arXiv:2301.04064v1 [math.QA] 10 Jan 2023

分圆 Grothendieck-Teichmüller 群与动机伽罗瓦群

Minoru Hirose

摘要。我们证明，Enriquez 引入的分圆 Grothendieck-Teichmüller 群的层级 2 情形，与 $\mathbb{Z}[1/2]$ 上混合 Tate 动机的动机伽罗瓦群相一致。

1. 引言

本文旨在证明层级为 $N = 2$ 的分圆 Grothendieck-Teichmüller 群与 $\mathbb{Z}[1/2]$ 上混合 Tate 动机的动机伽罗瓦群相一致。本文讨论格罗滕迪克–泰希米勒理论中的分圆情形，该理论源自层级一的情形。因此，我们先简要介绍原始情形。

令 $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})$ 为定义在 $\mathbb{Z}$ 上的混合 Tate 动机的坦纳范畴，$\mathcal{G}_1$ 为相对于典范纤维函子的动机伽罗瓦群。则 $\mathcal{G}_1$ 可分解为 $\mathcal{G}_1 = \mathbb{G}_m \ltimes \mathcal{U}_1$，其中 $\mathcal{U}_1$ 是 $\mathcal{G}_1$的幂零化部分。对于 p、$q \in \{0,1\}$，令 $\pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, p, q)$ 为 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty,1\}$上从 p 到 q 的路径的动机基本挠子，${}_q\Pi_p$ 为其相对于典范纤维函子的实现。我们将 $\exp \mathfrak{t}_{3,1}^0(\mathrm{k})$ 记为 $\mathrm{k}\langle\langle e^0, e^1\rangle\rangle$中的类群幂级数集合。[1] 于是，对于任意 p、$q \in \{0,1\}$，${}_q\Pi_p(\mathrm{k})$ 都典范同构于 $\exp \mathfrak{t}_{3,1}^0(\mathrm{k})$。[2] 对于一个类群幂级数 $f \in \exp \mathfrak{t}_{3,1}^0(\mathrm{k})$，我们将 ${}_q\Pi_p(\mathrm{k})$ 中对应的元素记为 ${}_q f_p$。那么，对于 p、$q \in \{0,1\}$，$\mathcal{G}_1$ 作用于 ${}_q\Pi_p$，且这些作用仅凭映射的数据即可恢复

$$\lambda_1 : \mathcal{U}_1 \xrightarrow{\sigma \mapsto \sigma({}_1 1_0)} {}_1\Pi_0 \simeq \exp \mathfrak{t}_{3,1}^0$$

（参见 [3, 第 5] 节）。Brown [1] 证明了 λ_1 是单射，或者等价地说，动机伽罗瓦作用 $\mathcal{G}_1 \curvearrowright {}_1\Pi_0$ 是忠实的。另一方面，Drinfeld [4] 引入了一个中间的闭子概形 $\mathrm{im}(\lambda_1) \subset \mathrm{GRT}_1 \subset \exp \mathfrak{t}_{3,\ 1}^0$ 称为（幂零化版本的）格罗滕迪克-泰希米勒群，它与 Grothendieck 在 [9] 中关于描述绝对伽罗瓦群作用的方法密切相关。以下是该领域的一个基本猜想。

猜想 1。$\mathrm{im}(\lambda_1) = \mathrm{GRT}_1$。

现在考虑分圆情形。设 N 为一个正整数，μ_N 为 N 次单位根集合。设 $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z}[\mu_N, 1/N])$ 为 $\mathbb{Z}[\mu_N, 1/N]$ 上混合 Tate 动机的坦纳范畴，$\mathcal{G}_N$为相对于典范纤维函子的动机伽罗瓦群。那么，$\mathcal{G}_N$分解为 $\mathcal{G}_N = \mathbb{G}_m \ltimes \mathcal{U}_N$，其中 $\mathcal{U}_N$是 $\mathcal{G}_N$的幂零化部分。对于 p、$q \in \{0\} \cup \mu_N$，设 $\pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\} \cup \mu_N, p, q)$ 为 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\} \cup \mu_N$ 上从 p 到 q 的路径的动机基本挠子，${}_q\Pi_p^{(N)}$为其相对于典范纤维函子的实现。我们将用 $\exp \mathfrak{t}_{3,N}^0(\mathrm{k})$ 表示 $\mathrm{k}\langle\langle e^a \mid a \in \{0\} \cup \mu_N\rangle\rangle$ 中类群幂级数的集合。那么，对于任意 p、$q \in \{0,1\}$，${}_q\Pi_p^{(N)}(\mathrm{k})$ 与 $\exp \mathfrak{t}_{3,N}^0(\mathrm{k})$ 典范同构。对于$f \in \exp \mathfrak{t}_{3,N}^0(\mathrm{k})$，将 ${}_q\Pi_p^{(N)}(\mathrm{k})$ 中对应的元素记作 ${}_q f_p$。那么，对于所有p、$q \in \{0\} \cup \mu_N$，$\mathcal{G}_N$作用于 ${}_q\Pi_p$，且这些作用仅由以下映射的数据即可恢复

$$\lambda_N : \mathcal{U}_N \xrightarrow{\sigma \mapsto \sigma({}_1 0_0)} {}_1\Pi_0^{(N)} \simeq \exp \mathfrak{t}_{3,N}^0$$

（见 [3, 第 5]节）。对于一般的 $N > 1$，λ_N 不一定是单射，但 Deligne [2] 证明了，对于 $N \in \{2,3,4,8\}$，λ_N 是单射。此外，Enriquez [5] 将 GRT_1 推广为一个中间闭

2010 数学主题分类。11M32.[1]稍后，我们将为一般的 $n \geq 2$ 和 $N \geq 1$ 定义一个李代数 $\mathfrak{t}_{n,N}$及其李子代数 $\mathfrak{t}_{n,N}^0$。[2]在本文中，我们将采用如下约定：路径 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, p, q)$ 对应于一个幂级数，其 $e^{a_k} \cdots e^{a_1}$ 的系数为 $\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \prod_{j=1}^k d\log(\gamma(t_j) - a_j)$。

子概形 $\mathrm{im}(\lambda_N) \subset \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N) \subset \exp \mathfrak{t}^0_{3,\ N}$称为层级$N$的分圆 Grothendieck-Teichmüller 群。接下来的问题至关重要。

问题 2. 像 $\mathrm{im}(\lambda_N)$ 是否等于 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N)$，或某个类似的子群?

以下是本文的主要定理。

定理 3. $\mathrm{im}(\lambda_2) = \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2)$.

评注 4. 在 [5], Enriquez 中也引入了许多与 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N)$ 类似的对象，例如 GRTM(N)、$\mathrm{GTM}(N)$、Pseudo(N)、$\mathrm{GTM}(N)_l$等。我们对这些对象与定理 3 之间的关系作一些评论。首先，$\mathrm{GRTM}(N)$ 是一个代数群 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{G}_m) \ltimes \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N)$。特别地，$\mathrm{GRTM}(2) = \mathbb{G}_m \ltimes \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2)$。因此，定理 3 蕴含 $\mathrm{GRTM}(2) \simeq \mathcal{G}_2$。其次，$\mathrm{GTM}(N)$ 是一个代数群，而 Pseudo(N) 是一个 $(\mathrm{GRTM}(N), \mathrm{GTM}(N))$-双挠子。于是定理 3 蕴含 $\mathrm{GTM}(2) \simeq \mathcal{G}_2^{\mathrm{Betti}}$且 $\mathrm{GTM}(2) \simeq \mathcal{G}^{\mathrm{dR}}_{,2}{}^{\mathrm{Betti}}$，其中 $\mathcal{G}_2^{\mathrm{Betti}}$是相对于 Betti 函子的 $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z}[1/2])$ 的动机伽罗瓦群，$\mathcal{G}^{\mathrm{dR}}_{,2}{}^{\mathrm{Betti}}$ 是相对于 Betti 函子和典范（=de Rham）函子的 $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z}[1/2])$ 的动机伽罗瓦双挠子。第三，$\mathrm{GTM}(N)_l$ 是 $\mathrm{GTM}(N)$ 的一个 pro-l 变体，并且存在自然映射 $\widehat{\ }\ \bar{}\ \mathrm{GTM}(N)_l \to \mathrm{GTM}(N, \mathbb{Q}_l)$、$\mathrm{GT} \to \mathrm{GTM}(N)_l$以及 $\mathrm{GTM}(N)_l \to \mathrm{GT}_l$。于是，Ihara [12] 研究的映射 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GT}_l$可以分解为

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\mathrm{GT}} \to \mathrm{GTM}(N)_l \to \mathrm{GT}_l.$$

由于典范映射 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathcal{G}_2^{\text{ét}}(\mathbb{Q}_l) \simeq \mathcal{G}_2^{\mathrm{Betti}}(\mathbb{Q}_l)$ 是扎里斯基稠密的，定理 3 蕴含复合映射

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\mathrm{GT}} \to \mathrm{GTM}(N)_l \to \mathrm{GTM}(N, \mathbb{Q}_l)$$

对 $N = 2$ 是扎里斯基稠密的。

定理 3 的证明主要基于 [11] 中的结果。下面略述证明。首先，态射

$$\lambda_N : \mathcal{U} \to \exp \mathfrak{t}^0_{3,N}$$

的对偶侧描述如下。令 $\mathcal{H}_N$ 为 $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z}[\mu_N, 1/N])$ 的有效动机周期环，并且 $(2\pi i)^{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_N$ 为动机 $2\pi i$。那么 $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ 与 $\mathcal{H}_N/(2\pi i)^{\mathfrak{m}}$ 典范同构。将 $\mathcal{O}(\exp \mathfrak{t}^0_{3,N})$ 识别为$\mathfrak{h}_{\overline{N}} := (\mathfrak{h}_N, \sqcap)$，其中 $\mathfrak{h}_N := \mathbb{Q}\langle e_\xi \mid \xi \in \{0\} \cup \mu_N\rangle$ 是一个以 $N+1$ 个生成元为基的自由非交换代数，而 $\sqcap\colon \mathfrak{h}_N \times \mathfrak{h}_N \to \mathfrak{h}_N$ 是由 $\mathbb{Q}$-线性配对定义的洗牌积

$$\langle \varphi, e_{a_1} \cdots e_{a_k} \rangle = (\text{coefficient of } e^{a_k} \cdots e^{a_1} \text{ in } \varphi) \qquad (\varphi \in \exp \mathfrak{t}^0_{3,N}, e_{a_1} \cdots e_{a_k} \in \mathfrak{h}_N).$$

那么，λ_N 的对偶侧可用动机迭代积分表示为

$$\mathfrak{h}_{\overline{N}} \xrightarrow{L^{\mathfrak{m}}} \mathcal{H}_N \xrightarrow{\mathrm{mod}\ (2\pi i)^{\mathfrak{m}}} \mathcal{H}_N/(2\pi i)^{\mathfrak{m}}$$

其中，$L^{\mathfrak{m}}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-线性映射，由从 0 到 1 的动机迭代积分定义。我们将这个复合映射记为 $L^{\mathfrak{a}}\colon \mathfrak{h}_{\overline{N}} \to \mathcal{H}_N/(2\pi i)^{\mathfrak{m}}$。于是，对于 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathbf{k}$，$\mathrm{im}(\lambda_N)$ 的 $\mathbf{k}$-有理点集为

$$\{\varphi \in \exp \mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathbf{k}) \mid \langle \varphi, u \rangle = 0 \text{ for all } u \in \ker L^{\mathfrak{a}}\}.$$

因此，该定理等价于

$$\langle \varphi, u \rangle = 0 \qquad (\varphi \in \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2, \mathbf{k}),\ u \in \ker L^{\mathfrak{a}}). \tag{1.1}$$

在 [11], 中，我们引入了（层级二）汇合关系集 $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} \subset \mathfrak{h}_{\overline{2}}$，并证明 $\ker L^{\mathfrak{m}}$ 等于 $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} + (e_0, e_1)$，其中 (e_0, e_1) 是由 e_0 和 e_1张成的$\mathfrak{h}_{\overline{N}}$ 的理想。因此，陈述（1.1）等价于

$$\langle \varphi, u \rangle = 0 \qquad (\varphi \in \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2, \mathbf{k}),\ u \in \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}). \tag{1.2}$$

令 $\mathrm{PENT}(N, \mathbf{k}) \subset \exp \mathfrak{t}^0_{3,\ N}(\mathbf{k})$ 为满足混合五边形方程的类群幂级数集合，该方程是 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N, \mathbf{k})$ 的定义方程之一。混合五边形方程是一个方程，属于$U\mathfrak{t}^0_{4,\ N}(\mathbf{k}) = U\mathfrak{t}^0_{4,\ N}(\mathbb{Q}) \hat{\otimes} \mathbf{k}$。本文证明以下更强的陈述：

定理 5. 如果 $\varphi \in \mathrm{PENT}(2, \mathbf{k})$ 那么 $\langle \varphi, u \rangle = 0$ 对于 $u \in \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$。

由于 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N,\mathrm{k}) \subset \mathrm{PENT}(N,\mathrm{k})$，定理 5 蕴含 (1.2)，从而得到定理 3。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾分圆 Grothendieck-Teichmüller 群 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N)$ 的定义，并给出 $\mathrm{PENT}(N,\mathrm{k})$ 的精确定义。第 3 节回顾 [11] 中给出的汇合关系定义。第 4 节给出一种显式构造方法，用以构造 $U\mathfrak{t}^0_{4,N}(\mathbb{Q})$ 对偶空间中的元素，这些元素将在后续各节中使用。第 5 节证明 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2)$ 中元素满足的 Broadhurst 对偶关系。最后，第 6 节证明定理 3 和定理 5。

2. 分圆 Grothendieck-Teichmüller 群

在本节中，我们回顾分圆 Grothendieck-Teichmüller 群的定义，该群最初在 [5] 中引入。我们基本沿用 [6] 中使用的记号。设 k 为交换的 $\mathbb{Q}$-代数。对于$n \geq 2$ 和 $N \geq 1$，令 $\mathfrak{t}_{n,N}(\mathrm{k})$ 为由生成元 t^{1j} ($2 \leq j \leq n$)、 $t(a)^{ij}(i \neq j,\, 2 \leq i,j \leq n,\, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 及以下关系定义的完备 Lie k-代数:

$$t(a)^{ij} = t(-a)^{ji}, \quad \left[t(a)^{ij}, t(a+b)^{ik} + t(b)^{jk}\right] = 0, \quad \left[t^{1i} + t^{1j} + \sum_{c\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(c)^{ij}, t(a)^{ij}\right] = 0,$$

$$\left[t^{1i}, t^{1j} + \sum_{c\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(c)^{ij}\right] = 0, \quad \left[t^{1i}, t(a)^{jk}\right] = 0, \left[t^{ij}(a), t^{kl}(b)\right] = 0$$

（i、 j、 k、 $l \in \{2,\ldots,n\}$ 两两不同，且 $a,b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$）。令 $\mathfrak{t}^0_{n,N}(\mathrm{k})$ 为 $\mathfrak{t}_{n,N}(\mathrm{k})$ 的完备 Lie 子代数，其生成元与关系相同，但不含 t^{1n} ，关系则与 $\mathfrak{t}_{n,N}$ 中的相同（涉及 t^{1n} 的关系除外）。固定 μ_N 的一个生成元 ζ_N。注意，$\mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathrm{k})$ 是秩为 $N+1$ 的完备自由 k-Lie 代数，其生成元为 $e^0 := t^{12}$ 和 $e^{\zeta_N^a} := t(a)^{23}$ $(a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$。对于满足$f(1) = 1$的部分定义映射 $f\colon \{1,\ldots,m\}$ 到 $\{1,\ldots,n\}$，定义连续 Lie k-代数态射 $t_{n,N} \to t_{m,N}\colon x \mapsto x^f = x^{f^{-1}(1)} \ldots, f^{-1}(n)$ 如下:

$$(t(a)^{ij})^f = \sum_{i'\in f^{-1}(i), j'\in f^{-1}(j)} t(a)^{i'j'}$$

and

$$(t^{1j})^f = \sum_{j'\in f^{-1}(j)} t^{1j'} + \frac{1}{2} \sum_{j',j''\in f^{-1}(j)} \sum_{c\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(c)^{j'j''} + \sum_{i'\in f^{-1}(1)\setminus\{1\}, j'\in f^{-1}(j)} t(c)^{i'j'}.$$

此后，若无混淆之虞，我们将 t^{ij} 简记为 $\mathfrak{t}_{n,1}(\mathrm{k})$ 的生成元 $t(0)^{ij}$ 。对于一个部分定义的映射

$g \quad \{2,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ $t_{n\,1} \to t_{m\,N} \quad x \mapsto :$，定义连续 Lie k-代数同态 $x^g = x^{g^{-1}\,1\ \ldots\ g^{-1}\,n}$,,: $_{(),()}$ 如下:

$$(t^{ij})^g = \sum_{i'\in g^{-1}(i), j'\in g^{-1}(j)} t(0)^{i'j'} \qquad (i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{2,\ldots,n\}).$$

我们还定义连续李 k-代数同态 $\delta : \mathfrak{t}^0_{n,N}(\mathrm{k}) \to \mathfrak{t}^0_{n,1}(\mathrm{k})$，使其满足 $t^{1j} \mapsto t^{1j}$ 以及 $t^{ij}(a) \mapsto \delta_{a,0} t^{ij}$。

定义 6. 若一对 $(g,h) \in \exp \mathfrak{t}^0_{3,1}(\mathrm{k}) \times \exp \mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathrm{k})$ 满足混合五边形方程 , 则称之为

$$h^{1,2,34} h^{12,3,4} = g^{2,3,4} h^{1,23,4} h^{1,2,3}$$

在 $\exp \mathfrak{t}^0_{4,N}$ 中成立。

此外，若 (h,h) 满足五边形方程，则称 $h \in \exp \mathfrak{t}^0_{3,1}(\mathrm{k})$ 满足五边形方程。这与五边形方程的原始定义一致。

定义 7 （（幂零化部分）格罗滕迪克-泰希米勒群）。 我们将 $\mathrm{GRT}_1(\mathrm{k})$ 定义为满足以下条件的 $g \in \exp \mathfrak{t}^0_{3,1}(\mathrm{k})$ 的集合:

(1) g 满足混合五边形方程；(2) g 中的 $e^0 e^1$ 的系数为零。

现在，我们定义 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N,\mathrm{k})$。

定义 8 （（分圆 Grothendieck-Teichmüller 群的）幂零化部分）。 我们将 $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N,\mathsf{k})$ 定义为满足以下条件的 $h\in\exp\mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathsf{k})$ 的集合：

(1) 存在 $g\in\mathrm{GRT}_1(\mathsf{k})$，使得 (g,h) 满足混合五边形方程；(2) h 中 e^1 的系数为零；

(3) $\tau_{\zeta_N}(h)^{-1}\cdot\tau_{\zeta_N}(\sigma(h))\cdot\sigma(h)^{-1}\cdot h=1$；(4) $e^0+\sum_{a\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\mathrm{Ad}(\tau_a h^{-1})(e^{\zeta_N^a})+\mathrm{Ad}\Big(h^{-1}\cdot\sigma(h)\Big)(e^\infty)=0$,

其中 $e^0+\sum_{\eta\in\mu_N}e^\eta+e^\infty=0$ 和 $\tau_\eta\,(\eta\in\mu_N)$（分别为 σ）是由 $e^a\mapsto e^{\eta a}$（分别由 $e^a\mapsto e^{a^{-1}}$）定义的自同构，其中 $a\in\{0\}\cup\mu_N$。

注 9. 式 (1) 中的元素 $g\in\mathrm{GRT}_1(\mathsf{k})$ 由 h 唯一确定。事实上，g 等于 $\delta(h)$，因为在映射 $t^{1j}\mapsto 0, t^{ij}(a)\mapsto\delta_{a,0}t^{i-1,j-1}$ 下，根据式 (2)，$h^{1,2,34}h^{12,3,4}$ 和 $g^{2,3,4}h^{1,23,4}h^{1,2,3}$ 分别映射为 $\delta(h)$ 和 g。

注 10. 在 [6], $\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N,\mathsf{k})$ 中，定义为满足相同条件的有序对 $(g,h)\in\exp\mathfrak{t}^0_{3,1}(\mathsf{k})\times\exp\mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathsf{k})$ 的集合。

定义 11. 我们将 $\mathrm{PENT}(N,\mathsf{k})$ 定义为满足混合五边形方程的 $h\in\exp\mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathsf{k})$ 的集合，其中 $(\delta(h)\ h)$ 满足该方程。

从交换 $\mathbb{Q}$-代数范畴到集合范畴的函子 $\mathsf{k}\mapsto\exp\mathfrak{t}^0_{3,N}(\mathsf{k})$、$\mathsf{k}\mapsto\mathrm{GRT}_1(\mathsf{k})$、$\mathsf{k}\mapsto\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N,\mathsf{k})$ 和 $\mathsf{k}\mapsto\mathrm{PENT}(N,\mathsf{k})$ 均可表出。我们分别将与这些函子对应的仿射 $\mathbb{Q}$-概形记为 $\exp\mathfrak{t}^0_{3,N}$、$\mathrm{GRT}_1,\mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(N)$ 和 $\mathrm{PENT}(N)$。

命题 12. 设 $h=h(e^0,e^{\zeta_N^0},\dots,e^{\zeta_N^{N-1}})\in\mathrm{PENT}(N,\mathsf{k})$。则，

(i) h中 e^0 和 e^1 的系数均为零；*(ii)* $g=\delta(h)$ 满足 $g^{1,2,34}g^{12,3,4}=g^{2,3,4}g^{1,23,4}g^{1,2,3}$；*(iii)* $g=\delta(h)$ 满足对偶关系 $g(e_0,e_1)g(e_1,e_0)=1$ 以及正则化双重洗牌关系（见 [8]）。

(iv) h 满足（特殊情形的）分布关系

$$h(Ne^0,e^1,\dots,e^1)=\exp(\rho e^1)h(e^0,e^1,0,\dots,0)$$

其中，ρ 是 $h(Ne^0,e^1,\dots,e^1)-h(e^0,e^1,0,\dots,0)$ 中 e^1 的系数。

证明。 根据定义，

$$h^{1,2,34}h^{12,3,4}=\delta(h)^{2,3,4}h^{1,23,4}h^{1,2,3}. \tag{2.1}$$

$h^{1,2,34}h^{12,3,4}$ 中 t^{12} 的系数（分别地，$\delta(h)^{2,3,4}h^{1,2,3}$ 中 $t^{34}(0)$ 的系数）等于 $\langle h,e_0\rangle$（分别地，$\langle h,e_1\rangle$）。因此 $\langle h,e_0\rangle=0$。$h^{1,2,34}h^{12,3,4}$ 中 $t^{34}(0)$ 的系数（分别地，$\delta(h)^{2,3,4}h^{1,2,3}$ 中 $t^{34}(0)$ 的系数）等于 $\langle h,e_1\rangle$（分别地，$2\langle h,e_1\rangle$）。因此 $\langle h,e_1\rangle=0$。由此证明了(i)。令 $g=\delta(h)$。应用映射

$$\mathfrak{t}_{n,N}\to\mathfrak{t}_{n,1}\quad;\quad t^{1j}\mapsto t^{1j},\ t^{ij}(a)\mapsto\delta_{a,0}t^{ij}$$

由 2.1，得到

$$g^{1,2,34}g^{12,3,4}=g^{2,3,4}g(t^{12}+t^{13}+t^{23},t^{24}+t^{34})g^{1,2,3}.$$

此外，由于 $\langle g,e_0\rangle=0$, $g\in\exp\mathfrak{t}^0_{3,1}(\mathsf{k})$，以及 $[t^{23},t^{12}+t^{13}]=[t^{23},t^{24}+t^{34}]=0$，我们得到

$$g(t^{12}+t^{13}+t^{23},t^{24}+t^{34})=g^{1,23,4}.$$

由此也证明了 (ii)。接着，(iii) 由 (ii) 以及 [7] 和 [8]中的结果推出。最后，(iv) 在[6, 命题 2.9 (2)] 中得到证明 □

3. 汇合关系回顾

本节中，我们回顾 [11] 中汇合关系集合的定义 $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$。我们基本沿用 [11], 的相同记号，只是在这里使用 $\mathbb{Q}$-模，而非 $\mathbb{Z}$-模。对于 $S\subset\{0,1,-1\}$，我们

用 $\mathcal{A}(S)$ 表示由形式符号 $\{e_a \mid a \in S\}$ 生成的自由 $\mathbb{Q}$-代数。此外，我们将子空间 $\mathcal{A}^0(S) \subset \mathcal{A}(S)$ 和 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}(\{0,1\})$ 定义为

$$\mathcal{A}^0(S) \coloneqq \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\substack{a_1,\dots,a_k \in S \\ a_1 \neq 0, a_k \neq 1}} \mathbb{Q} e_{a_1} \cdots e_{a_k},$$

$$\mathcal{C} \coloneqq \mathbb{Q} \oplus e_1 \mathbb{Q} \langle e_0, e_1 \rangle .$$

Put

$$\mathcal{B} \coloneqq \sum_{\substack{a_1,\dots,a_k \in \{0,-1,z,-z^2\} \\ a_1 \neq 0, a_k \neq z}} \mathbb{Q} e_{a_1} \cdots e_{a_k}.$$

令 $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}\colon \mathcal{A}(\{0,1\}) \to \mathcal{A}^0(\{0,1\})$ 为唯一的 $\sqcup\!\sqcup$-态射，使得 $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(e_0) = \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(e_1) = 0$ 且 $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(u) = u$ 对于 $u \in \mathcal{A}^0(\{0,1\})$ 成立。通过 $\varrho(e_0) = e_0 - e_1$ 和 $\varrho(e_1) = -e_1$ 定义 ϱ of $\mathcal{A}(\{0,1\})$ 的一个自同构。此外，通过 $\mathrm{dist}(e_0) = 2e_0$ 和 $\mathrm{dist}(e_1) = e_1 + e_{-1}$ 定义一个 $\mathbb{Q}$-代数同态 $\mathrm{dist}\colon \mathcal{A}(\{0,1\}) \to \mathcal{A}(\{0,1,-1\})$。

定义 13. 对于 $d \geq 0$ 和 $\Bbbk = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 1}$，令 $\theta(\Bbbk)$、$\theta_1(\Bbbk)$、$\theta'(\Bbbk)$ 和 $\mathrm{w}^\star(\Bbbk)$ 为 $\mathcal{A}(\{0,1,-1\})$ 中由下式定义的元素

$$\theta(k_1, \dots, k_d) \coloneqq \begin{cases} -\sum_{j=1}^{d} e_1 e_0^{k_j - 1} \cdots e_1 e_0^{k_1 - 1} \sqcup\!\sqcup \theta(k_{j+1}, \dots, k_d) & d > 0 \\ 1 & d = 0, \end{cases}$$

$$\theta'(\Bbbk) \coloneqq \mathrm{dist} \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup} \circ \varsigma \circ \theta(\Bbbk),$$

$$\theta_1(\Bbbk) \coloneqq \theta'(\Bbbk) + 2 \sum_{\substack{\Bbbk = (\Bbbk', \{1\}^{2m}) \\ m \geq 1}} e_{-1} e_0^{2m-1} \sqcup\!\sqcup \theta'(\Bbbk'),$$

$$\mathrm{w}^\star(k_1, \dots, k_d) \coloneqq \begin{cases} -e_1 e_0^{k_1 - 1}(e_0 - e_1) e_0^{k_2 - 1} \cdots (e_0 - e_1) e_0^{k_d - 1} & d > 0 \\ 1 & d = 0. \end{cases}$$

注意，$\{\varrho(\mathrm{w}^\star(\Bbbk))\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一组基。现在，利用上述记号，我们定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\wp : \mathcal{C} \to \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\})$，如下

$$\wp(\varrho(\mathrm{w}^\star(k_1, \dots, k_d))) \coloneqq \theta_1(k_1, \dots, k_d).$$

在 [11, 引理 2.17], 中，作者证明了

$$L^{\mathfrak{m}}(\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(\varsigma(w)) = L^{\mathfrak{m}}(\wp(w)) \tag{3.1}$$

对于 $w \in \mathcal{C}$。证明 $L^{\mathfrak{m}}$ 引理 2.17] 时所用的性质是 $L^{\mathfrak{m}} \mid_{\mathcal{A}^0(\{0,1\})}$ 的正则化双重洗牌关系和对偶关系，以及分布关系 $(1 - 2^{1-2m}) L^{\mathfrak{m}}(e_1 e_0^{2m-1}) = -L^{\mathfrak{m}}(e_{-1} e_0^{2m-1})$（及其特殊情形）。这些性质也满足

$$Z_\varphi : \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\}) \to \mathbf{k} \quad ; \quad u \mapsto \langle \varphi, u \rangle$$

由命题 12 可得 $\varphi \in \mathrm{PENT(2,k)}$。因此，(3.1) 对 Z_φ 也成立，即我们有

$$\langle \varphi, \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(\varsigma(w)) \rangle = \langle \varphi, \wp(w) \rangle \tag{3.2}$$

对于 $\varphi \in \mathrm{PENT(2,\,k)}$ 和 $w \in \mathcal{C}$。

定义 $\mathrm{reg}_{z \to 0}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\})$ 如下

$$\mathcal{B} \xrightarrow{e_{-1} \mapsto 0} \mathcal{B}' \xrightarrow[\simeq]{u \sqcup\!\sqcup v \mapsto u \otimes v} \mathcal{B}'' \otimes \mathcal{B}''' \xrightarrow{\overline{\mathrm{reg}}_{z \to 0} \otimes \epsilon} \mathcal{A}^0(\{0,1\}) \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{u \otimes v \mapsto \mathrm{dist}(u) \sqcup\!\sqcup \wp(v)} \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\}).$$

其中 $\mathcal{B}'$、$\mathcal{B}''$、$\mathcal{B}'''$ 和 $\mathcal{C}$ 是由以下方式定义的 $\mathbb{Q}$-模

$$\mathcal{B}' \coloneqq \mathcal{B} \cap \mathbb{Q} \langle e_0, e_z, e_{-z^2} \rangle ,$$

$$\mathcal{B}'' \coloneqq \mathcal{B}' \cap (\mathbb{Q} \oplus e_z \mathbb{Q} \langle e_0, e_z, e_{-z^2} \rangle) ,$$

$$\mathcal{B}''' \coloneqq \mathcal{B}' \cap \mathbb{Q} \langle e_0, e_{-z^2} \rangle ,$$

$\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}$ 是从 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_z, e_{-z^2}\rangle$ 到 $\mathcal{A}(\{0,1\})$ 的环同态，定义为 $\mathrm{reg}_{z\to 0}(e_0) = \overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{-z^2}) = \overline{e_0}$ 且 $\mathrm{reg}_{z\to 0}(e_z) = e_1$；$\overline{\epsilon}$ 是从 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_{-z^2}\rangle$ 到 $\mathcal{A}(\{0,1\})$ 的环同态，定义为 $\epsilon(e_0) = e_0$ 且 $\epsilon(e_{-z^2}) = e_1$。

对于 $c \in \{0,1,-1\}$，定义 $\partial_c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$，其定义为

$$\partial_c(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) = \sum_{i=1}^{k} \left(\mathrm{ord}_{z=c}(a_i - a_{i+1}) - \mathrm{ord}_{z=c}(a_i - a_{i-1})\right) e_{a_1}\cdots e_{a_{i-1}} e_{a_{i+1}} \cdots e_{a_k}$$

其中 $a_0 = 0$、$a_{k+1} = z$，且 $\mathrm{ord}_{z=c}(0) = 0$。定义 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\})$，其定义为

$$\varphi(u) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\ldots,c_l \in \{0,1,-1\}} \mathrm{reg}_{z\to 0}(\partial_{c_1}\cdots\partial_{c_l} u) \prod \mathrm{reg}_{\prod}(e_{c_1}\cdots e_{c_l}).$$

现在，$\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} \subset \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\})$ 定义为

$$\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} := \{u\,|_{z\to 1} - \varphi(u) \mid u \in \mathcal{B}\}$$

其中映射 $u \mapsto u\,|_{z\to 1}$ 是从 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_{-1}, e_z, e_{-z^2}\rangle$ 到 $\mathcal{A}(\{0,1,-1\})$ 的环态射，定义为 $e_0\,|_{z\to 1} = e_0$、$e_{-1}\,|_{z\to 1} = e_{-z^2}\,|_{z\to 1} = e_{-1}$ 和 $e_z\,|_{z\to 1} = e_1$。以下是 [11] 的主要定理。

定理 14。设 $L^{\mathfrak{m}} : \mathcal{A}^0(\{0,1,-1\}) \to \mathcal{H}_2$ 为由 $L^{\mathfrak{m}}(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) = I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \ldots, a_k; 1)$ 定义的 $\mathbb{Q}$-线性映射。那么

$$\ker(L^{\mathfrak{m}}) = \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}.$$

4. $U\mathfrak{t}_{4,N}(\mathbb{Q})$ 的对偶向量空间

设 $U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{k})$ 为 $\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{k})$ 的泛包络代数的完备化。回顾一下，混合五边形方程被表述为 $\exp \mathfrak{t}_{4,N}(\mathbb{k}) \subset U\mathfrak{t}_{4,N}(\mathbb{k}) = U\mathfrak{t}_{4,N}(\mathbb{Q}) \hat{\otimes} \mathbb{k}$ 中的一个等式。设 $R_{n,N}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上自由变量 $\tilde{t}^{ij}(2 \le j \le n)$ 和 $\tilde{t}(a)^{ij}(i \ne j,\ 2 \le i, j \le n,\ a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 的形式幂级数环。于是，我们可以将 $U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{Q})$ 视为 $R_{n,N}$ 在满射映射下的一个商

$$R_{n,N} \to U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{Q}) \quad ; \quad \tilde{t}^{1j} \mapsto t^{1j},\ \tilde{t}(a)^{ij} \mapsto t(a)^{ij}.$$

显然，$R_{n,N}(\mathbb{Q})$ 的（拓扑）对偶向量空间 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}}(R_{n,N}(\mathbb{Q})\ \mathbb{Q})$ 可视为 $\mathbb{Q}$ in $n - 1 + (n-1)(n-2)N$ 个变量上的非交换多项式环。于是，$U\mathfrak{t}_{4,N}$ 的对偶空间嵌入为该非交换多项式环的 $\mathbb{Q}$-向量子空间。本节将提出一种构造该子空间中元素的方法。

4.1. Ω 的定义。

设 F 是一个域，

$$\Omega^{\bullet}_F := \left(\Omega^0_F \to \Omega^1_F \to \Omega^2_F \to \cdots\right)$$

$\mathrm{Spec}(F)$ 上的卡勒微分形式复形，

$$B^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_F) := (B^0(\Omega^{\bullet}_F) \to B^1(\Omega^{\bullet}_F) \to \cdots)$$

$\Omega^{\bullet}_F$ 的约化 bar 复形，以及

$$H^0(B^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_F)) := \ker(B^0(\Omega^{\bullet}_F) \to B^1(\Omega^{\bullet}_F))$$

$B^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_F)$ 的第一上同调群。定义 $T(\Omega^1_F) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\Omega^1_F)^{\otimes k}$ 的一个 $\mathbb{Q}$-线性子空间 $\Omega^{\star}_F$，使得

$$\Omega^{\star}_F := T(\bar{\Omega}_F) \cap H^0(B^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_F))$$

其中

$$\bar{\Omega}^1_F := \{\frac{da}{a} \mid a \in F^{\times}\} \subset \Omega^1_F.$$

更明确地说，$\Omega^{\star}_F$ 是从 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (\bar{\ }\Omega^1_F)^{\otimes k}$ 到 $\bigoplus_{i,j=0}^{\infty} (\bar{\ }\Omega^1_F)^{\otimes i} \otimes \Omega^2_F \otimes (\bar{\ }\Omega^1_F)^{\otimes j}$ 的 $\mathbb{Q}$-线性映射的核，该映射定义为

$$\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k \mapsto \sum_{i=1}^{k-1} \omega_1 \otimes \cdots \omega_{i-1} \otimes (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \otimes \omega_{i+2} \otimes \cdots \otimes \omega_k.$$

4.2. 、的刻画。令 $\mathbb{Q}_N := \mathbb{Q}(\mu_N)$及$F_{n,N} := \mathbb{Q}_N(z_2, \dots, z_n)$。固定一个生成元$\zeta_N \in \mu_N$。令$\Omega^1_{n,N}$ 为由下列元素张成的$\Omega^1_{F_{n,N}}$ 的 $\mathbb{Q}$-子模

$$\frac{dz_i}{z_i} \quad (2 \le i \le n)$$

and

$$\frac{dz_i}{z_i - \zeta_N^a z_j} \quad (2 \le i, j \le n,\ i \ne j,\ a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

我们将 $T(\Omega^1_{n,\ N}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega_n^{\otimes k}{}_{,\ N} \subset T(\Omega^1_{F_{n,\ N}})$ 视为一个 $\mathbb{Q}$-代数，由 $u \cdot v = v \otimes u$.[3]于是，我们通过一个元素将 $R_{n,\ N}(\mathbf{k})$ 与 $T(\Omega^1_{n,\ N})$ 的对偶向量空间等同起来

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_i \frac{dz_i}{z_i} \cdot s^{1i} + \sum_{i,j,a} \frac{dz_i}{z_i - \zeta_N^a z_j} \cdot s(a)^{ij} \right)^m \in T(\Omega_{n,N}) \hat{\otimes} R_{n,N}.$$

现在，我们可以给出$U\mathfrak{t}_{n,\ N}(\mathbf{k})$ 的对偶向量空间的刻画。

命题 15. 对于 $n \ge 2$ 和 $N \ge 1$，$U\mathfrak{t}_{n,\ N}(\mathbb{Q})$ 是.....的对偶向量空间

$$\Omega^\star_{F_{n,N}} \cap T(\Omega^1_{n,N}) \quad (\subset T(\Omega^1_{n,N})),$$

即，

$$U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbf{k}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Omega^\star_{F_{n,N}} \cap T(\Omega^1_{n,N}), \mathbf{k}), \quad \Omega^\star_{F_{n,N}} \cap T(\Omega^1_{n,N}) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}}(U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{Q}), \mathbb{Q}).$$

证明. 这由定义可得。 □

4.3. Ω 的构造。对于 $k \ge 0$，我们用 A_F^k 表示由形式符号 $\mathbb{I}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$ 生成的 $\mathbb{Q}$-向量空间，其中 a_1、...、$a_k \in F$ 以及 a_0、$a_k \in F \cup \{\infty\}$。定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\partial\colon A_F^k \to A_F^{k-1} \otimes \bar{\Omega}^1_F$，如下:

$$\partial \mathbb{I}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \sum_{r \in \{\pm 1\}} r \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}(a_0; a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_k; a_{k+1}) \otimes d\log(a_{i+r} - a_i),$$

其中，对于 $a \in \{0, \infty\}$，我们令 $d\log(a) = 0$。

定义 16。对于 $k \ge 0$，我们定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\psi^k\colon A_F^k \to (\bar{\Omega}^1_F)^{\otimes k}$，如下所示。对于情形 $k = 0$，令 $\psi^0(\mathbb{I}(a_0; a_1)) = 1$。对于 $k \ge 1$，递归地将 ψ^k 定义为以下复合映射

$$A_F^k \xrightarrow{\partial} A_F^{k-1} \otimes \bar{\Omega}^1_F \xrightarrow{\psi^{k-1} \otimes \mathrm{id}} (\bar{\Omega}^1_F)^{\otimes(k-1)} \otimes \bar{\Omega}^1_F \simeq (\bar{\Omega}^1_F)^{\otimes k}.$$

引理 17。复合映射

$$A_F^k \xrightarrow{\partial} A_F^{k-1} \otimes \bar{\Omega}^1_F \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} A_F^{k-2} \otimes \bar{\Omega}^1_F \otimes \bar{\Omega}^1_F \xrightarrow{u \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto u \otimes (\omega_1 \wedge \omega_2)} A_F^{k-2} \otimes \Omega^2_F$$

为零。

[3]乘法的标准定义是 $u \cdot v = u \otimes v$，但为了协调结合子和 $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$ 的定义中乘法顺序的差异，我们在此调整了顺序。

证明。 根据定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&(\partial\otimes\mathrm{id})\circ\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1}))\\
&=\sum_{1\le i\le k}\sum_{r\in\{\pm1\}}\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_k;a_{k+1}))\otimes d\log(a_{i+r}-a_i)\\
&=\sum_{1\le j<i\le k}\sum_{r,s\in\{\pm1\}}rs\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_j},\dots,\widehat{a_i},\dots,a_k;a_{k+1}))\\
&\qquad\otimes\begin{cases}d\log(a_{j+s}-a_j)\otimes d\log(a_{i+r}-a_i) & (j,s)\neq(i-1,1)\\ d\log(a_{i+1}-a_{i-1})\otimes d\log(a_{i+r}-a_i) & (j,s)=(i-1,1)\end{cases}\\
&\quad+\sum_{1\le i<j\le k}\sum_{r,s\in\{\pm1\}}\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,\widehat{a_j},\dots,a_k;a_{k+1}))\\
&\qquad\otimes\begin{cases}d\log(a_{j+s}-a_j)\otimes d\log(a_{i+r}-a_i) & (j,s)\neq(i+1,-1)\\ d\log(a_{i+1}-a_{i-1})\otimes d\log(a_{i+r}-a_i) & (j,s)=(i+1,-1)\end{cases}\\
&=\sum_{1\le i<j\le k}\sum_{r,s\in\{\pm1\}}rs\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,\widehat{a_j},\dots,a_k;a_{k+1}))\\
&\qquad\otimes(d\log(a_{i+r}-a_i)\otimes d\log(a_{j+s}-a_j)+d\log(a_{j+s}-a_j)\otimes d\log(a_{i+r}-a_i))\\
&\quad+\sum_{1\le i<k}\partial(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_i,a_{i+1}},\dots,a_k;a_{k+1}))\\
&\qquad\otimes\Bigg(\sum_{r\in\{\pm1\}}r\Big(d\log(a_{i+2}-a_i)-d\log(a_{i+1}-a_i)\Big)\otimes d\log(a_{i+1+r}-a_{i+1})\\
&\qquad\quad-\sum_{r\in\{\pm1\}}r\Big(d\log(a_{i+1}-a_{i-1})-d\log(a_{i+1}-a_i)\Big)\otimes d\log(a_{i+r}-a_i)\Bigg).
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
d\log(a_{i+r}-a_i)\wedge d\log(a_{j+s}-a_j)-d\log(a_{j+s}-a_j)\wedge d\log(a_{i+r}-a_i)=0,\\
\sum_{r\in\{\pm1\}}r\Big(d\log(a_{i+2}-a_i)-d\log(a_{i+1}-a_i)\Big)\wedge d\log(a_{i+1+r}-a_{i+1})=0,\\
\sum_{r\in\{\pm1\}}r\Big(d\log(a_{i+1}-a_{i-1})-d\log(a_{i+1}-a_i)\Big)\wedge d\log(a_{i+r}-a_i)=0,
\end{aligned}
$$

我们得到所述结论。 □

我们定义 $A_F=\bigoplus_{k=0}^{\infty}A_F^k$和 $\psi=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\psi_k\colon\ A_F\to T(\bar{}\Omega^1_F)$。

命题 18. 对于 $u\in A_F$，我们有 $\psi(u)\in\Omega^\star_F$。

证明。 这由引理 17 得出。 □

回顾一下，$U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{Q})$ 的对偶向量空间为 $\Omega^\star_{F_{n,N}}\cap T(\Omega^1_{n,N})$。由命题 18 可知，我们可以构造该空间中的元素。令 $A_{n,N}$为由元素 $\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1})$ 张成的 $A_{F_{n,N}}$ 的一个子空间，使得对于所有 $i,j\in\{0,\dots,k+1\}$，都有 $d\log(a_i-a_j)\in\Omega^1_{n,N}$。

命题 19。 </style}对于，N，我们有

$$\psi(u)\in\Omega^\star_{F_{n,N}}\cap T(\Omega^1_{n,N})\qquad(=\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{Q}}(U\mathfrak{t}_{n,N}(\mathbb{Q}),\mathbb{Q})\,).$$

证明。 这只是命题 18 的一个特例。 □

Let

$$\mathfrak{t}^{(1)}_{n,N}\coloneqq\bigoplus_{j=2}^{n}\mathbb{Q}t^{1j}\oplus\bigoplus_{2\le i<j\le n,\,a\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}t(a)^{ij}\subset U\mathfrak{t}_{n,N}$$

be $\mathfrak{t}^{U\mathfrak{t}_n}$ 的 1 次部分，$_N$。对于 $s \in \mathfrak{t}_n^{(1)}{}_{,\ N}$，定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\partial^{(s)}\colon A_{n,\ N} \to A_{n,\ N}$，其定义如下：

$$\partial^{(s)}\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1}) = \sum_{r\in\{\pm1\}} r \sum_{\substack{i=1\\ a_{i+r}\neq a_i}}^{k} \langle s, d\log(a_{i+r}-a_i)\rangle \cdot \mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_k;a_{k+1}).$$

那么，对于 $\varphi \in U\mathfrak{t}_{n,N}$ 和 $u \in A_{n,N}$，配对 $\langle \varphi, \psi(u)\rangle$ 可通过以下递推公式计算：

$$\langle 1, \psi(\mathbb{I}(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1}))\rangle = \delta_{k,0}, \tag{4.1}$$

$$\langle s\cdot\varphi, \psi(w)\rangle = \langle \varphi, \psi(\partial^{(s)}w)\rangle. \tag{4.2}$$

5. Broadhurst 对偶

令 $\mathcal{A}_z := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1, e_z\rangle$ 为一个自由非交换代数，

$$\mathcal{A}_z^0 := \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}e_z \oplus \bigoplus_{\substack{a\in\{1,z\}\\ b\in\{0,z\}}} e_a\mathcal{A}_z e_b \ \subset \mathcal{A}_z^1 = \mathbb{Q}\oplus \bigoplus_{a\in\{1,z\}} e_a\mathcal{A}_z \ \subset \mathcal{A}_z$$

$\mathcal{A}_z$的子空间，以及由 $\tau_z(e_0) = e_z - e_1$, $\tau_z(e_1) = e_z - e_0$ 和$\tau_z(e_z) = e_z$定义的 $\mathcal{A}_z$ 的反自同构。对于 $c \in \{0,1\}$，定义 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\partial_{z,c}\colon \mathcal{A}_z \to \mathcal{A}_z$，使得

$$\partial_{z,c}(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) := \sum_{i=1}^{k} (\delta_{\{a_i,a_{i+1}\},\{z,c\}} - \delta_{\{a_i,a_{i-1}\},\{z,c\}}) e_{a_1}\cdots\widehat{e_{a_i}}\cdots e_{a_k}$$

其中 $e_0 = 0$ 和 $e_{a_{k+1}} = 1$。本节中，我们利用以下定理证明 PENT(2,k) 中元素的 Broadhurst 对偶。

定理 20 ([10, 定理 10]，τ_z的代数微分)。对于 $u \in \mathcal{A}_z^0$ 和 $c \in \{0,1\}$，有

$$\tau_z^{-1}\circ\partial_{z,c}\circ\tau_z(u) = \partial_{z,c}(u).$$

我们将由 $\mathbb{Q}(z,w)$ 到 $_2 = \mathbb{Q}(z_2,z_3,z_4)$ 的域嵌入记为 ι，其定义为

$$\iota(z) = -\frac{z_4}{z_3}, \iota(w) = \frac{z_2}{z_3}.$$

Then

$$\begin{aligned}
d\log(\iota(0)-\iota(1))) &= 0,\\
d\log(\iota(0)-\iota(z)) &= -d\log(z_3)+d\log(z_4),\\
d\log(\iota(0)-\iota(w)) &= d\log(z_2)-d\log(z_3),\\
d\log(\iota(1)-\iota(z)) &= d\log(z_3+z_4)-d\log(z_3),\\
d\log(\iota(1)-\iota(w)) &= d\log(z_2-z_3)-d\log(z_3),\\
d\log(\iota(z)-\iota(w)) &= d\log(z_2+z_4)-d\log(z_3).
\end{aligned}$$

定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $f\colon \mathcal{A}_z \to \mathcal{A}_{4,2}$，使得 $f(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) = \mathbb{I}(0;\iota(a_1)\dots,\iota(a_k);\iota(w))$。那么根据命题 19，$\psi(f(u))$ 是 $U\mathfrak{t}_{4,2}$ 的对偶向量空间中的元素，其中 $u \in \mathcal{A}_z$。以下将 $U\mathfrak{t}_{4,2}^0$ 中的 $t(0)^{ij}$ 和 $t(1)^{ij}$分别记为 t_+^{ij} 和 t_-^{ij}。回忆一下，PENT(2, k) 定义为满足下列条件的类群幂级数 $h \in \exp\mathfrak{t}_{3,2}^0$

$$h^{1,2,34}h^{12,3,4} = \delta(h)^{2,3,4}h^{1,23,4}h^{1,2,3}$$

利用（4.1）和（4.2），我们来计算 $\langle h^{1,\ 2,\ 34}h^{12,\ 3,\ 4}, \psi(f(u))\rangle$ 以及 $\langle \delta(h)^{2,\ 3,\ 4}h^{1,\ 23,\ 4}h^{1,\ 2,\ 3}$和 $\psi(f(u))\rangle$。

引理 21。对于 $s \in \mathfrak{t}_{4\ 2}^{(1)}{}_{,\ ,}$ 我们有

$$\partial^{(s)}\circ f(\mathcal{A}_z^1) \subset f(\mathcal{A}_z^1).$$

证明。这由 $\partial^{(s)}$ 的定义可得。 □

引理 22. 对于 $h = h(e^0,\ e^1,\ e^{-1}) \in \exp\mathfrak{t}_{3,\ 2}^0$ 和 $u \in \mathcal{A}_z^1$，我们有

$$\left\langle h^{1,2,34}h^{12,3,4}, \psi(f(u))\right\rangle = \left\langle h, u|_{z\to -1}\right\rangle.$$

证明. 首先注意到

$$h^{1,2,34} = h(t^{12}, t_+^{23} + t_+^{24}, t_-^{23} + t_-^{24}),$$
$$h^{12,3,4} = h(t^{13} + t_+^{23} + t_-^{23}, t_+^{34}, t_-^{34}).$$

根据定义，我们有

$$\partial^{(t_{12})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,0} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}),$$
$$\partial^{(t_+^{23}+t_+^{24})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,1} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}),$$
$$\partial^{(t_-^{23}+t_-^{24})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,z} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}).$$

因此，由 (4.1) 和 (4.2) 可得

$$\left\langle h^{1,2,34} h^{12,3,4}, \psi(f(e_{a_1} \cdots e_{a_k})) \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} \left\langle h, (e_{a_{j+1}} \cdots e_{a_k})\big|_{z\to -1} \right\rangle \cdot \left\langle h^{12,3,4}, \psi(f(e_{a_1} \cdots e_{a_j})) \right\rangle$$

其中，$u \mapsto u\,|_{z\to -1}$ 是从 $\mathcal{A}_z$ 到 $\mathfrak{h}_2 = \mathbb{Q}\langle e_0$的环同态，$e_1$、$e_{-1}\rangle$ 由 $e_z \mapsto e_{-1}$ 和$e_a \mapsto e_a$ 定义，其中 $a \in \{0,1\}$。由于

$$\partial^{(s)} \circ f(e_a) = 0 \qquad (s \in \{t^{13} + t_+^{23} + t_-^{23}, t_+^{34}, t_-^{34}\},\ a \in \{1, z\})$$

并且 $f(e_{a_1} \cdots e_{a_j}) \in \mathcal{A}_z^1$，引理 21 蕴含

$$\left\langle h^{12,3,4}, \psi(f(e_{a_1} \cdots e_{a_j})) \right\rangle = \left\langle 1, \psi(f(e_{a_1} \cdots e_{a_j})) \right\rangle = \delta_{j,0}.$$

因此，引理得证。 □

令 $u \mapsto u\,|_{z\to\infty}$ 为从 $\mathcal{A}_z$ 到 $\mathfrak{h}_2$ 的环同态，由 $e_z \mapsto 0$ 和 $e_a \mapsto e_a$ （$a \in \{0,1\}$ 时）定义。

引理 23. 对于 $h = h(e^0, e^1, e^{-1}) \in \exp \mathfrak{t}_{3,2}^0$ 和 $u \in \mathcal{A}_z^0$，有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4} h^{1,23,4} h^{1,2,3}, \psi(f(u)) \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\ldots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(u))|_{z\to\infty} \right\rangle.$$

其中我们记 $D_0 = -\partial_{z,0} - \partial_{z,1}$ 和 $D_1 = \partial_{z,1}$。

证明. 首先注意到

$$h^{1,2,3} = h(t^{12}, t_+^{23}, t_-^{23}),$$
$$h^{1,23,4} = h(t^{12} + t^{13} + t_+^{23} + t_-^{23}, t_+^{24} + t_+^{34}, t_-^{24} + t_-^{34}),$$
$$\delta(h)^{2,3,4} = h(t_+^{23}, t_+^{34}, 0).$$

由于

$$\partial^{(t_+^{23})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,1} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}),$$
$$\partial^{(t_+^{34})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = 0,$$

我们有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4} h^{1,23,4} h^{1,2,3}, \psi(f(u)) \right\rangle = \left\langle h^{1,23,4} h^{1,2,3}, \psi(f(u)) \right\rangle.$$

此外，由于

$$\partial^{(t^{12}+t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23})} \circ f(u) = f(D_0(u)),$$
$$\partial^{(t_+^{24}+t_+^{34})} \circ f(u) = 0,$$
$$\partial^{(t_-^{24}+t_-^{34})} \circ f(u) = f(D_1(u)),$$

我们有

$$\left\langle h^{1,23,4} h^{1,2,3}, \psi(f(u)) \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\ldots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h^{1,2,3}, \psi(f(D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(u))) \right\rangle.$$

最后，由于

$$\partial^{(t^{12})} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,0} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}),$$
$$\partial^{(t^{23}_+)} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = \delta_{a_k,1} f(e_{a_1} \cdots e_{a_{k-1}}),$$
$$\partial^{(t^{23}_-)} \circ f(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = 0,$$

我们有

$$\left\langle h^{1,2,3}, \psi(f(w)) \right\rangle = \left\langle h, w|_{z\to\infty} \right\rangle$$

对于任意 $w \in \mathbb{Q}\langle e_0, e_1, e_z\rangle$。因此，我们有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4} h^{1,23,4} h^{1,2,3}, \psi(f(u)) \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(u))|_{z\to\infty} \right\rangle. \qquad \square$$

现在我们可以证明 PENT(2, k) 中元素的 Broadhurst 对偶。

命题 24（混合结合子的 Broadhurst 对偶）。若 $h \in$ PENT(2, k) 则

$$h = \exp(-\alpha_h e^1)\mathcal{T}(h)^{-1} \exp(-\alpha_h e^0),$$

其中，α_h 是 h 中的 e^{-1} 的系数，而 $\mathcal{T}$是$U\mathrm{t}^0_3$的对合，2 由 $e^0 \leftrightarrow e^1$ 和 $e^{-1} \leftrightarrow e^\infty = -e^0 - e^1 - e^{-1}$定义。

证明。由于两边都是群状元，只需验证

$$\langle h, u \rangle = \langle \exp(-\alpha_h e^1)\mathcal{T}(h)^{-1} \exp(-\alpha_h e^0), u \rangle$$

$u \in \{e_0, e_1\} \cup \mathcal{A}^0(\{0, 1, -1\})$。由于 h 满足混合五边形方程，h 中 e^0 和 e^1的系数为零。此外，根据定义，我们有

$$\langle \exp(-\alpha_h e^1)\mathcal{T}(h)^{-1} \exp(-\alpha_h e^0), e_0 \rangle = \langle \exp(-\alpha_h e^1)\mathcal{T}(h)^{-1} \exp(-\alpha_h e^0), e_1 \rangle = 0.$$

因此，$u \in \{e_0, e_1\}$ 的情形得证。由引理 22 和 23，我们有

$$\left\langle h, u|_{z\to -1} \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(u))|_{z\to\infty} \right\rangle$$

$u \in \mathcal{A}^0_z$。将 $u = w - \tau_z(w)$代入 $w \in \mathcal{A}^0_z$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle h, w|_{z\to -1} \right\rangle - \left\langle h, \tau_z(w)|_{z\to -1} \right\rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(w))|_{z\to\infty} \right\rangle \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l \in \{0,1\}} \langle h, e_{-c_1} \cdots e_{-c_l} \rangle \cdot \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l} \circ \tau_z(w))|_{z\to\infty} \right\rangle.
\end{aligned}$$

这里，最后一项可计算为

$$\begin{aligned}
&\left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l} \circ \tau_z(w))|_{z\to\infty} \right\rangle \\
&= \left\langle h, (\tau_z \circ D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(w))|_{z\to\infty} \right\rangle \qquad \text{(Theorem 20)} \\
&= \left\langle h^{-1}(e_1, e_0, 0), (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(w))|_{z\to\infty} \right\rangle \quad (h \text{ is group-like}) \\
&= \left\langle h(e_0, e_1, 0), (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(w))|_{z\to\infty} \right\rangle \qquad \text{(Duality for } \delta(h) \text{ (Proposition 12))} \\
&= \left\langle h, (D_{c_1} \circ \cdots \circ D_{c_l}(w))|_{z\to\infty} \right\rangle.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left\langle h, w|_{z\to -1} \right\rangle - \left\langle h, \tau_z(w)|_{z\to -1} \right\rangle = 0 \qquad (w \in \mathcal{A}^0_z),$$

这等价于

$$\langle h, u \rangle = \langle \mathcal{T}(h)^{-1}, u \rangle \qquad (u \in \mathcal{A}^0(\{0, 1, -1\})).$$

因此，命题得证。 $\square$

6. 主要定理的证明

本节中，我们给出主要定理的证明。设 $h \in \mathrm{PENT}(2,\mathbf{k})$。那么，我们有 e

$$\begin{aligned}&\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34}))\\&=\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{12,3,4})^{-1}(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})).\end{aligned}\tag{6.1}$$

我们用 κ 表示由 $\mathbb{Q}(z,w)$ 到 $F_{4,2}=\mathbb{Q}(z_2,z_3,z_4)$ 的域嵌入，其定义如下:

$$\kappa(z)=\frac{z_4-z_3}{z_4+z_3},\ \kappa(w)=\frac{z_3-z_2}{z_3+z_2}.$$

定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $g\colon \mathbb{Q}\langle e_0,e_{-1},e_z,e_{-z^2}\rangle\to\mathcal{A}_{4,2}$，如下:

$$g(e_{a_1}\cdots e_{a_k})=\mathbb{I}(0;\kappa(a_1/z),\dots,\kappa(a_k/z);\kappa(w)).$$

由 (6.1)，我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle\\&=\left\langle\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{12,3,4})^{-1}(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle.\end{aligned}\tag{6.2}$$

本节中，我们通过计算上述等式两边关于 $u\in\mathcal{B}$ 的值来证明该定理。注意， $\mathbb{I}(0;\kappa(a_1/z)\dots,\kappa(a_k/z);\kappa(w))$ 的分量为 0、1、 $-z$、 $-z^{-1}$ 或 w。我们指出，对于 $a,a'\in\{0,1,-z,-z^{-1},w\}$， $d\log(\kappa(a)-\kappa(s'))$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned}d\log(\kappa(0)-\kappa(1))&=0,\\ \mathrm{d}\log(\kappa(0)-\kappa(-z))&=d\log(z_3-z_4)-d\log(z_3+z_4),\\ d\log(\kappa(0)-\kappa(-z^{-1}))&=-d\log(z_3-z_4)+d\log(z_3+z_4),\\ d\log(\kappa(0)-\kappa(w))&=d\log(z_2-z_3)-d\log(z_2+z_3),\\ d\log(\kappa(1)-\kappa(-z))&=d\log(z_4)-d\log(z_3+z_4),\\ d\log(\kappa(1)-\kappa(-z^{-1}))&=d\log(z_4)-d\log(z_3-z_4),\\ d\log(\kappa(1)-\kappa(w))&=d\log(z_2)-d\log(z_2+z_3),\\ d\log(\kappa(-z)-\kappa(-z^{-1}))&=d\log(z_3)+d\log(z_4)-d\log(z_3-z_4)-d\log(z_3+z_4),\\ d\log(\kappa(-z)-\kappa(w))&=d\log(z_3)+d\log(z_2-z_4)-d\log(z_2+z_3)-d\log(z_3+z_4),\\ d\log(\kappa(-z^{-1})-\kappa(w))&=d\log(z_3)+d\log(z_2+z_4)-d\log(z_2+z_3)-d\log(z_3-z_4).\end{aligned}$$

引理 25. 令 $\mathcal{B}'=\mathbb{Q}\oplus\bigoplus_{a\in\{-1,z,-z^2\}}e_a\mathbb{Q}\langle e_0,e_{-1},e_z,e_{-z^2}\rangle$。则对于 $s\in\mathfrak{t}_{4\,2}^{(1)},$ 我们有

$$\partial^{(s)}\circ g(\mathcal{B}')\subset g(\mathcal{B}').$$

证明。 由 $\partial^{(s)}$ 的定义可知。 □

引理 26. 对于 $h\in\mathrm{PENT}(2,\mathbf{k})$ 和 $u\in\mathcal{B}$，我们有

$$\left\langle(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle=\left\langle h,u\mid_{z\to1}\right\rangle.$$

证明。 首先注意到

$$h^{1,23,4}=h(t^{12}+t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23},t_+^{24}+t_+^{34},t_-^{24}+t_-^{34}).$$

此外，对于任意 $s\in\{t^{12}+t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23},t_+^{24}+t_+^{34},t_-^{24}+t_-^{34},t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34}\}$ 和 $a\in\{z,-1,-z^2\}$， $\partial^{(s)}(g(e_a))=0$。因此，由引理 25 可得

$$\left\langle(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),g(u)\right\rangle=\left\langle(h^{1,2,3})^{-1},g(u)\right\rangle$$

对于 $u\in\mathcal{B}$。根据 Broadhurst 对偶（命题 24），我们有

$$(h^{1,2,3})^{-1}=\exp(\alpha t^{12})h(t_+^{23},t^{12},-t^{12}-t_+^{23}-t_-^{23})\exp(\alpha t_+^{23}).\tag{6.3}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\partial^{(t_+^{23})}\circ g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) &= \delta_{a_k,0}g(e_{a_1}\cdots e_{a_{k-1}}),\\ \partial^{(t_{12})}\circ g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) &= \delta_{a_k,z}g(e_{a_1}\cdots e_{a_{k-1}}),\\ \partial^{(-t^{12}-t_+^{23}-t_-^{23})}\circ g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}) &= (\delta_{a_k,-1}+\delta_{a_k,-z^2})g(e_{a_1}\cdots e_{a_{k-1}})\end{aligned}$$

对于 a_1, ..., $a_k\in\{0,1,-z,-z^2\}$。因此，对于 $e_{a_1}\cdots e_{a_k}\in\mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle (h^{1,2,3})^{-1},\psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\right\rangle\\ &=\left\langle \exp(\alpha t^{12})h(t_+^{23},t^{12},-t^{12}-t_+^{23}-t_-^{23})\exp(\alpha t_+^{23}),\psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\right\rangle \qquad \text{(by (6.3))}\\ &=\left\langle h(t_+^{23},t^{12},-t^{12}-t_+^{23}-t_-^{23})\exp(\alpha t_+^{23}),\psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\right\rangle \qquad \text{(by } a_k\neq z)\\ &=\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\,(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\big|_{z\to 1}\right\rangle\cdot\left\langle \exp(\alpha t_+^{23}),\psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_j}))\right\rangle\\ &=\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\,(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\big|_{z\to 1}\right\rangle\cdot\delta_{j,0} \qquad \text{(by } a_1\neq 0)\\ &=\left\langle h,\,(e_{a_1}\cdots e_{a_k})|_{z\to 1}\right\rangle.\end{aligned}$$

因此，引理得证。 □

引理 27. 对于 $h\in \mathrm{PENT}(2,\mathbf{k})$ 以及 $u\in\mathcal{B}$，我们有

$$\left\langle \exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle=\left\langle h,u\,|_{z\to 1}\right\rangle.$$

证明。 根据定义，对于 $e_{a_1}\cdots e_{a_k}\in\mathcal{B}$，我们有

$$\partial^{(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23})}(g(e_{a_1}\cdots e_{a_n}))=g(\partial_1(e_{a_1}\cdots e_{a_n}))$$

其中

$$\partial_1:\mathcal{B}\to\mathcal{B}\quad;\quad e_{a_1}\cdots e_{a_n}\mapsto\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{\{a_i,a_{i+1}\},\{-1,-z^2\}}e_{a_1}\cdots e_{a_{i-1}}(e_{a_{i+1}}-e_{a_i})e_{a_{i+2}}\cdots e_{a_n}$$

是第 3 节中定义的算子。根据 ∂_1 的定义，我们有

$$\partial_1(\mathcal{B})\subset\ker(\mathcal{B}\xrightarrow{u\mapsto u|_{z\to 1}}\mathfrak{h}_2)$$

因此

$$((\partial_1)^n(u))\big|_{z\to 1}=0 \tag{6.4}$$

对于 $u\in\mathcal{B}$ 和 $n>0$，因此，对于 $u\in\mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle \exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n!}\langle(h^{1,2,3})^{-1}(h^{1,23,4})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi\circ g\circ(\partial_1)^n(u)\rangle\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n!}\left\langle h,\,((\partial_1)^n(u))\big|_{z\to 1}\right\rangle \qquad \text{(Lemma 27)}\\ &=\left\langle h,u\,|_{z\to 1}\right\rangle \qquad \text{(by (6.4))},\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

引理 28。 设 $\lambda:\ \mathbb{Q}\langle e_0,\ e_{-1},\ e_z,\ e_{-z^2}\rangle\to\mathfrak{h}_2$ 是一个环同态，定义为

$$\lambda(e_{-1})=\lambda(e_z)=0,\ \lambda(e_0)=e_0-e_1,\ \lambda(e_{-z^2})=-e_1.$$

那么，对于 $u\in\mathbb{Q}\langle e_0,\ e_{-1},\ e_{-z},\ e_{-z^2}\rangle$，我们有

$$\left\langle\delta(h)^{2,3,4},\psi(g(u))\right\rangle=\left\langle h,\lambda(u)\right\rangle.$$

证明。 首先，注意到

$$\delta(h)^{2,3,4} = h(t_+^{23}, t_+^{34}, 0).$$

由于

$$\left\langle t_+^{23}, d\log((-z^{-1}) - a)\right\rangle = 0, \quad \left\langle t_+^{34}, d\log((-z^{-1}) - a)\right\rangle = -1$$

对于 $a \in \{0, 1, -z, w\}$，我们有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4}, f(e_{a_1} \cdots e_{a_k})\right\rangle = 0.$$

如果 $a_j = -z^{-1}$，则存在某个 j。此外，由于

$$\left\langle t_+^{23}, d\log(1-a)\right\rangle = \left\langle t_+^{34}, d\log(1-a)\right\rangle = 0$$

对于 $a \in \{0, -z, w\}$，我们有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4}, g(e_{a_1} \cdots e_{a_k})\right\rangle = 0$$

如果 $a_j \in \{-z^{-1}, 1\}$，则存在某个 j。由于

$$\begin{aligned}
\left\langle t_+^{23}, d\log(0-(-z))\right\rangle &= 0\\
\left\langle t_+^{23}, d\log(0-w)\right\rangle &= 1\\
\left\langle t_+^{23}, d\log((-z)-w)\right\rangle &= 0\\
\left\langle t_+^{34}, d\log(0-(-z))\right\rangle - 1 &= 0\\
\left\langle t_+^{34}, d\log(0-w)\right\rangle - 1 &= -1\\
\left\langle t_+^{34}, d\log((-z)-w)\right\rangle - 1 &= -1,
\end{aligned}$$

我们有

$$\left\langle \delta(h)^{2,3,4}, g(u)\right\rangle = \langle h, \lambda(u)\rangle,$$

由此完成证明。 □

引理 29. 对于 $u \in \mathcal{B}''$，我们有

$$\left\langle \exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}, \psi(g(u))\right\rangle = \langle h, \mathrm{reg}_{z\to 0}(u)\rangle.$$

证明。 注意到我们有

$$\mathcal{T}(h^{1,2,34}) = h(t_+^{23} + t_+^{24}, t^{12}, -t^{12} - t_+^{23} - t_+^{24} - t_-^{23} - t_-^{24})$$

and

$$\begin{aligned}
\partial^{(t_+^{23}+t_+^{24})}(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k})) &= (\delta_{a_k,0} + \delta_{a_k,-z^2})g(e_{a_1}\cdots e_{a_{k-1}}),\\
\partial^{(t^{12})}(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k})) &= \delta_{a_k,z}g(e_{a_1}\cdots e_{a_{k-1}}),\\
\partial^{(-t^{12}-t_+^{23}-t_+^{24}-t_-^{23}-t_-^{24})}(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k})) &= 0.
\end{aligned}$$

因此，对于 $e_{a_1}\cdots e_{a_k} \in \mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}, \psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\right\rangle\\
&= \left\langle \mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}, \psi(g(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\right\rangle \qquad (a_k \neq z)\\
&= \sum_{j=0}^{k} \left\langle \delta(h)^{2,3,4}, \psi\circ g(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle \cdot \left\langle h, \overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle\\
&= \sum_{j=0}^{k} \left\langle h, \lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle \cdot \left\langle h, \overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle \qquad \text{(by Lemma (28))}.
\end{aligned}$$

如果对于某个 $1 \le i \le k$ 有 $a_i = z$，那么

$$\sum_{j=0}^{k} \left\langle h, \lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle \cdot \left\langle h, \overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle = 0. \tag{6.5}$$

如果 $e_{a_1}\cdots e_{a_k}\in\mathcal{B}''$，那么我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle\cdot\left\langle h,\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle\\
&=\sum_{j=0}^{k}\delta_{j,0}\left\langle h,\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle\cdot\qquad(\text{by } a_1=z)\\
&=\langle h,\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_1}\cdots e_{a_k})\rangle\\
&=\langle h,\mathrm{dist}\circ\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_1}\cdots e_{a_k})\rangle\qquad(\text{Proposition 12})
\end{aligned}\tag{6.6}$$

若 $e_{a_1}\cdots e_{a_k}\in\mathcal{B}'''$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle\cdot\left\langle h,\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(e_{a_{j+1}}\cdots e_{a_k})\right\rangle\cdot\\
&=\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle\cdot\left\langle h,e_0^{k-j}\right\rangle\qquad(a_{j+1},\ldots,a_k\in\{0,-z^2\})\\
&=\sum_{j=0}^{k}\left\langle h,\lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_j})\right\rangle\cdot\delta_{k-j}\qquad(\text{the coefficient of } e^0 \text{ in } h \text{ is } 0)\\
&=\langle h,\lambda(e_{a_1}\cdots e_{a_k}).\\
&=\langle h,\varrho(\epsilon(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\rangle\\
&=\langle h,\wp(\epsilon(e_{a_1}\cdots e_{a_k}))\rangle\qquad(\text{Lemma (3.2)})
\end{aligned}\tag{6.7}$$

因此，对于 $u\in\mathcal{B}''$ 和 $v\in\mathcal{B}''$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4},\psi(g(u\sqcup v))\right\rangle\\
&=\left\langle\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4},\psi(g(u))\right\rangle\cdot\left\langle\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4},\psi(g(v))\right\rangle\\
&=\langle h,\mathrm{dist}(\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(u))\rangle\cdot\langle h,\wp(\epsilon(v))\rangle\qquad(\text{by (6.6) and (6.7)})\\
&=\langle h,\mathrm{dist}(\overline{\mathrm{reg}}_{z\to 0}(u))\sqcup\wp(\epsilon(v))\rangle\\
&=\langle h,\mathrm{reg}_{z\to 0}(u\sqcup v)\rangle\,.
\end{aligned}\tag{6.8}$$

现在，由 (6.5) 和 (6.8) 可得该引理。 □

引理 30. 对于 $u\in\mathcal{B}$，我们有

$$\left\langle\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{12,3,4})^{-1}(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle=\langle h,\varphi(u)\rangle.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{12,3,4})^{-1}(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34}))\\
&=\mathcal{T}(h^{12,3,4})\exp(\alpha t_+^{34})(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34}))\qquad(\text{Broadhurst duality})\\
&=\mathcal{T}(h^{12,3,4})(h^{1,2,34})^{-1}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}))\delta(h)^{2,3,4}\qquad([t_+^{34},(h^{1,2,34})^{-1}]=[\delta(h)^{2,3,4},t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34}])\\
&=\mathcal{T}(h^{12,3,4})\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}\qquad(\text{Broadhurst duality}),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left\langle\exp(-\alpha(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23}))(h^{12,3,4})^{-1}(h^{1,2,34})^{-1}\delta(h)^{2,3,4}\exp(-\alpha(t_+^{23}+t_+^{24}+t_+^{34})),\psi(g(u))\right\rangle\\
&=\left\langle\mathcal{T}(h^{12,3,4})\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4},\psi(g(u))\right\rangle.
\end{aligned}\tag{6.9}$$

我们有

$$\mathcal{T}(h^{12,3,4})=h(t_+^{34},t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23},-t^{13}-t_+^{23}-t_-^{23}-t_+^{34}-t_-^{34})$$

and

$$\partial^{(t_+^{34})}g(u) = g(\partial_0(u)),$$
$$\partial^{(t^{13}+t_+^{23}+t_-^{23})}g(u) = g(\partial_1(u)),$$
$$\partial^{(-t^{13}-t_+^{23}-t_-^{23}-t_+^{34}-t_-^{34})}g(u) = g(\partial_{-1}(u)).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{T}(h^{12,3,4})\exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}, \psi(g(u))\right\rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l\in\{0,1,-1\}} \langle h, e_{c_1}\cdots e_{c_l}\rangle \cdot \left\langle \exp(\alpha t^{12})\mathcal{T}(h^{1,2,34})\delta(h)^{2,3,4}, g(\partial_{c_1}\cdots\partial_{c_l}u)\right\rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l\in\{0,1,-1\}} \langle h, e_{c_1}\cdots e_{c_l}\rangle \cdot \langle h, \mathrm{reg}_{z\to 0}(\partial_{c_1}\cdots\partial_{c_l}(u))\rangle \qquad \text{(Lemma 29)} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{c_1,\dots,c_l\in\{0,1,-1\}} \langle h, \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(e_{c_1}\cdots e_{c_l})\rangle \cdot \langle h, \mathrm{reg}_{z\to 0}(\partial_{c_1}\cdots\partial_{c_l}u)\rangle \\
&= \langle h, \mathrm{reg}_{z\to 0}(\partial_{c_1}\cdots\partial_{c_l}u) \sqcup\!\sqcup \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(e_{c_1}\cdots e_{c_l})\rangle \\
&= \langle h, \varphi(u)\rangle . \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

因此，由 (6.9) 和 (6.10) 可得该引理。 □

现在，我们可以证明本文的主要定理。

定理 *5* 的证明。回顾一下， $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$ 定义为

$$\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} \coloneqq \{u\mid_{z\to 1} -\varphi(u) \mid u\in\mathcal{B}\}.$$

对于 $h\in$ PENT(2, k) 和 $u\in\mathcal{B}$，由 (6.2) 以及引理 27 和 30，可得

$$\langle h, u\mid_{z\to 1} -\varphi(u)\rangle = 0.$$

因此，定理 5 得证。此外，由定理 14 可得

$$\langle h, u\rangle = 0 \qquad (h\in \mathrm{PENT}(2,\mathbf{k}),\, u\in\ker L^{\mathfrak{m}}),$$

因此

$$\langle h, u\rangle = 0 \qquad (h\in\varphi\in \mathrm{GRTM}_{(\bar{1},1)}(2,\mathbf{k}),\, u\in\ker L^{\mathfrak{a}}).$$

如引言中所述，这蕴含定理 3。 □

致谢。 作者谨向 Hidekazu Furusho 和 Kenji Sakugawa 致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议。本研究获得 JSPS KAKENHI 资助，资助编号为 JP18K13392 和 JP22K03244。

参考文献

[1] F. Brown, 《 $\mathbb{Z}$上的混合 Tate 动机》，《数学年刊》175（2012年），949–976。[2] P. Deligne, 《 $\mathbb{G}_m-\mu_N$的动机幺幂基本群，适用于 $N=2$、3、4、6或8》，《高等科学研究所数学出版物》（2010年），101–141。[3] P. Deligne 和 A. B. Goncharov, 《混合 Tate 动机基本群》，《高等师范学校科学年刊》38.1（2005年）： 1–56。[4] V. G. Drinfeld, 《关于拟三角拟 Hopf 代数及一个与 Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) 密切相关的群》，《列宁格勒数学杂志》2（1991年），第4期，829–860。[5] B. Enriquez, 《拟反射代数与分圆结合子》，《数学选刊》（新系列）13（2007年），391–463。[6] B. Enriquez 和 H. Furusho, 《混合五边形、八边形与 Broadhurst 对偶方程》，《纯粹与应用代数杂志》216（2012年），982–995。[7] H. Furusho, 《五边形与六边形方程》，《数学年刊》171（2010年），545–556。[8] H. Furusho, 《结合子的双重洗牌关系》，《数学年刊》174（2011年），341–360。[9] A. Grothendieck, 《计划纲要》，载于《几何伽罗瓦作用，1》，伦敦数学会讲义丛书242（1997年），5–48。[10] M. Hirose 和 N. Sato, 《迭代积分的洗牌、stuffle 与对偶关系的代数微分公式》，《代数杂志》556（2020年），363–384。

[11] M. Hirose 和 N. Sato，《 $\mathbb{Z}[1/2]$ 上的混合 Tate 动机的动机伽罗瓦群及其在 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \pm 1, \infty\}$基本群上的作用》，arXiv:2007.04288v2 [math.NT]。[12] Y. Ihara，《 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$的 pro-$p$ 基本群中伽罗瓦作用的若干算术方面》。载于：《算术基本群与非交换代数》（美国加利福尼亚州伯克利，1999年），纯数学专题讨论会论文集，70，美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2002年，247–273。

（Minoru Hirose）日本名古屋大学高级研究院，日本名古屋市千种区不老町，邮编 464-8602电子邮箱：minoru.hirose@math.nagoya-u.ac.jp