arXiv:2301.04044v1 [math.FA] 10 Jan 2023

¨紧李群上 Hörmander 类的 Schatten–von Neumann 性质

´DUVAN CARDONA、MARIANNA CHATZAKOU、MICHAEL RUZHANSKY 和 JOACHIM TOFT

Abstract. 设 G 是一个维数为 n. 的紧李群。本文刻画了定义在 G 上的经典伪微分算子属于迹类理想 $S_1(L^2(G))${style id='8'>，以及 Schatten 理想 $S_r(L^2(G))${style id='13'>，的条件，其中 $r>0$. 取任意值。特别地，我们推导出 (ρ{style id='17'>， δ) 型椭圆伪微分算子的 Schatten 类刻画，适用于较大的参数范围 $0\leq\delta<\rho\leq 1$. 。此外，我们还用算子的矩阵值符号^给出充要条件；这些符号是相空间 $G\times G$ 上的全局函数{style id='23'>，其中^动量变量属于 G 的酉对偶 G 。对于环面 $\mathbb{T}^n$ 上的参数 (ρ{style id='29'>， δ{style id='32'>，我们展示了结果的锐利性：存在属于奇异类 $\Psi^{\overline{\varkappa}}_{0\,0}${style id='38'>，($\mathbb{T}^n$) $\varkappa>0${style id='42'>，且同时属于所有 Schatten 理想的非典型算子。我们还在经典伪微分算子的框架下给出了额外的阶判据，并提出了一些尚待解决的问题。

Contents

1. 引言 21.1. 内容概要 21.2. 历史背景 21.3. 奇异例子与主要结果 31.4. 未解决问题 61.5. 手稿结构 62. 预备知识 72. 紧李群上的傅里叶分析 72.2. 量子化公式 82.3. 紧李群上的整体 H¨ormander 类 103. Schatten 性质 123.1. 算子的 Schatten 性质：有限正则性符号 123.2. 椭圆算子的 Schatten 性质。（ρ， δ）情形 163.3. 非椭圆算子的 Schatten 性质：经典符号 193.4. Schatten 类中的经典算子及其主符号 28

2020 数学主题分类。35S30, 42B20；次级分类 42B37, 42B35。关键词与短语。Schatten–von Neumann类、H¨ormander类、紧李群、全局符号。作者获得了以下资助：FWO Odysseus 1资助 G.0H94.18N：分析与偏微分方程；根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem计划（资助编号 01M01021）；以及 dyCon项目 2015 H2020-694126。Marianna Chatzakou 还获得 FWO博士后奖学金（编号 12B1223N）资助。Michael Ruzhansky 还获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/R003025/2。

3.5. 经典算子的阶与整体符号的阶参考文献 28
31

1. Introduction

1.1. 概述。 设 M 是一个无边界的可定向紧流形，其体积元为 $\mathrm{d}x$，并考虑希尔伯特空间 $L^2(M) = L^2(M, \mathrm{d}x)$。对于任意 $m \in \mathbb{R}$ 以及 $0 \leq \delta < \rho \leq 1$，令 $\Psi^m_{\rho,\delta}(M)$ 表示定义在 $C^\infty(M)$ 上、在局部坐标中具有如下形式的连续线性算子 H¨ormander 类

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y,\theta)}a(x,\theta)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta, \tag{1.1}$$

并由满足以下估计的符号 $a := a(x, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 定义

$$|\partial^\beta_x\partial^\alpha_\xi a(x,\theta)| \lesssim_{\alpha,\beta,K} (1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{1.2}$$

在紧子集 x 上一致 众所周知，如果 $\Psi^m_{\rho,\delta}(M$，则该类在坐标变换下保持不变 $\rho > 1-\delta$.另一方面，当 M具有与其微分结构相容的群结构时，也就是说，当 $M = G$是一个紧李群时， [39, 41] 引入了整体符号的概念，从而构造出新的伪微分算子类 $\Psi^m_{\rho,\delta}(G)$，即使在$0 \leq \rho \leq 1-\delta$，时亦然，并为 $\rho > 1-\delta$. 的情形下 H¨ormander 类提供了一种新的描述。本文研究保证紧李群上的 H¨ormander 类包含于 Schatten–von Neumann类 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$的充要条件，具体而言，我们将探讨实现这种包含关系的尖锐条件

$$\Psi^m_{\rho,\delta}(G) \subseteq \mathscr{S}_r(L^2(G)). \tag{1.3}$$

我们回顾一下，对于任意 $r > 0$，若紧算子 $T: L^2(G) \to L^2(G)$ 的奇异值序列 $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$（由算子 $\sqrt{T^*T}$ 的特征值构成）属于 $\ell^r(\mathbb{N})$，则该算子属于 Schatten–von Neumann理想 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$，也就是说，若 $\sum_{n=1}^\infty s_n(T)^r < \infty$.

1.2. 历史方面。众所周知，阶为 $m \in \mathbb{R}$ 的椭圆伪微分算子 $A \in \Psi^m_{1,0}(M)$ 属于理想 $S_r(L^2(M))$ $r > 0$，当且仅当 $m < -n/r$. 。去掉椭圆性条件后，寻找阶判据以判定伪微分算子是否属于理想 $S_r(L^2(M))$，仍是一个悬而未决的问题。不过，文献中若考虑对符号属于 H¨ormander 类 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$、Beals–Fefferman类 $S^{M_1}_{M_2,\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$ 或 H¨ormander 类 $S(m,g)$ 的伪微分算子进行分类，判断它们是否属于 Schatten–von Neumann类 $\mathscr{S}_r(L^2(\mathbb{R}^n))$，这一课题就显得更为经典。事实上，在 [34],H¨ormander 指出，椭圆伪微分算子 $A = \mathrm{Op}^w(a)$ 的特征值分布（进而其 Schatten性质）由符号 a. 的等值集所编码。事实上，他证明了谱公式

$$N(\lambda) \sim \int_{a(x,\xi)<\lambda} \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi,$$

对任意 $\lambda > 0$. 此处， $N(\lambda) = \#\{j : |\lambda_j| \leq \lambda\}$ 表示算子 A. 的谱函数。此类结果最早可追溯至 H. Weyl 对二阶微分算子的研究，以及 R. Courant 的工作（参见 [34, 第 297]页）。随后，在 [34], H¨ormander 的定理3.9中，他证明了以下充分条件

$$m \in L^1(\mathbb{R}^{2n}),\, a \in S(m,g) \Longrightarrow \mathrm{Op}^w(a) \in \mathscr{S}_1(L^2(\mathbb{R}^n)), \tag{1.4}$$

度量 g 和权函数 m 满足适当条件。在 [35],H¨ormander 还刻画了符号属于 $S($ $m,$ $g)$ 的 Weyl 算子的 L^2 连续性

$$\{\mathrm{Op}^w(a) : a \in S(m,g)\} \subseteq \mathscr{S}_\infty(L^2(\mathbb{R}^n)) \iff m \in L^\infty. \tag{1.5}$$

通过对 m 和 g添加一些额外条件，Buzano 和 Nicola 在 [1],将（1.5）推广为

$$\{\mathrm{Op}^w(a) : a \in S(m,g)\} \subseteq \mathscr{S}_p(L^2(\mathbb{R}^n)) \iff m \in L^p, \tag{1.6}$$

对每个 $p \in [1,\infty]$。在 [47], 中证明了，即使不对1.5中的 m 和 g 作出额外假设，（ [1]）仍然成立。

在 [3] Schatten刻画中

$$\mathrm{Op}^w(a) \in \mathscr{S}_p(L^2(\mathbb{R}^n)) \iff a \in L^p, \tag{1.7}$$

所提供的 $a \in S(m,$ $g)$ 且 $h_g^N m \in L^p$ 对某个 $N \geq 0$成立。这里 $h_g \leq 1$ 是普朗克函数。关于 $\mathbb{R}^n$上伪微分算子的更多 Schatten 性质，参见例如 [18,33,37,45,46,48,51] ；关于紧流形上的 Schatten 性质，请读者参阅以下文献 [5–11，13–15，19–31]。

1.3. **奇异例子与主要结果**。另一方面，对于紧李群上的非椭圆算子，形如（1.6）的充要条件仍是一个悬而未决的问题；经典伪微分算子（具有多齐次符号的算子）以及现代的（$\rho,$ δ）类在 G上的情形亦然（参见 [39]），其范围涵盖 $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. 尽管当 $0 \leq \rho < \delta \leq 1$时，正如我们将要证明的，阶条件 $m < -n/r$ 确保椭圆算子属于类 $\mathscr{S}_r$（L^2（G））是一个尖锐判据，但若考虑临界情形，情况便会发生巨大变化。事实上，对于 任意维数的环面 $G = \mathbb{T}^n$， n 我们发现了以下极为反常的情形：

•对于任意 $\varkappa > 0$，都存在一个属于奇异类 $\Psi^{-\varkappa}_{0\,0,}(\mathbb{T}^n) \backslash \Psi^{-\varkappa-\varepsilon}_{0\,0,}(\mathbb{T}^n)$ 的非椭圆伪微分算子 A ，对所有 $\varepsilon > 0$，它都属于所有 ***Schatten*** 理想$\mathscr{S}_r(L^2(\mathbb{T}^n))$，其中 $0 < r < \infty$.

我们将在后文以定理 3.12 的形式给出这一结论。这里我们指出，在紧李群 G 上，类 $\Psi^m_{0,\,0}(G)$ 在偏微分方程中具有重要意义，可用于计算实向量场 $X + c$ 的逆；其中常数项 c 属于例外集 $\mathscr{C} \subseteq i\mathbb{R}$。有关详情，请参阅 [43, 第 627] 页。

现在，我们将讨论主要结果，并提出一些与（1.3）中的包含关系相关的猜想；这正是本手稿的核心问题。接下来，我们先固定记号，并引入由第三位作者和 Turunen 提出的（完整／全局）矩阵值符号的概念

在 [39]中。原因之一是，我们将用这类矩阵值符号来表述判据。

考虑紧李群 G 的酉对偶，它由所有连续、酉且不可约表示ξ 的等价类 $[\xi]$ 构成：$G \mapsto \mathbf{U}(\mathbb{C}^{\ell})$，并令 $\ell = d_{\xi}$ 表示表示空间的维数。对于 $C^{\infty}(G)$ 上的任意连续线性算子，以及由此对于任意属于类 $\Psi^{m}_{\rho,\,\delta}(G) := \Psi^{m}_{\rho,\,\delta}(G\times G)$ $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$， 的伪微分算子 A，都可以关联一个矩阵值整体符号

$$a : G \times \widehat{G} \to \bigcup_{[\xi]\in\widehat{G}} \mathbb{C}^{d_{\xi}\times d_{\xi}},\ (x,[\xi]) \mapsto a(x,[\xi]) \in \mathbb{C}^{d_{\xi}\times d_{\xi}},$$

从而得到整体量子化公式

$$Af(x) = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \int_{G} d_{\xi} \mathrm{Tr}[\xi(y^{-1}x)a(x,\xi)]f(y)\mathrm{d}y,\ \forall f \in C^{\infty}(G),\, \forall x \in G. \tag{1.8}$$

如何根据矩阵值符号$a := a(x,\ [\xi])$ 来寻找判据，以确保伪微分算子 A 属于 Schatten 类 $\mathscr{S}_{r}(L^{2}(G))$，一直是近十年来数学研究的热点，参见例如 [5–11，13–15，19–31]。作为对上述文献的补充，本文的主要结果可概括为下文的定理 1.1、1.2和 1.3 ，其中将使用以下记号。

- 我们用 $\mathfrak{g}$ 表示紧李群 $G.$ 的李代数。映射$B(X,\ Y) = -\mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)]$, $X,\ Y \in \mathfrak{g}$，是 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型，并用 $||X||_{g} := \sqrt{-B(X,\ X)}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上与 $-B$.[1] 相对应的范数
- 我们用 $\mathcal{L}_{G}$ 表示 G 上的正 Laplace–Beltrami算子，在 $\mathfrak{g}^{*} \cong \mathfrak{g}$ 的识别下，$\eta \mapsto ||\eta||^{2}_{g},\ \ \eta \in \mathfrak{g}^{*}\setminus\{0\}$，表示其主符号。
- 族 $\mathscr{S}_{r}(L^{2}(G))$ $0 < r < \infty$，由紧李群 G 上的 Schatten–von Neumann理想构成，若 $0 < r < \infty$，且对于 $r = \infty$， $\mathscr{S}_{r}(L^{2}(G)) = \mathscr{B}(L^{2}(G))$ 表示 $L^{2}(G)$ 上所有有界线性算子的代数。
- 对于每个 $r \in (0,\infty)$，符号 $a(x,[\xi])$ 的 Schatten 范数由$\|a(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_{r}} = \mathrm{Tr}[|a(x,[\xi])|^{r}]^{\frac{1}{r}}$给出，其中 $|a(x,[\xi])| := \sqrt{a(x,[\xi])^{*}a(x,[\xi])}$ 是通过矩阵的函数演算定义的。注意， $\|a(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_{2}} = \|a(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}$ 是矩阵的标准 Hilbert–Schmidt范数。
- 对于任意 $1 \leq p_{1},p_{2} < \infty$, 空间 $L^{p_{1}}(G,\mathscr{S}_{p_{2}}(G))$ 由满足以下条件的符号$a := a(x,[\xi])$ 构成：

$$\|a(\cdot,\cdot)\|_{L^{p_{1}}(G,\mathscr{S}_{p_{2}}(\widehat{G}))} = \left(\int_{G} \|a(x,\cdot)\|^{p_{1}}_{\mathscr{S}_{p_{2}}(\widehat{G})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_{1}}} < \infty,$$

其中

$$\|a(x,\cdot)\|_{\mathscr{S}_{p_{2}}(\widehat{G})} = \left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_{\xi}\|a(x,[\xi])\|^{p_{2}}_{\mathscr{S}_{p_{2}}}\right)^{\frac{1}{p_{2}}}.$$

[1]由于 G 是紧李群，正 Killing 型 $-B$: $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, 是半正定的，即 $-B(X,X) > 0, \forall X \in \mathfrak{g}\setminus\{0\}$.

- 以 $\ell^p(G)$ 范数表示 ^

$$\|a(x,[\xi])\|_{\ell^p(\widehat{G})}=\left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi^{p\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|a(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty, \tag{1.9}$$

^对于任意 $1\le p_1,p_2<\infty$，空间 $L^{p_1}(G,\ell^{p_2}(G))$ 由满足以下条件的符号$a:=a(x,[\xi])$ 定义：

$$\|a(\cdot,\cdot)\|_{L^{p_1}(G,\ell^{p_2}(\widehat{G}))}=\left(\int_G\|a(x,\cdot)\|_{\ell^{p_2}(\widehat{G})}^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}}<\infty,$$

关于这两类空间之间的嵌入， [32] 请读者参阅相关文献。以下三个定理概述了我们的主要结果。我们首先刻画 Schatten 类中的椭圆算子。

定理 1.1 （一般符号）。设 G 是一个维数为 n 的紧李群，设 $m\in\mathbb{R}$、 $r>0$，且 $0\le\delta<\rho\le1.$ 。考虑椭圆伪微分^算子 $A\in\Psi^m_{\rho,\,\delta}(G\times G)$ 。以下条件等价：

（1） $m<0$ 且 A 属于阶为 $r>0$ 的 ***Schatten*** 类，也就是说 $A\in\mathscr{S}_r$（$L^2(G)$）；（2）阶为 m 的 ***Bessel*** 势属于阶为 $r>0$ 的 ***Schatten*** 类：$B_m:=(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{m}{2}}\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 。（3） $|A|^{\frac{r}{2}}$ 的矩阵值符号满足以下可和性条件

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\int_G\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}x<\infty; \tag{1.10}$$

(4) A的矩阵值符号满足以下可和性条件

$$\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^r\mathrm{d}x<\infty; \tag{1.11}$$

(5) $m<-n/r.$

^此外，若 $A\in\Psi^m_{\rho,\,\delta}(G\times G)$ 不是椭圆的，且 $m<-n/r$，则有$A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$。

As 对于紧李群上的经典算子，我们有如下结果 .

定理 1.2 (经典符号)。 设 G 是一个维数为 n 的紧李群，设 $m\in\mathbb{R}$、 $r>0$，且 $0\le\delta<\rho\le1.$ 。设 $A\in\Psi^m_{1,\,0}(G)$ 是一个阶为 m 的经典伪微分算子。

(6) 若 $r\in[1,\infty)\cap\mathbb{Z}$，则 $A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 当且仅当 $m<-n/r.$ 。对于 $r=\infty$，$A\in\mathscr{B}(L^2(G))$ 当且仅当 $m\le0.$(7) 若 $r\in(1,\ \infty)\setminus\mathbb{Z}$，且 $A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$，则 $m\le-n/r.$ 。此外，若 A 是椭圆的，则有严格不等式 $m<-n/r.$

此外，考虑 $\Psi^m_{cl}(G)$ 中阶为 $m.$ 、具有齐次符号的算子子类 $\Psi^m_0(G)$ 。那么以下条件等价：

(8) $\Psi^m_{cl}(G)\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$ $r\in(0,\infty]$;
(9) $\Psi^m_0(G)\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$ $r\in(0,\infty]$.

在下一个定理中，我们考虑有限正则性的条件。

定理 1.3 (低正则性符号)。 设 G 是一个维数为 $n.$ 的紧李群。假设对任意 $[\xi]$, 符号 $a(\cdot,[\xi])$ 均为 *Haar* 可测。那么：

(10) 假设某个符号 $a \in L^p(G,\ell^p(G))$ 满足某个 $1 < p < 2.$ 。那么，相应的伪微分算子满足 $A \in \mathscr{S}_{p'}(L^2(G))$，其中$p' = p/(p-1)$。

(11) 假设矩阵值符号 $a = a(x,[\xi])$ 满足正则性条件

$$\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))} = \int_G \|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})}\mathrm{d}x < \infty \tag{1.12}$$

其中 $N > n.$ 。那么，在 $1 \leq p < \infty.$ 的条件下， $A \in \mathscr{S}_p(L^2(G))$

1.4. 开放问题。 鉴于我们的方法引出了若干尚未解决的问题，并基于过去 10 年该领域的活跃研究，我们提出以下开放问题。

开放问题 1.4。 证明（或反驳）：若 $A \in \Psi^m_{\rho,\,\delta}(G \times \widehat{G})$ 是属于 Schatten 类$\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 的非椭圆伪微分算子，则 $m < -n/r.$

开放问题 1.5。 证明（或反驳）：对于 $r \in (1,\ \infty) \setminus \mathbb{Z}$，并且当 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$ 为非椭圆算子时，不等式 $m \leq -n/r$ 定理 1.2 中的（7）可以改进为严格阶估计 $m < -n/r.$

注 1.6。 我们注意到，定理 $\Longleftrightarrow$ 1.1 中的（3）由第三位作者和 J. Delgado 在 [28] 中证明。特别地，在 [22] 中，针对更一般的核算子概念，研究了算子的谱迹与核迹之间的关系以及 Grothendieck–Lidskii 型公式。关于利用矩阵值符号给出判据的进一步分析，也在紧李群和任意紧流形上进行了研究，见 [12, 22–31]。

1.5. 手稿的组织结构。 本文安排如下。

- 在第 2 节中，我们介绍本文所用的紧李群上的傅里叶分析基础，以及基于矩阵值符号的紧李群伪微分演算预备知识，相关内容由 [39]发展。

- 第3 节将用于证明我们的主要定理。具体而言：1. 定理 1.1 稍后将作为第 3.5 定理在第3.2小节中给出。2. 定理 1.2 中的（6）和（7）将在第3.11定理中证明，该定理位于第3.3小节。3. 定理 $\Longleftrightarrow$ 1.2 中的等价关系（8）和（9）将在第3.13命题中证明，该命题位于第3.4小节。4. 定理 1.3将在第3.1 小节中证明（分别参见定理 3.1 和定理3.3）。

- 最后，在第3.5 节中，我们证明，与经典伪微分算子类相关的矩阵值符号的阶可以判定其算子的阶。为证明这一点，我们采用了本文提出的方法来分析

Schatten 算子，即对其主符号在余球面上的平均值进行分析的方法（参见图1）。

2. Preliminaries

2.1. 紧李群的傅里叶分析。 设 dx为紧李群 G. 上的 Haar 测度。希尔伯特空间 $L^2(G) := L^2(G,\mathrm{d}x)$ 配备内积

$$(f,g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Peter-Weyl 定理给出了 $L^2(G)$关于李群 G的酉表示矩阵元的谱分解。为了陈述这一结果，我们将先介绍一些预备知识。

定义 2.1 (G的酉表示)。 G 在 $\mathbb{C}^\ell$ 上的连续酉表示是指任意连续映射 $\xi \in \mathrm{Hom}(G,\mathrm{U}(\ell))$， 其中 U($\ell$) 是由阶为 $\ell \times \ell$. 的酉矩阵组成的李群。整数 $\ell = d_\xi$ 称为表示的维数 ξ.

注记 2.2（不可约表示）。 回顾如下:

- 若子空间 $L \subseteq \mathbb{C}^{d_\xi}$ 满足对任意 $x \in G$， $\xi(x)(L) \subseteq L$，其中$\xi(x)(L) := \{\xi(x)v$ ，则称其为 ξ-不变子空间 $v \in L\}$.
- 如果表示 ξ 仅有 $L = \emptyset$和 $L = \mathbb{C}^{d_\xi}$，这两个平凡的不变子空间，则称其为不可约表示。

- 任意酉表示 ξ 都是酉不可约表示的直和。记作 $\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k$，其中 ξ_i，$1 \le i \le k$，是定义在各因子 $\mathbb{C}^{d_{\xi_i}}$ 上的不可约表示，这些因子将表示空间分解为

$$\mathbb{C}^{d_\xi} = \mathbb{C}^{d_{\xi_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_{\xi_k}}.$$

等价表示 这一概念使我们能够在酉表示族中定义等价关系。下面给出其定义。

定义 2.3（等价表示）。 两个酉表示

$$\xi \in \mathrm{Hom}(G,\mathrm{U}(d_\xi)) \text{ and } \eta \in \mathrm{Hom}(G,\mathrm{U}(d_\eta))$$

若存在一个线性映射 $S: \mathbb{C}^{d_\xi} \to \mathbb{C}^{d_\eta}$，使得对于任意 $x \in G$，$S\xi(x) = \eta(x)S$. 映射 S 称为 ξ 与 η之间的交织算子。 ξ 与 η 之间所有交织算子的集合记为 Hom(ξ,η)。

注记 2.4（舒尔引理，1905年）。 若 $\xi \in$Hom(G,U(d_ξ))不可约，则 Hom(ξ,ξ) $=\mathbb{C}I_{d_\xi}$ 由单位矩阵 I_{d_ξ} 的标量倍数构成，其阶为 d_ξ.

定义 2.5（酉对偶）。 定义在酉表示集合上的关系 $\sim$，记作 Rep(G)，其定义如下： $\xi \sim \eta$ 当且仅当 ξ 和 η 是等价表示，此关系是一个等价关系。商集

$$\widehat{G} := \mathrm{Rep}(G)/\sim$$

$\widehat{\ }$称为 G. 的酉对偶。由于 G 是紧李群， G 是一个离散集。

酉对偶编码了群上的全部傅里叶分析。傅里叶变换定义如下。

定义 2.6 (群傅里叶变换)。 如果 $\xi \in \mathrm{Rep}(G)$，傅里叶变换$\mathscr{F}_G$ 将任意 $f \in C^\infty(G)$ 对应到一个定义在 $\mathrm{Rep}(G)$ 上的矩阵值函数 $\mathscr{F}_G f$，如下所示

$$(\mathscr{F}_G f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int_G f(x)\xi(x)^* \mathrm{d}x,\ \xi \in \mathrm{Rep}(G).$$

注 2.7（紧李群上的傅里叶反演公式）。 离散$\widehat{\ }$施瓦茨空间 $\mathscr{S}(G) := \mathscr{F}_G(C^\infty(G))$ 是光滑函数类在傅里叶变换下的像。该算子可以酉延拓为从 $L^2(G)$ 到$\ell^2(\widehat{G})$， 其中

$$\ell^2(\widehat{G}) = \left\{\phi : \forall [\xi] \in \widehat{G},\, \phi(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi} \text{ and } \|\phi\|_{\ell^2(\widehat{G})} < \infty\right\}, \tag{2.1}$$

其中

$$\|\phi\|_{\ell^2(\widehat{G})} := \left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\phi(\xi)\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

范数 $\|\phi(\xi)\|_{\mathrm{HS}} = (\mathrm{Tr}(\phi(\xi)^*\phi(\xi)))^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵的标准 Hilbert–Schmidt 范数。傅里叶反演公式的形式如下

$$f(x) = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{f}(\xi)], \forall f \in L^1(G), \forall x \in G, \tag{2.2}$$

其中，求和的含义是：对于任意等价类 $[\xi]$，我们选取一个（任意一个）酉表示。

2.2. **量子化公式**。 设 $A : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ 是关于 $C^\infty(G)$ 上标准 Fr´echet 结构的连续线性算子。 可以将矩阵值函数 σ_A 与算子 A 关联起来，该函数定义在非$\widehat{\ }$交换相空间 $G \times G$ 上，从而用傅里叶反演公式和傅里叶变换来表示算子 A。这种表达式称为量子化公式。为引入该公式，我们需要以下定义。

定义 2.8 （算子的右卷积核）。 Schwartz 核定理为 A 关联一个核/分布 $K_A \in \mathscr{D}'(G \times G)$，使得

$$Af(x) = \int_G K_A(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\ f \in C^\infty(G).$$

通过 $R_A(x, xy^{-1}) := K_A(x,y)$ 定义的、提供卷积恒等式的分布

$$Af(x) = \int_G R_A(x, xy^{-1})f(y)\mathrm{d}y,\ f \in C^\infty(G),$$

称为 $A.$ 的右卷积核

注2.9（量子化公式）。现在，我们将为 $A.$ 关联一个整体符号σ_A：
$G\times\widehat{G} \to \cup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathbb{C}^{\ell\times\ell}$。事实上，根据恒等式 $Af(x) = (f * R_A(x,\ \cdot))(x)$，我们得到

$$\widehat{Af}(\xi) = \widehat{R}_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi).$$

于是我们有

$$Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{R}_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi)],\ f\in C^\infty(G). \tag{2.3}$$

^鉴于恒等式（2.3），对于任意等价类 $[\xi]\in G$，我们可以选取唯一一个不可约酉表示 $\xi_0\in[\xi]$，使得矩阵值函数

$$\sigma_A(x,[\xi])\equiv\sigma_A(x,\xi_0):=\widehat{R}_A(x,\xi_0),\ (x,[\xi])\in G\times\widehat{G}, \tag{2.4}$$

满足该条件。

$$Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi_0(x)\sigma_A(x,[\xi])\widehat{f}(\xi_0)],\ f\in C^\infty(G). \tag{2.5}$$

（2.5）中的表示与从任意等价类 $\xi_0\in\widehat{\ }\mathrm{Rep}(G)$中选取的表示 $[\xi]\in G.$ 无关。这是傅里叶反演公式的一个推论。因此，我们可以简写为

$$Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_A(x,[\xi])\widehat{f}(\xi)],\ \forall f\in C^\infty(G). \tag{2.6}$$

在下面的量子化定理中，我们将看到，分布 σ_A （2.6）^定义在 $G\times G$ 上是唯一的，并且可以用算子 A表示，参见 [39]中的定理 10.4.4 和 10.4.6。

定理 2.10。设 $A:\ C^\infty(G)\to C^\infty(G)$是一个连续线性算子。以下各陈述等价。

- 矩阵值分布 $\sigma_A(x,[\xi]):\ G\times\widehat{G}\to\cup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ 满足

$$\forall f\in C^\infty(G),\forall x\in G,\ Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_A(x,[\xi])\widehat{f}(\xi)]. \tag{2.7}$$

- 我们有 $\forall(x,[\xi])\in G\times G,\ \sigma_A(x,\xi)=\widehat{R_A(x,\xi)}$。
- 以下恒等式成立：$\forall(x,[\xi])\in G\times G,\ \widehat{\sigma_A(x,\xi)}=\xi(x)^*A\xi(x)$，其中$A\xi(x)$:$=[A\xi_{ij}(x)]_i^{d_\xi},\ _{j=1}$.

注 2.11。根据量子化公式（2.6）和（2.7），符号 σ_A 可以^视为定义在 $G\times G$ 上的映射，或视为定义在 $G\times\mathrm{Rep}(G)$ 上的映射，方法是将所有值 $\sigma_A(x,\xi)=\sigma_A(x,\xi')=\sigma(x,[\xi])$ 视为相同，当 $\xi',\xi\in[\xi].$

例 2.12（拉普拉斯算子的可测函数的符号）。设 $\mathbb{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是李代数 $\mathfrak{g}.$ 的标准正交基。G 上的正拉普拉斯算子是二阶微分算子

$$\mathcal{L}_G=-\sum_{j=1}^n X_j^2. \tag{2.8}$$

算子 $\mathcal{L}_G$ 与标准正交基 $\mathbb{X}$ 的选取无关， $\mathfrak{g}$，例如参见 [39]。算子 L^2-谱 $\mathcal{L}_G$ 是一个离散集合，可以按以下方式枚举

酉对偶 G 如下

$$\text{Spectrum}(\mathcal{L}_G) = \{\lambda_{[\xi]} : [\xi] \in \widehat{G}\}. \tag{2.9}$$

对于博雷尔函数 $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$，算子$f(\mathcal{L}_G)$（由谱演算定义）的右卷积核 $R_{f(\mathcal{L}_G)}$ 由以下恒等式确定

$$f(\mathcal{L}_G)\phi(x) = \phi * R_{f(\mathcal{L}_G)}(x),\ x \in G, \tag{2.10}$$

其中

$$\forall [\xi] \in \widehat{G},\ \widehat{R}_{f(\mathcal{L}_G)}([\xi]) = f(\lambda_{[\xi]})I_{d_\xi}. \tag{2.11}$$

于是，$f(\mathcal{L}_G)$ 的矩阵值符号可例如利用定理 2.10确定如下

$$\sigma_{f(\mathcal{L}_G)}(x,\xi) = \widehat{R}_{f(\mathcal{L}_G)}([\xi]). \tag{2.12}$$

由于算子 $f(\mathcal{L}_G)$ 是左不变的，符号 $\sigma_{f(\mathcal{L}_G)}(\xi) = \sigma_{f(\mathcal{L}_G)}(x,\ \xi)$ 不依赖于 $x \in G.$。对于在 G 上定义全局 *Hormander* 类而言，日式括号函数尤为重要

$$\langle t\rangle := (1+t)^{\frac{1}{2}},\ t \geq -1. \tag{2.13}$$

特别地，算子 $\langle \mathcal{L}_G\rangle = (1+\mathcal{L}_G)^{\frac{1}{2}}$ 的符号为

$$\sigma_{\langle \mathcal{L}_G\rangle}([\xi]) := \langle \xi\rangle I_{d_\xi},\ \langle \xi\rangle := \langle \lambda_{[\xi]}\rangle. \tag{2.14}$$

2.3. 紧李群上的全局 H¨ormander 类。 本节中，对于任意从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\|U\|_{\text{op}}$ 的线性映射 U，我们用 $\|U\|_{\text{op}}$ 表示标准算子范数

$$\|U\|_{\text{op}} = \|U\|_{\text{End}(\mathbb{C}^n)} := \sup_{l\neq 0} \|Ul\|_e/\|l\|_e,$$

其中 $\|l\|_e = (l_1^2 + \cdots + l_n^2)^{\frac{1}{2}}$是欧几里得范数。

为了在紧李群上引入 H¨ormander 类，我们必须度量符号的导数关于群变量的增长；为此，我们使用向量场 $X \in T(G)$。为了对离散变量 $[\xi] \in G$ 求符号的导数，我们使用差分算子。在引入紧李群上的 H¨ormander 类之前，我们必须先定义这些微分/差分算子。

定义 2.13（左不变典范微分算子）。若 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 是任意一族左不变向量场，我们将用以下符号表示

$$X_x^\alpha := X_{1,x}^{\alpha_1} \cdots X_{n,x}^{\alpha_n}$$

任意的 $m = |\alpha|.$阶规范微分算子

此外，我们还需要对“离散”频率变量$\xi \in \text{Rep}(G)$。为此，我们将使用 [43]中引入的差分算子概念。事实上，连续且 $\sigma_A(x,\ [\xi])$线性算子的符号中的频率变量 A 在 $C^\infty(G)$上是离散的。这是因为 G 是一个离散空间。

定义 2.14（$\mathbb{D}^\alpha$ 对偶空间上的典范差分算子 G）。若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$,是 G 的固定不可约酉表示，它们不一定属于同一个等价类，那么矩阵的每个系数

$$\xi_\ell(g) - I_{d_{\xi_\ell}} = [\xi_\ell(g)_{ij} - \delta_{ij}]_{i,j=1}^{d_{\xi_\ell}},\quad g \in G,\ 1 \leq \ell \leq k, \tag{2.15}$$

that 是每个函数 $q_{ij}^{\ell}(g) := \xi_{\ell}(g)_{ij} - \delta_{ij}$, $g \in G$, 定义一个差分算子 r

$$\mathbb{D}_{\xi_\ell,i,j} := \mathscr{F}_G(\xi_\ell(g)_{ij} - \delta_{ij})\mathscr{F}_G^{-1}. \tag{2.16}$$

我们可以选取这些表示中的 $k \geq \dim(G)$ 个，使相应的差分算子族满足可容许性，即

$$\operatorname{rank}\{\nabla q_{i,j}^{\ell}(e) : 1 \leqslant \ell \leqslant k\} = \dim(G).$$

为了定义这类高阶差分算子，我们固定一个酉不可约表示 ξ_ℓ。由于该表示是固定的，在后续记号中我们省略表示 ξ_ℓ 的指标 ℓ。于是，对于任意给定的多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_{\xi_\ell}^2}$，满足 $|\alpha| = \sum_{i,\, j=1}^{d_{\xi_\ell}} \alpha_{i,\, j}$，记

$$\mathbb{D}^{\alpha} := \mathbb{D}_{1,1}^{\alpha_{11}} \cdots \mathbb{D}_{d_{\xi_\ell} d_{\xi_\ell}}^{\alpha_{d_{\xi_\ell}, d_{\xi_\ell}}}$$

表示一个 $m = |\alpha|$ 阶差分算子。

现在，我们可以开始介绍紧李群上的全局 H¨ormander 类。

定义 2.15 （全范围内的全局 $(\rho,\ \delta)$-H¨ormander 类 $0 \leq \delta,\ \rho \leq 1$）。 ˆ我们称 $\sigma \in S_{\rho,\ \delta}^{m}(G \times G)$ 满足以下符号不等式

$$\|X_x^{\beta}\mathbb{D}^{\alpha}\sigma(x,\xi)\|_{\mathrm{op}} \leqslant C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\gamma|+\delta|\beta|}, \tag{2.17}$$

ˆ对所有多重指标 β 和 γ，以及所有 $(x,\ [\xi]) \in G \times G$，其中 $\langle\xi\rangle$表示在 $\lambda_{[\xi]} \in$ 谱$[\mathcal{L}_G]$ 处的日式括号函数，定义见 2.14。

ˆ ˆ类 $\Psi_{\rho,\ \delta}^{m}(G\times G) \equiv \mathrm{Op}(S_{\rho,\ \delta}^{m}(G\times G))$ 由满足 $\sigma_A \in S_{\rho,\ \delta}^{m}($ $G \times G)$。 的连续线性算子组成，这些算子作用于 $C^{\infty}(G)$

在下一个定理中，我们将介绍全局 H¨ormander 伪微分算子类的一些基本性质 [39]。

定理 2.16。 设 $\rho, \delta \in [0,1]$ 满足 $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, $\rho \neq 1.$，则

$$\Psi_{\rho,\delta}^{\infty}(G) := \cup_{m\in\mathbb{R}}\Psi_{\rho,\delta}^{m}(G)$$

是一个在复合和伴随算子下封闭的算子代数，即：

1. 该映射

$$A \mapsto A^* : \Psi_{\rho,\delta}^{m}(G \times \widehat{G}) \to \Psi_{\rho,\delta}^{m}(G \times \widehat{G})$$

是 *Fr´echet* 空间之间的连续线性映射。

2. 该映射

$$(A_1, A_2) \mapsto A_1 \circ A_2 : \Psi_{\rho,\delta}^{m_1}(G \times \widehat{G}) \times \Psi_{\rho,\delta}^{m_2}(G \times \widehat{G}) \to \Psi_{\rho,\delta}^{m_1+m_2}(G \times \widehat{G})$$

是 *Fr´echet* 空间之间的连续双线性映射。

此外，类 $\Psi_{\rho,\delta}^{0}(G \times \widehat{G})$ 中的任意算子都存在一个从$L^2(G)$ 到 $L^2(G)$的有界延拓。

注记 2.17。设 $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$满足 $\rho \geqslant 1-\delta$，则条件 $A \in \Psi^m_{\rho,\delta}(G \times \widehat{G})$，其中 $m \in \mathbb{R}$，等价于以下事实：将算子 A 微局部化到局部坐标系 U，中时，算子 A 具有如下形式

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi, \ \forall f \in C_0^\infty(U), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中函数 $a = a_U$，满足：对每个紧子集 $K \subseteq U$ 以及所有α，$\beta \in \mathbb{N}_0^n$，以下不等式

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{2.18}$$

在 (x, ξ) 上一致成立。$\in K \times \mathbb{R}^n$. H¨ormander 类在$\frown G$上的这一刻画由 [41]证明。因此，对于任意紧李群 G，类 $\Psi^m_{\rho,\delta}(G\times G)$ 与 H¨ormander [36] 在 $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ 和 $\rho \geq 1-\delta$. 时引入的类一致

3. Schatten Properties

本节分析伪微分算子属于 $L^2(G)$ 上的 Schatten 类的情况。

3.1. 算子的 Schatten 性质。有限正则性符号。 本节研究具有有限正则性符号的算子的 Schatten性质。在不作正则性假设的情况下，我们从以下判据开始。

定理 3.1。 假设对于符号 σ_A，有 $\sigma_A \in L^p(G, \ell^p(\widehat{G}))$，其中某个$1 < p < 2.$ 成立。那么，相应的伪微分算子 A 满足$A \in \mathscr{S}_{p'}(L^2(G))$，其中 $p' = p/(p-1)$。

证明。考虑 Russo 给出的以下判据（见 [38]）：

$$\|A\|_{\mathscr{S}_{p'}} \leq (\|K\|_{p,p'} \times \|K^*\|_{p,p'})^{1/2}, \tag{3.1}$$

其中 K 是 A 的核，K^* 是伴随算子 A^*，$1 < p < 2$，的核，并且

$$\|K\|_{p,p'} = \left(\int_G \left(\int_G |K(x,y)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.2}$$

暂且假设 A 是自伴的。那么，$K = K^*$，进而

$$\|A\|_{\mathscr{S}_{p'}} \leq \|K\|_{p,p'}. \tag{3.3}$$

注意到，豪斯多夫–杨不等式（例如参见 [32, 第 69] 页）给出

$$\begin{aligned}\int_G |K(x,y)|^{p'}\mathrm{d}y &= \|y \mapsto \mathscr{F}_G^{-1}(\sigma_A(x,\cdot))(xy^{-1})\|^{p'}_{L^{p'}(G;\mathrm{d}y)} \\ &= \|z \mapsto \mathscr{F}_G^{-1}(\sigma_A(x,\ \cdot))(z)\|^{p'}_{L^{p'}(G;\mathrm{d}z)} \leq \|\sigma_A(x,\ \cdot)\|^{p'}_{\ell^p(\widehat{G})}.\end{aligned}$$

由于 $p' > 2 > p$ 闵可夫斯基积分不等式可得

$$\begin{aligned}\|K\|_{p,p'} \leq \|K\|_{p',p} &= \left(\int_G \left(\int_G |K(x,y)|^{p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_G \|\sigma_A(x,\cdot)\|^p_{\ell^p(\widehat{G})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\sigma_A\|_{L^p(G,\ell^p(\widehat{G}))}.\end{aligned}$$

因此，我们已经证明了定理3.1 中的结论，条件是 A 为自伴算子。现在，考虑一般情形，将 A 分解为其实部和虚部

$$A = \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A). \tag{3.4}$$

注意到

$$\forall (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G},\ \sigma_A(x,[\xi]) = \sigma_{\mathrm{Re}(A)}(x,[\xi]) + i\sigma_{\mathrm{Im}(A)}(x,[\xi]), \tag{3.5}$$

that

$$\forall x \in G,\ \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\ell^p(\widehat{G})} \asymp \|\sigma_{\mathrm{Re}(A)}(x,[\xi])\|_{\ell^p(\widehat{G})} + \|\sigma_{\mathrm{Im}(A)}(x,[\xi])\|_{\ell^p(\widehat{G})}, \tag{3.6}$$

并利用

$$\|A\|_{\mathscr{S}_{p'}} \asymp \|\mathrm{Re}(A)\|_{\mathscr{S}_{p'}} + \|\mathrm{Im}(A)\|_{\mathscr{S}_{p'}}, \tag{3.7}$$

并且根据以下不等式（鉴于 Re(A) 和 Im(A) 的自伴性），我们有

$$\begin{aligned}\|A\|_{\mathscr{S}_{p'}} &\asymp \|\mathrm{Re}(A)\|_{\mathscr{S}_{p'}} + \|\mathrm{Im}(A)\|_{\mathscr{S}_{p'}} \\ &\lesssim \|\sigma_{\mathrm{Re}(A)}(x,[\xi])\|_{L^p(G,\ell^p(\widehat{G}))} + \|\sigma_{\mathrm{Im}(A)}(x,[\xi])\|_{L^p(G,\ell^p(\widehat{G}))} \\ &\asymp \|\sigma_A\|_{L^p(G,\ell^p(\widehat{G}))}.\end{aligned}$$

定理3.1 的证明完毕。 □

注记3.2。就 ℓ^p-Schatten 范数而言， G 有豪斯多夫–杨不等式（例如参见 [32,第 67]页）

$$\|\widehat{f}\|_{\mathscr{S}_{p'}(\widehat{G})} \le \|f\|_{L^p(G)},\ 1 \le p \le 2, \tag{3.8}$$

其中 p' 是 $p.$ 的共轭指数。不过，由于群 G 是紧群，该不等式有以下更精细的版本

$$\|\mathscr{F}_G^{-1}\sigma\|_{L^{p'}(G)} \le \|\sigma\|_{\ell^p(\widehat{G})},\ \|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}(\widehat{G})} \le \|f\|_{L^p(G)},\ 1 \le p \le 2. \tag{3.9}$$

特别地，(3.9)中的第二个不等式比(3.8)更精确，这是因为对于 $\mathscr{S}_{p'}(\widehat{G}) \subset \ell^{p'}(\widehat{G})$有嵌入关系 $2 \le p' \le \infty$，参见 [32, 第 70]页。我们使用了(3.9)中的第一个不等式，即逆傅里叶变换的豪斯多夫–杨不等式，来估计该不等式

$$\|K\|_{p,p'} \le \|\sigma_A\|_{L^p(G,\ell^p(\widehat{G}))}$$

在定理3.1证明的第一部分中。

在下一个结果中，我们假设空间变量具有更高的正则性，以推导出伪微分算子属于 Schatten 类的判据。

定理 3.3. 设 G 是一个维数为 $n.$ 的紧李群。设 $A\colon\ C^\infty(G) \to C^\infty(G)$是一个连续线性算子，并假设其矩阵值符号满足正则性条件

$$\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))} = \int_G \|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})}\mathrm{d}x < \infty \tag{3.10}$$

其中 $N > n.$ 于是 $A \in \mathscr{S}_p(L^2(G))$ 对所有 $1 \le p < \infty.$

证明。 考虑矩阵值符号 $\sigma_A(x,[\xi]) = (\sigma_{A,ij}(x,[\xi]))_{i,j=1}^{d_\xi}$. 傅里叶反演公式可将其写为

$$\sigma_{A,ij} = \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} d_\eta \eta(x)_{rs} \widehat{\sigma}_{A,\,ij,sr}(\eta,\xi), \tag{3.11}$$

其中 $\widehat{\sigma}_{A,\,ij,sr}([\eta],[\xi])$ 表示函数 $\sigma_{A,ij}(\cdot,[\xi])\widehat{\ }$在 $\eta\in[\eta]\in G$. 处的 (s,r)-傅里叶系数。对于任意 $f\in C^\infty(G)$, 量子化公式给出恒等式

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_A(x,[\xi])\widehat{f}(\xi)] = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \sum_{i,j,\ell=1}^{d_\xi} d_\xi \xi_{ij}(x)\sigma_{A,\,ji}(x,[\xi])\widehat{f}(\xi)_{i\ell} \\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \sum_{i,j,\ell=1}^{d_\xi} d_\xi \xi_{ij}(x)\eta_{rs}(x)\widehat{\sigma}_{A,\,ji,\,sr}([\eta],[\xi])\widehat{f}(\xi)_{i\ell} \\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} \eta_{rs}(x) d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],[\xi])\widehat{f}(\xi)], \end{aligned}$$

其中

$$\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],[\xi]) := (\widehat{\sigma}_{A,\,ji,\,sr}([\eta],[\xi]))_{j,i=1}^{d_\xi}.$$

定义与矩阵 $\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],\cdot)$ 对应的算子 $\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],\cdot))$。令 $M_{\eta_{rs}}$ 为与函数 η_{rs}. 相关联的乘法算子。注意，$M_{\eta_{rs}}$ 是 $L^2(G)$ 上的有界算子，其算子范数为

$$\|M_{\eta_{rs}}\|_{\mathscr{B}(L^2(G))} = \|\eta_{rs}\|_{L^\infty(G)}. \tag{3.12}$$

于是，我们有

$$\forall f\in C^\infty(G),\ \forall x\in G,\ Af(x) = \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} M_{\eta_{rs}}[\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],\cdot))f](x). \tag{3.13}$$

注意，对所有 $N\in\mathbb{N}$, 符号

$$(x,[\xi])\mapsto \sigma_{N,rs}(x,[\xi]) := (1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_{A,\,rs}(x,[\xi])$$

满足傅里叶变换恒等式

$$\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],[\xi]) = \langle\eta\rangle^{-N}\widehat{\sigma}_{N,rs}([\eta],[\xi]). \tag{3.14}$$

利用这一恒等式，我们可以写出

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathscr{S}_p(L^2(G))} &\le \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \|M_{\eta_{rs}}\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{A,\,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p(L^2(G))} \\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \langle\eta\rangle^{-N}\|M_{\eta_{rs}}\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,\,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p(L^2(G))} \\ &= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \langle\eta\rangle^{-N}\|M_{\eta_{rs}}\|_{\mathscr{B}(L^2)}\|\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,\,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p(L^2(G))} \end{aligned}$$

$$= \sum_{[\eta]\in\widehat{G}} \sum_{r,s=1}^{d_\eta} \langle\eta\rangle^{-N} \|\eta_{rs}\|_{L^\infty(G)} \|\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p(L^2(G))}.$$

由于

$$\forall x\in G,\ |\eta_{rs}(x)| \le \left(\sum_{r',s'=1}^{d_\eta} |\eta_{r's'}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{Tr}[\eta(x)\eta(x)^*]} = \sqrt{d_\eta}, \tag{3.15}$$

我们还有

$$\forall x\in G,\ \sum_{r,s=1}^{d_\eta} |\eta_{rs}(x)| \le \left(\sum_{r',s'=1}^{d_\eta} |\eta_{r's'}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} d_\eta = \sqrt{\mathrm{Tr}[\eta(x)\eta(x)^*]} d_\eta = d_\eta\sqrt{d_\eta}, \tag{3.16}$$

而最后一式意味着

$$\sum_{r,s=1}^{d_\eta} \|\eta_{rs}\|_{L^\infty} \le d_\eta\sqrt{d_\eta}. \tag{3.17}$$

另一方面, 利用 $\mathscr{S}_p$-范数的三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,sr}([\eta],\cdot))\|^p_{\mathscr{S}_p(L^2(G))} &\lesssim \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\widehat{\sigma}_{N,sr}([\eta],[\xi])\|^p_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})} \\
&= \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \| \int_G \sigma_N(x,[\xi])\eta_{rs}(x)^* \mathrm{d}x\|^p_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})} \\
&\le \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \left(\int_G \|\eta^*_{rs}\|_{L^\infty(G)} \|\sigma_N(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})} \mathrm{d}x\right)^p \\
&\le \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sqrt{d_\eta}^p \left(\int_G \|\sigma_N(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})} \mathrm{d}x\right)^p,
\end{aligned}$$

其中，在最后一行中，我们使用（3.15）来估计

$$\|\eta^*_{rs}\|^p_{L^\infty(G)} = \|\overline{\eta}_{rs}\|^p_{L^\infty(G)} = \|\eta_{rs}\|^p_{L^\infty(G)} \le \sqrt{d_\eta}^p.$$

$p\ge 1$ 的闵可夫斯基积分不等式表明

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p} &\lesssim \left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \sqrt{d_\eta}^p \left(\int_G \|\sigma_N(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_p} \mathrm{d}x\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sqrt{d_\eta} \int_G \left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\sigma_N(x,[\xi])\|^p_{\mathscr{S}_p}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{d_\eta} \int_G \|\sigma_N(x,\cdot)\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{d_\eta} \|\sigma_N(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}.
\end{aligned}$$

以上所有分析得出了如下关于 A 的 p-Schatten范数的估计:

$$\begin{aligned}\|Af\|_{\mathscr{S}_p} &\lesssim \sum_{[\eta]\in\widehat{G}}\sum_{r,s=1}^{d_\eta}\langle\eta\rangle^{-N}\|\eta_{rs}\|_{L^\infty(G)}\|\mathrm{Op}(\widehat{\sigma}_{N,sr}([\eta],\cdot))\|_{\mathscr{S}_p}\\ &\lesssim \sum_{[\eta]\in\widehat{G}}\sum_{r,s=1}^{d_\eta}\langle\eta\rangle^{-N}\|\eta_{rs}\|_{L^\infty(G)}\sqrt{d_\eta}\|\sigma_N(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}\\ &= \|\sigma_N(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}\sum_{[\eta]\in\widehat{G}}\langle\eta\rangle^{-N}\sqrt{d_\eta}\sum_{r,s=1}^{d_\eta}\|\eta_{rs}\|_{L^\infty(G)}\\ &\leq \|\sigma_N(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}\sum_{[\eta]\in\widehat{G}}\langle\eta\rangle^{-N}\sqrt{d_\eta}d_\eta\sqrt{d_\eta}.\end{aligned}$$

因此，对于 $N>n$ 其中 $n=\dim(G)$，我们有

$$\|Af\|_{\mathscr{S}_p}\lesssim\|\sigma_N(x,\cdot)\|_{L^1(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}\sum_{[\eta]\in\widehat{G}}d_\eta^2\langle\eta\rangle^{-N}<\infty, \tag{3.18}$$

这里我们用到了（参见 [29]中的引理 3.8）

$$\sum_{[\eta]\in\widehat{G}}d_\eta^2\langle\eta\rangle^{-s}<\infty\Longleftrightarrow s>n.$$

定理3.3 的证明至此完成。 □

以下是定理3.3的一个推论。

推论 3.4。 设 G 是一个维数为 $n.$ 的紧李群。设 $A:\ C^\infty(G)\to C^\infty(G)$是一个连续线性算子，且假设其矩阵值符号满足正则性条件

$$\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{L^p(G,\mathscr{S}_p(\widehat{G}))}=\left(\int_G\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|^p_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{3.19}$$

其中 $N>n.$ 那么 $A\in\mathscr{S}_p(L^2(G))$ 条件是 $1\leq p<\infty.$

证明。 利用 H¨older 不等式以及 G 的 Haar 测度已归一化这一事实，我们有

$$\int_G\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})}\mathrm{d}x\leq\left(\int_G\|(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{N}{2}}\sigma_A(x,\cdot)\|^p_{\mathscr{S}_p(\widehat{G})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty, \tag{3.20}$$

对所有 $N>n.$ 于是，根据定理 3.3 可知 A 属于 Schatten 类 $\mathscr{S}_p(L^2(G))$

. □

3.2. **椭圆算子的 Schatten 性质。 (ρ,δ)-情形。** 现在我们刻画 $L^2(G)$上椭圆伪微分算子属于 *Schatten* 类的条件。

定理 3.5。 设 $m\in\mathbb{R}$、 $r>0$，且令 $0\leq\delta<\rho\leq1.$ 。考虑一个椭圆的伪-^微分算子 $A\in\Psi^m_{\rho,\ \delta}(G\times G)$。以下条件等价:

(1) $m \in (-\infty,0)$ 且 A 属于阶为 $r>0$ 的 *Schatten* 类: $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$; (2) 阶为 m 的 *Bessel* 势属于阶为 $r>0$ 的 *Schatten* 类: $B_m := (1+\mathcal{L}_G)^{\frac{m}{2}} \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$。(3) 以下可和性条件成立

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \int_G \|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2 \mathrm{d}x < \infty; \tag{3.21}$$

(4) 满足以下可和性条件

$$\int_G \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^r \mathrm{d}x < \infty; \tag{3.22}$$

(5) $m < -n/r$.

证明。 我们从第一个等价关系 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 开始:

- (1) $\Longrightarrow$ (2)。 假设 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$。 令 $B_s := (1+\mathcal{L}_G)^{\frac{s}{2}} \in \mathscr{S}_r(L^2($G为阶数为 $s \in \mathbb{R}$. 紧李群上椭圆算子的全局函数演算（参见 [42]）可推出

$$(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^{\pm m} \in \Psi^{\pm m}_{\rho,\delta}(G\times\widehat{G}). \tag{3.23}$$

鉴于伪微分演算的复合性质，我们有

$$B_m(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^{-m} \in \Psi^0_{\rho,\delta}(G\times\widehat{G}).$$

Calder´on-Vaillancourt 定理（参见 [42] 中的定理 5.2）蕴含$B_m(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^{-m}$ 是 $L^2(G)$上的有界算子。 由于 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 是代数 $\mathscr{B}(L^2(G))$上的算子理想，我们有

$$B_m = B_m(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^{-m}(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m, \tag{3.24}$$

属于 Schatten 类 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$，条件是

$$(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m \in \mathscr{S}_r(L^2(G)).$$

现在，我们来证明这一事实。由于 $m\le 0$，若 $s_j(A)$ 是 A 的第 j 个奇异值，那么 $(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m$ 的第 j 个奇异值 $s_j((1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m)$ 满足不等式

$$s_j((1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m) \le s_j(A), \tag{3.25}$$

于是，由 (1) 可知 $(1+|A|^{\frac{1}{|m|}})^m$ 属于$\mathscr{S}_r(L^2(G))$。

- (2) $\Longleftrightarrow$ (5)。 注意到

$$B_m \in \mathscr{S}_r(L^2(G)) \Longleftrightarrow B_{mr/2} \in \mathscr{S}_2(L^2(G)).$$

另一方面,

$$\|B_{mr/2}\|^2_{\mathscr{S}_2(L^2(G))} = \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi^2 \langle\xi\rangle^{mr} < \infty,$$

当且仅当 $mr<-n$, （参见 [29] 的引理 3.8），或者等价地，当 $m<-n/r$证明该结论时。

•(2) $\Longrightarrow$ (1)。我们给出一个与证明反向命题类似的证明。由 (2) 可知 $m < -n/r < 0$. 另一方面，根据伪微分演算，我们有

$$AB_{-m} \in \Psi^0_{\rho,\delta}(G \times \widehat{G}). \tag{3.26}$$

此外，Calder´on-Vaillancourt 定理（见 [42]中的定理 5.2）给出了 AB_{-m} 在 $L^2(G)$上的有界性。若 $B_m \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$，则 利用$\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 是作用于 $L^2(G)$ 上的有界算子代数中的一个理想这一点，可得

$$A = AB_{-m}B_m \in \mathscr{S}_r(L^2(G)).$$

• (1) $\Longleftrightarrow$ (3)。 注意到

$$A \in \mathscr{S}_r(L^2(G)) \Longleftrightarrow |A|^{\frac{r}{2}} \in \mathscr{S}_2(L^2(G)). \tag{3.27}$$

设 $R_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,y)$ 和 $K_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,y)$ 分别为算子 $|A|^{\frac{r}{2}}$ 的右卷积核和 Schwartz 核。我们有如下恒等式:

$$\forall x, y \in G,\ R_A(x, xy^{-1}) = K_A(x,y).$$

由 Plancherel 定理可得以下等价关系:

$$\begin{aligned} |A|^{\frac{r}{2}} \in \mathscr{S}_2(L^2(G)) &\Longleftrightarrow K_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,y) \in L^2(G \times G) \\ &\Longleftrightarrow \int_G \int_G |R_A(x,y)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty \\ &\Longleftrightarrow \int_G \sum_{[\xi]\in\widehat{G}} d_\xi \|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|^2_{\mathrm{HS}} \mathrm{d}x < \infty. \end{aligned}$$

• (3) $\Longleftrightarrow$ (4)。为证明这些可和性条件的等价性，我们将应用全局函数演算（见 [42]）。我们从以下恒等式开始:

$$\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi]) = |\sigma_A(x,[\xi])|^{\frac{r}{2}} + r_A(x,[\xi]), \tag{3.28}$$

由于渐近展开，下阶项为 $r_A \in S^{\frac{mr}{2}-(\rho-\delta)}(G \times \widehat{G})$。首先，注意到

$$\begin{aligned} \|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}} &\leq \||\sigma_A(x,[\xi])|^{\frac{r}{2}}\|_{\mathrm{HS}} + \|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}} \\ &= \|\sigma_A(x,[\xi])\|^{\frac{r}{2}}_{\mathscr{S}_r} + \|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}. \end{aligned}$$

同样地，由于 $|\sigma_A(x,[\xi])|^{\frac{r}{2}} = \sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi]) - r_A(x,[\xi])$，我们有

$$\|\sigma_A(x,[\xi])\|^{\frac{r}{2}}_{\mathscr{S}_r} = \||\sigma_A(x,[\xi])|^{\frac{r}{2}}\|_{\mathrm{HS}} \leq \|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}} + \|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}.$$

为了估计余项 $\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}$，我们利用 $r_A \in S^{\frac{mr}{2}-(\rho-\delta)}(G \times \widehat{G})$。于是,

$$\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}} \leq \|r_A(x,[\xi])\langle\xi\rangle^{-mr/2+(\rho-\delta)}\|_{\mathrm{op}} \|\langle\xi\rangle^{mr/2-(\rho-\delta)} I_{d_\xi}\|_{\mathrm{HS}} \lesssim d_\xi^{\frac{1}{2}} \langle\xi\rangle^{\frac{mr}{2}-(\rho-\delta)}. \tag{3.29}$$

为证明 (3) $\Longrightarrow$(4)，注意到条件 (3) 等价于 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$，由此可推出 $B_m \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$。在

关于阶 m，我们有 $m<-n/r.$。为证明 (4) 成立，注意到

$$\begin{aligned}\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^r\mathrm{d}x &\le \int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\max\{2\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}},\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}\}^2\\ &=4\max\left\{\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}x,\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\right\}\\ &\lesssim 4\max\left\{\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}x,\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi^2\langle\xi\rangle^{mr-2(\rho-\delta)}\right\}.\end{aligned}$$

由于 $\rho>\delta$，我们可以比较 $\langle\xi\rangle^{mr-2(\rho-\delta)}\le\langle\xi\rangle^{mr}$，然后

$$\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi^2\langle\xi\rangle^{mr-2(\rho-\delta)}\le\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi^2\langle\xi\rangle^{mr}<\infty \tag{3.30}$$

因为 $mr<-n.$ 那么，(3) 与 (3.30) 中级数的收敛性共同推出 (4)。现在，为了完成证明，我们假设 (4)，并由此推导出 (3)。为此，我们将使用不等式

$$\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}\le\|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^{\frac{r}{2}}+\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}. \tag{3.31}$$

那么，我们作如下论证：

$$\begin{aligned}\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}x &\le \int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi(2\max\{\|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^{\frac{r}{2}},\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}\})^2\\ &=4\max\left\{\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathscr{S}_r}^r\mathrm{d}x,\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|r_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\right\}\\ &\lesssim 4\max\left\{\int_G\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\sigma_{|A|^{\frac{r}{2}}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}x,\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi^2\langle\xi\rangle^{mr-2(\rho-\delta)}\right\}\end{aligned}$$

由此我们可以推出 (3) 中级数收敛。

鉴于上述分析，定理 3.5 的证明已经完成。 □

3.3. 非椭圆算子的 Schatten性质。经典符号。 本小节将首先说明，即使算子是非椭圆的，其阶也可以作为推导其 Schatten–von Neumann 性质的充分条件。

下面的推论是定理3.5的直接结果。

推论 3.6。 设 $m<-n/r$、 $r>0$，并设 $0\le\delta<\rho\le1.$ 考虑伪微分算子 $A\in\Psi^m_{\rho,\,\delta}(G\times\widehat{G})$。则， $A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$。

证明。 下面给出一种代数论证。由于 $m<-n/r,$ 因此 Bessel 势满足 $B_m=(1+\mathcal{L}_G)^{\frac{m}{2}}\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$。 再次利用类 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 是所有作用于 $L^2(G)$ 上的有界算子代数中的一个理想， 并且 AB_{-m} 在

$L^2(G)$（根据 Calder´on-Vaillancourt 定理），我们得到 $A = AB_{-m}B_m$ 属于 Schatten 类 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$. □

现在，利用椭圆算子的局部 Weyl 公式（见 [8, 定理 1.1]），我们得到 Kohn-Nirenberg 代数中迹类算子的定理 3.5 中等价关系 (1) $\iff$ (5) 的以下改进。这里，我们考虑由 Killing 型 $B(X,Y) = \mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)], X, Y \in \mathfrak{g}$ 在李代数 $\mathfrak{g}$ 上诱导的范数 $||\cdot||_g$，其定义为 $||X||_g := \sqrt{-B(X,X)}$。

命题 3.7。 令 $A \in \Psi^m_{1,0}(G)$ 为一个阶为 $m \leq 0$ 的经典伪微分算子。假设其主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$ 在余球面上的平均值非零，即

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0, \tag{3.32}$$

其中 μ_L 表示球面向量丛 $T^*\mathbb{S}(G) = \{(x,\eta) \in T^*G : ||\eta||_g = 1\}$. 那么，$A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$ 当且仅当 $m < -n$.

证明。 由推论 3.6 可知，对于 $m < -n$，有 $A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$。现在证明其逆命题，即若 $A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$，则 $m < -n$. 下面假设 $m \geq -n$，并由此导出矛盾。

注意，若 $A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$，则对于 $L^2(G)$ 的任意标准正交基 $(\phi_k)_k$，级数 $\sum_k (A\phi_k, \phi_k)_{L^2(G)}$ 绝对收敛，且其和与标准正交基 (ϕ_k) 的选择无关。那么，A 的迹为

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_k (A\phi_k, \phi_k)_{L^2(G)}. \tag{3.33}$$

就我们的目的而言，我们将考虑标准正交基

$$\{d_\xi^{\frac{1}{2}} \xi_{i,j} : [\xi] \in \widehat{G} : 1 \leq i,j \leq d_\xi\}, \tag{3.34}$$

由 Peter-Weyl 定理给出的 $L^2(G)$ 的标准正交基。考虑正拉普拉斯算子的谱

$$\mathrm{Spect}(\mathcal{L}_G) = \{|\xi| := \lambda_{[\xi]} : [\xi] \in \widehat{G}\}.$$

对于任意 $\lambda > 0$，我们将考虑部分和

$$S_\lambda := \sum_{|\xi| \leq \lambda} \sum_{i,j=1}^{d_\xi} (\tilde{A}(d_\xi^{\frac{1}{2}} \xi_{ij}), d_\xi^{\frac{1}{2}} \xi_{ij}), \tag{3.35}$$

而上述讨论使我们可以使用恒等式

$$\mathrm{Tr}(A) = \lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{|\xi| \leq \lambda} \sum_{i,j=1}^{d_\xi} (\tilde{A}(d_\xi^{\frac{1}{2}} \xi_{ij}), d_\xi^{\frac{1}{2}} \xi_{ij}). \tag{3.36}$$

接下来，我们将证明，如果 $m \geq -n$，那么（3.36）中的级数不绝对收敛；进而，A 不属于迹类，这将与我们的假设相矛盾。

为简化证明，分别考虑 A, 的实部 $\mathrm{Re}(A)$ 和虚部 $\mathrm{Im}(A)$。我们有以下恒等式

$$\mathrm{Re}(A) = (A + A^*)/2, \ \mathrm{Re}(A) = (A - A^*)/2i. \tag{3.37}$$

为简化记号，我们将写作 $A_0 =$Re(A), 和 $A_1 =$Im(A). 以下事实成立:

- $A_i \in \Psi^m(G)$ $i = 0$，1，鉴于伪微分演算，对于算子之和的性质。
- A_i， $i = 0$，1，是自伴算子。

注意，任意一个元素（A_i（ξ_{ij}） ξ_{ij}） $\in \mathbb{R}$ 都是实数，因为 A. 是自伴的。现在，让我们利用 Peter–Weyl 基的一个特定性质（3.34）。在 [8]下文中，我们为任意伪微分算子推导出如下局部 Weyl 公式$\tilde{A} \in \Psi^0$（G）：

$$\sum_{|\xi|\leq\lambda}\sum_{i,j=1}^{d_\xi}(\tilde{A}(d_\xi^{\frac{1}{2}}\xi_{ij}), d_\xi^{\frac{1}{2}}\xi_{ij}) = (2\pi)^{-n}C_{n,\tilde{A}}\lambda^n + O(\lambda^{n-1}), \tag{3.38}$$

对于任意 $\lambda > 0$. 此外，在 [8] 该恒等式的左端可简化如下

$$\sum_{|\xi|\leq\lambda}\sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi(\tilde{A}\xi_{ij}, \xi_{ij}) = \sum_{|\xi|\leq\lambda} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}}(x,\xi)]\mathrm{d}x. \tag{3.39}$$

Let

$$\tilde{A}_0 := \mathrm{Re}(\tilde{A}) = (\tilde{A} + \tilde{A}^*)/2, \ \tilde{A}_1 := \mathrm{Im}(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \tilde{A}^*)/2i. \tag{3.40}$$

由于这些恒等式对阶为 $m > 0$、且满足 $k = 0$、1 的一般算子都成立，因此我们还有

$$\sum_{|\xi|\leq\lambda}\sum_{i,j=1}^{d_\xi}(\tilde{A}_k(d_\xi^{\frac{1}{2}}\xi_{ij}), d_\xi^{\frac{1}{2}}\xi_{ij}) = (2\pi)^{-n}C_{n,\tilde{A}_k}\lambda^n + O(\lambda^{n-1}), \tag{3.41}$$

对于任意 $\lambda > 0$，其中常数 $C_{n、\tilde{A}_k}$ 由下式给出

$$C_{n,\tilde{A}_k} = \mathrm{Av}[\sigma_{loc,\tilde{A}_k}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,\tilde{A}_k}(x,\eta)d\mu_L(x,\eta). \tag{3.42}$$

与之前一样，我们可以写成

$$\sum_{|\xi|\leq\lambda}\sum_{i,j=1}^{d_\xi} d_\xi(\tilde{A}_k\xi_{ij}, \xi_{ij}) = \sum_{|\xi|\leq\lambda} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x, \tag{3.43}$$

其中，(3.43) 的左侧为实数值。注意，根据 (3.41) 和 (3.43)，我们有如下恒等式

$$\sum_{|\xi|\leq\lambda} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}C_{n,\tilde{A}_k}\lambda^n + O(\lambda^{n-1}). \tag{3.44}$$

请注意

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{\lambda}{2}<|\xi|\leq\lambda} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x &= \sum_{|\xi|\leq\lambda} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x - \sum_{|\xi|\leq\frac{\lambda}{2}} d_\xi \int\limits_G \mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-n}C_{n,A_k}(1 - \frac{1}{2^n})\lambda^n + O(\lambda^{n-1}) \\ &= (2\pi)^{-n}\tilde{C}_{n,\tilde{A}_k}\lambda^n + O(\lambda^{n-1}).\end{aligned}$$

将上述局部 Weyl 公式应用于算子 $\tilde{A}=A\mathcal{L}_G^{-\frac{m}{2}}\in\Psi^0(G)$。~ ~和 A、A_k，$k=0$，1 的矩阵值符号为

$$\sigma_{\tilde{A}}(x,[\xi])=\sigma_A(x,[\xi])|\xi|^{-m},\ \sigma_{\tilde{A}_k}(x,[\xi])=\sigma_{A_k}(x,[\xi])|\xi|^{-m},\ (x,[\xi])\in G\times\widehat{G},$$

其中

$$|\xi|^{-m}:=\sqrt{\lambda_{[\xi]}}^{-m},\ \text{if } \xi\neq 1_{\widehat{G}},\ |1_{\widehat{G}}|^{-m}:=0,$$

~其中 $1_{\widehat{G}}$ 是平凡表示。由于 A_k是自伴的，因此（3.44）的左端（和右端）取实值。注意，迹的线性性给出恒等式

$$\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A_0)+i\mathrm{Tr}(A_1).$$

因此，我们来估计迹 $\mathrm{Tr}(A_k)$ $k=0$，1。事实上，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_k)&=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i,j=1}^{d_\xi}d_\xi(A_k\xi_{ij},\xi_{ij})=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{|\xi|\leq\lambda}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<\langle\xi\rangle\leq 2^k}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<\langle\xi\rangle\leq 2^k}d_\xi 2^{-km}\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x\\
&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<\langle\xi\rangle\leq 2^k}d_\xi\langle\xi\rangle^{-m}\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<\langle\xi\rangle\leq 2^k}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}]\mathrm{d}x\\
&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<\langle\xi\rangle\leq 2^k}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{A_k}(x,\xi)|\xi|^{-m}]\mathrm{d}x\\
&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<|\xi|\leq 2^k}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

现在，利用局部 Weyl 公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_k)&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\sum_{[\xi]\in\widehat{G}:2^{k-1}<|\xi|\leq 2^k}d_\xi\int_G\mathrm{Tr}[\sigma_{\tilde{A}_k}(x,\xi)]\mathrm{d}x\\
&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}\left((2\pi)^{-n}\tilde{C}_{n,\tilde{A}_k}2^{kn}+O(2^{k(n-1)}\right)\\
&\asymp\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tilde{C}_{n,\tilde{A}_k}2^{k(n+m)}+O(2^{k(n+m-1)}\right).
\end{aligned}$$

现在，显然，如果 $m \geq -n$，那么几何级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{C}_{n,\tilde{A}_k} 2^{k(n+m)} + O(2^{k(n+m-1)}) \right)$$

在 $k = 0$ 或在 $k = 1$ 上发散，这也意味着 T 的迹发散。为了解这一点，注意到常数（3.42）不可能对 $k = 0$，1 同时为零。事实上，由（3.32）可得

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] = \tilde{C}_{n,\tilde{A}_0} + i\tilde{C}_{n,\tilde{A}_1} \neq 0. \tag{3.45}$$

我们在下方的图1 中展示这一几何事实。注意，我们利用了在

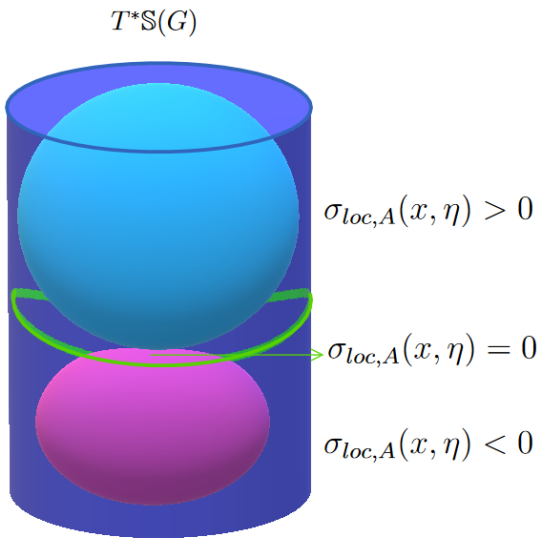

FIGURE 1. 实值主符号在余球面上的平均条件 σ_A. 在这种情况下，符号的正部占主导的区域是符号为负的区域。绿色曲线表示高度为零的等值曲线（该曲线沿零截面出现）。

余球面 $T^*\mathbb{S}(G)$ 上有如下恒等式

$$\forall (x,\eta) \in T^*\mathbb{S}(G),\ \sigma_{\tilde{A}}(x,\eta) = \sigma_A(x,\eta)\|\eta\|^{-m} = \sigma_A(x,\eta), \tag{3.46}$$

因为 $(x,\eta) \in T^*\mathbb{S}(G)$ 蕴含 $x \in M$，并且 η 在相应纤维上的范数 $\|\eta\|$ 等于 1。

因此我们证明了 T 不属于理想 $\mathscr{S}_1(L^2(G))$，这与我们的初始假设矛盾。命题 3.7的证明至此完成。□

由前一个推论可得迹类伪微分算子的如下刻画。

定理 3.8. 设 $A \in \Psi^m_{1,0}(G)$ 是一个阶为$m \leq 0$的经典伪微分算子。那么， $A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$ 当且仅当 $m < -n$.

证明。 注意，如果算子 A 的主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$ 在余球面上的平均值非零，即

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0, \tag{3.47}$$

于是，该结论由命题 3.7 得出。另一方面，假设$A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$ 且

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) = 0. \tag{3.48}$$

定义算子 $\tilde{A} = A + (\mathcal{L}_G)^{-n-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. 注意，由于~ ~ ~
$\|A\|_{\mathscr{S}_1} \leq \|A\|_{\mathscr{S}_1} + \|(\mathcal{L}_G)^{-n-\varepsilon}\|_{\mathscr{S}_1} < \infty.$，有 $\tilde{A} \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$。此外，根据 A 的定义，我们有

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,\tilde{A}}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} ||\eta||_g^{-n-\varepsilon} d\mu_L(x,\eta) = \mathrm{Vol}(T^*\mathbb{S}(G)) \neq 0. \tag{3.49}$$

~注意，若 $m \geq -n,$，则 A 的阶将大于 $-n$。然而，条件 (3.49) 再结合 $\tilde{A} \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$ 这一事实可推出$m < -n$ 根据命题 3.7，这与前述结论矛盾。因此，有$m < -n$ 正如预期。证明完毕。□

现在，我们将利用 Schatten 类的理想性质，将命题 3.7 推广到 $r > 1.$

命题 3.9。 设 $A \in \Psi^m_{1,0}(G)$ 是一个阶为$m \in \mathbb{R}$的经典伪微分算子。假设其主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$ 在余球面上的平均值非零，即

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0. \tag{3.50}$$

对于任意 $1 < r < \infty$，若 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$ 则 $m \leq -n/r.$ 此外，对于 $r = \infty$, $A \in \mathscr{S}_\infty(L^2(G)) = \mathscr{B}(L^2(G))$ 当且仅当 $m \leq 0.$

证明。我们先考虑 $1 < r < \infty.$ 的情形。设 $\varepsilon > 0.$ 。考虑算子 $\mathcal{L}_G^{s/2}$，其中 s 满足

$$s := -\frac{n}{q} - \varepsilon < -\frac{n}{q},$$

并且 $q := r/(r-1)$ 是 $r.$ 的共轭指数。于是， q 由恒等式给出 $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$ 注意，由于 $r > 1,$ 可知 $q > 0.$ 命题 3.7 推出 $\mathcal{L}_G^{s/2} \in \mathscr{S}_q(L^2(G))$。 由于 q 且 r，并且二者互为共轭指数，因此有

$$\tilde{A} := A\mathcal{L}_G^{s/2} \in \mathscr{S}_1(G).$$

注意，主符号 $\sigma_{loc,\ \tilde{A}}$ 满足恒等式

$$\forall (x,\eta) \in T^*G \setminus \{0\},\ \sigma_{loc,\tilde{A}}(x,\eta) = \sigma_{loc,A}(x,\eta)\|\eta\|^s. \tag{3.51}$$

特别地，在余球面上，我们有

$$\forall (x,\eta) \in T^*\mathbb{S},\ \ \sigma_{loc,\tilde{A}}(x,\eta) = \sigma_{loc,A}(x,\eta). \tag{3.52}$$

于是，（3.50）可以推导出非消失性质

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,\tilde{A}}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0,$$

从而可以使用命题 3.7 来得出其阶 $m+s$ 的$A \in \mathscr{S}_1$ 满足不等式 $m+s<-n$. 于是，我们有

$$m < -s-n = \frac{n}{q} + \varepsilon - n = n\left(\frac{1}{q}-1\right) + \varepsilon = -\frac{n}{r} + \varepsilon\,,$$

whe对于任意 $\epsilon>0$，最后一项都成立。取 $\varepsilon \to 0^+$，我们有 $m \leq -n/\quad r.$

现在，假设 $r=\infty$. 。对于 $m \leq 0$，由 Calder´on-Vaillancourt 定理可知，$A \in \mathscr{S}_\infty(L^2(G)) = \mathscr{B}(L^2(G))$。现在，假设$A \in \mathscr{S}_\infty(L^2(G)) = \mathscr{B}(L^2(G))$，并给出一个论证，证明其阶满足 $m \leq 0$. 。反设 $m>0$. 。注意，$r=\infty$ 的共轭指数为 $q=1$. 。令 $\varepsilon \in (0,m)$，并令 $s=-n-\varepsilon$. 。考虑算子 $\mathcal{L}_G^{s/2} \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$，其中 $s<-n$。那么该算子

$$\tilde{A} := A\mathcal{L}_G^{s/2} \in \mathscr{S}_\infty(L^2(G)) \circ \mathscr{S}_1(L^2(G)) \subseteq \mathscr{S}_1(L^2(G)),$$

是迹类。由于主符号由（3.51）给出，˜（3.50）中的余球面条件成立，因此命题 3.7 表明 A 的阶满足不等式 $m+s<-n$. 我们有

$$m+s = m-n-\varepsilon = (m-\varepsilon)-n \geq -n,$$

这与上述分析相矛盾。因此，必有 $m \leq 0$. 命题3.9 的证明完毕。□

推论 3.10。 设 $r \in (1,\infty)\cap\mathbb{Z}$. 令 $A \in \Psi^m_{1,0}(G)$ 为一个阶为 m 的经典伪微分算子。假设 A 的主符号$\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$ 在余球面上的平均值非零，即

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0. \tag{3.53}$$

那么，$A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$ 当且仅当 $m<-n/r$.

证明。由推论 3.6 可知，对于 $m<-n/r$, $1<r<\infty$, 有$A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$。现在证明其逆命题，即若 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$，则 $m<-n/r$. 为此，我们证明命题3.9 中的临界情形不可能成立。为此，注意若 $A \in \mathscr{S}_r$, 则

$$A^r = A\circ A\circ\cdots A \in \mathscr{S}_r(L^2(G)) \circ \mathscr{S}_r(L^2(G)) \circ\cdots \mathscr{S}_r(L^2(G)) \subseteq \mathscr{S}_1(L^2(G)), \tag{3.54}$$

其中复合运算进行 r次。然而，迹类算子A^r 的阶为 $-n$ ，这与命题3.7中的结论相矛盾。因此，必然有$m<-n/r$. □

定理 3.11。 设 $A \in \Psi^m_{1,\ 0}(G)$ 是一个阶为m的经典伪微分算子。

(A) 若 $r \in [1,\infty)\cap\mathbb{Z}$，则 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$ 当且仅当 $m<-n/r$. 。对于 $r=\infty$，$A \in \mathscr{B}(L^2(G))$ 当且仅当 $m \leq 0$.

(B) 若 $r \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$，且 $A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$，则 $m \leq -n/r.$。此外，若 A 是椭圆的，则有严格不等式 $m < -n/r.$

证明。我们来证明 (A) 中的结论。对于 $r = 1$ 这一结论已在定理 3.8 中证明。在手稿的这一阶段，我们只需证明：若$A \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$，则 $m \leq -n/r$，其中 $n/r := 0$ 当 $r = \infty$. 现在，我们来考虑 $1 < r \leq \infty$ 的情形，其中 $r \in \mathbb{Z}.$

注意，若主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$ 在 A 的余球面上的平均值非零，即

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0, \tag{3.55}$$

则结论由推论 3.10 得出。另一方面，假设$A \in \mathscr{S}_1(L^2(G))$，并且

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) = 0. \tag{3.56}$$

定义算子 $\tilde{A} = A + (\mathcal{L}_G)^{-n/r-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$，其中 $n/r := 0$ 当.....时。注意，由于 $\|\tilde{A}\|_{\mathscr{S}_r} \leq \|\tilde{A}\|_{\mathscr{S}_r} + \|\tilde{}(\mathcal{L}_G)^{-n/r-\varepsilon}\|_{\mathscr{S}_r} < \infty.$， $\tilde{A} \in \mathscr{S}_r(L^2(G))$。另一方面，注意到

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,\tilde{A}}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} ||\eta||_g^{-n/r-\varepsilon} d\mu_L(x,\eta) = \mathrm{Vol}(T^*\mathbb{S}(G)) \neq 0. \tag{3.57}$$

˜现在，如果 $m \geq -n/r$，那么 A 的阶必须大于 $-n/r$ （对于 $r = \infty$则必须严格大于零），但条件（3.57）与以下事实$\tilde{A} \in \mathscr{S}_r$（$L^2$（$G$））意味着 $m < -n/r$ 根据命题 3.7，这与之矛盾。因此， $m < -n/r$ 对于 $1 < r < \infty$，有 $m \geq 0$ 对于 $r = \infty$，正如预期的那样。

现在，我们来证明（B）中的结论。可以按照命题 3.9的证明来完成。不过，我们给出另一种论证。为此，考虑 $r \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$. 那么， $[r]$ 的 r 整数部分满足严格不等式

$$[r] < r < [r] + 1. \tag{3.58}$$

令 $\varepsilon > 0$ 并定义参数

$$s = n\left(\frac{1}{[r]} - \frac{1}{r}\right) + \varepsilon. \tag{3.59}$$

由于 $A \in \mathscr{S}_r$且对任意 $\varepsilon' > 0$，$(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{s}{2}} \in \mathscr{S}_{\frac{n}{s}+\varepsilon'}$，我们将证明存在$\varepsilon_0' > 0$ 使得 $A_s := A(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{s}{2}} \in \mathscr{S}_{[r]}$. 为此，我们必须确保存在 $\varepsilon_0' > 0$ 使得 Hölder 性质

$$\frac{1}{[r]} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{n}{s} + \varepsilon_0'} \tag{3.60}$$

成立是因为其有效性将意味着 $A_s \in \mathscr{S}_r \circ \mathscr{S}_{\frac{n}{s}+\varepsilon_0'} \subseteq \mathscr{S}_{[r]}$. 为证明方程（3.60）存在解，定义连续函数

$$g(\varepsilon') := \frac{1}{\frac{n}{s} + \varepsilon'}. \tag{3.61}$$

注意

$$g(0)=\frac{s}{n}>\frac{1}{[r]}-\frac{1}{r}>0=g(\infty):=\lim_{\varepsilon'\to\infty}g(\varepsilon'). \tag{3.62}$$

根据波尔查诺定理，存在 $\varepsilon_0'\in(0,\ \infty)$，使得 $g(\varepsilon_0')=\frac{1}{[r]}-\frac{1}{r}$如所需。至此,_ 我们已经证明了 ε_0' 在（3.60）中的存在性及其蕴含的 $A_s\in\mathscr{S}_{[r]}$. 因此，根据（A）部分的结果，$m-s$ 的阶 A_s 满足不等式 $m-s<-n/[r]$，或等价地 $m<s-(n/[r])$。鉴于（3.59），我们已经证明

$$\forall\varepsilon>0,\ \ m<s=n\left(\frac{1}{[r]}-\frac{1}{r}\right)+\varepsilon-\frac{n}{[r]}=-\frac{n}{r}+\varepsilon, \tag{3.63}$$

这当然意味着 $m\leq -n/r$. 注意，如果 A 是椭圆的，则该不等式可以改进为严格不等式，即我们将有 $m<-n/r$，正如定理3.5中所证明的。证明完毕。□

我们以如下关于环面上的类$\Psi^m_{0,0}(\mathbb{T}^n)$ 的非常规构造结束本小节。

定理 3.12. 对于任意 $\varkappa>0$，存在一个非椭圆的伪微分算子 A，属于奇异类 $\Psi^{-\varkappa}_{0\,0,}(\mathbb{T}^n)\setminus\Psi^{-\varkappa-\varepsilon}_{0\,0,}(\mathbb{T}^n)$，对所有 $\varepsilon>0$ 均成立，并且属于所有 *Schatten* 理想 $\mathscr{S}_r(L^2(\mathbb{T}^n))$，其中 $r>0$.

证明。设 $\varkappa>0,$，并令 $(e_j)_{j=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n,$ 的标准正交基，考虑集合

$$\mathbb{D}=\{2^ke_1=(2^k,0,\cdots,0):k\in\mathbb{N}\}. \tag{3.64}$$

定义符号

$$a(\xi)=\langle\xi\rangle^{-\varkappa},\ \xi\in\mathbb{D};\ a(\xi)=0,\xi\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{D}. \tag{3.65}$$

注意，对于任意 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n,$，我们有

$$|\Delta^\alpha a(\xi)|\leq\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|a(\xi+\beta)|\leq\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\langle\xi+\beta\rangle^{-\varkappa}\lesssim_\alpha(1+|\xi|)^{-\varkappa},\ \xi\in\mathbb{Z}^n.$$

为说明该不等式右侧的界是最优的，我们考虑 $\alpha=e_1$ 且 $\xi_k=2^ke_1\in\mathbb{D}.$ 的情形。事实上，注意到

$$|\Delta^{e_1}a(\xi_k)|=|a(\xi_k+e_1)-a(\xi_k)|=|\langle 2^ke_1\rangle^{-\varkappa}|=\langle\xi_k\rangle^{-\varkappa}.$$

这一论证证明估计 $|\Delta^{e_1}a(\xi)|\leq\langle\xi\rangle^{-\varkappa}$，是锐利的，甚至当 $\xi_k\in\mathbb{D}.$ 时等号成立

为证明与符号 a 相关联的算子 $A=\mathrm{Op}(a)$ 属于 Schatten 类 $\mathscr{S}_r(L^2(\mathbb{T}^n))$，注意到 A 的奇异值序列由其符号的取值决定，即

$$s_\xi(A)=|a(\xi)|,\ \ \xi\in\mathbb{Z}^n, \tag{3.66}$$

$A.$ 的所有奇异值。因此

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}s_\xi(A)^r=\sum_{\xi_k\in\mathbb{D}}s_\xi(A)^r\asymp\sum_{k=1}^\infty 2^{-k\varkappa r}<\infty.$$

现在，为证明 A 不是椭圆的，且其阶为 $m=-\varkappa$，请注意， a 满足的最佳下界估计如下

$$|a(\xi)|\geq 0, \tag{3.67}$$

在 $\xi\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{D}.$ 时取等号。这个特殊情形的证明至此完成。 □

3.4.**Schatten 类中的经典算子及其主符号**。我们考虑 $\Psi^{m/2}_{cl}(G)$ 中具有 $m.$ 阶齐次符号的算子子类 $\Psi^m_0(G)$。首先给出以下结果，其中我们证明，只有主符号的主齐次分量包含经典算子属于任意 Schatten 类 $\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 的信息。

命题 3.13。 设 $r\in(0、\infty]$ 和 $m\in\mathbb{R}$。则下列条件等价:

(1) $\Psi^m_{cl}(G)\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$;
(2) $\Psi^m_0(G)\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$.

证明。 显然，(1) 推出 (2)。设 (2) 成立。我们将证明 (1) 成立。若 N 足够大，则 $\Psi^{m-N}\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$。注意到算子 $B=\sqrt{\mathcal{L}_G^{-1}}$ 在 $L^2(G)$ 上连续，因此对任意 $k\in\mathbb{N}$，有 $\Psi^m_0B^k\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$。由于 B^k 的主符号，由下式给出

$$\sigma_{B^k}(x,\eta)=\|\eta\|_g^{-k},\ \forall x\in G,\forall\eta\in\mathfrak{g}\setminus\{0\},$$

是 $-k$ 阶齐次的，我们有

$$\Psi^m_0B^k=\Psi^{m-k}_0\ \mathrm{mod}\ \Psi^{-\infty}(G\times\widehat{G}).$$

注意到 $\mathrm{Op}(\Psi^{-\infty}(G\times\widehat{G}))\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$。 于是得到

$$\Psi^m_{cl}=\sum_{k=0}^{N-1}\Psi^m_0B^k+\Psi^{m-N}_{cl}\ \mathrm{mod}\ \Psi^{-\infty}(G\times\widehat{G})\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G)),$$

鉴于我们的假设 $\Psi^m_0\subseteq\mathscr{S}_r(L^2(G))$， 这表明当 (2) 成立时，(1) 也成立。由此得到所需结果。 □

根据定理 3.11 ，我们有如下刻画。

推论 3.14。 设 $A\in\Psi^m_0(G)$ 的阶为 $m\in\mathbb{R}$。
(A)。 若 $r\in[1,\infty)\cap\mathbb{Z}$，则 $A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$ 当且仅当 $m<-n/r.$ 对于 $r=\infty$, $A\in\mathscr{B}(L^2(G))$ 当且仅当 $m\leq 0$.(B)。 若 $r\in(1,\infty)\setminus\mathbb{Z}$，且 $A\in\mathscr{S}_r(L^2(G))$, 则 $m\leq -n/r.$ 此外，若 A 是椭圆的，则有严格不等式 $m<-n/r.$

3.5. **经典算子的阶与整体符号的阶**。作为本文所发展的方法的一个应用，我们证明符号的阶刻画了算子的阶。

命题 3.15. 设 $\mu,t\in\mathbb{R}$ ，且令 $A\in\Psi^{\mu}_{1,0}(G)$ 为一个经典伪微分算子，其整体符号满足

$$\forall(x,[\xi])\in G\times\widehat{G},\ \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}}\leq C\langle\xi\rangle^t. \tag{3.68}$$

那么，$A \in \Psi^t_{1,0}(G)$，前提是其主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^\infty(T^*G)$在余球面上的平均值非零：

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0. \tag{3.69}$$

证明。 我们考虑两种情况： $t = 0$ 和 $t \neq 0$.

- **情况1：** $t = 0$. 假设$A \in \Psi^\mu_{1,0}(G)$。 显然，如果 $\mu \leq 0$ ，则无需证明。因此，相关情况是 $\mu > 0$. 首先，我们证明 $\mu \in \mathbb{N}$. 时的结论。为此，我们将使用归纳法。因此，先证明当 $\mu = 1$. 时该结果成立。然后，假设$A \in \Psi^1_{1,0}(G)$，并附加条件

$$\forall (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G},\ \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} \leq C, \tag{3.70}$$

我们必须推导出 $A \in \Psi^0_{1,0}(G)$。 为证明这一点，我们将使用 [40] 的推论 2.2来推导出 A 在 $L^2(G)$上有界，然后根据命题 3.9，利用 $L^2(G)$-有界性以及（3.69）中的平均条件，推导出其阶为 $\mu \leq 0$. 这就证明了情况 $\mu = 1$. 现在，我们陈述归纳假设：

  – 假设 $\mu_0 \in \mathbb{N}$ 满足以下条件：任意经典伪微分˜算子 $A \in \Psi^{\mu_0}_{1,0}(G)$，其矩阵值符号具有有界算子范数

$$\forall (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G},\ \|\sigma_{\tilde{A}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} \leq C, \tag{3.71}$$

且其主符号满足平均条件（3.69），则它属于类 $\Psi^0_{1,0}(G)$。

现在，令 $A \in \Psi^{\mu_0+1}_{1,0}(G)$ 为一个经典伪微分算子，其符号满足（3.69）和（3.70）。定义 $\tilde{A} = A(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{1}{2}}$. 注意，$\tilde{A} \in \Psi^{r_0}_{1,0}(G)$，且其符号满足（3.71），因为

$$\|\sigma_{\tilde{A}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} = \|\sigma_A(x,[\xi])\langle\xi\rangle^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} \leq C.$$

归纳假设意味着 $\tilde{A}$ 属于类 $\Psi^0_{1,0}(G)$。 但是，Calder´on-Vaillancourt 定理意味着 $\tilde{A}$ 在 $L^2(G)$上有界。˜ ˜由于在余球面 $T^*\mathbb{S}(G)$ 上，A 与 A 的主符号相同， A满足平均条件（3.69）。于是，命题 3.9 推出 $\mu_0 \leq 0$. 由于

$$A(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{1}{2}} \in \Psi^{\mu_0}_{1,0}(G) \subseteq \Psi^0_{1,0}(G),$$

then

$$A \in \Psi^{\mu_0+1}_{1,0}(G) \subseteq \Psi^1_{1,0}(G),$$

并结合假设（3.70），我们可以在归纳过程中使用基例 $\mu = 1$ ，从而证明 $A \in \Psi^0_{1,0}(G)$。 因此，通过数学归纳法，我们证明了定理 3.15 在$\mu \in \mathbb{N}$. 的情况下成立。现在，对于一般情形，若 $[\mu]$ 是每个 $\mu > 0$, 的整数部分，且若 $A \in \Psi^\mu_{1,0}(G)$ 是满足（ 3.70 ）的经典伪微分算子，则有 $A \in \Psi^{[\mu]+1}_{1,0}(G)$，进而可得更强的结论 $A \in \Psi^0(G)$

由定理3.15关于整数阶的陈述可知。因此，我们证明了定理 3.15 在 $t=0$.的情况下成立

•**情形 2**。 $t \neq 0$. 假设 $A \in \Psi^{\mu}_{1\,0,}(G)$ 具有一个矩阵值符号˜，满足 (3.72) 以及 (3.69) 中的平均条件。那么， $A = A(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{t}{2}} \in \Psi^{r-t}_{1\,0}{}_{,}(G)$ 满足 (3.69)，且其矩阵值符号满足不等式˜ (3.70)。由证明的第一部分可推得 $A = A(1+\mathcal{L}_G)^{-\frac{t}{2}} \in \Psi^{0}_{1,0}(G)$。 然后，伪微分演算表明 $A \in \Psi^{t}_{1,0}(G)$。

命题 3.15 的证明至此完成。 □

现在，我们将去掉命题 3.15 中的几何平均条件，以证明一个关于紧李群的一般性结论。

定理 3.16。 设 μ、$t \in \mathbb{R}$，且令 $A \in \Psi^{\mu}_{1\ ,0}(G)$ 为一个经典伪微分算子，其整体符号满足

$$\forall (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G},\ \|\sigma_A(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} \leq C\langle \xi \rangle^{t}. \tag{3.72}$$

那么 $A \in \Psi^{t}_{1,0}(G)$。

证明。 注意，若 A 的主符号 $\sigma_{loc,A} \in C^{\infty}(T^*G)$ 在余球面上的平均值非零:

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) \neq 0, \tag{3.73}$$

该结论由命题3.15得出。另一方面，若 A 的主符号在 $T^*\mathbb{S}(G)$ 上的平均值为零，即，

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,A}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) = 0, \tag{3.74}$$

我们定义算子 $\tilde{A} := A + (\mathcal{L}_G)^{\frac{t}{2}}$. 显然，˜$\tilde{A}$ 的主符号为

$$\sigma_{loc,\tilde{A}} := \sigma_{loc,A} + \|\xi\|^{t}_{g}.$$

˜注意， A 的矩阵值符号也满足

$$\sigma_{\tilde{A}}(x,[\xi]) = \sigma_A(x,[\xi]) + |\xi|^{t} I_{d_\xi},\ (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G}. \tag{3.75}$$

根据我们的假设，可得估计

$$\|\sigma_{\tilde{A}}(x,[\xi])\|_{\mathrm{op}} \leq \tilde{C}\langle \xi \rangle^{t},\ (x,[\xi]) \in G \times \widehat{G},$$

以及平均条件

$$\mathrm{Av}[\sigma_{loc,\tilde{A}}] := \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} \sigma_{loc,A}(x,\eta) d\mu_L(x,\eta) + \int\limits_{T^*\mathbb{S}(G)} ||\eta||^{t}_{g} d\mu_L(x,\eta) = \mathrm{Vol}(T^*G) \neq 0. \tag{3.76}$$

˜由命题3.15 可知， $A \in \Psi^{t}_{1,0}(G)$，并利用性质 $(\mathcal{L}_G)^{\frac{t}{2}} \in \Psi^{t}_{1,0}(G)$, 可得， $A = \tilde{A} - (\mathcal{L}_G)^{\frac{t}{2}} \in \Psi^{t}_{1,0}(G)$。 证明完毕。□

References

1. Buzano, E., Nicola, N.：伪微分算子与 Schatten-von Neumann 类。载于：Boggiatto, P., Ashino, R., Wong, M.W.（编），《伪微分算子进展》，第四届 ISAAC 大会论文集，《算子理论：进展与应用》。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔（2004）。 2. Buzano, E. Toft, J. 伪微分算子的连续性与紧性。伪微分算子：偏微分方程与时频分析，239–253，Fields Inst. Commun., 52, Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，RI，2007。 3. Buzano, E. Toft, J. Weyl 演算中的冯·诺依曼-沙滕性质。J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 12, 3080–3114。 4. Cardona, D. 紧李群上 Besov 空间中的核伪微分算子。J. Fourier Anal. Appl. 23 (2017), no. 5, 1238–1262。 5. Cardona, D. 紧李群上伪微分算子的指标。J. Pseudo- Differ. Oper. Appl. 10 (2019), no. 2, 285–305。 6. Cardona, D. Del Corral, C. 紧流形上乘子的 Dixmier 迹与非交换留数。《调和分析与偏微分方程进展》，121–163，Trends Math., Birkh¨auser/Springer，查姆，2020。 7. Cardona, D. Del Corral, C. Kumar, V. 离散伪微分算子的 Dixmier 迹。J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 11 (2020), no. 2, 647–656。 8. Cardona, D., Delgado, J., Ruzhansky, M. 关于紧李群上局部 Weyl 公式的注记，已投稿，arXiv:2210.00311。 9. Cardona, D., Delgado, J., Ruzhansky, M. 行列式与 Plemelj-Smithies 公式，Monatsh. Math., Vol. (199), 459–482, (2022)。 10. Cardona, D. Kumar, V. Zn 和环面 Tn 上多线性伪微分算子的 Lp 有界性与 Lp 核性。J. Fourier Anal. Appl. 25 (2019), no. 6, 2973–3017。 11. Cardona, D. Kumar, V. 周期向量值伪微分算子的核迹及其在指标理论中的应用。Math. Nachr. 294 (2021), no. 9, 1657–1683。 12. Cardona, D., Ruzhansky, M. 紧李群上的次椭圆伪微分算子与 Fourier 积分算子，arXiv:2008.09651。 13. Chatzakou, M. 关于 Engel 群和 Cartan 群上谱乘子的注记。Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 5, 2259–2270。 14. Chatzakou, M. Delgado, J. Ruzhansky, M. 关于一类非谐振子。J. Math. Pures Appl. (9) 153 (2021), 1–29。 15. Chatzakou, M. Delgado, J. Ruzhansky, M. 关于一类非谐振子 II：一般情形。Bull. Sci. Math. 180 (2022), Paper No. 103196, 22 pp. 16. Coriasco, S. Toft, J. 伪微分算子演算中 H¨ ormander 符号类的渐近展开。J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 5 (2014), no. 1, 27–41。 17. Cowling, M. G., Martini, A., M¨uller, D., Parcet, J. 李群上的 Hausdorff–Young 不等式。Math. Ann. 375 (2019), 93–131。 18. Daubechies L. 关于 Weyl 量子化中有界算子所对应的分布，Comm. Math. Phys. 75 (1980), 229–238。 19. Delgado, J. Bochner 可积函数空间中核算子的迹公式。Monatsh. Math. 172 (2013), no. 3-4, 259–275。 20. Delgado, J. Lebesgue 空间上一些积分算子的 r-核性。Tohoku Math. J. (2) 67 (2015), no. 1, 125–135。 21. Delgado, J. 环面上的 Poincar´e 行列式。J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 13 (2022), no. 3, Paper No. 29, 13 pp. 22. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧流形上的 Schatten 类：核条件。J. Funct. Anal. 267 (2014), no. 3, 772–798。 23. Delgado, J. Ruzhansky, M. Wang, B. 混合范数 Lp、调制空间与 Wiener 拼接空间中的逼近性质和核性。J. Lond. Math. Soc. (2) 94 (2016), no. 2, 391–408。 24. Delgado, J. Ruzhansky, M. Wang, B. 混合范数空间与变指数 Lebesgue 空间上的 Grothendieck-Lidskii 迹公式。J. Spectr. Theory 6 (2016), no. 4, 781–791

25. Delgado, J. Ruzhansky, M. Tokmagambetov, N. 紧流形（带边界）上的 Schatten 类、核性与非调和分析。J. Math. Pures Appl. (9) 107 (2017), no. 6, 758–783. 26. Delgado, J. Ruzhansky, M. 变指数 Lebesgue 空间的有界逼近性质与核性。Math. Scand. 122 (2018), no. 2, 299–319. 27. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧流形上的傅里叶乘子、符号与核性。J. Anal. Math. 135, no. 2, pp. 757–800, (2018). 28. Delgado, J. Ruzhansky, M. 积分算子的 Schatten-von Neumann 类。J. Math. Pures Appl. (9) 154 (2021), 1–29. 29. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧群上的 Schatten 类与迹。Math. Res. Lett. 24, no. 4, pp. 979–1003, (2017). 30. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧流形上 Schatten 类与 r-核性的核和符号判据。C. R. Math. Acad. Sci. Paris 352, no. 10, pp. 779–784, (2014). 31. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧李群上的 L^p-核性、迹与 Grothendieck–Lidskii公式。J. Math. Pures Appl. (9) 102, no. 1, pp. 153–172, (2014). 32. Fischer, V., Ruzhansky, M. 幂零李群上的量子化，Progress in Mathematics, Vol. 314, Birkhauser, 2016. xiii+557页。33. Gr¨ochenig, K. H., Heil C. 调制空间与伪微分算子，Integr. Equ. Op. Theory 34 (1999), no. 4, 439–457. 34. H¨ormander, L. 关于 $\mathbb{R}^n$. Ark. Mat.17（1979），297–313中伪微分算子特征值的渐近分布。35. H¨ormander, L. 伪微分算子的 Weyl 演算，Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 359–443. 36. H¨ormander, L. 线性偏微分算子分析，第 III-IV 卷。Springer- Verlag, (1985). 37. Robert, D., 伪微分算子的谱性质，Commun. Partial. Differ. Equ. 3 (1978), 755–826. 38. Russo, B. 关于积分算子的 Hausdorff–Young定理，Pac. J. Math. 68 (1) (1977) 241–253. 39. Ruzhansky, M., Turunen, V. 伪微分算子与对称性：基础分析与进阶主题，Birkh¨auser-Verlag, 巴塞尔, 2010. 40. Ruzhansky, M., Turunen, V. 紧李群上的尖锐 G˚arding 不等式，J. Funct. Anal. 260 (2011), 2881–2901. 41. Ruzhansky, M., Turunen, V., Wirth, J. 紧李群上的伪微分算子 H¨ormander 类与全局次椭圆性，J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), 476–499. 42. Ruzhansky M., Wirth J., 紧李群上算子的全局函数演算，J. Funct. Anal., 267 (2014), 144-172. 43. Ruzhansky, M., Wirth, J. L^p 紧李群上的傅里叶乘子，Math. Z., 280, pp. 621–642, (2015). 44. Seeley, R. T. 椭圆算子的复幂。1967 Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966) pp. 288–307 Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, R.I. 45. Simon, B. 相空间上的 Weyl变换与 Lp 函数，Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 1045–1047. 46. Sj¨ostrand J., 伪微分算子的 Wiener型代数，Seminaire Equations aux Derivees Partielles, Ecole Polytechnique, 1994/1995, Expose no IV. 47. Toft, J. Weyl 演算中的 Schatten-von Neumann性质，以及辛向量空间上的度量演算。Ann. Global Anal. Geom. 30 (2006), no. 2, 169–209. 48. Toft, J. 调制空间上伪微分算子的连续性与 Schatten性质。Modern trends in pseudo-differential operators, 173–206, Oper. Theory Adv. Appl., 172, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2007. 49. Toft, J. 调制空间上 Toeplitz算子的连续性与 Schatten性质。Modern trends in pseudo-differential operators, 313–328, Oper. Theory Adv. Appl., 172, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2007.

50. Toft, J. 调制空间上伪微分算子的 Schatten性质。Pseudo-differential operators, 175–202, Lecture Notes in Math., 1949, Springer, Berlin, 2008. 51. Toft, J. 相移不变空间的 Schatten性质、核性与极小性。Appl. Comput. Harmon. Anal. 46 (2019), no. 1, 154–176. 52. Seeley, R. T. 椭圆算子的复幂。1967 Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966) pp. 288–307, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, R. I.

Duván Cardona:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮箱地址
duvan.cardonasanchez@ugent.be

Marianna Chatzakou:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮箱地址
Marianna.Chatzakou@UGent.be

Michael Ruzhansky:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgiumand
School of Mathematical SciencesQueen Mary University of London
United Kingdom电子邮箱地址 michael.ruzhansky@ugent.be

Joachim Toft:
Department of Mathematics
Linnæus UniversityVäxjö-Sweden
电子邮箱地址 joachim.toft@lnu.se