\lambda$ 为 $U$ 中最高权为 $\lambda$ 的唯一有限维不可约表示。

若 $\lambda\in\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$，令 $(L_\lambda,g^{L_\lambda})$ 为 $\mathcal{O}_\lambda$ with $c_1(L_\lambda,g^{L_\lambda})=\omega_\lambda$ 上的典范预量子线丛。根据博雷尔-外尔-博特定理 [4, 定理 8.8]，，我们有一个同构 $H^{(0,0)}(\mathcal{O}_\lambda,L_\lambda)\cong V_\lambda$。

对于$\lambda\in\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$ 和 $\tau\in\Lambda^*$，在定理6.4 中，我们取

$$(N,L,\xi,H^{(0,0)}(N,L^p\otimes\xi),F_p)=(U/T,L_\lambda,L_\tau,V_{p\lambda+\tau},P_G\times_G V_{p\lambda+\tau}).\tag{6.32}$$

令 $\varrho_{\mathfrak{u}}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$，则 $\det T(U/T)\cong L_{2\varrho_{\mathfrak{u}}}$。因此，由（6.17）和（6.31）可得

$$p^{-n}\mathrm{Tr}^{V_{p\lambda+\tau}}\big[e^{\frac{A}{p}}\big]=R_{\lambda+p^{-1}(\varrho_{\mathfrak{u}}+\tau)}(A)+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big).\tag{6.33}$$

注意，我们也可以由基里洛夫特征标公式（6.33）推出 [4, 定理 8。4]：对于任意 $A\in\mathfrak{u}$，令 $\mathrm{ad}(A)$ 为 $\mathfrak{u}$ 的态射，定义为 $\mathrm{ad}(A)B=[A,B]$，则

$$\mathrm{Tr}^{V_\lambda}\left[e^{A}\right]=j^{-\frac{1}{2}}(A)R_{\lambda+\varrho_{\mathfrak{u}}}(A),\quad \text{for } j(A)=\det\Big(\frac{\sinh(\mathrm{ad}(A)/2)}{\mathrm{ad}(A)/2}\Big). \tag{6.34}$$

由于 $\mathrm{ad}(A)$ 是反对称的，$j^{-\frac{1}{2}}(\cdot)$ 是 $A\in\mathfrak{u}$的偶函数，并且 $j^{-\frac{1}{2}}(0)=1$，因此有 $j^{-\frac{1}{2}}(A/p)=1+\mathcal{O}(p^{-2})$。然后由（6.31）和（6.34），我们恢复得到（6.33）：

$$p^{-n}\mathrm{Tr}^{V_{p\lambda+\tau}}\left[e^{\frac{A}{p}}\right]=p^{-n}\big(1+\mathcal{O}(p^{-2})\big)R_{p\lambda+\tau+\varrho_{\mathfrak{u}}}\Big(\frac{A}{p}\Big)=R_{\lambda+p^{-1}(\varrho_{\mathfrak{u}}+\tau)}(A)+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.35}$$

由（6.25）和（6.30），$\theta^{\mathfrak{p}}$ 关于 $\lambda$ 是非退化的，当且仅当对于 $u\in U$，

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\langle u\cdot 2\pi\lambda,\sqrt{-1}\widehat{\theta^{\mathfrak{p}}}(e_i)\rangle\right|^2>0, \tag{6.36}$$

并且当（6.36）成立时，我们令

$$W^{\lambda}=\sqrt{2\pi i}\varphi\int_0^{+\infty}\int^{\widehat{B}}\frac{\theta^{\mathfrak{p}}\wedge\widehat{\theta^{\mathfrak{p}}}}{2}\exp(-\sigma_t)R_\lambda(0)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{6.37}$$

那么我们有 根据（6.33）可得以下推论，正如由（6.27）可得（6.17）一样：

推论 6。 5. 若 $\theta^{\mathfrak{g}}$ 关于 $\lambda\in\Lambda^*\cap\overline{\mathcal{C}^+}$ 和 $\tau\in\Lambda^*$是非退化的，则有

$$p^{-n-1}\psi_{1/\sqrt{p}}\mathcal{T}(T^HM,g^{TX},\nabla^{F_p},g^{F_p})=\int_X W^{\lambda+p^{-1}(\varrho_{\mathfrak{u}}+\tau)}+\mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.38}$$

6.7. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 $W_1$。本小节主要沿用 [9, § 8.7]。现在假设 $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。Cartan对合为 $\Theta$: $g\to(g^*)^{-1}$，于是 $K=\mathrm{SU}(2)$。注意，$U=\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ 是 $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的紧实形式，其中 $K=\mathrm{SU}(2)$ 通过对角嵌入嵌入。

$\mathrm{SU}(2)$ 中的极大环面 $T=S^1$ 是单参数群 $\exp(2\pi t\boldsymbol{k})$ $t\in S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，其中 $\boldsymbol{k}$ 是 $\mathfrak{t}$ 的李代数的生成元，而 $2\pi\boldsymbol{k}$ 是 $T$ 中的余根。于是

$$\Phi^+=\Big\{\frac{\boldsymbol{k}}{\pi}\Big\},\qquad \varrho_{\mathfrak{u}}=\frac{\boldsymbol{k}}{2\pi}, \tag{6.39}$$

而支配权的集合就是由 $\mathbb{N}/2\pi\cdot\boldsymbol{k}$ 给出的。

对于 $a\in\mathbb{N}$，$\mathrm{SU}(2)$ 的 $a\boldsymbol{k}/2\pi\in\mathfrak{t}^*$ 余伴随轨道 $N_a$ 可识别为 $a=0$ 上的一个点，且 $a>0$ 上有 $\mathbb{CP}^1$。轨道 $\mathcal{O}_a$ 带有一个典范线丛 $L_a$。

对于 $a$，$b\neq 0$，令 $\mathcal{O}_{a,\,b}=\mathcal{O}_a\times\overline{\mathcal{O}}_b$。令 $q_1$、$q_2$ 为从 $\mathcal{O}_{a,\,b}$ 到 $\mathcal{O}_a$ 和 $\overline{\mathcal{O}}_b$ 的显然投影。对于 $a$，$b\in\mathbb{N}$，设 $L_{a,\,b}=q_1^*L_a\times q_2^*\overline{L}_b$。那么 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 通过映射 $(z,z')\to(gz,(\Theta g)z')$ 作用于 $\mathcal{O}_{a,\,b}$，且 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的作用可提升到 $L_{a,\,b}$。此外，

$$H^{(0,0)}(\mathcal{O}_{a,b},L_{a,b})\cong\mathrm{Sym}^a\mathbb{C}^2\otimes\mathrm{Sym}^b\overline{\mathbb{C}}^2, \tag{6.40}$$

其中 $\mathbb{C}^2$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的典范表示，$\overline{\mathbb{C}}^2$ 是其复共轭表示，而 $\mathrm{Sym}^k$ 表示 $k$ 次对称幂。

现在我们说明与前几节相关的记号变更。注意，$G/K=\mathbb{H}^3$是截面曲率恒为 $-4$ 的双曲空间。令 $\Gamma$ 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的无挠离散余紧子群。那么 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 是一个紧致的三维双曲流形。对于 $a$、$b\in\mathbb{N}^*$、$a'$、$b'\in\mathbb{Z}$，其中 $a\neq b$，我们定义

$$(S,X,P_G,P_K,N,L,\xi)=(\{\mathrm{pt}\},\Gamma\backslash\mathbb{H}^3,\Gamma\backslash(\mathbb{H}^3\times G),\Gamma\backslash G/K,\mathcal{O}_{a,b},L_{a,b},L_{a',b'}). \tag{6.41}$$

与（6.22）中一样，我们有

$$F_p = \Gamma\backslash G \times_K H^{(0,0)}(N, L^p \otimes \xi) \cong \Gamma\backslash G \times_K \left(\mathrm{Sym}^{ap+a'}\mathbb{C}^2 \otimes \mathrm{Sym}^{bp+b'}\overline{\mathbb{C}}^2\right), \tag{6.42}$$

那么我们可以在推论 6.5的设定下进行讨论。

命题 6.6。 退化条件 (6.36) 等价于 $a \in \mathbb{N}^*, b = 0$ 或$a, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$，并且我们有

$$W_0^{L_{a,0}} = \frac{2}{\pi}a^2, \qquad W_0^{L_{a,b}} = \begin{cases} \frac{2}{3\pi}(3a^2b - b^3), & a > b, \\ \frac{2}{3\pi}(3ab^2 - a^3), & a < b. \end{cases} \tag{6.43}$$

(6.43) 中的第一个等式是 M¨uller [34,定理 1。1]和 Bismut-Ma-Zhang [9, 定理 8。1] 给出的主要结果，后者还给出了 (6.43) 中的两个等式。注意，在[34], 中， $\mathbb{H}^3$ 的曲率是 $-1$ ，而不是 $-4$。

对于 $a \in \mathbb{N}^*, a' \in \mathbb{Z}, b = b' = 0$ 或 $a, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b, a', b' \in \mathbb{Z}$， 令

$$\begin{aligned} W_1^{L_{a,0},L_{a',0}} &= \frac{4}{\pi}a(a'+1), \\ W_1^{L_{a,b},L_{a',b'}} &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\big((a^2-b^2)(b'+1) + 2ab(a'+1)\big), & a > b, \\ \frac{2}{\pi}\big((b^2-a^2)(a'+1) + 2ab(b'+1)\big), & a < b. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.44}$$

定理 6.7. 对于 $a, b \in \mathbb{N}^*, a', b' \in \mathbb{Z}, a \neq b$， 当 $p \to +\infty$ 时，我们有

$$p^{-3}\mathcal{T}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, F_p) = \big(W_0^{L_{a,b},L_{a',b'}} + p^{-1}W_1^{L_{a,b},L_{a',b'}}\big)\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3) + \mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.45}$$

对于 $a \in \mathbb{N}^*, a' \in \mathbb{Z}, b, b' = 0$， 当 $p \to +\infty$ 时，

$$p^{-2}\mathcal{T}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, F_p) = \big(W_0^{L_{a,0},L_{a',0}} + p^{-1}W_1^{L_{a,0},L_{a',0}}\big)\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3) + \mathcal{O}\big(p^{-2}\big). \tag{6.46}$$

证明。 由（6.43），我们得到（6.44）中的一阶展开。由推论 6.5 和（6.39），我们将 $a$， $b$替换为 $a + p^{-1}(1 + a')$ $b + p^{-1}(1 + b')$ 中的 $W^{L_{a,\,0}\,0}$和 $W^{L_{a}{}_{,\,0}\;\;{}_{b}}$并计算 $p^{-1}$的系数，随后得到展开式（6.44）中的二阶项。 □

注 6.8. 由定理 5.2，我们看到 $\mathcal{T}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, F_p) - \mathcal{T}_{L^2}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, F_p) = \mathcal{O}(e^{-cp})$ 。根据[3, 第 423 页，例 (3)], 若 $F = \mathrm{Sym}^a\mathbb{C}^2 \otimes \mathrm{Sym}^b\overline{\mathbb{C}}^2$， 则有

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{T}_{L^2}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3, F)}{\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3)} = \frac{1}{6\pi}\big\{&(a+b+2)^3 - |a-b|^3 \\ &+ 3(a+b+2)\,|a-b|\,(a+b+2-|a-b|)\big\}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

在$a, b$)中将其替换为 $(ap + a', 0)$ 或 $(ap + a', bp + b')$后， 6.47) 即可恢复定理 6.7。

## References

[1] S. Azzali、S. Goette 和 T. Schick，族的大时间极限与局部 $L^2$-指标定理，J. Noncommut. Geom. 9 (2015)，第 2 期，621–664。[2] F. A. Berezin，量子化，Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974)，1116–1175。[3] N. Bergeron 和 A. Venkatesh，算术群挠同调的渐近增长，J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013)，第 2 期，391–447。[4] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne，热核与狄拉克算子，Grundlehren Text Editions，Springer-Verlag，柏林，2004，1992 年原版的订正重印本。[5] J.-M. Bismut，狄拉克算子族的 Atiyah-Singer 指数定理：两个热方程证明，Invent. Math. 83 (1986)，第 1 期，91–151。

[6] J.-M. Bismut 和 G. Lebeau，复浸入与 Quillen 度量，Inst. Hautes ´Études Sci. Publ. Math. (1991)，第 74 期，ii+298 页。（1992）。[7] J.-M. Bismut 和 J. Lott，平坦向量丛、直接像与高阶实解析挠率，J. Amer. Math. Soc. 8 (1995)，第 2 期，291–363。[8] J.-M. Bismut、X. Ma 和 W. Zhang，托普利兹算子与渐近解析挠率，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011)，第 17–18 期，977–981。´J.-M. Bismut、X. Ma 和 W. Zhang，渐近挠率与 Toeplitz 算子，J. Inst. Math. Jussieu 16 (2017)，第 2 期，223–349。[9] J.-M. Bismut 和 [10] E. Vasserot，正线丛高次幂所对应的 Ray-Singer 解析挠率的渐近行为，Comm. Math. Phys. 125 (1989)，第 2 期，355–367。´J.-M. Bismut 和 [11] E. Vasserot，正向量丛对称幂的 Ray-Singer 解析挠率的渐近行为，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990)，第 4 期，835–848（1991）。´J.-M. Bismut 和 W. Zhang，Cheeger 和 M[12] uller 定理的推广，Ast ¨érisque (1992)，第 205 期，附有 Fran´çois Laudenbach 的附录。¸M. Bordemann、E. Meinrenken 和 M. Schlichenmaier，K[13] ähler 流形的 Toeplitz 量子化与 gl(¨)，$N$极限，Comm. Math. Phys. 165 (1994)，第 2 期，281–296。$N \to \infty$ A. Borel 和 N. Wallach，《连续上同调、离散子群与约化群表示》，《数学调查与专著》丛书第 67 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第 2 版，2000。[14] L. Boutet de Monvel 和 V. Guillemin，《Toeplitz 算子的谱理论》，《数学年刊研究》第 99 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1981。[15] J. Cheeger，解析挠率与热方程，Ann. of Math. (2) 109 (1979)，第 2 期，259–322。[16] X. Dai、K. Liu 和 X. Ma，关于 Bergman 核的渐近展开，J. Differential Geom. 72 (2006)，第 1 期，1–41。[17] S. Finski，关于解析挠率的完整渐近性，J. Funct. Anal. 275 (2018)，第 12 期，3457–3503。[18] ¨¨W. Franz，关于覆盖的挠率，J. Reine Angew. Math. 173 (1935)，245–254。[19] E. Getzler，局部 Atiyah-Singer 指数定理的简短证明，《拓扑学》25 (1986)，第 1 期，111–117。[20] H. Gillet 和 C. Soul[21] e，算术 Riemann-Roch 定理，Invent. Math. 110 (1992)，第 3 期，473–543。´B. Liu，紧致局部对称轨形上解析挠率完整渐近性的研究，即将在 Anal. PDE 发表。[22] B. Liu，紧致局部对称空间上的渐近等变实解析挠率，J. Funct. Anal. 281 (2021)，第 7 期，论文编号 109117，共 54 页。[23] J. Lott，覆盖空间上的热核与拓扑不变量，J. Differential Geom. 35 (1992)，第 2 期，471–510。[24] X. Ma 和 G. Marinescu，全纯 Morse 不等式与 Bergman 核，《数学进展》第 254 卷，Birkh[25] äuser Verlag，巴塞尔，2007。¨X. Ma 和 G. Marinescu，辛流形上的 Toeplitz 算子，J. Geom. Anal. 18 (2008)，第 2 期，565–611。[26] X. Ma 和 G. Marinescu，K[27] ähler 流形上的 Berezin-Toeplitz 量子化，J. Reine Angew. Math. 662 (2012)，1–56。¨X. Ma 和 W. Zhang，超联络与族 Bergman 核，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 344 (2007)，第 1 期，41–44。[28] X. Ma 和 W. Zhang，Bergman 核与辛约化，Ast[29] érisque (2008)，第 318 期，viii´。+154X. Ma 和 W. Zhang，超联络与族 Bergman 核，Math. Ann. (2022)。[30] V. Mathai，[31] -解析挠率，J. Funct. Anal. 107 (1992)，第 2 期，369–386。$L^2$W. M[32] üller，黎曼流形的解析挠率与 ¨-挠率，Adv. in Math. 28 (1978)，第 3 期，233–305。$R$W. M[33] üller，幺模表示的解析挠率与 ¨-挠率，J. Amer. Math. Soc. 6 (1993)，第 3 期，721–753。

[34] W. M¨uller，双曲三维流形上 Ray-Singer 解析挠率的渐近行为，度量与微分几何，Progr. Math.，第 297 卷，Birkh¨auser/Springer，巴塞尔，2012 年，第 317–352 页。[35] W. M¨uller 和 J. Pfaff，紧致局部对称流形上的解析挠率与 $L^2$-挠率，J. Differential Geom. 95 (2013)，第 1 期，71–119。[36] M. Puchol，全纯挠率形式的渐近行为，即将在 J. London Math. Soc. 发表。[37] D. Quillen，超联络与陈特征，《拓扑学》24 (1985)，第 1 期，89–95。[38] D. B. Ray 和 I. M. Singer，黎曼流形上的 $R$-挠率与拉普拉斯算子，Advances in Math. 7 (1971)，145–210。[39] K. Reidemeister，同伦环与透镜空间，Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935)，第 1 期，102–109。[40] N. Savale. η 不变量的渐近行为. Comm. Math. Phys., 332(2):847–884,2014.[41] N. Savale. 磁 Dirac 算子的 Gutzwiller 型迹公式. Geom. Funct. Anal., 28(5):1420–1486, 2018.[42]M. Schlichenmaier，通过 Berezin-Toeplitz 量子化对紧致 K ¨ahler 流形进行变形量子化，Conf´ erence Mosh´e Flato 1999, Vol. II (第戎), Math. Phys. Stud., 第 22 卷, Kluwer Acad. Publ., 多德雷赫特, 2000, 第 289–306 页。