arXiv:2301.04083v1 [math.DS] 10 Jan 2023

单值化数据空间的几何

Jean-Pierre Ramis *，Jacques Sauloy †

2023年1月11日

摘要

在 [32], 与 Yousuke Ohyama 合作的工作中，我们定义并研究了一个“单值化数据空间”，它是 Jimbo 和 Sakai 从“q-等单值化”条件推导出著名的 q-Painlev´e VI 方程的基础 [13]。在 [16], Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen 延续了我们的工作。然而，[32] 两者在一些基础性的代数几何问题上都含糊不清。我们在此为其提供可靠的基。

R´esum´e

在 [32], 与 Yousuke Ohyama 合作的研究中，我们根据 Jimbo 和 Sakai 的“q-等单值”条件，定义并研究了一个“单值数据空间”，它是著名的 q-Painlevé VI 方程约化背后的空间´。在 [16], Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen 延续了我们的工作。然而，[32] 和 [16] 在其代数几何基础的某些方面都存在歧义´。本文为此提出严谨的基´。

目录

0 引言 **3**

1 预备材料 **5**

1.1 一般预备知识.5 1.1.1 一般记号与约定.5 1.1.2 背景.5 1.2 关于商空间的一些事实.7 1.2.1 群作用.7 1.2.2 商空间.8 1.2.3 非分离商空间.11 1.2.4 一个有用的同构判据.12

*法兰西学会（科学院）与图卢兹数学研究所，法国国家科学研究中心联合研究单位5219，保罗·萨巴捷大学（图卢兹第三大学），纳博讷路118号，31062 图卢兹 CEDEX 9，法国；电子邮件：ramis.jean- pierre@wanadoo.fr

†图卢兹；电子邮箱：jacquessauloy@gmail.com

1.2.5 非分离几何商的一个例子.13 1.3 关于环面簇的一些事实.14 1.3.1 关于环面的回顾.14 1.3.2 环面嵌入与环面簇.15 1.3.3 环面嵌入的重要例子.16 1.4 与黎曼-希尔伯特-比尔霍夫对应相关的不变量与商空间：一般情形（n ≥ 2 任意）.17 1.4.1 稳定子.18 1.4.2 轨道.18 1.4.3 $V^{(*)}_S$ 的仿射覆盖.19 1.4.4 方程.21 1.4.5 不变量代数.22

2 JS 情形（可能退化）中的不变量与商空间 23
2.1 一些一般记号.23 2.2 非退化 JS 情形：不允许有零点.24 2.3 退化的 JS 情形：必须有一个零点.25 2.4 部分拼接的候选支架：允许有一个零点.26 2.5 拼接.26 2.5.1 非退化部分.27 2.5.2 退化部分.27

3 Qu非退化 JS 情形中的二次曲面及其上的函数 27
3.1 一般记号与约定.27 3.1.1 求值与线性形式.28 3.1.2 行列式与双线性形式.28 3.1.3 对 $F_{R,\ S,\ \underline{x}}$ 和 $\mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$ 的应用.29 3.2 Mat_2(复数域)中的秩 1 矩阵与塞格雷嵌入.29 3.2.1 秩 1 矩阵的射影“坐标”.29 3.2.2 特殊点与混合射影坐标.30 3.3 映射 $\rho_k, k = 1, \ldots, 4$, 和 $[\rho]$ 在 $\mathcal{F}$ 上的映射 .31 3.3.1 ρ_k 与 $[\rho]$ 的定义 .31 3.3.2 $[\rho]$ 的像 .32 3.4 一些显式公式.33

3.4.1 记号约定.34 3.4.2 因子 γ .35 3.4.3 两个二次曲面相同.36 3.4.4 判别式与奇异轨迹.37 3.4.5 轨迹 $\det M = 0$ .39

4 与二次型相关的代数三维簇和代数曲面 **40**
4.1 一般性.40 4.2 光滑性.42 4.3 二次曲面铅笔.45

5 $\mathcal{F}$的射影嵌入 **46**
5.1 $\mathcal{F}$嵌入$\mathcal{K}_4 = \left(\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^4 \setminus \Theta_4\right)/\text{复数域}^*$.46 5.2 $\mathcal{F}$ 嵌入复数域^6 和复数域^4 .49
5.2.1 嵌入复数域^6 .49 5.2.2 嵌入复数域^4 .50 5.3
$\Pi_{k\,l}$ $\Pi'_{k\,l}$, $= 1 \ldots 4$ [32] 51, 和, ,
5 3 1 $\Pi_{k\,l}$ $\Pi'_{k\,l}$ 51
k l , , , of.The , 和, .5.3.2 $\mathcal{F}$ 的参数化.51 5.4 塞格雷曲面上的 16 条直线.52 5.4.1 16 条直线.52 5.4.2 塞格雷曲面与 4 次德尔佩佐曲面.53 5.5 从$\mathcal{F}$到 $\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^6$ 以及到 $\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^3$ 的态射.55

6 $\mathcal{G}$ 模型 **56**
6.1 双射态射.56 6.1.1 正则映射.56 6.1.2 单射性.57 6.1.3 $\mathrm{V}^{(*)}$/H的像$\overline{\Sigma}$.57 6.2 $\mathcal{G}$ 在$\mathcal{F}$ 中的像.58

7 结论 **58**
7.1 本文的成果.58 7.2 未解决问题.59

0 引言

在 [32] 中，我们尝试描述与 q-Painlev´e VI 相关的一类 q-差分方程的黎曼-希尔伯特对应的右侧。为此，我们采用了通常的 Birkhoff 连接矩阵的一种变体，其中剥去了 0 和 ∞ 处的局部贡献；这一做法的意义已在 [37], 中得到展示（尽管动机有所不同），该文首次提出了这一想法。在 [32], 的第一部分，我们从代数几何的角度研究了这类矩阵的空间（模去相关的等价关系），主要运用了（双）线性代数[1]的工具。然而，我们未能完整描述所关注的空间；尤其是，我们既未恰当地定义其中涉及的商空间结构，也未能证明或否定由此引出的光滑性猜想。我们也无法从经典代数曲面的标准列表（Segre、德尔佩佐、Kummer，.....）中辨认出一个可能的模型[2]。

在 [16], Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen 沿用了我们的研究思路，并进一步完成了必要的计算，甚至解答了我们留下的一些未解问题。

[1]在前引文献的第二部分中，我们通过所谓的 Mano 分解引入了另一种方法。本文只会在一个特例中涉及这一方面。[2]我们甚至无法判断一个良好的模型是否为有理曲面。

然而，我们觉得，若从严谨定义的层面来看，有些问题仍不清楚：文中引入商空间时，对其性质（集合论的？解析的？代数几何的？）只字未提，更遑论给出论证；作者将从单值化数据集合到射影空间的单射（不恰当地）称为嵌入，尽管其像是一个局部闭代数子簇，而且没有从代数几何的角度比较他们各自不同的“嵌入”；等等。

在这项工作中，我们尝试在复代数几何领域为 [16] 的巧妙而高效的计算提供坚实的理论基础。具体而言，我们恰当地定义了所涉及的商空间，并论证了它们的存在及其性质，从而能够严谨地定义这些态射，并证明其相关性质。我们在单值化数据集上定义了一种几何商结构$\mathcal{F}$（其精确定义见 3.1.3），并证明它是一个仿射、光滑、有理代数簇。我们将 [32]和 [16]中引入的单值化数据集上的不同结构与$\mathcal{F}$进行比较。特别地，我们得到了$\mathcal{F}$到 $\mathbb{C}^4$, 中的一个代数几何意义下的嵌入[3], ，其像是 [16]中引入的仿射塞格雷曲面。因此，这个仿射塞格雷曲面是一个光滑代数曲面。

在 [32], 中，我们运用 Mano 分解，并结合部分可约性的一些性质，描述了单值化数据空间上的 16 条“直线”。我们证明，它们对应于塞格雷曲面上的 16 条直线。

遗憾的是，我们无法证明$\mathcal{F}$与$\mathcal{G}$同构；后者在 [32] 中被定义为单值化数据空间上的一种代数结构。因此，关于$\mathcal{G}$在某些一般性假设下光滑的猜想（参见 [32, 猜想 7.10]）仍未解决[5]。我们将在第 6 节回到“模型$\mathcal{G}$”。

尽管本文的核心围绕参数一般值下考察的秩 2 线性系统展开，我们仍提出（正如我们在 [32]中所做的）一些更一般的结果，以期为今后研究其他情形提供助益。

致谢。
第一作者感谢 Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen 就塞格雷曲面上的 16 条直线进行了有趣的讨论。两位作者感谢 Yousuke Ohyama 分享他对 Painlev´e 方程的了解。

[3]这是一种态射，其像是一个与源空间同构的局部闭子簇。[4]我们得到的仅是一个双射态射。[5]从这个意义上说，[16, 注释 2.19], 中的断言有些乐观。[16] 中证明的是：在单值化数据集合上存在一种（可能非分离的）解析流形结构；参见定理 2.18。这并不能推出我们的猜想 7.10。

1 预备材料

1.1 一般预备知识

1.1.1 一般记号与约定

全文中，若 E 是一个复线性空间，$E^\vee := \mathrm{Lin}_{\mathbf{C}}(E, \text{复数域})$ 表示 E 的对偶空间。我们记 $E^* := E \setminus \{0\}$。若 E 表示为乘积 $\prod E_\alpha$，则定义 $E^{(*)} := \prod E_\alpha^*$（希望不会产生歧义）。稍作滥用，令 P(E) 为射影空间 $E^*/$复数域*，我们将设 $P(E^{(*)}) := \prod P(E_\alpha)$。

当群 G 在 E 上（从左）作用时，我们用 $Gx \subset E$ 表示 $x \in E$ 的轨道，用 $G_x \subset G$ 表示其稳定子（或各向同性子群）。

我们用 $P \sim Q$ 表示 GL_n(复数域) 中的共轭关系（实际上，符号 $\sim$ 将用于表示一些其他等价关系），并用 Sp P 表示 $P \in Mat_n$(复数域) 的谱。我们用 D_n(复数域) 表示线性群 GL_n(复数域) 中对角矩阵构成的子群。对角矩阵简写如下：

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

为了进一步简化记法，我们有时将 D_n(复数域) 与 C^{*n} 视为相同，并将 $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in D_n$(复数域) 与 $\underline{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^{*n}$ 视为相同。

对于任意两个 $c, d \in \in$ 复数域*，我们将 $c \equiv d$ 记作模子群 $q^{\mathbf{Z}}$ 的同余关系：

$$\forall c, d \in \mathbf{C}^*,\ c \equiv d \underset{def}{\Longleftrightarrow} c/d \in q^{\mathbf{Z}} := \{q^k \mid k \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{C}^*,$$

并将 $c \not\equiv d$ 记作其否定。应用于复数域*的元素时，“同余”“同余关系”等词均指该关系。

每当 A(x)、F(x).....是可逆函数矩阵时，我们记 $\sigma_q F(x) := F(qx)$，并记 $F[A] := (\sigma_q F) A F^{-1}$（“规范变换”）

1.1.2 背景

在 [32] 中，我们研究了以下情形；设 R := 对角矩阵$(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in D_n$(复数域) 和 S := 对角矩阵$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in D_n$(复数域) 固定，并满足以下强非共振假设：

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Longrightarrow (\rho_i \neq \rho_j \text{ and } \sigma_i \neq \sigma_j).$$

另外，设 μ ∈N*，N :=μn，且 x1, . . . , x_N ∈复数域* 两两不全同余；记 x :={x1, . . . , x_N}。随后我们引入了以下集合：

$$E_{R,S,\underline{x}} := \left\{ A_0 + \cdots + A_\mu x^\mu \;\middle|\; \begin{cases} \text{all } A_i \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}), A_0, A_\mu \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \\ A_0 \sim R, A_\mu \sim S, \\ \det A(x_1) = \cdots = \det A(x_N) = 0, \end{cases} \right\}$$

以及商集 $\mathcal{E}_{R,\ S,\ \underline{x}}$ E$_{R,\ S,\ \underline{x}}$ 关于有理规范等价关系 ∼的商集：

$$\mathcal{E}_{R,S,\underline{x}} := \frac{E_{R,S,\underline{x}}}{\sim}, \text{ where } \forall A, B \in E_{R,S,\underline{x}},\ A \sim B \underset{def}{\Longleftrightarrow} \exists F \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(x)) \ :\ B = F[A].$$

设 V := {M ∈ Mat$_n$(O(复数域*)) | σ$_q$M = RM(Sx$^\mu$)$^{-1}$}，这是一个维数为 μn^2 的复线性空间（我们很快就会看到）；我们还引入了它的子集：

$$F_{R,S,\underline{x}} := \{M \in V \mid \det M \neq 0, \det M \text{ vanishes on } \underline{x}\}.$$

群 D$_n$(复数域) × D$_n$(复数域) 通过以下公式在线性意义下作用于 V：

$$(\Gamma, \Delta).M := \Gamma M \Delta^{-1}.$$

子集 F$_{R,\ S,\ \underline{x}}$ ⊂V 在该作用下保持不变；令 ∼其上的诱导等价关系，我们定义商集（稍后简称为 $\mathcal{F}$，因为局部数据 R、S、x 将固定）：

$$\mathcal{F}_{R,S,\underline{x}} := \frac{F_{R,S,\underline{x}}}{\sim}.$$

我们定义了（并证明了）一个从 $\mathcal{E}_{R,\ S,\ \underline{x}}$到$\mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$的双射（“黎曼-希尔伯特-比尔霍夫对应”）。本文的主要目标是完成对$\mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$的几何描述，主要讨论 n =μ = 2 的情形（即所谓的“Jimbo-Sakai 情形”，简称“JS 情形”）。

我们对应关系的目标端（“右侧”）有一个重要特征：条件 σ$_q$M = RM(Sx$^\mu$)$^{-1}$ on M = (m$_{i,\ j}$) $_{1\le i,j\le n}$ ∈V ⊂Mat$_n$(O(C*)) 分解为 n^2 个独立条件 σ$_q$m$_{i,\ j}$ = (ρ$_i$/σj)x$^{-\mu}$m$_{i,\ j}$，即 m$_{i,\ j}$ ∈V$_{i,j}$，其中 V$_{i,j}$:=V$_{\mu,\rho_i/\sigma_j}$，这类空间定义如下：

$$\forall c \in \mathbf{C}^*,\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ V_{k,c} := \{m \in O(\mathbf{C}^*) \mid \sigma_q m = c x^{-k} m\},$$

每个这样的线性空间的维数均为 dim$_{\mathbf{C}}$V$_{k,c}$ = k。因此我们有一个自然识别 V := ∏$_{1\le i}$

, V$_{i,j}$(由此可见，我们关于 dim$_{\mathbf{C}}$ V =μn^2 的论断成立。$_{j\le n}$

另一个重要特征是，D$_n$(C) × D$_n$(C) 在 F$_{R,S,\underline{x}}$ 上的作用可以自然地扩展到 V ⊃F$_{R,S,\underline{x}}$，成为线性作用，并相应地分解：

$$(\Gamma, \Delta).(m_{i,j})_{1\le i,j\le n} = ((\gamma_i/\delta_j) m_{i,j})_{1\le i,j\le n},$$

其中 Γ =: 对角矩阵(γ$_1$, . . . , γ$_n$)， Δ =: 对角矩阵(δ$_1$, . . . , δ$_n$)。这两个特征将在 1.4 节中以某种方式被“公理化”。

1.2 关于商空间的一些事实

鉴于我们打算阐明所关注空间的代数几何结构，明确说明我们的框架似乎是合适的。我们讨论复数域上的代数簇和线性代数群的初等理论（代数簇不一定是仿射的、不可约的或分离的，但总是约化的；线性代数群则自动光滑，但可能是可约的）。

关于术语的说明：由于我们不要求代数簇是分离的，因此对于分离的代数簇，我们称之为分离簇。当然，所有仿射、拟仿射、射影和拟射影簇都是分离的，我们试图构造商空间的所有簇 X 也都是分离的。不过，最终我们将得到一些非分离商空间 $X \to Y$（即 X 是分离的，但 Y 不是）。无论如何，在整个 1.2.1 和 1.2.2 节中，我们都假定所有簇是分离的。从 1.2.3 节起，这一约定将不再适用（明确说明的特殊情形除外）。

1.2.1 群作用

基本形式。除非另有说明，“闭”“开”“稠密”等词均指扎里斯基拓扑。仿射代数簇 X 完全由其仿射代数 $\mathbb{C}[X]$（一个有限型约化 $\mathbb{C}$-代数）决定，反之亦然；仿射簇之间的态射 $X \to Y$ 与 $\mathbb{C}$-代数态射 $\mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$在函子意义下对应。一般的簇态射 $\phi: X \to Y$ 在局部上具有上述形式，即由 $\mathbb{C}$-代数态射 $\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[\phi^{-1}(V)]$ 给出，其中仿射子集 V 覆盖 Y。值得牢记的非仿射簇的重要例子是 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$和 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$（当 $n \geq 2$ 时）。

我们所说的代数群都是仿射的（作为簇），因此也是线性的（即实现为某个 GL_n(复数域) 的闭子群）；主要参考文献： [4, 12, 40], 另见 [39]。对于任意代数群态射 $f: G \to H$（即 f 是簇之间的态射且是群态射），其像 $f(G) \subset H$ 是闭子群（核 $\mathrm{Ker}\, f \subset G$ 显然也是闭子群！）；并且，如果 f 是单射，则它是闭浸入。单位连通分支 G°（即恒等元 1 的连通分支）是一个闭正规子群；G 的不可约分支也是其连通分支 $gG^\circ = G^\circ g$，且商群 G/G° 是有限群。

根据线性代数群的结构理论，我们列出以下定义和事实：

- 如果群 G 的唯一连通正规可解子群是平凡子群，则称 G 为半单群。特殊线性群 SL_n(复数域) 和环面 复数域$^{*}{}_n$ 都是半单的。
- 若群 G 的唯一连通正规幺幂子群是平凡群，则称 G 为约化群。群 GL_n(复数域)，以及所有半单群都是约化群。

有理作用。关于代数群作用和商空间，我们的主要一般性参考文献是[8, 27]；关于一些特殊事实，则参见 [33]；另请参阅综述 [6] 和对[27]的简短总结 [28]。

设 G 为一个代数群，X 为一个代数簇。G 在 X 上的有理作用是一个簇之间的态射 $G \times X \to X$，$(g, x) \mapsto gx$，且它是一个群作用（即 $g'(gx) = (g'g)x$ 且 $1x = x$）。我们

将简称为作用，并称 X 为 G-簇。元素 $x \in X$ 的稳定子 G_x 自动是 G 的闭子群。值得牢记的典型例子有：

1. 复数域* 分别通过位似变换作用于复数域^{n}和复数域$^n \setminus \{0\}$；

2. 复数域* 分别作用于复数域^2, 和复数域$^2 \setminus \{0\}$，作用方式为 $t.(x, y) := (tx, t^{-1}y)$。

G-簇之间的等变态射 $\phi : X \to Y$ 也称为 G-态射，是指满足 $\phi(gx) = g\phi(x)$ 的态射，其中对所有 $g \in G$、$x \in X$ 均成立。若 Y 带有平凡作用（即对所有 $g \in G$、$y \in Y$，均有 $gy = y$），则称 ϕ 为不变的（因此对所有 $g \in G$、$x \in X$，均有 $\phi(gx) = \phi(x)$）。若 ϕ 为不变的，则代数 $[U] \to C[\phi^{-1}(U)]$ 的诱导态射（通常对每个簇之间的态射 $\phi : X \to Y$ 及每个开子集 $U \subset Y$ 均有定义）其像包含于 G-不变函数的子代数 $C[\phi^{-1}(U)]^G$ 中。
一个（有理）G-模是一个有限维复线性空间 V，带有线性 G-作用（即对所有 $g \in G$，$x \mapsto gx$ 都是线性的）；等价地，它是一个线性表示，且相应的群态射 $G \to GL(V)$ 是代数群的态射。于是，V 的每个 G-不变代数子集都是一个典范的 G-簇。此外，每个仿射 G-簇都可以用这种方式得到。（G-模的定义通常也扩展到无限维复线性空间 V，前提是 $V = \bigcup V_i$，其中所有 V_i 都是 G-不变且有限维的。）

轨道。设 X 是一个 G-簇。那么，对任意 $x \in X$，其轨道 Gx 都是局部闭的，即它在其扎里斯基闭包 $\overline{Gx}$ 中是开集。因此，补集 $\overline{Gx} \setminus Gx$ 是若干轨道的不交并，且每个轨道的维数都小于 $\dim Gx$。

我们有 $\dim Gx = \dim G - \dim G_x$，且函数 $x \mapsto \dim Gx$ 是下半连续的，即：

$$\{x \in X \mid \dim Gx \leq n\} \text{ is closed for every } n \geq 0.$$

因此，维数最小的轨道是闭的，且每个轨道都包含（至少）一个闭轨道。注意，若 X 是一个 G-簇，且 $\phi : X \to Y$ 是一个不变态射，则每个纤维 $\phi^{-1}(y)$ 都是闭且 G-不变的，因而是满足 $\phi(x) = y$ 的轨道 Gx 的并集。因此，从轨道集[6] X G 到 Y 的商映射是良定义的。若要得到分离商（簇必须是分离的），我们希望该映射是双射；这至少要求所有轨道都是闭的，而这鲜有发生。

1.2.2 商空间

范畴商与轨道空间。定义 G-簇 X 关于 G 的作用的商空间，有两种自然方式：

- 取商集 Y，并赋予它商拓扑和 G-不变函数层；这通常不会得到一个代数簇。

- 从范畴的角度来说：下一节将详细讨论这一点；根据定义，如果这样的商空间存在，它就是一个代数簇，并且在同构意义下唯一。但它的几何性质可能不佳。

[6]该记号只是暂用的，可以不必记住。对于商空间，我们将改用 X/G 等记法。

簇之间的态射 $\phi : X \to Y$ 若是 G-不变的（即在 G-轨道上为常值），且对这一性质而言是始对象（即任意 G-不变态射 $\psi : X \to Z$ 都能唯一地分解为 $\psi = f \circ \phi$，其中 $f : Y \to Z$ 是一个态射），则称其为范畴商。

在复数域* 通过位似变换作用于复数域^n 的情形下，0 属于所有轨道的闭包，因此所有 G-不变的 $\psi: X \to Z$ 都是常值映射，所以范畴商是平凡的（到一点的常值映射）。
如果范畴商 $\phi : X \to Y$ 能区分轨道，即对每个 $y \in Y$，纤维 $\phi^{-1}(y)$ 都是一个轨道，那么它称为轨道空间。
在复数域* 通过位似变换作用于复数域$^n \setminus \{0\}$ 的情形下，自然投影 $C^n \to P^{n-1}(C)$ 是一个轨道空间。

良商与几何商。以下定义引自 [27]:

定义 1.1 良商是一个仿射[7] 态射 $\phi : X \to Y$，满足以下性质:

(i) ϕ 是满射。(ii) ϕ是 G-不变的。(iii) 对每个开子集 $U \subset Y$，诱导态射 $C[U] \to C[\phi^{-1}(U)]^G$是同构；特别地，$C[Y]$可以识别为 $C[X]^G$，这完全确定了 Y。(iv) 对每个闭 G-不变子集 $W \subset X$，集合 $\phi(W) \subset Y$ 是闭的。(v) 对每对闭 G-不变子集 $W_1, W_2 \subset X$，若 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$，则 $\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset$。我们将这样的良商记作 $X//G$（因此省略结构态射 ϕ）。

以下性质是相应结论:

推论 1.2 对于 $\subset Y$ 的每个开子集 U，态射$\phi^{-1}(U) \to U$ 是范畴商。（特别地，$\phi: X \to Y$ 是范畴商。）此外，若 G 在$\phi^{-1}(U)$ 上的作用是闭的（即轨道是闭的），那么它就是轨道空间。

此外，“ϕ 在拓扑上尽可能充分地区分轨道”:

推论 1.3 设 $x_1, x_2 \in X$。那么$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow Gx_1 \cap \overline{Gx_2} \neq \overline{\emptyset}$。（蕴含关系 $\Leftarrow$显然成立，且对所有不变态射都成立。）

推论 1.4 $\phi: X \to X//G$ 的纤维是闭的，当且仅当它们的维数都相同；而这又等价于：$\phi^{-1}(y)$ 是轨道，即 $X//G$ 是轨道空间。

以下定义也引自 [27]:

定义 1.5 几何商是良商，并且还是一个轨道空间。我们将几何商记作 X/G。

以下对几何商的刻画在 [6, 33] 中被用作定义:

[7]回顾一下，ϕ称为仿射，如果对于每个仿射开子集 $U \subset Y$，其原像 $\phi^{-1}(U) \subset X$ 都是仿射的。

命题 1.6 态射 $\phi: X \to Y$ 是几何商，当且仅当：
(i) 它是满射，且其纤维 $\phi^{-1}(y)$，$y \in Y$，恰好是 G-轨道；
(ii) Y 具有商拓扑，即 $U \subset Y$ 是开集，当且仅当 $\phi^{-1}(U) \subset X$ 是开集；
(iii) 对每个开子集 $U \subset Y$，诱导态射 $C[U] \to C[\phi^{-1}(U)]^G$ 是同构。
条件 (ii) 可以替换为与之等价的条件：(ii') ϕ 是开映射。

例如，$C^n \setminus \{0\} \to P^{n-1}(C)$（其中 $n \geq 2$）是一个几何商，对于仿射代数群 G 的任意闭子群 H，$G \to G/H$ 也是几何商。
无论如何，我们看到几何商 X/G 实际上就是拓扑商 $\pi: X \to X G$，赋予层 $(\pi_* O_X)^G$，其中 O_X 表示簇 X 上的结构层，而 $(\pi_* O_X)^G$ 表示在 G 对直接像 $\pi_* O_X$的显然作用下的不变子层。最后，我们引用定理 4.2]:

定理 1.7 设 X 为一个 G-簇，且 $\phi: X \to Y$ 是一个满射态射，其纤维 $\phi^{-1}(y)$ 为轨道。假设 X 不可约且 Y 正规。那么 ϕ 是一个几何商。

约化群在仿射簇上的作用。设 G 为一个约化群，X 为一个仿射 G-簇。以下结果在 [27] 中得到证明。

定理 1.8 存在一个仿射簇 Y 和一个态射 $\phi: X \to Y$，它是一个良好商空间。它是具有仿射代数 $C[Y] := C[X]^G$ 的唯一仿射簇。

以下补充说明在 [6] 中得到证明：

推论 1.9 不变量函数代数 $C[X]^G$ 是一个仿射代数；设 $f1, \ldots, f_n$ 是一组生成元。那么 $X//G$ 可描述为映射 $G \to C^n, x \mapsto (f_1(x) \ldots, f_n(x))$ 的像，它是 C^n 的一个闭子集。

现在，设 $X' \subset X$ 是一个闭 G-不变子集，并设 $\phi': X' \to X'//G$ 如前一定理所述。由于 ϕ' 是一个范畴商，且限制映射 $\phi_{|X'}: X' \to X//G$ 是 G-不变的，因此它经由一个态射 $X'//G \to X//G$ 分解。

推论 1.10 $X'//G \to X//G$ 是一个闭浸入，因此 $X'//G$ 可被（典范地识别为）$X//G$ 的一个闭子集。

推论 1.11 设 X'、$X'' \subset X$ 是一对闭 G-不变子集；则 $\phi(X' \cap X'') = \phi(X') \cap \phi(X'')$。

推论 1.12 每个纤维$\phi^{-1}(y)$ 都包含唯一的闭轨道。

因此，$X//G$ 可以看作“闭轨道空间”。

推论 1.13 若 X 不可约，分别地，若 X 正规，则 $X//G$ 也是如此。

稳定点与几何商。再次设 G 为约化群，X 为仿射 G-簇。

定义 1.14 若点 $x \in X$ 的轨道 Gx 是闭的，且其稳定子 G_x 是有限的，则称 x 为稳定点。

定理 1.15 (i) 稳定点的集合 X^s 是 X 的（可能为空的）G-不变开子集，并且 $\phi(X^s) \subset X//G$ 也是开集，因此（只要 X^s 非空）$\phi(X^s) = X^s//G$。(ii) 限制 $X^s \to \phi(X^s) = X^s//G$ 实际上是一个几何商 X^s/G（同样要求 X^s 非空）。

1.2.3 非分离商

我们将遇到以下情形：一个分离 G-簇 X 可由 G-不变开子集 X_i 覆盖，对于这些开子集，我们能够定义几何（分别为良好、范畴）商 $X_i \to Y_i$。我们能否将这些 Y_i 拼接起来，从而得到一个几何（分别为良好、范畴）商 $X \to Y$？在某些情况下，答案是肯定的，但 Y 可能是非分离的。由于我们构造几何商的基本方法涉及仿射簇，因此我们只考虑仿射商 $X_i \to Y_i$。

仿射簇的粘合。因此，我们考虑一族仿射簇 $(Y_i)_{i\in I}$。按照 [8,§8.2], ，我们将该族的粘合数据定义如下：

1. 对每个 $(i, j) \in I \times I$，取一个仿射开子集 $U_{i,j} \subset Y_i$；
2. 对每个 $(i, j) \in I \times I$，取一个同构 $f_{j,i}: U_{i,j} \to U_{j,i}$。

这些数据满足以下相容条件：

1. 对每个 $i \in I$，$U_{i,i} = Y_i$ 且 $f_{i,i} = \mathrm{Id}_{Y_i}$；2. 对每个 $(i, j, k) \in I \times I \times I$，$f_{j,i}(U_{i,j} \cap U_{i,k}) \subset U_{j,k}$；3. 对每个 $(i, j, k) \in I \times I \times I$，$f_{k,j} \circ f_{j,i} = f_{k,i}$ 在 $U_{i,j} \cap U_{i,k}$ 上成立。

注意，对定义域 $U_{i,j} \cap U_{i,k}$ 的限制是第三个条件在逻辑上必不可少的，而第二个条件则是第三个条件具有意义的前提。

于是，我们可以在不交并 $\bigsqcup Y_i$ 上定义一个等价关系 $\sim$，它是满足以下条件的最小等价关系：对每个 $(i, j) \in I \times I$ 以及 $y_i \in U_{i,j}$，都有 $y_i \sim f_{j,i}(y_i)$。然后，商集 $\bigsqcup Y_i / \sim$ 具有自然的代数簇结构（可能是非分离的），使得：

1. 每个 Y_i 都嵌入 Y 中，因此我们将 Y_i 视为 Y 的一个仿射开子集；
2. Y 上的一个正则函数 g 等价于一族相容的正则函数 g_i，定义在 Y_i 上（即满足 $g_j \circ f_{j,i} = g_i$ 在 $U_{i,j}$ 上）。

推论 1.16 代数簇态射 $\psi: Y \to Z$ 等同于一族相容的态射 $\psi_i: Y_i \to Z$（即满足 $\Psi_j \circ f_{j,i} = \psi_i$ 在 $U_{i,j}$ 上）。

推论 1.17 设 X 为一个代数簇，$(X_i)_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖，并设 $\phi_i : X_i \to Y_i$ 是一族满足 $\phi_i(X_i \cap X_j) \subset U_{i,j}$（对所有 i、j 均成立）的态射，且进一步假设它们彼此相容（即满足 $\phi_j \circ f_{j,i} = \phi_i$ 在 $X_i \cap X_j$ 上）。那么它们可以唯一地拼接（其含义显而易见）成一个态射 $\phi: X \to Y$。

仿射良商与几何商的粘合。设 G 是一个约化群，X 是一个 G-簇，且 $(X_i)_{i\in I}$ 是 X 的一个仿射开覆盖。我们假设 X_i 是 G-不变的，并且对所有 i, j，[8] $X_i \cap X_j$ 都是仿射的。于是，根据 1.2.2，存在仿射良商 $\phi_i : X_i \to Y_i$，其泛性质为 $U_i、_j := \phi_i(X_i \cap X_j)$ 提供粘合数据。由此可得唯一的态射 $\phi : X \to Y$，使得每个限制 $\phi_{|X_i}$ 都与仿射良商 $\phi_i : X_i \to Y_i \subset Y$ 相对应；并且 Y_i 是 Y 的一个仿射开覆盖。
为了得到几何商，我们必须将稳定点的定义推广到非仿射簇：

定义 1.18 点 $x \in X$ 是稳定的，当且仅当它属于 X 的一个 G-不变仿射子集，轨道 Gx 是闭的，并且它的稳定子 G_x 是有限的。

现在，以下事实是在 [27]分离簇的情形下陈述的，但显然也适用于目标端 Y 不分离的情形，无论我们采用定义 1.5 还是定义 1.6；这里假设 X 是分离的（但 Y 任意）：

命题 1.19 良好商或几何商是局部性质，具体如下：(i) 若 $\phi: X \to Y$ 是良好商，或几何商，则对每个开集 $U \subset Y$，$\phi^{-1}(U) \to U$ 也是如此。(ii) 若 Y 有一个开覆盖 (U_i)，使得所有 $\phi^{-1}(U_i) \to U_i$ 都是良好商，或几何商，则 $\phi: X \to Y$ 也如此。因此，每个映射 $\phi^{-1}(U) \to U$ 都是范畴商（若 $\phi^{-1}(U)$ 中所有轨道都是闭的，则它还是轨道空间）。

结合定理 1.15，我们得到：

定理 1.20 (i) 稳定点的集合 X^s 是 X 的（可能为空的）G-不变开子集，并且 $\phi(X_s) \subset X//G$ 也是开集，因此（若 X_s 非空）$\phi(X_s) = X_s//G$。(ii) 限制 $X_s \to \phi(X_s) = X^s//G$ 实际上是一个几何商 X_s/G（同样要求 X_s 非空）。

1.2.4 一个有用的同构判据

由于我们打算考虑非分离商，必须在这一扩展情形下使用以下经典判据，因此我们将其陈述并证明。

命题 1.21 设 $\varphi: X \to Y$ 是代数簇之间的一个双射态射。我们假设 X 是分离的，而 Y 是正规但不一定分离的。那么 ϕ 是一个同构。

证明。——问题是 Y 上的局部问题，因此我们可以假设 Y 是分离的。然后，我们可以应用 [24, 命题 (3.17)，第 46] 页。由此可知，φ是双有理的。根据 Zariski 的

[8]注意，若假设 X 分离（这在我们的应用中确实如此），那么两个仿射开子集的交集必然是仿射的。

主定理 [24, (3.20)，第 46] 页，从一个簇到一个正规簇的有限双有理态射是同构，因此 φ是同构。□

1.2.5 非分离几何商的一个例子

The 下面的例子稍后会用到：它涉及复数域* 在 $\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^n$上的对角作用。

首先介绍一些基本记号，以及这个例子的一个简化版本（$\mathrm{n}=1$）。我们将 P^1(复数域) 视为 ˆ复数域 := 复数域 $\cup\{\infty\}$，其中 $[\mathrm{a}:\mathrm{b}]\mapsto \mathrm{a}/\mathrm{b}$。我们用 ρ表示坐标 a/b，用 $\tilde{\rho}$ 表示其逆$1/\rho=\mathrm{b}/\mathrm{a}$。复数域* 在 P^1(复数域)上有一个自然的作用，对于 $\lambda\in$ 复数域*，该作用由 $[\mathrm{a}:\mathrm{b}]\mapsto[\lambda\mathrm{a}:\mathrm{b}]$, 给出，即由$\rho\mapsto\lambda\rho$ 和 $\tilde{\rho}\mapsto\lambda^{-1}\tilde{\rho}$给出。该作用有两个不动点 0 和 ∞。令 $\Theta_1:=\{0,\infty\}$ 为不动点集。P^1(复数域) 中所有不属于 $\setminus\Theta_1=$ 复数域 * 的点，其稳定子都平凡；它们在 P^1(复数域) 中的轨道不是闭轨道，但在不变开子集 P^1(复数域) $\setminus\Theta_1$中是闭轨道。该作用在此开子集上有一个几何商：

$$\left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\Theta_1\right)/\mathbf{C}^*=\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^*=\mathbf{P}^0(\mathbf{C})=\{\bullet\}.$$

现在我们考察任意 $\mathrm{n}\geq 2$ 下的 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$。各分量的 ρ 和 $\tilde{\rho}$ 坐标给出了从 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$ 到 ˆC 的映射 $\rho_1,\ldots,\rho_n$ 和 $\tilde{\rho}_1,\ldots,\tilde{\rho}_n$。$\mathrm{C}^*$ 在 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$ 上的对角作用（对于 $\lambda\in\mathrm{C}^*$）由 $\rho_i\mapsto\lambda\rho_i$ 和 $\tilde{\rho}_i\mapsto\lambda^{-1}\tilde{\rho}_i$（$\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$）刻画。不动点集合为 $\Theta_n:=\{0,\infty\}^n$。唯一的闭轨道是不动点 p $\in\Theta_n$ 的轨道：它们是单点集 $\mathrm{C}^*\mathrm{p}=\{\mathrm{p}\}$。其他每个点 $\mathrm{p}\in\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n\setminus\Theta_n$ 都有平凡稳定子。其轨道的边界为 $\mathrm{C}^*\mathrm{p}\setminus\mathrm{C}^*\mathrm{p}\subset\Theta_n$，因此它在不变开子集 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n\setminus\Theta_n$ 中是闭的。

在仿射开子集 $\mathrm{C}^n\subset\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$ 中，唯一的不动点是 0 :=(0, . . . , 0)。所有其他点的稳定子均为平凡稳定子，且其轨道在不变开子集 $\mathrm{C}^n\setminus\{\underline{0}\}$ 中是闭的。后者在对角矩阵 C*-作用下有一个几何商：

$$\mathbf{C}^n\setminus\{\underline{0}\}\to\left(\mathbf{C}^n\setminus\{\underline{0}\}\right)/\mathbf{C}^*=\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}).$$

更一般地，设 $\mathrm{p}\in\Theta_n$。我们将使用以下记号表示指标的补集：

$$I:=\{i\in\{1,\ldots,n\}\mid\rho_i(p)=0\}\text{ and }J:=\{j\in\{1,\ldots,n\}\mid\rho_j(p)=\infty\}=\{j\in\{1,\ldots,n\}\mid\tilde{\rho}_j(p)=0\}.$$

然后我们引入 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$ 的一个不变开子集：

$$\begin{aligned}U_p&:=\left\{p\in\left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\right)^n\mid\begin{cases}i\in I\Rightarrow\rho_i(p)\neq\infty,\\ j\in J\Rightarrow\tilde{\rho}_j(p)\neq\infty,\end{cases}\right\}\\&:=\left\{p\in\left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\right)^n\mid\begin{cases}i\in I\Rightarrow\rho_i(p)\neq\infty,\\ j\in J\Rightarrow\rho_j(p)\neq 0,\end{cases}\right\}\end{aligned}$$

因此，特别地，$\mathrm{U}_{\underline{0}}=\mathrm{C}^n$。注意，将 ρ_j变换为$_j$（其中 $\mathrm{j}\in$J），并保持 ρ_i 不变（其中 $\mathrm{i}\in$I）的映射 s_I 是 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^n$ 的一个自同构，它将 U_p 映至 C^n，并将 p 映至 0（反之亦然，因为它是一个对合）。因此 $\mathrm{U}_p\cap\Theta_n=\{\mathrm{p}\}$，且 $\mathrm{U}_p\setminus\{\mathrm{p}\}$ 中的所有点都具有

平凡稳定子，且其轨道在 $U_p \setminus \{p\}$中是开集。因此，这里我们同样有 $U_p \setminus \{p\}$ 的几何商 $\mathcal{U}_p$，以及一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} U_p \setminus \{p\} & \xrightarrow{s_I} & \mathbf{C}^n \setminus \{\underline{0}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_p & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \end{array}$$

现在，每个 $U_p \cap U_{p'}$，$p \neq p' \in \Theta_n$，都是一个扎里斯基稠密仿射开子集（实际上是若干个复数域和复数域*的副本的乘积），同时包含于 $U_p \setminus \{p\}$ 和 $U_{p'} \setminus \{p'\}$ 中（确实，$p' \notin U_p$，反之亦然）。因此，它在 $\mathcal{U}_{p,p'}$ 上的投影是一个扎里斯基稠密开子集，该子集属于 $\mathcal{U}_p$；它在 $\mathcal{U}_{p',p}$ 上的投影也构成 $\mathcal{U}_{p'}$ 的扎里斯基稠密开子集，并且二者之间存在典范同构 $\mathcal{U}_{p,p'} \to \mathcal{U}_{p',p}$。我们利用这些同构沿着 $\mathcal{U}_{p,p'}$ 将各个 $\mathcal{U}_p$ 粘合起来，得到一个不可约代数簇 $\mathcal{K}_n$，它是一个几何商：

$$\bigcup_{p \in \Theta_n} (U_p \setminus \{p\}) = \left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\right)^n \setminus \Theta_n \to \mathcal{K}_n := \left(\left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\right)^n \setminus \Theta_n\right) / \mathbf{C}^*.$$

注意，$\mathcal{U}_p$ 是紧致的（它们是射影空间），但它们是 $\mathcal{K}_n$ 的扎里斯基稠密开子集，因此 $\mathcal{K}_n$ 不是分离的。

1.3 关于环面簇的一些事实

我们一些最有趣的应用将归入这一主题。特别的是，在整个 1.3 节中，我们用 $A[X]$ 表示仿射簇 X 的仿射代数，以免与群 Λ 的群代数 $C[\Lambda]$（或幺半群 M 的幺半群代数 $C[M]$）混淆。反过来，给定一个仿射代数 A，我们用 Spec A 表示相应的仿射簇；它可以典范地实现为以所有代数态射 $A \to C$ 为元素的底集。

1.3.1 关于环面的回顾

关于环面结构的一般参考资料见 [4, 12, 40, 39]。

环面及其特征群。设 T_n 为线性代数群 C^{*n}。其仿射代数为 $A[T_n] = C[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$。更内在地说，一个（n 维）环面 T 是一个与 T_n 同构的线性代数群群。令：

$$\mathbf{X}(T) := \{\lambda \in \mathbf{A}[T] \mid \lambda : T \to \mathbf{C}^* \text{ is a group morphism}\}$$

T 的特征群。则 $\Lambda := X(T)$ 是一个有限生成自由阿贝尔群，而 T 的仿射代数是 Λ 的群代数：

$$\mathbf{A}[T] = \mathbf{C}[\Lambda] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{C}\lambda.$$

群 $\Lambda^\vee := \{$群态射 $\Lambda \to C^*\}$ 具有自然的环面结构（若 $\Lambda = Z^n$，则它可被规范地识别为 C^{*n}），且映射 $T \to \Lambda^\vee, g \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(g))$ 是代数群的同构。因此，T 作为群和簇都完全由 X(T) 决定。

环面的商。设 $S \subset T$ 是环面 T 的一个闭子群。我们沿用记号 $\Lambda := X(T)$。设 S 是 T 的一个闭子群，并令 Λ' 为 Λ 中由在 S 上消失的特征组成的子群：因此 Λ' 是一个有限生成自由阿贝尔群。于是 $T' := T/S$ 具有自然的环面结构，其仿射代数 $A[T'] = C[\Lambda']$。

此外，子群 Λ' 的任意生成集都是定义 S 的一族方程（即 T 中 S 的理想的生成集）；并且 S 是环面，当且仅当子群 Λ' 是饱和的，即 Λ/Λ' 没有挠元（因此是自由阿贝尔群）。在这种情况下，$A[S] = C[\Lambda/\Lambda']$。

注意，在这种情况下，我们有两组对偶正合列：

$$1 \to S \to T \to T' \to 1 \text{ and } 0 \to \Lambda' \to \Lambda \to \Lambda/\Lambda' \to 0.$$

例 1.22 子群 $S := \{(a, b) \in C^{*2} \mid a^2 = b^2\}$ of $T := T_2$ 不是子环面（它甚至不连通），但子群 $S := \{(a, b, c, d) \in C^{*4} \mid ab = cd\}$ of $T := T_4$ 是一个与 T_3 同构的子环面。

环面的线性表示。设 V 是一个有限维空间，赋有 T 的有理[9]线性表示。那么：

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, \text{ where } \forall \lambda \in \Lambda\ ,\ V_\lambda := \{v \in V \mid \forall g \in T\ ,\ g.v = \lambda(g)v\}.$$

如果 V 是无限维的，但它是由有限维 T-不变子空间的并组成，且相应的 T 的线性表示是有理的，则同样的结论成立。

环面的作用。如果环面 $T = \Lambda^\vee = \mathrm{Spec}$ 复数域 $C[\Lambda]$ 作用于仿射代数簇 X，则它在 $A[X]$ 上对偶地作用（对于 $g \in T$ 和 $f \in A[X]$,，定义 $gf : x \mapsto f(g^{-1}x)$），这是一个无限维线性表示，因此存在分解 $A[X] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A[X]_\lambda$。
在 T 对自身的左乘作用这一特殊情形下，相应的分解就是 $A[T] = C[\Lambda] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C\lambda$。

我们引用 [30, p. 10] 中的 Sumihiro 定理：如果环面 T（有理地）作用于不可约正规簇，那么后者是 T-不变仿射开子集的并。

1.3.2 环面嵌入与环面簇

这里的一般参考文献是 [6, 8]（关于环面簇）和 [18, 29, 30]（关于环面嵌入）。我们大体遵循这些文献，但会区分环面嵌入与环面簇；并且不系统地假设正规性。

[9]这意味着相应的映射 $T \to GL(V)$ 是代数群的态射。在下文中，我们将省略“有理”一词。

环面嵌入。环面 T 的一个环面嵌入是指一个簇 X，它以 T 为开稠密子集（因此 X 是不可约的），并且带有一个 T 的作用，该作用将 T 在自身上的左乘作用延拓到 X 上；由此得到如下交换图（竖直箭头为包含映射，水平箭头为作用）：

$$\begin{array}{ccc} T\times T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T\times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

若 X 是仿射的，则主导包含 $T\subset X$ 会诱导单射 $A[X]\subset A[T]$。$A[T]$ 在特征空间 $A[T]_\lambda$ 中的分解会诱导 $A[X]$ 的分解（在 T 的作用下）：

$$\mathbf{A}[X]=\bigoplus_{\lambda\in M}\mathbf{A}[X]_\lambda=\bigoplus_{\lambda\in M}\mathbf{C}\lambda=\mathbf{C}[M],$$

其中 M 是一个半群，是由那些可作为正则映射延拓到整个 X 上的 T 的特征构成的子幺半群 $\Lambda\cap A[X]$。半群 M 是有限生成的（作为半群），且它生成群 Λ。当且仅当 M 在 Λ 中饱和时，簇 X 才是正规的；也就是说，对于 $r\in\mathbb{N}^*,\lambda\in\Lambda$，有如下蕴含：$r\lambda\in M\Rightarrow\lambda\in M$。

M 嵌入到 Λ 的方式具有一种组合描述（“扇”），它编码了通过添加较小维数的轨道，将 X' 完成为 X 的方式。
T 的环面嵌入之间的态射是 T 等变的态射。于是，有限生成子半群与 T 的仿射环面嵌入的同构类之间存在双射对应 $M\mapsto \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[M]$；饱和半群对应正规仿射环面嵌入。更一般地，仿射环面嵌入之间的态射（以反变方式）对应于半群的包含映射（见 [18, pp 4,6]）。

环面簇。这里我们遵循[10] [6, §2.2]。
托里克簇是一个正规不可约的 T-簇 X（其中 T 是某个环面），并且包含一个开轨道（由于 X 不可约，该轨道因而是扎里斯基稠密的）。
设 $X'=Tx$，$x\in X$ 为这样的轨道。则态射 $T\to X$，$g\mapsto gx$ 是占优的，因此 $A[X]$ 可视为 $A[T]=\mathbb{C}[\Lambda]$ 的一个子代数。更确切地说，存在一个有限生成幺半群 $M\subset\Lambda$，使得 $A[X]=\mathbb{C}[M]$。

满射态射 $T\to X'$，$g\mapsto gx$ 将 X'实现为 T 下的一个齐性空间。根据 [6,§1.1], ，它作为簇同构于环面 $T':=T/T_x$（记住，T_x 是 x 的稳定子）。令 Λ' 为 T' 的特征群，则 $A[T']=\mathbb{C}[\Lambda']$。将那些在 T_x 上消失的特征 $\lambda: T\to\mathbb{C}^*$ 视为 Λ' 的元素，因而视为轨道 $X'=Tx$ 上的正则函数，则 M 的元素正是那些能够延拓为整个 $X\supset X'$ 上正则函数的特征。
由于 T_x 在 X 的稠密子集 X'上作用平凡，因此它在整个 X 上作用平凡，且 T 在 X 上的作用可分解为 T'在 X 上的作用。将 T'与其像 X'等同后，我们看到，环面簇的一般情形归结为环面嵌入的情形。

1.3.3 环面嵌入的重要例子

两个基本例子。

[10] loc.cit. 中的群 G、B、U 在这里分别为 T、T、1。

1. 回顾 1.2.5 中 P^1(复数域) 与 $\hat{\mathrm{C}} := \mathrm{C} \cup \{\infty\}$ 之间的对应关系： $[\mathrm{a} : \mathrm{b}] \mapsto \mathrm{a}/\mathrm{b}$，由此得到 C^* 到 P^1(复数域)中的一个嵌入，进而得到 $\mathrm{T}_n = \mathrm{C}^{*n}$ 到 P^1(复数域)^{n}中的一个嵌入。T_n 在自身上的左作用可扩展为 P^1(复数域)^n 上的一个作用：

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).([a_1 : b_1], \ldots, [a_n : b_n]) := ([\lambda_1 a_1 : b_1], \ldots, [\lambda_n a_n : b_n]),$$

从而构成一个环面嵌入。

2. 我们稍后会遇到射影空间 P^3(复数域) 中的二次超曲面 $\mathrm{XY} = \mathrm{ZT}$。环面 $\mathrm{T}_3 \simeq \{(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}) \in \mathrm{C}^{*4} \mid \mathrm{ab} = \mathrm{cd}\}$ 在该超曲面上有一个自然的作用，定义如下：

$$(a, b, c, d)[X : Y : Z : T] := [aX : bY : cZ : dT],$$

再次构成一个环面嵌入。

一个重要的例子。下面的引理多少显而易见：

引理 1.23 设 $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{X}$ 是一个环面嵌入，$\mathrm{S} \subset \mathrm{T}$ 是一个子环面，且 T/S 本身也是一个环面。假设商空间 X/S 是几何的。那么 $\mathrm{T}/\mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{S}$ 是一个环面嵌入。

由此可知，1.2.5 中描述的簇 $\mathcal{K}_n$ 是一个非分离环面簇。推论 1.29 将给出另一个例子。

1.4 与 Riemann-Hilbert-Birkhoff 对应相关的不变量和商空间：一般情形（$\mathrm{n} \geq 2$ 任意）

第 1.4 节的全部内容，包括一般的 $\mathrm{n} \geq 2$ 和 $\mu \geq 1$，旨在为今后详细研究空间 $\mathcal{F}_{R,S,\underline{x}}$提供术语和基本工具。只有从第 2 节开始，在假设 $\mathrm{n} = \mu = 2$之后，我们才给出实质性结果；因此，初次阅读时可以跳过本小节。

设 $\mathrm{V}_{i,j}$、$1 \leq \mathrm{i}, \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$ 是非平凡有限维复向量空间，并按照我们的约定：

$$V := \prod_{1 \leq i,j \leq n} V_{i,j} \text{ and } V^{(*)} := \prod_{1 \leq i,j \leq n} V^*_{i,j}.$$

我们将它们的元素写作 $\mathrm{M} = (\mathrm{m}_{i,j})$（因为在这里它们是 1.1.2 中所述背景的模型）。令 $2\mathrm{n}$ 维环面 D_n(复数域) $\times$ D_n(复数域)按如下方式作用于 V：

$$(\Gamma, \Delta).M := \Gamma M \Delta^{-1} = \left(\frac{\gamma_i}{\delta_j} m_{i,j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}, \text{ where } \Gamma =: \mathrm{Diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \text{ and } \Delta =: \mathrm{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n).$$

该作用的核显然是 $\mathrm{C}^*(\mathrm{I}_n,\mathrm{I}_n) = \{(\gamma \mathrm{I}_n, \gamma \mathrm{I}_n) \mid \gamma \in \mathrm{C}^*\}$，因此我们定义：

$$H := \frac{\mathrm{D}_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{D}_n(\mathbf{C})}{\mathbf{C}^*(I_n, I_n)},$$

它在 V 上忠实地作用。群 H 本身是一个 $(2\mathrm{n} - 1)$ 维环面：以显然的方式将 D_n(复数域) $\times$ D_n(复数域) 识别为 C^{*2n}，它是其代数子群 $\mathrm{C}^*(\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n)$ 与任意一个 $(2\mathrm{n} - 1)$ 维子环面 $\mathrm{C}^{*i} \times \{1\} \times \mathrm{C}^{*j}$，$\mathrm{i} + \mathrm{j} = 2\mathrm{n} - 1$ 的直积，因此，任意相应的映射 $\mathrm{C}^{*i} \times \{1\} \times \mathrm{C}^{*}{}_j \to \mathrm{H}$ 都是同构。

1.4.1 稳定子

元素 $(\underline{\lambda}, \mu) \in D_n$(复数域) $\times D_n$(复数域)（或其所在的共轭类）属于 M 的稳定子 $H_M := (m_{i,j}) \in V$，当且仅当 $m_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_j$。这些方程在 D_n(复数域) $\times D_n$(复数域) 中定义了一个子环面，其维数等于在 2n 个系数 λ_i、μ_j 中受这些方程约束后剩余的自由度数，而 H_M是一个维数比该数少 1 的环面。

例 1.24 (i) 设 $n = 2$。若 M 至多有一个零分量，则 H_M 是平凡的；否则它不是。

(ii) 设 $n = 3$。若 M 的零点至多出现在位置 (1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)，则 H_M 是平凡的。若 M 有零列或零直线，则 H_M 不是平凡的。

因此，我们将 M 的支撑定义为 $S(M) := \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid m_{i,\ j} \neq 0\}$。然后，对于任意子集 $S \subset \{1, \ldots, n\}^2$，考虑一个二分图，其顶点集为 $\{1, \ldots, n\} \sqcup \{1, \ldots, n\}$（不相交并），其中当且仅当 $(i, j) \in S$ 时，左侧的 i 与右侧的 j 相连；并令 $\chi(S)$ 表示该图的连通分支数。

命题 1.25 环面 H_M在$\chi(S(M))$中的维数为 -1。

证明。- 当且仅当对所有 $(i, j) \in S(M)$，$\gamma_i = \delta_j$时，$(\Gamma, \Delta) \in D_n(C) \times D_n(C)$ 的类属于 H_M。对于每个连通分支，这留下一个自由度（即选择所有的 γ_i, δ_j），因此所有这类对（即 H_M在 $D_n(C) \times D_n(C)$ 中的原像）构成的集合，其维数为 $\chi(S(M))$。□

例 1.26 (i) 设 $n = 2$。则 $\chi(S) = \max(1, 4 - |S|)$。
(ii) 设 $n = 3$。则 $\chi(S) > 1$当 $S \subset \{i_1, i_2\} \times \{1, 2, 3\}$ 对某个 i_1, i_2 成立时，或者当 $S \subset \{1, 2, 3\} \times \{j_1, j_2\}$ 对某个 j_1, j_2, 成立时；而 $\chi(S) = 1$当 S 的补集包含于 $\{i_1, i_2\} \times \{j_1, j_2\}$ 对某些 i_1, i_2, j_1, j_2 成立时。

1.4.2 轨道

设 $M \in V$，且 $S := S(M)$。我们将 $V_S := \prod V_{i,j}$ 视为由所有 $(i, j) \notin S$ 处分量为零$_{(i,j)\in S}$所定义的 V 的子空间。按照一般约定，我们记 $V_{(*)S} := \prod_{(i,j)\in S} V^*_{i,j}$，并将其识别为 V 的子集 $_S$(因此 $V^{(*)}{}_S$在 V_S中是开集且闭集 V)。显然，M 的 H 轨道包含于 $V^{(*)}{}_S$。更准确地说，令我们定义：

$$L^*_{i,j}(M) := \mathbf{C}^* m_{i,j} \subset V^*_{i,j} \text{ and } L^{(*)}_S(M) := \prod_{(i,j)\in S} L^*_{i,j} \subset V^{(*)}_S.$$

于是：

$$H.M \subset \prod_{(i,j)\in S} L^*_{i,j}(M) = L^{(*)}_S(M) \subset \prod_{(i,j)\in S} V^*_{i,j} = V^{(*)}_S.$$

实际参与对 H.M 作用的因子 λ_i/μ_j 是满足 $(i, j) \in S$ 的那些因子。在显然的同构 $L^{(*)}{}_S$ (M) $\simeq$ 复数域^{*S} 下，轨道 H.M 映为：

$$T_S := \{(\lambda_i/\mu_j)_{(i,j)\in S} \mid \text{ all } \lambda_i, \mu_j \in \mathbf{C}^*\} \subset \mathbf{C}^{*S}.$$

命题 1.27 T_S是复数域^{*S}的闭子群，也是一个维数为 2n $-\chi$(S) 的环面。

证明。-它是以下映射的像：

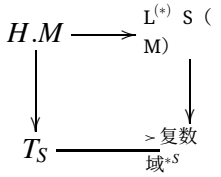
$$D_n(\mathbf{C}) \times D_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^{*S},\ (\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \mapsto (\lambda_i/\mu_j)_{(i,j)\in S}.$$

该映射是代数群的态射，因此其像是闭的（Borel，第 1 章，§1，推论 1.4）。由于核的维数为 χ (S)，像的维数为 $2n-\chi(S)$。此外，作为复数域^{*S}中环面的连通闭子群，它本身也是一个环面。□

我们将其更精确地表述如下。令 $\pi_{i,j}: V^{*}{}_{i,j} \to P(V_{i,j})$ 为自然投影，并（稍微滥用记号 P）：

$$\pi := \prod_{(i,j)\in S} \pi_{i,j} : V_S^{(*)} \to \mathbf{P}(V_S^{(*)}) := \prod_{(i,j)\in S} \mathbf{P}(V_{i,j}),$$

因此，$L^{(*)}{}_S(M) = \pi^{-1}(\pi(M))$ 在 $V^{(*)}{}_S$ 中是闭的，且 H.M 在 $L^{(*)}{}_S(M)$ 中是闭的。我们有如下交换图（其中水平箭头是典范包含映射，垂直箭头是非典范同构）：



推论 1.28 轨道 H.M 在 $V^{(*)}{}_S$中是闭的。

1.4.3 $V^{(*)}{}_S$ 的仿射覆盖

问题在于，$V^{(*)}{}_S$通常不是仿射簇：若 W 是向量空间，则 W^*是仿射簇当且仅当 $\dim W = 1$。然而，对于每个线性形式 $e \in W^{\vee}$（对偶空间），$e \neq 0$，开子集 $W(e) := W \setminus \mathrm{Ker}\, e$ 是仿射簇，其仿射代数为 $C[W(e)] = C[W][1/e]$。此外，每个 W (e) 在自然的 C^*-作用下保持不变，并且 W (e)，$e \in W^{\vee} \setminus \{0\}$，覆盖 W^*：相应的商空间 $W(e)/C^*$是自然的仿射图 $P(W)_e \subset P(W)$。（事实上，只需取 $W^{\vee}$的一组基中的元素 e。）

So, writing for short $V_S^{\vee *} := \prod_{(i,j)\in S} (V_{i,j}^{\vee} \setminus \{0\})$, we define:

$$\forall \underline{e} := (e_{i,j})_{(i,j)\in S} \in V_S^{\vee *},\ V_S(\underline{e}) := \prod_{(i,j)\in S} V_{i,j}(e_{i,j}) \subset V_S^{(*)}.$$

这些开子集覆盖 $V^{(*)}{}_S$，它们在 H的作用 下保持不变，并且是仿射的。现在，真正有用的结果是：

推论 1.29 (i) 如果$M \in V_S(e)$，则轨道 H.M 在$V_S(e)$中是闭的。(ii)如果此外 $\chi(S) = 1$，那么所有$M \in V_S(e)$都是稳定的（按Brion定义 1.25 的含义）。因此，存在$V^{(*)}{}_S$关于H的几何商。(iii)$V^{(*)}{}_S$ /H是一个托里克簇。

最后一个陈述由引理 1.23 得出。

例 1.30 这尤其适用于 $n = 2$和 $S = \{1,2\} \times \{1,2\}$，或去掉同一个有序对 (i, j) 后的情形，即适用于以下格式（每个 $\star$ 代表一个非零系数）：

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \star & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}.$$

我们明确写出一些仿射代数；为此，我们为每个对偶空间 $V^\vee$(i, j) 赋予一个特定的基 $(u^{(k)}(i, j))_{1 \le k \le d_{i,j}}$，其中 $d_{i,j} := \dim_{\mathbf{C}} V_{i,j}$。我们令 $P(V_{i,j})_{e_{i,j}}$表示 $V_{i,j}(e_{i,j})$ 在 $P(V_{i,j})$ 中的像，并令 $P(V^{(*)}S)_{\underline{e}}$表示它们对于 $(i,j) \in S$ 的乘积，即 $\underline{V_S}(e)$ 在 $P(V^{(*)}S)$ 中的像。于是：

$$\mathbf{C}[V_{i,j}] = \mathbf{C}[(u_{i,j}^{(k)})_{1 \le k \le d_{i,j}}], \qquad \mathbf{C}[V_{i,j}(e_{i,j})] = \mathbf{C}[(u_{i,j}^{(k)})_{1 \le k \le d_{i,j}}][1/e_{i,j}],$$

$$\mathbf{C}[V_S] = \bigotimes_{(i,j) \in S} \mathbf{C}[(u_{i,j}^{(k)})_{1 \le k \le d_{i,j}}] = \mathbf{C}[\text{all } u_{i,j}^{(k)}],$$

$$\mathbf{C}[V_S(\underline{e})] = \bigotimes_{(i,j) \in S} \mathbf{C}[(u_{i,j}^{(k)})_{1 \le k \le d_{i,j}}][1/e_{i,j}] = \mathbf{C}[\text{all } u_{i,j}^{(k)}][\text{all } 1/e_{i,j}],$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{P}(V_{i,j})_{e_{i,j}}] = \mathbf{C}[(u_{i,j}^{(k)}/e_{i,j})_{1 \le k \le d_{i,j}}], \qquad \mathbf{C}[\mathbf{P}(V_S^{(*)})_{\underline{e}}] = \mathbf{C}[\text{all } u_{i,j}^{(k)}/e_{i,j}].$$

如果 e 固定，我们将 $x^{(k)}{}_{i,j} := u^{(k)}{}_{i,j} / e_{i,j}$ 写作如下：

$$\mathbf{C}[\mathbf{P}(V_{i,j})_{e_{i,j}}] = \mathbf{C}[(x_{i,j}^{(k)})_{1 \le k \le d_{i,j}}] \text{ and } \mathbf{C}[\mathbf{P}(V_S^{(*)})_{\underline{e}}] = \mathbf{C}[\text{all } x_{i,j}^{(k)}].$$

由于每个族 $(u^{(k)}{}_{i,j})_{1 \le k \le d_{i,j}}$都是 $V^\vee{}_{i,j}$的一组基，因此存在以下线性关系：

$$e_{i,j} = \sum_{1 \le k \le d_{i,j}} \alpha_{i,j}^{(k)} u_{i,j}^{(k)} \Longrightarrow \sum_{1 \le k \le d_{i,j}} \alpha_{i,j}^{(k)} x_{i,j}^{(k)} = 1.$$

请注意，尽管每个 $u^{(k)}{}_{i,j}$都是 $V_{i,j}$上的函数，且每个 $x^{(k)}{}_{i,j}$都是 $V_{i,j}(e_{i,j})$上的函数，但我们分别将它们（以显然的方式）视为 $V^{(*)}{}_S$ 上的函数，以及 $V_S(e)$上的函数。

例 1.31 在 JS 情形（“Jimbo-Sakai”）中，即 $n = 2$、$S = \{1,2\} \times \{1,2\}$ 且所有 $\dim V_i$、$j = 2$的情形，我们将改用 (u_i, j, v_i, j) 表示 $V^\vee(i,j)$ 所选取的基；并令 $x_{i,j} := u_{i,j}/e_{i,j}$、$y_{i,j} := v_i, j/e_i, j$。于是，固定的 e 可表示为 $e_{i,j} = \underline{\alpha}_{i,j} u_{i,j} + \beta_{i,j} v_{i,j}$，因此 $\alpha_{i,j} x_{i,j} + \beta_{i,j} y_{i,j} = 1$。

例 1.32 在退化的 JS 情形中，情况与此相同，只是 $S \subset \{1,2\} \times \{1,2\}$缺少一对特定的指标（因此一个系数为 0，其余三个系数为 $\neq 0$）；对于所有 $(i, j) \in S$，我们仍使用这些记号。

1.4.4 方程

由于 T_S 是环面 C^{*S}的闭子群，它由一组单项式方程定义；实际上，它是特征群 $X(C^{*S}) = Z^S$的一个子群。该子群是自由的，因此存在一组基，并且 T_S 有一组形如 $M(X_{i,j})_{(i,j)\in S} = 1$ 的单项式方程作为基。我们马上就来确定这样一组基。

无论如何，令:

$$\mathbf{X}(\mathbf{C}^{*S}) = \left\{ \prod_{(i,j)\in S} X_{i,j}^{r_{i,j}} \mid \text{all } r_{i,j} \in Z \right\} \simeq \mathbf{Z}^S,$$

复数域^{*S}的特征群，令 $\mathcal{M}_S \subset X(C^{*S})$ 为这样一组单项式，即 $X(C^{*S}/T_S)$ 的一组基。于是，对于每个 $M(X_{i,j}) \in \mathcal{M}_S$，以及每个 $e := (e_{i,j})_{(i,j)\in S} \in V^{\vee *S}$)，代换 $e^*M := M(e_{i,j})$ 在 $V_S(e)$ 上定义正则函数，并且在每个轨道上为常数。 □

注 1.33 可以证明，例如利用基本圈的精确形式，可以得出 C^{*S}/T_S 本身是一个环面。

引理 1.34 关系 $e^*M = $为常数，$M \in \mathcal{M}_S$，构成了 $L^*(M)$ 中每个轨道 H.M 的完备方程组。

证明。-确实，$M = (m_{i,j})_{(i,j)\in S}$ 已固定，我们可以选择同构 $L^*(M) \simeq C^{*S}$，使其将每个 $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in S}$映为 $(e_{i,j}(n_{i,j})/e_{i,j}(m_{i,j}))_{(i,j)\in S}$。于是，方程 $M_c = 1$ 的拉回是方程 $e^*M_c(N) = e^*M_c(M)$。□

由于 T_S的维数为 $2n - \chi(S)$，基 $\mathcal{M}_S$含有 $c(S) := |S| - 2n + \chi(S)$ 个元素。这个数称为二分图的圈秩或圈数（参见 [2,第 4],章或维基百科“圈秩”条目）。下面介绍一种从循环生成方程的方法。我们将 C(S) 记为上述二分图中一组固定的基本圈基。每个 $c \in C(S)$ 都具有回路 $i_1 \to j_1 \to i_2 \to j_2 \to \cdots \to i_k \to j_k \to i_1$,的形式，其中 $i1, \ldots, i_k$（以及 $j1, \ldots, j_k$）两两不同，并且循环 c 不依赖于回路所选取的特定起点 i_1。于是，T_S 中元素的坐标 $x_{i,j}$ 满足:

$$x_{i_1,j_1}x_{i_2,j_2}\cdots x_{i_k,j_k} = \frac{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}}{\mu_{j_1}\cdots\mu_{i_k}} = x_{i_1,j_k}x_{i_2,j_1}\cdots x_{i_k,j_{k-1}}$$

对于任意前像 (λ, μ)。然后我们设:

$$M_c := \frac{X_{i_1,j_1}X_{i_2,j_2}\cdots X_{i_k,j_k}}{X_{i_1,j_k}X_{i_2,j_1}\cdots X_{i_k,j_{k-1}}} \in \mathcal{M}_S.$$

这几乎可以由 c 良好定义，且与出发点无关（出发点选自 i- 指标，即 $\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\} \supset S$ 的左因子）。剩下的唯一自由度来自循环方向的改变，它可以将 M_c 变为 M_c^{-1}。我们可以通过规定以下条件将其固定:

对于 i 例如，i_1 是循环中可能的最小值，那么对于这个 i，j_1 是可能的最小值 1.

既然如此，直到 1.4.4 结束以及 1.4.5 中的几乎所有陈述，都可由初等组合论证推出，因此我们将其证明留给读者。

命题 1.35 T_S 恰好是复数域 C^{*S} 中由这些方程定义的闭子集，而且这些方程彼此独立。

推论 1.36 H.M恰好是$L^*(M)$中由方程 $e^*M_c = \text{constant}$, $c \in C(S)$ 定义的闭子集，而且这些方程彼此独立。

例 1.37 在 JS 情形下，T_S只有一个方程，即 $x_{1,1}x_{2,2} = x_{1,2}x_{2,1}$，因此轨道方程为 $x_{1,1}x_{2,2}/x_{1,2}x_{2,1} = \text{constant}$。

Exam例 1.38 在退化的 JS 情形下，没有循环，也没有方程：$H.M = L^*(M)$。

我们已经得到 H.M 在 $L^*(M)$ 中的方程，现在来求 $L^*(M)$ 在 $V_S(e)$ 中的方程。由于 $L^*(M) = \pi^{-1}(\pi(M))$，利用：

$$\pi(N) = \pi(M) \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in S\,,\ \forall u \in V_{i,j}^{\vee}\,,\ u(M) = u(N),$$

因此，借助所选的基：

$$\pi(N) = \pi(M) \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in S\,,\ \forall k = 1,\ldots,d_{i,j}\,,\ u_{i,j}^{(k)}(M) = u_{i,j}^{(k)}(N).$$

引理 1.39 $L^*(M)$ 在 $V_S(e)$ 中的完备方程组由 $u^{(k)}{}_{i,j}$ =常数给出。

推论 1.40 H.M 恰好是由方程 e^*M_c =常数、$c \in$复数域(S)以及 $u^{(k)}{}_{i,j}$ =常数，$(i, j) \in S, k = 1, \ldots, d_{i,j}$定义的 $V_S(e)$ 的闭子集，并且这些方程彼此独立。

通过计算不变量代数，可以使上述陈述更加精确。

1.4.5 不变量代数

我们知道 $C\left[C^{*S}\right] = C\left[(X_{i,j},\ X_i^{-1},\ _j)\ _{(i,j)\in S}\right]$。从现在起，我们将集合 $\mathcal{M}_S := \{M_c \mid c \in C(S)\}$ 作为 T_S 在 C^{*S} 中的方程基。

引理 1.41 T_S 的仿射代数为：

$$\mathbf{C}[T_S] = \mathbf{C}\left[\{M, M^{-1} \mid M \in \mathcal{M}_S\}\right] = \mathbf{C}\left[\{M_c, M_c^{-1} \mid c \in \mathbf{C}(S)\}\right].$$

命题 1.42 $V_S(e)$ 上的不变量代数为：

$$\mathbf{C}[V_S(\underline{e})/H] = \mathbf{C}[V_S(\underline{e})]^H = \mathbf{C}[\text{all } x_{i,j}^{(k)},\ \text{all } \underline{e}^* M_c, \underline{e}^* M_c^{-1}],$$

与 $|S|$ 关系 $\sum_k \alpha^{(k)}{}_{i,j} x^{(k)}{}_{i,j} = 1$。

推论 1.43 商空间$V_S(e)/H$ 同构于$P(V_{(*)S})_{\underline{e}} \times T_S$。

Theo注 1.44 商空间 V_S/H 是以 $P(V_{(*)S})$ 为底空间、纤维同构于 T_S 的纤维化空间。

证明。- 仿射空间 $P(V_{(*)S})_{\underline{e}}$，$e \in V^{\vee *}S$，拼接成 $P(V_{(*)S})$。对于 $\underline{e}, \underline{e'} \in V^{\vee *}S$，函数$\phi_{i,j} := e'_{i,j}/e_{i,j}$从 $P(V_{(*)S})_{\underline{e}} \cap P(V_{(*)S})_{\underline{e'}}$到复数域*定义了仿射图册上的过渡函数。它们给出了由 $M_c(\phi_{i,j})$ 定义的纤维上的过渡函数。□

例 1.45 在 JS 情形（回忆一下，这意味着 $n = \mu = 2$）中，我们在 P^1(复数域)^4 上得到一个复数域*-纤维化。过渡函数为 $\underline{(e'_{1,1}/e_{1,1})(e'_{2,2}/e_{2,2})}\ (e'_{1,2}/e_{1,2})(e'_{2,1}/e_{2,1})$。在退化的 JS 情形中，我们得到 P^1(复数域)^3。

2 （可能退化的）JS 情形中的不变量与商空间

2.1 一些一般记号

这里 $n = 2$ 且每个 $V_{i,j}$的维数均为 2。群 H 为 $\underline{D_2(\text{复数域}) \times D_2(\text{复数域})}$ 复数域$^*(I_2, I_2)$。

对于 $i, j \in \{1,2\}$，我们固定 $V^{\vee_{i,j}}$ 的一组基 $(u_{i,j}, v_{i,j})$。

对于 $e_{i,j} = \alpha_{i,j}u_{i,j} + \beta_{i,j}v_{i,j} \in V^{\vee_{i,j}} \setminus \{0\}$，令 $V_{i,j}(e_{i,j}) := V_{i,j} \setminus \mathrm{Ker}\ e_{i,j}$。这些集合构成 $V_{i,j}$ 的一个仿射覆盖。相应的仿射代数为：

$$\mathbf{C}\left(V_{i,j}(e_{i,j})\right) = \mathbf{C}[u_{i,j}, v_{i,j}][e_{i,j}^{\pm 1}].$$

相关的射影空间 $P(V_{i,j})$ 由仿射图 $P(V_{i,j})_{e_{i,j}}$（$C(V_{i,j}(e_{i,j}))$ 的像）覆盖；相应的仿射代数为：

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{P}(V_{i,j})_{e_{i,j}}\right) = \mathbf{C}[u_{i,j}, v_{i,j}][e_{i,j}^{\pm 1}] = \mathbf{C}[x_{i,j}, y_{i,j}][e_{i,j}^{\pm 1}],$$

其中我们设 $x_{i,j} := u_{i,j}/e_{i,j}$以及 $y_{i,j} := v_{i,j}/e_{i,j}$（字母 x、y 是固定的，尽管变量 $x_{i,j}$、$y_{i,j}$实际上取决于线性形式 $e_{i,j}$以及具体的仿射坐标图）。它们并非独立变量：

$$\alpha_{i,j}x_{i,j} + \beta_{i,j}y_{i,j} = \alpha_{i,j}u_{i,j}/e_{i,j} + \beta_{i,j}v_{i,j}/e_{i,j} = 1.$$

注 2.1 (i) 设 $V := V1_{,1} \times V1_{,2} \times V2_{,1} \times V2_{,2}$。那么，C(V) 中在 H-作用下的不变量只有常数（这很容易从接下来的计算中得出）。因此，仿射簇 V 被约化群 H 取商所得的范畴商空间 V /H 是平凡的。

(ii) 另一方面，选取上述 $e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2}$ 后，相应的 $x_{i,j}$、$y_{i,j}$（视为 V 上的有理函数）在 H-作用下均为不变的，$\phi := (e_{1,1}e_{1,2})/(e_{2,1}e_{2,2})$ 也如此。接下来的计算还将表明，它们共同生成 $C(V)^H$（其中 C(V) 是 C(V) 的分式域）；因此 $C(V)^H$ 的超越次数为 5。

2.2 非退化 JS 情形：不允许出现零点

这里 S $=\{1,2\}\times\{1,2\}$。我们有：

$$V_S = V^{(*)} = V_{1,1}^* \times V_{1,2}^* \times V_{2,1}^* \times V_{2,2}^*.$$

设 e $:=(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$, 每个 $e_{i,j} \in V_{i,j} \setminus \{0\}$. 那么：

$$V_S(\underline{e}) = V^{(*)}(\underline{e}) = V_{1,1}(e_{1,1}) \times V_{1,2}(e_{1,2}) \times V_{2,1}(e_{2,1}) \times V_{2,2}(e_{2,2}).$$

$V^{(*)}$ 的这些开子集构成一个仿射覆盖。相应的仿射代数为：

$$\mathbf{C}\left(V^{(*)}(\underline{e})\right) = \bigotimes_{i,j} \mathbf{C}[x_{i,j}, y_{i,j}][e_{i,j}^{\pm 1}] = \mathbf{C}[\text{all } x_{i,j}, y_{i,j}][\text{all } e_{i,j}^{\pm 1}].$$

为了研究 H 下的不变量，我们定义环面：

$$T_S = \mathbf{C}^{*4} \text{ with affine algebra } \mathbf{C}(T_S) = \mathbf{C}[\text{all } X_{i,j}^{\pm 1}, i, j = 1,2] = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}^*} \mathbf{C}M,$$

其中 $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_S$ 是由 $X_{i,j}$生成的自由阿贝尔群，即所有单项式 M $:=X_{1\,1}^{r_{1\,1}},,X_{1\,2}^{r_{1\,2}},,X_{2\,1}^{r_{2\,1}},,X_{2\,2}^{r_{2\,2}},,$的集合，其中所有 $r_{i,j} \in$Z。特别地，我们区分 $\Phi:=X_{1,1}X_{2,2}X_{1,2}\underline{X2,_1}$ 对于 $M \in \mathcal{M}^*$ 以及上述 e，我们定义：

$$\underline{e}^* M := M(e_{i,j}) = e_{1,1}^{r_{1,1}} e_{1,2}^{r_{1,2}} e_{2,1}^{r_{2,1}} e_{2,2}^{r_{2,2}}.$$

特别地，$e^*\Phi = \phi := e_{1,1}\underline{e_{2,2}\, e_{1,2}}e_{2,1}$'，它是 H-不变的。（当然，记号 ϕ 取决于具体的 e，我们会尽量避免混淆。）

引理 2.2 (i)复数域 $\left(V_{(*)}(e)\right)^H =$复数域[所有 $x_{i,\,j},\ y_{i,\,j}$][$\phi^{\pm 1}$]。

(ii) 存在一个几何商：

$$V^{(*)}(\underline{e})/H = \mathbf{P}(V^{(*)})_{\underline{e}} \times \mathbf{C}^* \text{ where } \mathbf{P}(V^{(*)})_{\underline{e}} := \prod \mathbf{P}(V_{i,j})_{e_{i,j}}.$$

证明。-(i) 每个 P $\in$复数域 $\left(V_{(*)}(e)\right)$ 都有唯一展开式：

$$P = \sum_{M \in \mathcal{M}^*} P_M(\text{all } x_{i,j}, y_{i,j})\, \underline{e}^* M.$$

因子 P_M 是 H-不变量，而因子 e^*M 是半不变量，其中唯一的不变因子是 $e^*\Phi$ 的幂。（这实际上是由 H 的半单性导出的线性表示的分解。）

(ii) 我们知道，范畴商的代数是 $\mathrm{C}\left(V_{(*)}(e)\right)^H$（仿射且约化）。由于轨道是闭的且稳定子是平凡的（此前已证明），它是由 [6, p 9], 给出的几何商。□

命题 2.3 商空间 V $_{(*)}$ /H 是（总空间）一个纤维为 C*、基底为 P(V $_{(*)}$) 的纤维化：
$= \prod P(V_{i,\ j}) \simeq P^1(C)^4$。它是一个几何商。

证明。- 仿射图 P(V $_{(*)}$)$_{\underline{e}}$、P(V $_{(*)}$)$_{\underline{f}}$在 P(V $_{(*)}$) 上沿其交点 P(V $_{(*)}$)$_{\underline{e}} \cap$P(V $_{(*)}$) $_f$通过过渡函数 $(e_{i,j}/f_{i,j})_{i,j}$ 进行拼接。在复数域 * 因子上的相应过渡函数为 $e^*\Phi f^{*}\dot{\Phi}$。根据 [27，命题 3.10 (b)，第 71]页，粘合几何商是可行的。首先只需验证存在一个定义良好的态射 V $_{(*)}$ $\to$Y，其中 Y 是候选商空间（即上文所描述的纤维空间）；然后验证它在 Y 的某个覆盖上局部化为几何商。第一步很容易，第二步由引理得到。□

推论 2.4 空间 V $_{(*)}$/H 是分离的。

2.3 退化的 JS 情形：要求一个零点

我们（例如）固定零系数位于 (1, 1)，因此这里：

$$S = (\{1,2\} \times \{1,2\}) \setminus \{(1,1)\} = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

因此，我们考察 H-作用于：

$$V_S = V^0 = \{0\} \times V^*_{1,2} \times V^*_{2,1} \times V^*_{2,2}.$$

我们将记 $e' := (e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$，每个相关的 $e_{i,\ j} \in V^{\vee_{i,\ j}} \setminus \{0\}$（此处及下文，“相关”表示 (i, j) $=$ (1,1) 被省略）。于是：

$$V_S(\underline{e}') = V^0(\underline{e}') = \{0\} \times V_{1,2}(e_{1,2}) \times V_{2,1}(e_{2,1}) \times V_{2,2}(e_{2,2}).$$

这些 V^0 的开子集构成一个仿射覆盖。相应的仿射代数为（记号与非退化 JS 情形相同）：

$$\mathbf{C}\left(V^0(\underline{e}')\right) = \mathbf{C}[x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}][e^{\pm 1}_{1,2}, e^{\pm 1}_{2,1}, e^{\pm 1}_{2,2}].$$

引理 2.5 (i)复数域 $\left(V^0(e')\right)^H =$复数域$[x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}]$。

（ii）存在一个几何商：

$$V^0(\underline{e}')/H = \mathbf{P}(V^0)_{\underline{e}'} := \mathbf{P}(V_{1,2})_{e_{1,2}} \times \mathbf{P}(V_{2,1})_{e_{2,1}} \times \mathbf{P}(V_{2,2})_{e_{2,2}}.$$

证明。-(i) 每个 P $\in$复数域 $\left(V^0(e')\right)$ 都能唯一展开为相关 $x_{i,\ j}$、$y_{i,\ j}$ 的 P_M(relevant $x_{i,j}$, $y_{i,\ j}$)M(relevant $e_{i,j}$) 之和，但此处唯一的不变单项式 M 是平凡的（因为相关的 λ_i/μ_j 是三个线性无关的复数）。

（ii）与非退化情形中的证明相同。 □

命题 2.6 存在一个几何商：

$$V^0/H = \mathbf{P}(V^0) := \mathbf{P}(V_{1,2}) \times \mathbf{P}(V_{2,1}) \times \mathbf{P}(V_{2,2}) \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^3.$$

2.4 部分拼接的一个候选支架：允许一个零点

我们再次将允许的零系数固定在 (1, 1) 处，因此考察的是以下对象上的 H-作用：

$$V' := V_{1,1} \times V_{1,2}^* \times V_{2,1}^* \times V_{2,2}^* = V^{(*)} \sqcup V^0.$$

对于 $\underline{e}' := (e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$，每个相关的 $e_{i,j} \in V^{\vee}_{i,j} \setminus \{0\}$，我们设：

$$V'(\underline{e}') = V_{1,1} \times V_{1,2}(e_{1,2}) \times V_{2,1}(e_{2,1}) \times V_{2,2}(e_{2,2}).$$

V' 的这些开子集构成一个仿射覆盖。为了描述相应的仿射代数，我们沿用前面的记号，并引入一个新记号：

$$x'_{1,1} = u_{1,1}\frac{e_{2,2}}{e_{1,2}e_{2,1}}, \quad y'_{1,1} = v_{1,1}\frac{e_{2,2}}{e_{1,2}e_{2,1}}.$$

它们是 H-不变的，并且在涉及 $\underline{e}$ 时，满足以下等式：

$$\begin{cases} x'_{1,1} = x_{1,1}\,\underline{e}^*\Phi, \\ y'_{1,1} = y_{1,1}\,\underline{e}^*\Phi, \end{cases} \Longrightarrow \alpha_{1,1}x'_{1,1} + \beta_{1,1}y'_{1,1} = \underline{e}^*\Phi.$$

仿射代数于是由下式给出：

$$\mathbf{C}\left(V'(\underline{e}')\right) = \mathbf{C}[x'_{1,1}, y'_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}][e_{1,2}^{\pm 1}, e_{2,1}^{\pm 1}, e_{2,2}^{\pm 1}].$$

那么，按照与前面相同的论证：

引理 2.7 (i)$C(V'(e'))^H = C[x'_{1,1}, y'_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}]$. (ii) 存在一个范畴商：

$$V'(\underline{e}')/H = \mathbf{P}(V')_{\underline{e}'} := \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}(V_{1,2})_{e_{1,2}} \times \mathbf{P}(V_{2,1})_{e_{2,1}} \times \mathbf{P}(V_{2,2})_{e_{2,2}}.$$

证明。-(i) 与前面的计算一样，容易得到。
(ii) 由约化群作用于仿射簇的一般结论可得。 □

命题 2.8 存在一个范畴商V'/H；它是 $P(V^0)$ 上秩为 2 的向量丛。它实际上是一个直线丛的笛卡尔平方，其过渡函数为 $f_{2,2}/(f_{1,2}f_{2,1})\, e_{2,2}/(e_{1,2}e_{2,1})$.

证明。- 实际上，这些是独立于变量 $x'_{1,1}, y'_{1,1}$ 的变换规律。我们再次使用了 [27] 在命题 2.3 的证明中已经用过的拼接论证。□

注 2.9 上述丛实际上是线丛的“外张量积” $\mathcal{O}(\pm 1)$。

2.5 拼接

为了了解商空间 $V^{(*)} \to V^{(*)}/H$ 和 $V^0 \to V^0/H$ 如何嵌入商空间 $V' \to V'/H$ 中，我们使用两条不同的原理。

2.5.1 非退化部分

令 e′ 是从 e 中去掉 e1,1 后提取的。我们有一个仿射簇 V(*)(e) →V′(e′) 的开浸入，它由其仿射代数的对偶态射诱导：

$$\mathbf{C}[x'_{1,1}, y'_{1,1}, \text{all other } x_{i,j}, y_{i,j}][e^{\pm 1}_{1,2}, e^{\pm 1}_{2,1}, e^{\pm 1}_{2,2}] \to \mathbf{C}[\text{all } x_{i,j}, y_{i,j}][\text{all } e^{\pm 1}_{i,j}]$$

由等式 u1,1 e2,2 e1,2e2, 1 = u1,1 e1,1 e1,1e2,2 e1,2e2,1 以及将 v1,1，w 代入所得的类似等式可知，它将 x′1, 1 映到 x1, 1ϕ，并将 y′1, 1 映到 y1, 1ϕ。它限制在 H-不变子代数上时，是将 x′1, 1 映到 x1, 1ϕ，并将 y′1, 1 映到 y1, 1ϕ 的态射：

$$\mathbf{C}[x'_{1,1}, y'_{1,1}, \text{all other } x_{i,j}, y_{i,j}] \to \mathbf{C}[\text{all } x_{i,j}, y_{i,j}][\phi^{\pm 1}].$$

由于该开浸入是 H-等变的，它诱导出从 P(V(*))e ×复数域* 到复数域2 ×P(V1,2)e1, 2 ×P(V2,1)e2, 1 ×P(V2,2)e2, 2 对偶空间的商空间之间的浸入，该浸入对偶于上述代数态射。拼接后，我们得到一个开浸入：

$$V^{(*)}/H = \mathbf{P}(V^{(*)}) \times \mathbf{C}^* \to V'/H = \text{plane bundle over } \mathbf{P}(V^0),$$

由上述态射在坐标中描述。因此，V(*) →V (*) /H 是范畴商空间 V′ →V ′/H 在不变开子集上的限制。

2.5.2 退化部分

令 e′ 如常。由仿射代数的对偶态射诱导出一个仿射簇的闭浸入 V 0(e′) →V′(e′)，该态射将 x′1, 1 和 y′1, 1 映为 0：

$$\mathbf{C}[x'_{1,1}, y'_{1,1}, \text{all other }][e^{\pm 1}_{1,2}, e^{\pm 1}_{2,1}, e^{\pm 1}_{2,2}] \to \mathbf{C}[x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}][e^{\pm 1}_{1,2}, e^{\pm 1}_{2,1}, e^{\pm 1}_{2,2}].$$

它限制为不变子代数之间的类似态射：

$$\mathbf{C}[x'_{1,1}, y'_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}] \to \mathbf{C}[x_{1,2}, y_{1,2}, x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}].$$

该对偶态射是到 $\{0\} \subset$复数域^2 截面的闭浸入：

$$\mathbf{P}(V_{1,2})_{e_{1,2}} \times \mathbf{P}(V_{2,1})_{e_{2,1}} \times \mathbf{P}(V_{2,2})_{e_{2,2}} \to \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}(V_{1,2})_{e_{1,2}} \times \mathbf{P}(V_{2,1})_{e_{2,1}} \times \mathbf{P}(V_{2,2})_{e_{2,2}}$$

进行拼接后，我们得到到零截面的闭浸入：

$$V^0/H = \mathbf{P}(V^0) \to V'/H = \text{plane bundle over } \mathbf{P}(V^0).$$

3 非退化 JS 情形中的二次曲面及其上的函数

3.1 一般记号和约定

本节旨在用（双）线性代数的语言表述 $F_{R,S,x}$ 中单值矩阵的性质（参见论文 [32]）。由此得到一些满足若干公理的对象；对于这些公理，我们每次都会简要回顾其在 [32] 中的依据。从本文此处起，n = μ = 2，使得 N = 4。以下条件将始终假定成立：

• (NR) 强非共振性:

$$\forall i,j\in\{1,\dots,2\}\,,\ i\neq j\Longrightarrow(\rho_i\not\equiv\rho_j \text{ and } \sigma_i\not\equiv\sigma_j)\,,$$
$$\forall k,l\in\{1,\dots,4\}\,,\ k\neq l\Longrightarrow x_k\not\equiv x_l.$$

• (FR) Fuchs关系:

$$(-1)^N x_1\cdots x_N=\frac{\rho_1\dots\rho_n}{\sigma_1\dots\sigma_n}.$$

（回想一下，我们用 $\equiv$表示复数域 $\mathbb{C}^*$中模 $q^{\mathbb{Z}}$ 的同余。）以下条件也会经常用到:

• (NS) 非分裂性:

$$\forall i,j\in\{1,2\}\,,\ \rho_i/\sigma_j\not\equiv x_1x_2.$$

• (SC) 特殊条件:

$$\frac{\rho_1}{\sigma_1}\not\equiv\frac{\rho_2}{\sigma_2}\quad\text{and}\quad\frac{\rho_2}{\sigma_1}\not\equiv\frac{\rho_1}{\sigma_2}.$$

关于 (NR)、(FR) 和 (NS) 的注释，见 [32, 5.1]；关于 (SC) 的注释，见 [32, 4.4]。

3.1.1 求值与线性形式

在每个 $V_{i,\ j}$上，给定四个特定的非零线性形式，它们分别对应于求值映射 $m\mapsto m(x_k)$、$k=1$、2、3、4。它们在 $V^{\vee_{i,\ j}}$中定义了四个族。公理。- 对于每个 i、$j\in\{1,2\}$，给定的四个形式两两线性无关。解释。- 若 $m_{i,\ j}(x_k)=m_{i,\ j}(x_l)=0$且 $m_{i,\ j}\neq 0$，则 $x_kx_l\equiv\rho_i/\sigma_j$，这与 (NS) 矛盾。

沿用前文关于 $V_{i,\ j}$的基 $(u_{i,\ j}、v_{i,\ j})$ 的记号，例如我们可以规定 $u_{i,\ j}$和 $v_{i,\ j}$分别对应于在 x_1 和 x_2处的求值。我们将 $w_{i,\ j}$（分别为 $w'_{i,\ j}$）记作在 x_3,处（分别在 x_4 处）的求值，并将它们表示为:

$$\begin{cases}w_{i,j}=\lambda_{i,j}u_{i,j}+\mu_{i,j}v_{i,j},\quad \lambda_{i,j},\mu_{i,j}\neq 0,\\ w'_{i,j}=\lambda'_{i,j}u_{i,j}+\mu'_{i,j}v_{i,j},\quad \lambda'_{i,j},\mu'_{i,j}\neq 0,\end{cases}\qquad\text{此外还满足以下条件 }\lambda_{i,j}\mu'_{i,j}-\lambda'_{i,j}\mu_{i,j}\neq 0.$$

通过从 $V:=V1_{,1}\times V1_{,2}\times V2_{,1}\times V^{2,2}$到各个 $V_{i,j}$ 的自然投影，以及对偶嵌入 $V^{\vee_{i,j}}\to V^{\vee}$，我们可以（并且将会）把上述对象视为 V 上的线性形式。由此，我们得到四个从 V 到 Mat_2(复数域) 的线性映射 u、v、w 和 w′。

3.1.2 行列式和双线性形式

对应于行列式在 $(m^{1,1}m2_{,\ 2}-m^{1,2}m^{2,1})(x_k)=m^{1,1}m^{2,2}(x_k)-m^{1,2}m^{2,1}(x_k)$ 处的求值，我们在 V 上定义如下十二个双线性形式:

$$\begin{aligned}A_+&:=u_{1,1}u_{2,2},\quad A_-:=u_{1,2}u_{2,1},\quad A:=A_+-A_-=\det\underline{u},\\ B_+&:=v_{1,1}v_{2,2},\quad B_-:=v_{1,2}v_{2,1},\quad B:=B_+-B_-=\det\underline{v},\\ C_+&:=w_{1,1}w_{2,2},\quad C_-:=w_{1,2}w_{2,1},\quad C:=C_+-C_-=\det\underline{w},\\ C'_+&:=w'_{1,1}w'_{2,2},\quad C'_-:=w'_{1,2}w'_{2,1},\quad C':=C'_+-C'_-=\det\underline{w'}.\end{aligned}$$

公理。- 存在 $\alpha,\beta,\gamma \in$ 复数域*，使得 复数域$_+ = \alpha A_+ + \beta B_+ + \gamma$复数域$_+$ 且 复数域$_- = \alpha A_- + \beta B_- + \gamma$复数域$_-$。由此可得 复数域 $= \alpha A + \beta B + \gamma$复数域。
解释。- Fuchs关系 $x_1x_2x_3x_4 \equiv \dfrac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$意味着，如果 $m \in V4$，$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$在三个 x_k 处为零，那么它在第四个也为零。因此，这实际上是 V4，$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$上若干线性形式之间的关系。

3.1.3 对$F_{R,S,\underline{x}}$ 和 $\mathcal{F}_{R,S,\underline{x}}$<style id="">的应用

我们希望将（来自 [32] 的）条件转化为：det M 在 x_k 处为零，$k = 1, \ldots, 4$，但并非恒等于零；等价地，由于 Fuchs关系以及 det M $\in$V4，$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$这一事实：矩阵 M($x_k$) 的秩都为 1（否则 det M 会有一个重零点）。因此，这意味着 det M(x_k) $= 0$，但没有 M(x_k) $= 0$。此外，这也意味着 M 既没有零线，也没有零列。无论如何，子集 F $\subset$V 是局部闭的（det $\neq 0$ 是开条件，而 det M(x_k) $= 0$ 是闭条件），并且在 H 的作用下保持不变。我们将所关注的空间（其中可以识别出 $F_{R,\ S,\ \underline{x}}$）记作：

$$F := A^{-1}(0) \cap B^{-1}(0) \cap C^{-1}(0) \setminus W, \quad W := \det{}^{-1}(0).$$

引理3.1 F $\subset$V $^{(*)} =$V $^*_{1,\ 1} \times$V $^*_{1,\ 2} \times$V $^*_{2,\ 1} \times$V $^*_{2,\ 2}$。

证明。- 例如，若 $m_{1,\ 1} = 0$，则 $m_{1,2}m_{2,\ 1} \neq 0$（以免 det M 为 0），但它在所有 x_k 处都为零（因为 det M 为零），所以 $m_{1,2}$，$m_{2,1}$，中至少有一个在至少两个 x_k 处为零，这与 (NS) 矛盾。对所有 $m_{i,\ j}$ 都有类似论证。□

F 在几何商映射 $V^{(*)} \to V^{(*)}/H$ 下的像（其中我们认出$\mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$）是 $V^{(*)}/H$ 的一个子簇。

定理3.2 (i) 映射 $F_{R,\ S,\ \underline{x}} \to \mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$ 是一个几何商。(ii) 单值化数据空间 $\mathcal{F}_{R,\ S,\ \underline{x}}$ 是一个分离簇。
证明.-(i) 根据引理，这可由推论 1.29 得出。(ii) 这可由推论 2.4 得出。 □

引理的另一个有用推论是：

推论 3.3 对于 M $\in$F，且 $k \neq l$，矩阵 M(x_k) 和 M(x_l) 不可能在同一位置有零点。

证明。 - 例如，如果 $m_{1,1}$ 在 x_k 和 x_l 处为零，其中 $k \neq l$，那么根据 (NS)，$m_{1,\ 1} = 0$，而这刚刚已被排除。□

3.2 Mat_2(复数域) 中的秩 1 矩阵与塞格雷嵌入

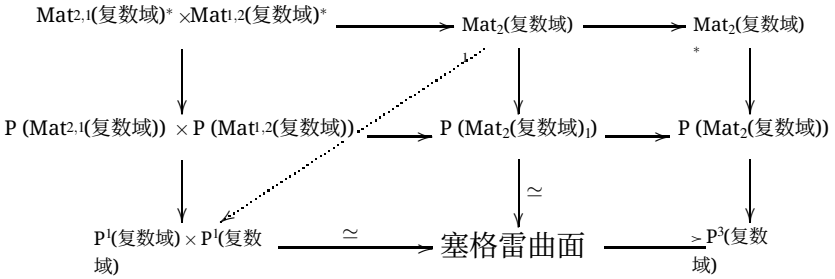
3.2.1 秩 1 矩阵的射影“坐标”

映射 (C, L) $\mapsto$ CL 从 $Mat^{2,1}(C) \times Mat^{1,2}(C)$ 到 $Mat_2(C)$ 的像是奇异矩阵的子集。限制到 $Mat^{2,1}(C)^* \times Mat^{1,2}(C)^*$ 后，映射的目标是 $Mat_2(C)^*$，其像为

秩为 1 的矩阵集合 $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1$ 。注意，后者在 $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})$ 中是局部闭的，因此是一个准仿射簇；实际上，它是一个复数域*-锥，所以记作 $\mathbf{P}(\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1)$ 是合理的（它表示一个准射影簇）。转到射影商空间，我们得到：

$$\mathbf{P}(\mathrm{Mat}_{2,1}(\mathbf{C})) \times \mathbf{P}(\mathrm{Mat}_{1,2}(\mathbf{C})) \to \mathbf{P}(\mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})),$$

这可以与塞格雷嵌入 $\mathbf{P}^1$(复数域) $\times\, \mathbf{P}^1$(复数域) $\to \mathbf{P}^3$(复数域) 相对应，即将源同构到一个光滑射影二次曲面——塞格雷曲面。



塞格雷曲面与像 $\mathbf{P}(\mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1)$ 同构，该像来自 $\mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1$ 到 $\mathbf{P}\,(\mathrm{Mat}_2(\text{复数域}))$ 的映射。我们将复合映射（上一幅图中的虚线箭头）记作 (ρ, ρ')：

$$\mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1 \to \mathbf{P}\,(\mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1) \to \text{塞格雷曲面} \to \mathbf{P}^1(\text{复数域}) \times \mathbf{P}^1(\text{复数域}),\ \mathrm{CL} \mapsto (\text{C 的类，L 的类})。$$

因此， ρ和 ρ' 都是从簇 $\mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1$ 到 $\mathbf{P}^1$(复数域)的正则映射。

具体地，设 $A := \begin{pmatrix} a^{1,1} & a^{1,2} \\ a^{2,1} & a2,\ _2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1$。则 $\rho(A)$ $\rho'(A)$ $\in \mathbf{P}^1$(复数域)

由以下公式给出：

$$\rho(A) = [a_{1,1} : a_{1,2}] = [a_{2,1} : a_{2,2}] \text{ and } \rho'(A) = [a_{1,1} : a_{2,1}] = [a_{1,2} : a_{2,2}]. \tag{3.3.1}$$

在第一个公式中，表达式 $[a^{1,1} : a_{1,2}], [a^{2,1} : a_{2,2}]$ 中的一个可能未定义（如果 A 的某一行全为零）：此时只需忽略相应的等式；第二个公式同理。

3.2.2 特殊点与混合射影坐标

直接观察 CL 可知：

- 闭子集 $\rho^{-1}(0)$ of Mat2(复数域)1 由第一行平凡的矩阵组成；
- Mat2(C)1 的闭子集 $\rho^{-1}(\infty)$ 由第二行为零的矩阵组成；
- Mat2(C)1 的闭子集 $\rho'^{-1}(0)$ 由第一列为零的矩阵组成；
- Mat2(C)1 的闭子集 $\rho'^{-1}(\infty)$ 由第二列为零的矩阵组成。

现在，令 $M_i := $ 复数域$_i L_i \in \mathrm{Mat}_2(\text{复数域})_1, i = 1, 2$ 满足： $\rho(M_1) = \rho(M_2) = 0$ 与 $\rho(M_1) = \rho(M_2) = \infty$均不成立。记 $C_i := \begin{pmatrix} i \\ f_i \end{pmatrix} \neq 0 g$ ，容易验证，$f_1 g_2 = f_2 g_1 = 0$ 将导致以下两种情况之一

$f_1 = f_2 = 0$ 或 $g_1 = g_2 = 0$，而根据假设，这两种情况都不成立。因此，$[f_1g_2 : f_2g_1] \in$P^1(复数域)定义良好。利用 CL $=$复数域′L′ $\Rightarrow$复数域′，C 成比例这一事实，我们看到 $[f_1g_2 : f_2g_1]$仅依赖于 M。我们将其记为 $\Pi(M_1,M_2)$。类似地，用直线代替列向量来定义$\Pi'(M_1,M_2)$。由此，我们定义了两个正则映射：

$$\begin{cases} \Pi : \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1 \times \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1 \setminus \big((\rho^{-1}(0) \times \rho^{-1}(0)) \cup (\rho^{-1}(\infty) \times \rho^{-1}(\infty))\big) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \\ \Pi' : \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1 \times \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C})_1 \setminus \big((\rho'^{-1}(0) \times \rho'^{-1}(0)) \cup (\rho'^{-1}(\infty) \times \rho'^{-1}(\infty))\big) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}). \end{cases}$$

3.3 F上的映射 ρ_k，$k = 1, \ldots\ldots, 4$，以及 $[\rho]$

我们尝试调整 [16] 中的第一种方法。无论此处采用的呈现方式在多大程度上属于“公理化”（之后会进行统一），我们先总结关于 F 及其商空间 $\mathcal{F}$ 的一些基本事实：

1. F 是 8 维线性空间 V 的一个子集，由三个齐次二次方程 $\det M(x_k) = 0$，$k = 1, 2, 3$（第四个方程可由 Fuchs 关系（FR）推出）以及一个不等式 $\det M \neq 0$ 定义。因此，F 是一个维数为 ≥ 5 的准仿射簇。

2. 由非分裂条件（NS）可知，$F \subset V^{(*)}$。显然，它在 H 的作用下也保持不变。既然我们知道存在几何商 $V^{(*)}/H$，就可知$\mathcal{F}$是 F 在 $V^{(*)}/H$ 中的像，并且是一个维数为 ≥ 2 的准仿射簇。

3.3.1 ρ_k 和 $[\rho]$的定义

设 $\Gamma, \Delta \in$ D$_2$(复数域)。于是，采用通常的记号 M $=$CL：

$$\rho(\Gamma M) = \rho(\Gamma CL) = \rho((\Gamma C)L) = \text{ class of } L = \rho(CL) = \rho(M),$$

而：

$$\rho(M\Delta) = \rho(CL\Delta) = \rho(C(L\Delta)) = \text{ class of } L\Delta = \chi(\Delta).\rho(CL) = \chi(\Delta).\rho(M),$$

其中[11] χ(对角矩阵(d,d′)) $:=$ d/d′，并且我们让复数域C* 作用于P^1(复数域)，其作用为 c.[x : y] $:=$ [cx : y]。对称地：

$$\rho'(\Gamma M) = \chi(\Gamma).\rho'(M), \quad \rho'(M\Delta) = \rho'(M).$$

我们定义 F，使其通过 u、v、w、w′ 中任意一个映射到 Mat$_2$(复数域)$_1$。因此，我们得到一个定义良好的正则映射：

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) := (\rho \circ \underline{u}, \rho \circ \underline{v}, \rho \circ \underline{w}, \rho \circ \underline{w}') : F \to \big(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\big)^4.$$

它在以下意义下与 H的作用 相容：

$$M \mapsto (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \big(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\big)^4 \Longrightarrow \Gamma M \Delta^{-1} \mapsto (c.r_1, c.r_2, c.r_3, c.r_4), \text{ where } c := \frac{\chi(\Gamma)}{\chi(\Delta)}.$$

回顾一下 $\mathcal{F}$，即 F 在 $V^{(*)} \to V^{(*)}/H$ 下的像。上述内容诱导出一个映射：

$$[\rho] : \mathcal{F} \to \big(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\big)^4 / \mathbf{C}^*.$$

[11]当然，这个特征 χ 与 1.4.1 中引入的图上的函数 χ 毫无关系。

命题 3.4 映射[ρ]是单射。

证明。- 我们要证明，若 M、N $\in$ F 满足 $\rho_k(N) = c\rho_k(M)$，其中某个 c $\in C^*$ 且 k $= 1, \ldots, 4$，则存在某个 $\Gamma, \Delta \in D_2(C)$，使得 N $= \Gamma M \Delta$。首先，将 M 替换为 MΔ，其中某个 $\Delta \in D_2(C)$（例如 Diag(1, c)），便可假设 c $= 1$。然后，将下面的引理依次应用于四个等式 $\rho_k(M) = \rho_k(N)$，即 $\rho(M(x_k)) = \rho(N(x_k))$，由此可得，对所有 i、j $= 1, 2$：

$$m_{i,1}n_{j,2} - m_{i,2}n_{j,1} \in V_{4,\rho_i\rho_j/(\sigma_1\sigma_2)} \text{ vanishes at all } x_k.$$

对 i = j，利用 (NR)（非共振性）和 (FR) 的性质，我们有：

$$\rho_i^2/(\sigma_1\sigma_2) \not\equiv \rho_1\rho_2/(\sigma_1\sigma_2) \Longrightarrow \rho_i^2/(\sigma_1\sigma_2) \not\equiv x_1x_2x_3x_4,$$

因此，$V4,\rho_i^2/(\sigma_1\sigma_2)$ 中在所有 x_k 处都为零的元素必为 0。所以，对于 i $= 1, 2$，我们有 $m_{i,1}n_{i,2} = m_{i,2}n_{i,1}$。令 $\gamma_i := n_{i,1}/m_{i,1} = n_{i,2}/m_{i,2}$（回顾一下，所有 $m_{i,j}$ 和 $n_{i,j}$ 均为 $\neq 0$）。γ_i 二者都是阶为 ≤ 2 的非零椭圆函数。但由于 (NR)，$m_{i,1}$ 和 $m_{i,2}$ 不可能有两个共同零点。因此，实际上 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^*$，且 $\Gamma := \mathrm{Diag}(\gamma_1, \gamma_2) \in D_2(C)$ 满足 N $= \Gamma M$。□

引理 3.5 设 A $:= (a_{i,j})$，B $:= (b_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_2$(复数域)$_1$。则：

$$\rho(A) = \rho(B) \Longleftrightarrow \forall i, j = 1, 2\ ,\ a_{i,1}b_{j,2} - a_{i,2}b_{j,1} = 0.$$

证明。-注意到，一般而言，$[a_1 : a_2] = [b_1 : b_2] \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$，并在 3.2.1 的末尾应用 ρ(A) ρ(B) 的“具体描述”（3.3.1）。□

我们希望将 [ρ] 视为一个正则映射，但尚不清楚商空间$\left(P^1(\text{复数域})\right)^4/C^*$ 除了显然的集合论意义之外是以何种意义定义的。例如，在复数域 C 的* 作用下，$\left(P^1(\text{复数域})\right)^4$ 上的一般轨道维数为 1，而存在 16 个不变点 $\Theta_4 := \{0, \infty\}^4$，等等。然而，我们在 1.2.5 中看到，提取集合 Θ_4后，可以得到一个（非分离的）几何商 $\mathcal{K}_4 := \left(\left(P^1(\text{复数域})\right)^n \setminus \Theta_n\right)/C^*$，而且它还是一个托里克簇（参见 1.3.3）。

3.3.2 [ρ]的像

我们不写作 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$，而写作 $\rho, \sigma, \tau, \tau'$，以与记号 u, v, w, w′保持一致（这与先前使用 ρ 的方式略有矛盾，但似乎并无大碍）。我们讨论 F_1, 的情形，因此 $(\rho, \sigma, \tau, \tau')$ 将其映到 $Y_1' =$ 复数域* × 复数域* × 复数域 × 复数域∞。定义等式如下：

$$\begin{cases} u_{1,2} = \rho u_{1,1}, \\ u_{2,2} = \rho u_{2,1}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1,2} = \sigma v_{1,1}, \\ v_{2,2} = \sigma v_{2,1}, \end{cases} \quad \begin{cases} w_{1,2} = \tau w_{1,1}, \\ w_{2,2} = \tau w_{2,1}, \end{cases} \quad \begin{cases} w'_{1,2} = \tau' w'_{1,1}, \\ w'_{2,2} = \tau' w'_{2,1}. \end{cases}$$

只有在 $\tau' = \infty$ 的特殊情形下，我们才必须改用 $\tau'' := \tau'^{-1}$（将在 $\tau'' = 0$ 处讨论），并将最后一对等式替换为 $\begin{cases} \tau'' w'_{1,2} = w'_{1,1}, \tau'' w'_{2,2} = w'_{2,1}, \end{cases}$。我们还回顾一下，$\begin{cases} w_{i,j} = \lambda_{i,j}u_{i,j} + \mu_{i,j}v_{i,j}, w'_{i,j} = \lambda'_{i,j}u_{i,j} + \mu'_{i,j}v_{i,j}, \end{cases}$ 其中 i, j $= 1,2$，因此：

$$\begin{cases} \lambda_{1,2}\rho u1,_1 + \mu1,_2\sigma v1,_1 = \tau(\lambda_1,1u1,_1 + \mu_{1,1}v_{1,1})\lambda_2 \quad {}_{2\,1} + {}_{2\,2}\sigma\ {}_{2\,1} = \tau\ \lambda_{2\,1}\ {}_{2\,1} + {}_{2,1}\ {}_{2,1}\ ,, u, \mu, v, (, u, \mu\ v) \text{ 和} \\ {}_2\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda'_{1,2}\rho u1,_1 + \mu'_{1,2}\sigma v1,_1 = \tau'(\lambda'_1,1u1,_1 + \mu'_1,1v_{1,1})\lambda'_2 \quad {}_{2\,1} + {}'_{2\,2}\sigma\ {}_{2\,1} = \tau'\ \lambda'_{2\,1}\ {}_{2\,1} + {}'_{2\,1}\ {}_{2,1}\ \cdot, u, \mu, v, (, u, \mu, v) \\ {}_2\rho \end{cases}$$

当然，在 $\tau'=\infty$ 处，最后两个等式必须以显而易见的方式修改（即在左侧放置一个 τ'' 因子，而不是在右侧放置一个 τ' 因子）。
我们将上述内容转化为线性系统；首先考虑 $\tau'\neq\infty$ 的情形：

$$\begin{cases}(\lambda_{1,2}\rho-\lambda_{1,1}\tau)u_{1,1}+(\mu_{1,2}\sigma-\mu_{1,1}\tau)v_{1,1}=0,\\(\lambda'_{1,2}\rho-\lambda'_{1,1}\tau')u_{1,1}+(\mu'_{1,2}\sigma-\mu'_{1,1}\tau')v_{1,1}=0,\end{cases}\quad\text{and}\quad\begin{cases}(\lambda_{2,2}\rho-\lambda_{2,1}\tau)u_{2,1}+(\mu_{2,2}\sigma-\mu_{2,1}\tau)v_{2,1}=0,\\(\lambda'_{2,2}\rho-\lambda'_{2,1}\tau')u_{2,1}+(\mu'_{2,2}\sigma-\mu'_{2,1}\tau')v_{2,1}=0.\end{cases}$$

注意到，既不能有 $(u^{1,1},v^{1,1})=(0,0)$，也不能有 $(u^{2,1},v^{2,1})=(0,0)$（同样是因为 (NR) 和 (NS)），因此我们可以推出行列式为零：

$$\begin{cases}(\lambda_{1,2}\rho-\lambda_{1,1}\tau)(\mu'_{1,2}\sigma-\mu'_{1,1}\tau')-(\lambda'_{1,2}\rho-\lambda'_{1,1}\tau')(\mu_{1,2}\sigma-\mu_{1,1}\tau)=0,\\(\lambda_{2,2}\rho-\lambda_{2,1}\tau)(\mu'_{2,2}\sigma-\mu'_{2,1}\tau')-(\lambda'_{2,2}\rho-\lambda'_{2,1}\tau')(\mu_{2,2}\sigma-\mu_{2,1}\tau)=0.\end{cases}$$

它们可以写成二次方程的形式；对于 $i=1$、2：

$$A_i\rho\sigma+B_i\tau\tau'+C_i\rho\tau-D_i\rho\tau'-E_i\sigma\tau+F_i\sigma\tau'=0,$$

其中系数如下（注意它们全都是 $\neq 0$）：

$$A_i:=\lambda_{i,2}\mu'_{i,2}-\lambda'_{i,2}\mu_{i,2},B_i:=\lambda_{i,1}\mu'_{i,1}-\lambda'_{i,1}\mu_{i,1},C_i:=\lambda'_{i,2}\mu_{i,1},D_i:=\lambda_{i,2}\mu'_{i,1},E_i:=\lambda'_{i,1}\mu_{i,2},F_i:=\lambda_{i,1}\mu'_{i,2}.$$

我们很快将会看到（见 3.4.3），$i=1$ 和 $i=2$ 对应的二次方程实际上成比例，因此它们定义了同一个二次曲面。

在 $\tau'=\infty$ 附近，也就是在 $\tau''=0$ 附近，方程变为：

$$A_i\rho\sigma\tau''+B_i\tau+C_i\rho\tau\tau''-D_i\rho-E_i\sigma\tau\tau''+F_i\sigma=0,$$

它在 $\tau''=0$ 附近是一个图：

$$\rho=\frac{B_i\tau+F_i\sigma-E_i\sigma\tau\tau''}{D_i-(A_i\sigma+C_i\tau)\tau''},$$

因此，当 $\tau''=0$ 时，二次曲面在这些点处非奇异。

3.4 一些显式公式

它们基于以下为 $V2_{,\rho_i/\sigma_j}$ 选取的特定基[12]。我们设：

$$\forall i,j=1,2\ ,\ \forall k=1,\dots,4\ ,\ e^k_{i,j}:=\theta_q(-x/x_k,-xx_k\sigma_j/\rho_i).$$

（我们采用标准约定 $\theta_q(a,b):=\theta_q(a)\theta_q(b)$。）那么，$V_{i,j}$ 上的线性形式 $u_{i,j}$、$v_{i,j}$、.....（在 x_1,x2、.....处求值）满足：

$$\begin{cases}u_{i,j}(e^1_{i,j})=0,\\u_{i,j}(e^2_{i,j})=\theta_q(-x_1/x_2,-x_1x_2\sigma_j/\rho_i),\end{cases}\quad\begin{cases}v_{i,j}(e^1_{i,j})=\theta_q(-x_2/x_1,-x_1x_2\sigma_j/\rho_i),\\v_{i,j}(e^2_{i,j})=0,\end{cases}$$

[12]注意，我们的θ函数与 [16] 中的函数不同，变量替换为 $x\leftrightarrow -x$。

$$\begin{cases} w_{i,j}(e^1_{i,j}) = \theta_q(-x_3/x_1, -x_1x_3\sigma_j/\rho_i), \\ w_{i,j}(e^2_{i,j}) = \theta_q(-x_3/x_2, -x_2x_3\sigma_j/\rho_i), \end{cases} \quad \begin{cases} w'_{i,j}(e^1_{i,j}) = \theta_q(-x_4/x_1, -x_1x_4\sigma_j/\rho_i), \\ w'_{i,j}(e^2_{i,j}) = \theta_q(-x_4/x_2, -x_2x_4\sigma_j/\rho_i). \end{cases}$$

现在，将等式 $w_{i,j} = \lambda_{i,j}u_{i,j} + \mu_{i,j}v_{i,j}$ 以及 $w'_{i,j} = \lambda'_{i,j}u_{i,j} + \mu'_{i,j}v_{i,j}$ 应用于所有 $e^k_{i,j}$，即可得到：

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} &= \theta_q{}^{-1}(-x_1/x_2, x_1x_2\sigma_j/\rho_i)\theta_q(-x_3/x_2, x_2x_3\sigma_j/\rho_i), \\ \mu_{i,j} &= \theta_q{}^{-1}(-x_2/x_1, x_1x_2\sigma_j/\rho_i)\theta_q(-x_3/x_1, x_1x_3\sigma_j/\rho_i), \\ \lambda'_{i,j} &= \theta_q{}^{-1}(-x_1/x_2, x_1x_2\sigma_j/\rho_i)\theta_q(-x_4/x_2, x_2x_4\sigma_j/\rho_i), \\ \mu'_{i,j} &= \theta_q{}^{-1}(-x_2/x_1, x_1x_2\sigma_j/\rho_i)\theta_q(-x_4/x_1, x_1x_4\sigma_j/\rho_i). \end{aligned}$$

3.4.1 记号约定

为方便起见，我们使用以下缩写：

$$T(x) := \theta_q(-x) \text{ and } T\left(\frac{x, y, \dots}{z, \dots}\right) := \frac{T(x)T(y)\dots}{T(z)\dots};$$

此外：

$$[kl.ji] := x_kx_l\sigma_j/\rho_i,\ k, l = 1, 2, 3, 4,\ i, j = 1, 2.$$

注意，由于 $x\theta_q(1/x) = \theta_q(x)$，因此我们有 $xy = 1 \Rightarrow T(y) = -yT(x)$。为了将其与 Fuchs关系 $x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$ 结合起来，我们引入互补缩写：

$$i, j \in \{1,2\} \underset{def}{\Longrightarrow} \{i, i'\} = \{j, j'\} = \{1,2\} \text{ and } k, l \in \{1,2,3,4\}, k \neq l \underset{def}{\Longrightarrow} \{k, l, k', l'\} = \{1,2,3,4\}.$$

于是 $[kl。ji][k'l'.j'i'] = 1$，由此得到互补关系：

$$T\left(\frac{[kl.ji]}{[k'l'.j'i']}\right) = -[kl.ji] = -x_kx_l\sigma_j/\rho_i.$$

由前引文献我们立即得到：

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{2,j}}{\lambda_{1,j}} &= T\left(\frac{[23.j2], [12.j1]}{[12.j2], [23.j1]}\right), \qquad \frac{\mu_{2,j}}{\mu_{1,j}} = T\left(\frac{[13.j2], [12.j1]}{[12.j2], [13.j1]}\right), \\ \frac{\lambda'_{2,j}}{\lambda'_{1,j}} &= T\left(\frac{[24.j2], [12.j1]}{[12.j2], [24.j1]}\right), \qquad \frac{\mu'_{2,j}}{\mu'_{1,j}} = T\left(\frac{[14.j2], [12.j1]}{[12.j2], [14.j1]}\right), \end{aligned}$$

and:

$$\frac{\lambda'_{i,j}}{\lambda_{i,j}} = T\left(\frac{x_4/x_2}{x_3/x_2}\right) T\left(\frac{[24.ji]}{[23.ji]}\right), \qquad \frac{\mu'_{i,j}}{\mu_{i,j}} = T\left(\frac{x_4/x_1}{x_3/x_1}\right) T\left(\frac{[14.ji]}{[13.ji]}\right).$$

3.4.2 因子 γ
作为一个直接应用，令[13] $\gamma_0 := \mathrm{T}\left(\mathrm{x}_4/\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_4/\mathrm{x}_1^{\,1}\right)\mathrm{x}_3/\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3/\mathrm{x}$。则：

$$\frac{\lambda'_{1,1}\mu'_{2,2}}{\lambda_{1,1}\mu_{2,2}} = \gamma_0 T\left(\frac{[24.11],[14.22]}{[23.11],[13.22]}\right), \qquad \frac{\lambda'_{2,2}\mu'_{1,1}}{\lambda_{2,2}\mu_{1,1}} = \gamma_0 T\left(\frac{[24.22],[14.11]}{[23.22],[13.11]}\right),$$
$$\frac{\lambda'_{1,2}\mu'_{2,1}}{\lambda_{1,2}\mu_{2,1}} = \gamma_0 T\left(\frac{[24.21],[14.12]}{[23.21],[13.12]}\right), \qquad \frac{\lambda'_{2,1}\mu'_{1,2}}{\lambda_{2,1}\mu_{1,2}} = \gamma_0 T\left(\frac{[24.12],[14.21]}{[23.12],[13.21]}\right).$$

右端的所有第二因子都具有以下形式 $\mathrm{T}\left(\mathrm{u}, \mathrm{v}\,\mathrm{v}^{-1}, \mathrm{u}^{-1}\right) = \mathrm{uv} = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4^2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\rho_1\rho_2} = \mathrm{x}_4\,\mathrm{x}_3$'因此所有左端的值都相同 $\gamma = \gamma_0\,\mathrm{x}^4\,\mathrm{x}_3$

这 γ实际上就是 3.1.2 中关系里出现的那个。事实上，按照那里概述的论证，我们可以更一般地得到一个关于在 x_k 处求值的线性关系：

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}^* \,:\, \forall f \in V_{4,(\rho_1\rho_2)/(\sigma_1\sigma_2)}\,,\; f(x_4) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \gamma f(x_3).$$

（这实质上就是 3.1.2 中作为公理提出的内容。）特别地：

$$w'_{1,1}w'_{2,2} = \alpha u_{1,1}u_{2,2} + \beta v_{1,1}v_{2,2} + \gamma w_{1,1}w_{2,2} \text{ and } w'_{1,2}w'_{2,1} = \alpha u_{1,2}u_{2,1} + \beta v_{1,2}v_{2,1} + \gamma w_{1,2}w_{2,1}.$$

代入

$$\lambda_{i,j}u_{i,j} + \mu_{i,j}v_{i,j} \text{ for } w_{i,j} \text{ and } \lambda'_{i,j}u_{i,j} + \mu'_{i,j}v_{i,j} \text{ for } w'_{i,j},$$

并且进一步假设 (SC)，于是这些族：

$$(u_{1,1}u_{2,2}, u_{1,1}v_{2,2}, v_{1,1}u_{2,2}, v_{1,1}v_{2,2}) \text{ and } (u_{1,2}u_{2,1}, u_{1,2}v_{2,1}, v_{1,2}u_{2,1}, v_{1,2}v_{2,1})$$

在 W 中是自由的，通过识别可得：

$$\begin{aligned}
\lambda'_{1,1}\lambda'_{2,2} &= \alpha + \gamma\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}, & \lambda'_{1,2}\lambda'_{2,1} &= \alpha + \gamma\lambda_{1,2}\lambda_{2,1},\\
\mu_{1,1}\mu_{2,2} &= \beta + \gamma\mu_{1,1}\mu_{2,2}, & \mu'_{1,2}\mu'_{2,1} &= \beta + \gamma\mu_{1,2}\mu_{2,1},\\
\lambda'_{1,1}\mu'_{2,2} &= \gamma\lambda_{1,1}\mu_{2,2}, & \lambda'_{1,2}\mu'_{2,1} &= \gamma\lambda_{1,2}\mu_{2,1},\\
\lambda'_{2,2}\mu'_{1,1} &= \gamma\lambda_{2,2}\mu_{1,1}, & \lambda'_{2,1}\mu'_{1,2} &= \gamma\lambda_{2,1}\mu_{1,2}.
\end{aligned}$$

备注 3.6 或许可以通过解析延拓的论证来放宽这里的假设 (SC)。

[13]这看起来像一个交比，并且当 $\mathrm{q} \to 1$ 时，它确实退化为一个交比。

3.4.3 两个二次曲面相同

我们在此证明 $A_2/A_1 = B_2/B_1 = C_2/C_1 = D_2/D_1 = E_2/E_1 = F_2/F_1$, , 从而 3.3.2 中得到的两个二次曲面实际上完全相同。我们先从后四个较简单的商空间入手。记 $\phi := T\left([12.11], \frac{[12.21]}{[12.12]}, [12.22]\right) = \phi_1\phi_2$, 其中 $\phi_j := T\left([12.\frac{1}{2}j], [12.\frac{1}{2}j2]\right)$, $j = 1, 2$; 以及 $\phi' := x_1x_2x_3x_4\frac{\sigma_2\sigma_1}{\rho_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot$。以下等式很容易验证（使用 3.4.1 中的公式）：

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\lambda'_{2,2}\mu_{2,1}}{\lambda'_{1,2}\mu_{1,1}} = T\left(\frac{[24.22],[12.21],[13.12],[12.11]}{[12.22],[24.21],[12.12],[13.11]}\right) = \phi T\left(\frac{[24.22],[13.12]}{[24.21],[13.11]}\right) = \phi\phi'$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\lambda_{2,2}\mu'_{2,1}}{\lambda_{1,2}\mu'_{1,1}} = T\left(\frac{[23.22],[12.21],[14.12],[12.11]}{[12.22],[23.21],[12.12],[14.11]}\right) = \phi T\left(\frac{[23.22],[14.12]}{[23.21],[14.11]}\right) = \phi\phi'$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda'_{2,1}\mu_{2,2}}{\lambda'_{1,1}\mu_{1,2}} = T\left(\frac{[24.12],[12.11],[13.22],[12.21]}{[12.12],[24.11],[12.22],[13.21]}\right) = \phi T\left(\frac{[24.12],[13.22]}{[24.11],[13.21]}\right) = \phi\phi'$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\lambda_{2,1}\mu'_{2,2}}{\lambda_{1,1}\mu'_{1,2}} = T\left(\frac{[23.12],[12.11],[14.22],[12.21]}{[12.12],[23.11],[12.22],[14.21]}\right) = \phi T\left(\frac{[23.12],[14.22]}{[23.11],[14.21]}\right) = \phi\phi'.$$

现在来看 A_2/A_1 和 B_2/B_1。令（暂时）$u := \sigma_j/\rho_i$; 则:

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}\mu'_{i,j} - \lambda'_{i,j}\mu_{i,j} &= T\left(\frac{x_3/x_2, x_2x_3u}{x_1/x_2, x_1x_2u}\right)T\left(\frac{x_4/x_1, x_1x_4u}{x_2/x_1, x_1x_2u}\right) - T\left(\frac{x_4/x_2, x_2x_4u}{x_1/x_2, x_1x_2u}\right)T\left(\frac{x_3/x_1, x_1x_3u}{x_2/x_1, x_1x_2u}\right)\\ &= \frac{\Phi(x_4)}{T\left(x_1/x_2, x_2/x_1, x_1x_2u, x_1x_2u\right)},\end{aligned}$$

其中 $\Phi(x) := T\left(x_3/x_2, x_2x_3u\right)T\left(x/x_1, x_1ux\right) - T\left(x_3/x_1, x_1x_3u\right)T\left(x/x_2, x_2ux\right)$。

引理 3.7

$$\Phi(x) = \frac{x_3}{x_1}T\left(x_1/x_2, x_1x_2u\right)T\left(x/x_3, x_3ux\right).$$

证明。——尽管这可以由 Theta 乘积的一般三项关系推出（见下文注释），我们还是给出一个直接论证。函数 Φ 在复数域 C^* 上全纯，并且在 $x = x_3$ 处为零。此外，它满足函数方程 $\sigma_q\Phi = u^{-1}x^{-2}\Phi$，因此具有如下形式： $\Phi(x) = CT\left(x/x_3\right)T\left(x_3ux\right)$，其中 $C \in C$；其值可通过在（例如）$x = x_2$ 处求值来确定:

$$C = \frac{\Phi(x_2)}{T(x_2/x_3)T(x_2x_3u)} = \frac{T\left(x_3/x_2, x_2x_3u\right)T\left(x_2/x_1, x_1x_2u\right)}{T(x_2/x_3)T(x_2x_3u)},$$

因为 $\Phi(x_2)$ 中的第二项包含消失因子 $T\left(x/x_2, x_2ux\right)$。因此:

$$C = \frac{T\left(x_3/x_2\right)}{T(x_2/x_3)}T\left(x_2/x_1, x_1x_2u\right) = -\frac{x_3}{x_2}T\left(x_2/x_1, x_1x_2u\right) = \frac{x_3}{x_1}T\left(x_1/x_2, x_1x_2u\right),$$

根据（如今）惯用的变换规则。所述公式随即得出。 □

命题 3.8

$$\lambda_{i,j}\mu'_{i,j}-\lambda'_{i,j}\mu_{i,j}=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_4/x_3}{x_2/x_1}\right)T\left(\frac{x_3x_4u}{x_1x_2u}\right)=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_4/x_3}{x_2/x_1}\right)T\left(\frac{[34.ji]}{[12.ji]}\right).$$

证明。——将该引理与其前面的公式结合起来，我们得到：

$$\lambda_{i,j}\mu'_{i,j}-\lambda'_{i,j}\mu_{i,j}=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_1/x_2,x_1x_2u,x_4/x_3,x_3x_4u}{x_1/x_2,x_2/x_1,x_1x_2u,x_1x_2u}\right)=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_4/x_3,x_3x_4u}{x_2/x_1,x_1x_2u}\right).$$

□

推论 3.9

$$A_i=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_4/x_3}{x_2/x_1}\right)T\left(\frac{[34.2i]}{[12.2i]}\right),\quad B_i=\frac{x_3}{x_1}T\left(\frac{x_4/x_3}{x_2/x_1}\right)T\left(\frac{[34.1i]}{[12.1i]}\right),$$
$$A_2/A_1=T\left(\frac{[34.22],[12.21]}{[34.21],[12.22]}\right),\quad B_2/B_1=T\left(\frac{[34.12],[12.11]}{[34.11],[12.12]}\right).$$

利用互补关系，我们最终得到两个二次曲面的恒等式：

推论 3.10

$$A_2/A_1=B_2/B_1=\frac{\rho_1}{\rho_2}T\left(\frac{[12.11],[12.21]}{[12.12],[12.22]}\right)=C_2/C_1=D_2/D_1=E_2/E_1=F_2/F_1.$$

注记 3.11 引理中的公式也可以被视为反映了 V2，$_{u^{-1}}$ 的维数为 2 这一事实。沿着同样的思路，可以证明一个一般三项关系；这里我们展示该关系的三种不同形式。

$$cT(a)T(b/c)T(x/a)T(x/bc)+aT(b)T(c/a)T(x/b)T(x/ac)+bT(c)T(a/b)T(x/c)T(x/ab)=0.$$

$$T(b)T(a/c)T(x/b)T(x/ac)-T(a)T(b/c)T(x/a)T(x/bc)=\frac{b}{c}T(c)T(a/b)T(x/c)T(x/ab).$$

$$\mathrm{cT\,(a/b)T\,(d/c)T\,(x/ab)T\,(x/cd)+aT\,(a/c)T\,(d/b)T\,(x/ac)T\,(x/bd)+dT\,(c/b)T\,(a/d)T\,(x/ad)T\,(x/bc)}=0.$$

我们无法确定这些关系是否与“Fay 三割线公式”有关（参见 [25,第三章 b]）。

3.4.4 判别式与奇异轨迹

二次型的判别式为（对于 $\mathrm{i}=1,\ 2$）：

$$\det\begin{pmatrix}0&A_i&C_i&-D_i\\A_i&0&-E_i&F_i\\C_i&-E_i&0&B_i\\-D_i&F_i&B_i&0\end{pmatrix}=A_i^2B_i^2+C_i^2F_i^2+D_i^2E_i^2-2A_iB_iC_iF_i-2A_iB_iD_iE_i-2C_iD_iE_iF_i$$
$$=(A_iB_i-C_iF_i-D_iE_i)^2-4C_iD_iE_iF_i$$

利用先前得到的表达式，我们得到：

$$\begin{aligned}\text{the above} &= \big((\lambda_{i,2}\mu'_{i,2}-\lambda'_{i,2}\mu_{i,2})(\lambda_{i,1}\mu'_{i,1}-\lambda'_{i,1}\mu_{i,1})-\lambda'_{i,2}\mu_{i,1}\lambda_{i,1}\mu'_{i,2}-\lambda_{i,2}\mu'_{i,1}\lambda'_{i,1}\mu_{i,2}\big)^2-4\lambda'_{i,2}\mu_{i,1}\lambda_{i,2}\mu'_{i,1}\lambda'_{i,1}\mu_{i,2}\lambda_{i,1}\mu'_{i,2}\\ &= (-\lambda'_{i,2}\mu_{i,2}\lambda_{i,1}\mu'_{i,1}-\lambda_{i,2}\mu'_{i,2}\lambda'_{i,1}\mu_{i,1})^2-4\lambda'_{i,2}\mu_{i,1}\lambda_{i,2}\mu'_{i,1}\lambda'_{i,1}\mu_{i,2}\lambda_{i,1}\mu'_{i,2}\\ &= (\lambda'_{i,1}\lambda_{i,2}\mu_{i,1}\mu'_{i,2}-\lambda_{i,1}\lambda'_{i,2}\mu'_{i,1}\mu_{i,2})^2=\Delta_i^2,\end{aligned}$$

其中我们令 $\Delta_i := \lambda'_{i,\ 1}\lambda_{i,\ 2}\mu_{i,\ 1}\mu'_{i,\ 2}-\lambda_{i,\ 1}\lambda'_{i,\ 2}\mu'_{i,\ 1}\mu_{i,\ 2}$。

注 3.12 二次方程可以写成：

$$(A_i\rho-E_i\tau+F_i\tau')(A_i\sigma+C_i\tau-D_i\tau')+(E_iC_i\tau^2+D_iF_i\tau'^2+(A_iB_i-C_iF_i-D_iE_i)\tau\tau')=0,$$

也就是说，$XY+ZZ'=0$，其中 $X := A_i\rho-E_i\tau+F_i\tau'$，$Y := A_i\sigma+C_i\tau-D_i\tau'$，$Z := \lambda_{i,\ 1}\lambda'_{i,\ 2}\tau-\lambda'_{i,\ 1}\lambda_{i,\ 2}\tau'$ 且 $Z' := \mu_{i,\ 1}\mu'_{i,\ 2}\tau-\mu'_{i,\ 1}\mu_{i,\ 2}\tau'$。接下来我们将看到（见下文的推论 3.14），$\Delta_i\neq 0$，因此 X、Y、Z、Z′可以作为坐标。

现在我们再次使用显式公式。我们将 Δ_i 写作 t_1-t_2（“第一项和第二项”），其中 e:

$$\begin{aligned}t_1 &= \lambda'_{i,1}\lambda_{i,2}\mu_{i,1}\mu'_{i,2}\\ &= T\left(\frac{x_3/x_2,x_4/x_2,x_3/x_1,x_4/x_1}{x_1/x_2,x_1/x_2,x_2/x_1,x_2/x_1}\right)T\left(\frac{[23.1i],[24.2i],[13.2i],[14.1i]}{[12.1i],[12.1i],[12.2i],[12.2i]}\right),\\ t_2 &= \lambda_{i,1}\lambda'_{i,2}\mu'_{i,1}\mu_{i,2}\\ &= T\left(\frac{x_3/x_2,x_4/x_2,x_3/x_1,x_4/x_1}{x_1/x_2,x_1/x_2,x_2/x_1,x_2/x_1}\right)T\left(\frac{[23.2i],[24.1i],[13.1i],[14.2i]}{[12.1i],[12.1i],[12.2i],[12.2i]}\right).\end{aligned}$$

令 $u := \sigma_1/\rho_i$，$v := \sigma_2/\rho_i$，可见 t_1 和 t_2 有一个公因子：

$$\text{common factor} = T\left(\frac{x_3/x_2,x_4/x_2,x_3/x_1,x_4/x_1}{x_1/x_2,x_1/x_2,x_2/x_1,x_2/x_1}\right)T\left(\frac{1}{x_1x_2u,x_1x_2u,x_1x_2v,x_1x_2v}\right),$$

因此我们计算：

$$\Delta_i = (\text{common factor})\times\big(T(x_2x_3u,x_1x_4u,x_2x_4v,x_1x_3v)-T(x_2x_4u,x_1x_3u,x_2x_3v,x_1x_4v)\big).$$

同样，我们倾向于采用直接论证，而不是一般三项关系。Δ_i 右侧的第二个因子是 $\Psi(x_4)$，其中：

$$\Psi(x) := T(x_2x_3u,x_1x_3v)T(x_1ux,x_2vx)-T(x_1x_3u,x_2x_3v)T(x_2ux,x_1vx).$$

该函数在复数域*上全纯，在 $x=x_3$ 处为零，并满足 $\sigma_q\Psi=c\Psi$，其中 $c := {}^{1}x_1\underline{x_2uv}$。由此，$\Psi(x)=CT\,(x/x_3)T\,(x_1x_2x_3uvx)$，其中某个 $C\in\mathbb{C}$ 可通过在 $x=1/(x_2u)$ 处求值来确定（这样一来，Ψ 中的第二项便消失），从而得到：

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{\Psi(1/(x_2u))}{T(1/(x_2x_3u))T(x_1x_3v)}T(x/x_3)T(x_1x_2x_3uvx)\\ &= \frac{T(x_2x_3u,x_1x_3v)T(x_1/x_2,v/u)}{T(1/(x_2x_3u))T(x_1x_3v)}T(x/x_3)T(x_1x_2x_3uvx)\\ \Longrightarrow\Psi(x_4) &= \frac{T(x_2x_3u,x_1x_3v)T(x_1/x_2,v/u)}{T(1/(x_2x_3u))T(x_1x_3v)}T(x_4/x_3)T(x_1x_2x_3uvx_4)\\ &= x_2x_3vT\,(x_1/x_2,\sigma_1/\sigma_2,x_4/x_3,\rho_{i'}/\rho_i).\end{aligned}$$

对于最后一个等式，我们应用了 T 的通常变换规则，以及显然的等式 $u/v = \sigma_1/\sigma_2$ 和 $x_1x_2x_3uvx_4 = x_1x_2x_3x_4\sigma_1\sigma_2/\rho_i^2 = \rho_{i'}/\rho_i$（根据 Fuchs关系）。最终，我们得到判别式（的平方根）可能的完全因式分解形式之一：

命题3.13

$$\Delta_i = [23.2i]\, T\left(\frac{x_3/x_2, x_4/x_2, x_3/x_1, x_4/x_1, x_4/x_3}{x_1/x_2, x_2/x_1, x_2/x_1}\right) T\left(\frac{\sigma_1/\sigma_2, \rho_{i'}/\rho_i}{[12.1i], [12.1i], [12.2i], [12.2i]}\right).$$

推论3.**14** $\Delta_i \neq 0$。

3.4.5 $\det M = 0$ 的轨迹
我们通过 $[\rho]$ 描述 $\det M = 0$ 在 $V_{(*)}$ 内的像。因此，设 $M := \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ 使得 $m_{i,j} \neq 0$ 且 $\sigma_q m_{i,j}/m_{i,j} = (\rho_i/\sigma_j)x^{-2}$, $i, j = 1, 2$；并且 $m_{1,1}m_{2,2} = m_{1,2}m_{2,1}$。

引理3.15 (i) 存在 $C_{i,j} \in C^*$ 以及 a_i、$b_j \in C^*$，i、$j = 1$，2，使得 $m_{i,j} = C_{i,j}\theta_q(x/a_i)\theta_q(x/b_j)$。(ii) 有 $a_ib_j = \rho_i/\sigma_j$，i、$j = 1$，2，且 $C_{1,1}C_{2,2} = C_{1,2}C_{2,1}$。

证明。-(ii) 可由 (i) 按照通常的论证直接推出，再加上此处的事实：

$$\det M = (C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1})\theta_q(x/a_1)\theta_q(x/a_2)\theta_q(x/b_1)\theta_q(x/b_2).$$

(i) 我们首先注意到，每个 $m_{i,j}$都与其直线相邻项 $m_{i,j'}$ 以及列相邻项 $m_{i',j}$ 有一个公共零点（回顾“互补约定” $1' := 2, 2' := 1$）。事实上，关系式 $m_{1,1}m_{2,2} = m_{1,2}m_{2,1}$ 意味着（例如）$m_{1,2}/m_{1,1} = m_{2,2}/m_{2,1}$。左端的极点位于 $m_{1,1}$, 的零点之中，而这些零点的乘积必须为 $\equiv \rho_1/\sigma_1$, 因此它们不可能与右端的极点相同，所以必然会发生约去，即 $m_{1,2}$,$m_{1,1}$ 有一个公共零点（出于完全相同的原因，不会有更多公共零点），同样地，$m_{2,2}$,$m_{2,1}$ 也有一个公共零点。

由此可见，所有 $m_{i,j}$不可能有共同零点；事实上，若 a 是这样的零点，对 $\theta_q^{-1}(x/a)$ M 应用相同的论证，就会（在相同的直线中）导出矛盾。结论很容易得出。 □

命题 3.16 轨迹 $\det M = 0$ 在 $V_{(*)}$ 中的像可参数化为（除去 $(P^1(\text{复数域}))^4$ 上的复数域* 作用），$C^* \ni t \mapsto (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))$，其中 $f_k(t) := \theta_q(\sigma_2x_kt)\,\theta_q(\sigma_1x_kt)$, $k = 1, 2, 3, 4$。

证明。——直接来说，很容易验证，任何这样的 $(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))$ 确实都可以实现为某个 $[\rho]$ (M)。反过来，首先注意到，引理中所描述的 M，模去 D_2(复数域) $\times$ D_2(复数域) 的作用后，等价于所有 $C_{i,j} = 1$ 均相同的情形。因此我们取其为该形式。于是 $m_{1,2}/m_{1,1} = m_{2,2}/m_{2,1} = \theta_q(x/b_2)/\theta_q(x/b_1)$ 必须是 $\sigma_q f/f = \sigma_1/\sigma_2$ 的一个解，所以 $b_2/b_1 = \sigma_1/\sigma_2$，从而我们可以定义：

$$t := \frac{1}{\sigma_1 b_1} = \frac{1}{\sigma_2 b_2} \Longrightarrow m_{1,2}/m_{1,1} = m_{2,2}/m_{2,1} = \frac{\theta_q(\sigma_2 xt)}{\theta_q(\sigma_1 xt)},$$

因此，相应的 ($f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$) 就是 M 的像。 □

定理 3.17 轨迹 $\det M = 0$在 $V_{(*)}$内的像[ρ]落在一个二参数铅笔的所有二次曲面上。

证明。- 首先注意，每个 $f_k(x) := \theta_q(\sigma_2 x_k x)/\theta_q(\sigma_1 x_k x)$ 都满足 $\sigma_q f_k = (\sigma_1/\sigma_2) f_k$，因此每个 $g_{k,l} := f_k f_l \theta_q(\sigma_1 x_1 x)\theta_q(\sigma_1 x_2 x)\theta_q(\sigma_1 x_3 x)\theta_q(\sigma_1 x_4 x)$ 都满足 $\sigma_q g_{k,l} = c x^{-4} g_{k,l}$，其中：

$$c := (\sigma_1/\sigma_2)^2 \frac{1}{\sigma_1^4 x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{\rho_1\rho_2\sigma_1\sigma_2},$$

因为根据 (FR)，$x_1x_2x_3x_4 = (\rho_1\rho_2)/(\sigma_1\sigma_2)$。对于 $1 \le k < l \le 4$，$f_k f_l$ 的分母由 theta 乘积消去，且 $g_{k,l} \in \mathcal{O}$(复数域*)。因此我们得到六个这样的函数 $g_{k,l}$，它们属于 $V4_{,c}$，其维数为 4。因此，通过消去分母，存在（至少）一个二维线性关系空间，其形式如下：

$$A\rho\sigma + B\tau\tau' + C\rho\tau - D\rho\tau' - E\sigma\tau + F\sigma\tau' = 0.$$

其中当然包括 3.3.2 中找到的那些（根据 3.4.3，它们与此相同）。 □

4 与二次型相关的代数三维簇和代数曲面

在本部分中，$\underline{A} = (A, B, C, D, E) \in (C^*)^4$, 我们回到坐标 ρ_i 并设：

$$\Phi_{\underline{A}} := A\rho_1\rho_2 + B\rho_3\rho_4 + C\rho_1\rho_3 - D\rho_1\rho_4 - E\rho_2\rho_3 + F\rho_2\rho_4.$$

在 $C^4 = U_0$ 上。若二次型 $\Phi_{\underline{A}}$ 的判别式不恒为 0，我们称 A 为正则；反之则称其为奇异。

记号 U_P 和 $\mathcal{U}_P$ 源自 1.2.5。

4.1 一般性

引理 4.1 二次型 $\Phi_{\underline{A}}$ 的秩为 4 或 3。更准确地说：

(i) 当且仅当 $\Phi_{\underline{A}}$ 的秩为 4 时，A 是正则的；此时，经过线性坐标变换，$C_{\underline{A}}$ 的方程为 $XY = ZT$，并且 $C_{\underline{A}}$ 的唯一奇点是 (0, 0, 0, 0)；二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 是光滑的。

(ii) 当且仅当 $\Phi_{\underline{A}}$ 的秩为 3 时，A 是奇异的；此时，经过线性坐标变换，$C_{\underline{A}}$ 的方程为 $XY = Z^2$。奇点为 $\lambda(a, b, c, d) | \lambda \in C$，其中 $(a, b, c, d) \in (C^*)^4$；二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 有一个唯一的奇点。

证明。-

(i) 参见注 3.12 和推论 3.14。

(ii) 假设 A 是奇异的，那么经过线性坐标变换，$S^{[A]}$ 的方程为 $XY = Z^2$。更准确地说，$Z = \alpha\rho_3 + \alpha'\rho_4$，其中

$$Z^2 = EC\rho_3^2 + DF\rho_4^2 + (AB - CF - DE)\rho_3\rho_4.$$

由于 $EC \neq 0$ 和 $DF \neq 0$，我们有 $\alpha\alpha' \neq 0$。容易验证 X、Y、Z 线性无关。

□

我们考虑 Φ_A 的齐次形式：

$$\Phi_{\underline{A}_{hom}} = A\rho_1^x\rho_2^x\rho_3^y\rho_4^y + B\rho_1^y\rho_2^y\rho_3^x\rho_4^x + C\rho_1^x\rho_2^y\rho_3^x\rho_4^y - D\rho_1^x\rho_2^y\rho_3^y\rho_4^x - E\rho_1^y\rho_2^x\rho_3^x\rho_4^y + F\rho_1^y\rho_2^x\rho_3^y\rho_4^x$$

在 $((\text{复数域}^2)^*)^4$ 上。二次型 $\Phi_{\underline{A}}$ 定义了复数域$^4 = U_0$, 中的一个仿射二次锥 $C_{\underline{A}}$，它在由 $\rho \mapsto \lambda\rho$ 定义的 C^* 作用下保持不变。几何商 $C^*_{\underline{A}}/C^*$ 是$\mathcal{U}_0 \approx$P^3(复数域)中的一个二次曲面 $Q_{\underline{A}}$。类似地，二次型：

$$\widetilde{\Phi}_{\underline{A}} := A\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2 + B\tilde{\rho}_3\tilde{\rho}_4 + C\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_3 - D\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_4 - E\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_3 + F\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_4$$

定义了复数域$^4 =$U$_\infty$中的一个仿射二次锥 $\tilde{C}_{\underline{A}}$。几何商 $\tilde{C}^*_{\underline{A}}/C^*$ 是$\mathcal{U}_\infty \approx$P^3(复数域)中的一个二次曲面 $\tilde{Q}_{\underline{A}}$。

齐次形式 $\Phi_{\underline{A}_{hom}}$ 定义了 $(\text{P}^1(\text{复数域})^4)$中的一个闭超曲面 $S_{\underline{A}}$，它在 C^* 作用下保持不变。此超曲面包含二次锥 $C_{\underline{A}}$ 和$\tilde{C}_{\underline{A}}$，更准确地说，它是每个锥的扎里斯基闭包。

$S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4$ 在商空间$\mathcal{K}_4$ 中的像记为$\mathcal{S}_{\underline{A}}$。它是一个代数曲面。它包含二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 和 $\tilde{Q}_{\underline{A}}$。更准确地说，它是每个二次曲面的扎里斯基闭包。这些二次曲面是紧致的且彼此不相等，因此$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 不是分离的。

对于 $i = 1、2、3、4$，我们分别记 $S^0_{\underline{A},i} = S_{\underline{A}} \cap \{\sigma_i = 0\}$、$S^\infty_{\underline{A},i} = S_{\underline{A}} \cap \{\sigma_i = \infty\}$；对于 $i \neq j$，则记 $S^{0,\infty}_{A,i,j} = S^0_{\underline{A},i} \cap S^\infty_{\underline{A},j}$。我们有：

$$S_{\underline{A}} = C_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i=1,2,3,4} S^\infty_{\underline{A},i} = \tilde{C}_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i=1,2,3,4} S^0_{\underline{A},i} = C_{\underline{A}} \cup \tilde{C}_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i,j=1,2,3,4;i\neq j} S^{0,\infty}_{\underline{A},i,j},$$

$$\mathcal{S}_{\underline{A}} = C_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i=1,2,3,4} \mathcal{S}^\infty_{\underline{A},i} = \tilde{C}_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i=1,2,3,4} \mathcal{S}^0_{\underline{A},i} = Q_{\underline{A}} \cup \tilde{Q}_{\underline{A}} \cup \bigcup_{i,j=1,2,3,4;i\neq j} S^{0,\infty}_{\underline{A},i,j}.$$

我们稍后将看到，$\mathcal{S}^{0,\infty}_{A,i,j}$是一些不属于 $Q_{\underline{A}} \cup \tilde{Q}_{\underline{A}}$的点。

现在我们将把 $S^0_{\underline{A},i}$、$S^{\overline{\infty}}_{\underline{A},i}$、$\mathcal{S}^0_{\underline{A},i}$、$S^\infty_{\underline{A},i}$ 描述为“简单”部分的并。我们尤其将看到，$\mathcal{S}^0_{\underline{A},i}$（分别地，$\mathcal{S}^\infty_{\underline{A},i}$）是$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 中某些射影直线的扎里斯基闭包。（它们是光滑有理曲线的非分离并。）

我们将描述 $S_{\underline{A}}$ 中至少有一个坐标等于 ∞ 的点集。我们考虑所有可能的情况。

1. 恰有一个坐标等于 ∞。我们可以假设它是 ρ_4。我们考虑：

$$\Psi_1 := A\rho_1\rho_2\tilde{\rho}_4 + B\rho_3 + C\rho_1\rho_3\tilde{\rho}_4 - D\rho_1 - E\rho_2\rho_3\tilde{\rho}_4 + F\rho_2.$$

由于 $\tilde{\rho}_4 = 0$，我们有 $\Psi_1 = \mathrm{B}\rho_3 - \mathrm{D}\rho_1 + \mathrm{F}\rho_2 = 0$。这个方程定义了 $\left(\mathrm{P}^1(\mathrm{C})\right)^3 \times \{\infty\}$ 中的一个平面。唯一的 ∞ 坐标为 ρ_4 的点集是 $\mathrm{C}^3 \times \{\infty\}$ 中的一个平面。

2. 恰有两个坐标等于 ∞。我们将证明这不可能。可以假设它们是 ρ_3 和 ρ_4。考虑：

$$\Psi_2 := A\rho_1\rho_2\tilde{\rho}_3\tilde{\rho}_4 + B + C\rho_1\tilde{\rho}_4 - D\rho_1\tilde{\rho}_3 - E\rho_2\rho_3\tilde{\rho}_4 + F\rho_2\tilde{\rho}_3.$$

由于 $\tilde{\rho}_4 = \tilde{\rho}_3 = 0$，我们有 $\Psi_2 = \mathrm{B} = 0$。这是不可能的。

3. 恰有三个坐标等于 ∞。可以假设它们是 ρ_2、ρ_3 和 ρ_4。考虑：

$$\Psi_3 = A\rho_1\tilde{\rho}_3\tilde{\rho}_4 + B\tilde{\rho}_2 + C\rho_1\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_4 - D\rho_1\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_3 - E\tilde{\rho}_4 + F\tilde{\rho}_3.$$

由于 $\tilde{\rho}_4 = \tilde{\rho}_3 = \tilde{\rho}_3 = 0$，对于所有 $\rho_1 \in \mathrm{C}$ 都有 $\Psi_3 = 0$。

4. 四个坐标等于 ∞：这是点 $(\infty,\infty,\infty,\infty) \in \Theta_4$

注释：对于所有的 A 值，4 条直线 $\mathrm{L}_i^0, \mathrm{j,k} = \{\sigma_i = \sigma\mathrm{j} = \sigma_k = 0\}, \mathrm{i} < \mathrm{j} < \mathrm{k}$，以及 4 条直线 $\mathrm{L}_{i,j,k}^{\infty} = \{\sigma_i = \sigma\mathrm{j} = \sigma_k = \infty\}, \mathrm{i} < \mathrm{j} < \mathrm{k}$，都包含在 $\mathrm{S}_{\underline{A}}$ 中。我们将 $\mathrm{L}_i^0, \mathrm{j,k} \setminus \Theta_4$（分别将 $\mathrm{L}_i^{\infty}, \mathrm{j,k} \setminus \Theta_4$）在商空间 $\mathrm{S}_{\underline{A}}$ 中的像记作 $\mathrm{p}_{i,j,k}^0$（分别记作 $\mathrm{p}_{i,j,k}^{\infty}$）。它们是点。我们有 $\mathrm{p}_{i,j,k}^0 \in \mathrm{Q}_{\underline{A}}$~以及 $\mathrm{p}_{i,j,k}^{\infty} \in \mathrm{Q}_{\underline{A}}$。

4.2 光滑性

我们将在 A 非奇异和奇异的情况下，分别描述 $\mathrm{S}_{\underline{A}}$ 和 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 的奇点。回想一下，我们假设 $\mathrm{A} \in$ (复数域*)[4]。

定理 4.2 假设 A 非奇异。那么：

(i) $\mathrm{S}_{\underline{A}}$的唯一奇点是点 (0,0,0,0) 和 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$。它们是 A_1 型正规奇点；

(ii) $\mathcal{S}_{\underline{A}}$是一个（非分离的）光滑代数曲面。

证明。-

(i) 该证明是在抽象情形下对 [16, 5.2] 中证明的一种变体。我们有 $\mathrm{S}_{\underline{A}} \cap \mathrm{U}_0 = \mathrm{C}_{\underline{A}}$，并且知道 $\mathrm{C}_{\underline{A}}$ 的唯一奇点是 {(0, 0, 0, 0)}。（U_{∞}中的奇点情况类似，其唯一奇点是 $\{(\infty,\infty,\infty,\infty)\}$。）

我们将寻找至少有一个坐标等于 ∞ 的奇点。回到坐标 ρ_i，我们逐一检查每种情况（如 [16, 5.2，第 37] 页所示）。

1. 恰有一个坐标等于 ∞。我们不妨设它是 ρ_4。考虑：

$$\Psi_1 := A\rho_1\rho_2\tilde{\rho}_4 + B\rho_3 + C\rho_1\rho_3\tilde{\rho}_4 - D\rho_1 - E\rho_2\rho_3\tilde{\rho}_4 + F\rho_2.$$

我们计算 $\nabla\Psi_1$ 在 $\{\tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上的梯度：

$$\nabla\Psi_{1\{\tilde{\rho}_4=0\}} = (-D, F, B, A\rho_1\rho_2 + C\rho_1\rho_3 - E\rho_2\rho_3).$$

由于 $D、F、B \neq 0$，$\nabla\Psi_1 \neq 0$ 在 $\{\tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上，$\{\tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上没有奇点（即 $\rho_4 = \infty$）。

2. 恰有两个坐标等于 ∞。我们知道这种情况不会发生（参见第 42 页，4.1 节末尾，枚举中的第 2 项）。

3. 恰有三个坐标等于 ∞。我们可以假设它们是 ρ_2、ρ_3 和 ρ_4。我们考虑：

$$\Psi_3 = A\rho_1\tilde{\rho}_3\tilde{\rho}_4 + B\tilde{\rho}_2 + C\rho_1\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_4 - D\rho_1\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_3 - E\tilde{\rho}_4 + F\tilde{\rho}_3.$$

我们计算 $\nabla\Psi_3$ 在 $\{\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_3 = \tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上的梯度：

$$\nabla\Psi_{3\{\tilde{\rho}_2=\tilde{\rho}_3=\tilde{\rho}_4=0\}} = (0, B, F, -E).$$

由于 $B、F、E \neq 0$，$\nabla\Psi_3 \neq 0$ 在 $\{\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_3 = \tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上。$\{\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_3 = \tilde{\rho}_4 = 0\}$ 上没有奇点。特别地，$(0, \infty, \infty, \infty)$ 不是奇异点。

4. 四个坐标都等于 ∞。点 $(\infty, \infty, \infty, \infty)$ 是奇异的（利用坐标 $\tilde{\rho}_i$ 可以清楚看出）。

(ii) 我们可以将光滑代数三维簇 $S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4$ 视为解析流形。群 C^* 在其上无不动点地作用，因此其李群 C 所对应的作用定义了一个叶状结构，我们可以在商空间 $(S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4)/C^*$（视为一个集合）上赋予该叶状结构的叶空间的解析结构。这样得到一个解析流形，但先验而言它可能不是豪斯多夫的[14]，事实上确实如此。文中对此作了非常简要的概述[16]（参见第 3.2 节，第 38 页），没有提及分离性问题[15]。另一方面，$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 上存在一种由代数商结构经 GAGA 推导出的解析空间结构 [38]。

我们将这个空间记为$\mathcal{S}_{anA}$。如果我们能够证明$\mathcal{S}^{an}_{\underline{A}}$与叶空间的解析流形重合，那么$\mathcal{S}^{an}_{\underline{A}}$便是光滑的；利用下文回顾的命题 4.4，即可推出$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是光滑的。遗憾的是，我们无法先验地证明这两种解析结构相同。因此，我们将采用另一种方法，直接“手动”证明（非分离的）代数曲面$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是光滑的。我们还将给出一个抽象证明，以便事后证明这两种解析结构相同。

˜曲面 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是两个二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 和 $Q_{\underline{A}}$ 以及一个有限点集的并。这两个二次曲面是光滑的，因此只需考察这些点。这些点

[14]一般而言，叶空间并非豪斯多夫空间，因此具有相当病态的性质。[15]在关于流形对自由 G-作用取商的常见结果中，假定群 G 是紧致的，但复数域 C^* 并不紧致。

对应于 $S_{\underline{A}}$ 中仅有一个坐标为 0 且仅有一个坐标为 ∞的点的像。经过坐标置换后，所有情形都相同，因此只需考虑其中一种情形。这些情形此前已经出现过（在 3.3.2 节末尾）。

我们用 ρ_i 坐标重新表述：
在 $\rho_4=\infty$ 附近，即在 $\tilde{\rho}_4=0$ 附近，方程

$$A\rho_1\rho_2+B\rho_3\rho_4+C\rho_1\rho_3-D\rho_1\rho_4-E\rho_2\rho_3+F\rho_2\rho_4=0,$$

变为：

$$A\rho_1\rho_2\tilde{\rho}_4+B\rho_3+C\rho_1\rho_3\tilde{\rho}_4-D\rho_1-E\rho_2\rho_3\tilde{\rho}_4+F\rho_2=0,$$

在 $\tilde{\rho}_4=0$ 附近，它是一个图：

$$\rho_1=\frac{B\rho_3+F\rho_2-E\rho_2\rho_3\tilde{\rho}_4}{D-(A\rho_2+C_i\rho_3)\tilde{\rho}_4},$$

因此，曲面 $S_{\underline{A}}$ 在满足 $\rho_4=\infty$ 的点处是非奇异的，特别是在由 $\rho_4=\infty$和 $\rho_2=0$定义的点处也是如此。若 $(\rho_1,0,\rho_3,\infty)\in S_{\underline{A}}\setminus\Theta_4$，则 $B\rho_3-D\rho_1=0,\rho_3\neq 0$，我们可以写成：

$$\rho_1/\rho_3=\frac{B+F\rho_2/\rho_3-E\rho_2\tilde{\rho}_4}{D-(A\rho_2/\rho_3+C)\rho_3\tilde{\rho}_4},$$

设 $p\in\mathcal{K}_4$ 是 $S^0{}_{,\infty A}2_{,4}\setminus\Theta_4$的像，则在 $\mathcal{K}_4$, 中 p 的一个邻域内，我们可以选取 ($\xi_1=\rho_1/\rho_3,\xi_2=\rho_2/\rho_3,\xi_4=\tilde{}\rho_3\tilde{\rho}_4$) 作为~坐标；并且在点 $p=(\xi_1=B/D\ \xi_2=\tilde{}0,\xi_4=0)$ 附近，曲面 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是一个图：

$$\xi_1=\frac{B+F\xi_2-E\xi_2}{D-(A\xi_2+C)\tilde{\xi}_4},$$

因此它在 p 处是非奇异的。

□

现在我们将给出一个关于$\mathcal{S}_{\underline{A}}$光滑性的“抽象”证明，使用 Luna 切片定理（参见 [22]）。这将提供更多信息，并使我们能够比较 GAGA 所关联的$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 的解析流形结构与 [16] 中使用的解析流形结构（参见定理 2.18 的证明）。

命题 4.3 设 G 是一个约化群，作用于仿射簇 X 上。令 $X'\subset X$ 为稳定点的子集。假设 G 在 X′ 上自由作用（即没有不动点）。那么存在一个几何商 $\pi: X'\to Y'=X'/G$，且 X' 是 Y' 上的一个 G-主丛。此外，若 $x\in X'$ 是一个光滑点，则 $\pi(x)$ 是 Y' 的一个光滑点。

证明。-参见 [10, 命题 5.7]。 □

我们可以将上述命题应用于 $X_p = S_{\underline{A}} \cap U_p$（参见 1.2.5）。我们有 $X'_p = S_{\underline{A}} \cap (U_p \setminus \{p\})$。$Y'_p$ 是光滑的，并覆盖 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$。因此 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是光滑的。

我们可以考虑通过 GAGA 与 $S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4$ 和 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 相关联的解析流形 $(S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4)^{an}$ 和 $\mathcal{S}_{\underline{A}}^{an}$。于是，$S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4)^{an} \to \mathcal{S}_{\underline{A}}^{an}$ 是一个局部平凡解析主 G-丛，而由叶空间（如 [16] 中所述）定义在 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 上的解析流形结构与 $\mathcal{S}_{\underline{A}}^{an}$ 相同。

我们回顾以下结果。

命题 4.4 设 X 为一个代数簇。设 X^{an} 为与之相关联的解析空间。那么，X 光滑当且仅当 X^{an} 光滑。

证明。——这由 [38, 第 6 号、命题 3、第 9], [38, 页第 24 号、命题 27、第 39] 页以及 [5, 第 VIII 章 §5 第 2 号、命题 1] 的推论得出。□

命题 4.5 假设 $S_{\underline{A}}$ 是奇异的。那么：

(i) $S_{\underline{A}} \setminus \Theta_4$ 的奇异点集合就是轨道：$C^*(a_1, a_2, a_3, a_4)$，其中某个 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in (C^*)^4$。

(ii) 曲面 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 是一个具有唯一奇点的非分离正规曲面。该奇点属于 A_1 型。

证明。-

(i) 我们已经知道 $C_{\underline{A}} = S_{\underline{A}} \cap U_0$ 中的奇点：$\{(0,0,0,0)\} \cup C^*(a,b,c,d)$[16]。$S_{\underline{A}}$ 中不属于 $C_{\underline{A}} \cup C_{\underline{A}} \cup \Theta_4$ 的点都是光滑的：证明与正则情形相同。

(ii) 二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 是一个具有唯一奇点的正规曲面。该奇点属于 A_1 型。它也是 $Q_{\underline{A}}$ 的唯一奇点。$\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 中不属于 $\tilde{Q}_{\underline{A}} \cup Q_{\underline{A}}$ 的点都是光滑的：证明与正则情形相同。

□

4.3 二次曲面铅笔

我们回顾一下 P^3(复数域) 中二次曲面铅笔的基础知识。有关细节和补充内容，请参见 [11]。

我们考虑 C^4 上的两个（不共线的）二次型 Φ_1 和 Φ_2，以及由下式定义的 $P^3(C)$ 中的二次曲面铅笔：$\{\Phi_{\underline{\lambda}} := \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 | (\lambda_1, \lambda_2) \in (C^2)^*\}$。令 $C_i = \{\Phi_i = 0\}$，并记 Q_i 为其在 $P^3(C)$ 中的像。

该铅笔的基底是曲线 $\mathcal{B} := Q_1 \cap Q_2$。若二次曲面 Q 在 $\mathcal{B}$ 上消失，则 Q 属于该铅笔。

根据定义，铅笔的秩为 $\max_{i=1,2} \operatorname{rank} \Phi_i$（与生成元的选取无关）。若铅笔中某个二次曲面的秩等于铅笔的秩，我们称该二次曲面为一般二次曲面。

有三种可能。

[16] U_∞ 中的奇点情形也类似。

1. 铅笔的秩为 4。此时，除有限个二次曲面外（对应于判别式消失：$\mathrm{discr}\Phi_{\underline{\lambda}}=0$），铅笔中的所有二次曲面都是光滑的。

2. 铅笔的秩为 3。于是，除了有限个以外，铅笔中的所有二次曲面都有唯一的奇点。

3. 铅笔的秩为 ≤ 2。

以下所有二次曲面铅笔都属于第一种情况。

5 $\mathcal{F}$ 的射影嵌入

在本部分中，我们固定 σ_2，$\mu_1,\mu_2,x_1,x_2,x_3,x_4$，并令 $\sigma_1=\omega\sigma_2$，其中 $\omega\in C^*$ 任意[17]。我们假设 (FR) 和 (NS) 成立。除 (σ_1,σ_2) 外，我们假设 (NR) 成立：我们允许 $\omega\in q^{\mathbb{Z}}$。

我们所说的嵌入始终是代数几何意义下的嵌入。态射 $f:X\to Y$ 若为单射，且诱导出 X 与其像 f (X) 之间的同构，则称为嵌入；f (X) 上的代数结构是由 Y 诱导的结构。请注意：这与 [16][18]中使用的嵌入概念不同。

5.1 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{K}_4=\left(\left(P^1(\text{复数域})\right)^4\setminus\Theta_4\right)/\text{复数域}^*$ 中的嵌入

我们回顾这两个二次型（$i=1,\ 2$，参见 3.3.2）：

$$A_i\rho\sigma\tau''+B_i\tau+C_i\rho\tau\tau''-D_i\rho-E_i\sigma\tau\tau''+F_i\sigma=0,$$

接下来，我们只考虑 $i=1$ 的情形，并令 $A=(A,B,C,\underline{D},E,F)=(A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1)$。

于是 $\underline{A}$ 依赖于 $\omega=\sigma_1/\sigma_2$，必要时我们将其记为 $A(\omega)$。我们固定 $(\underline{\sigma_1},\sigma_2)$ 的一个取值，使得 $\sigma_1=\sigma_2$，并将对应的 A 值记为 A'。我们记 $\underline{A'}=A(1)$。

我们回到坐标 ρ_i，并令：

$$\Phi_{\underline{A}}:=A\rho_1\rho_2+B\rho_3\rho_4+C\rho_1\rho_3-D\rho_1\rho_4-E\rho_2\rho_3+F\rho_2\rho_4=A\rho\sigma+B\tau\tau'+C\rho\tau-D\rho\tau'-E\sigma\tau+F\sigma\tau'$$

很容易与 [16] 中的定义进行比较。对于 $T=(T_{i,\ j})$，我们关联 $A_T:=(T_{12},T_{34},T13,-\underline{T14},-T_{23},T_{24})$。

引理 5.1 我们有 $Q_{\underline{A_T}}=Q_{\underline{A}}$。

证明。- 令 $R\subset\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{K}_4$ 中的像。我们有 $R\cap U_0\subset Q_{\underline{A}}$，并且利用 [16], $R\cap U_0\subset Q_{\underline{A_T}}$。此外，$R\cap U_0$ 是 $Q_{\underline{A}}$ 的一个扎里斯基开子集，因此 $\dim(R\cap U_0)=2$。

我们考虑 $R':=Q_{\underline{A}}\cap Q_{\underline{A_T}}$。二次曲面 $Q_{\underline{A}}$ 是不可约的，因此有两种可能：

1. $R'=Q_{\underline{A}}$,

[17]在 [16], 中，参数为 κ_0：$\omega=\sigma_1/\sigma_2=\kappa_0^2$。[18]在 [16], 中，X 是一个集合，Y 是一个代数簇，f 是一个单射，其像是 Y 的一个局部闭曲面。

2. $\dim R' \leq 1$。

我们有 $R \cap U_0 \subset R'$，因此 $\dim R' \geq 2$。所以唯一的可能性是 1，且 $Q_{\underline{A}_T} = Q_{\underline{A}}$。 □

注记 5.2 采用类似的论证，我们得到 $Q_{\underline{A}_1} = Q_{\underline{A}_2}$ 的另一种证明。

我们将 $[\rho](W)$ 在 $\left(P^1(C)\right)^4$ 中的扎里斯基闭包记为 X（即 $[\rho]$ 的 $\{\det M = 0\}$ 的像）。我们有：

$$X \setminus \Theta_4 = X' \cup \bigcup_{i,j,k;1\leq i<j<k\leq 4} (L^{\infty}_{i,j,k} \setminus \Theta_4) \cup \bigcup_{i,j,k;1\leq i<j<k\leq 4} (L^{0}_{i,j,k} \setminus \Theta_4),$$

其中 X' 是 复数域 C^4 上的不可约仿射曲面（参见 [16, 5, p 34]）。

我们将几何商 $\mathcal{X} := (X \setminus \Theta_4)/C^*$ 记为 $\mathcal{X}$，并将 $\mathcal{X}'$ 的像记为 $\mathcal{X}'$。于是，$\mathcal{X}$ 是 8 个点 $p^{\infty}_{i,j,k}$、$p^{0}_{i,j,k}$ 和不可约曲线 $\mathcal{X}'$ 的并。注意：$\mathcal{X}$ 不是分离的。

注记 5.3 对所有 $\omega \in$ 复数域*，我们有 $\mathcal{X}' \subset Q_{\underline{A}(\omega)}$（参见定理 3.17）。曲线 $\mathcal{X}$ 是曲线 $\mathcal{X}'$ 在 $\mathcal{K}_4$ 中的闭包。点 $p^{0}_{i,j,k}$ 属于曲线 $\mathcal{X}'$ 在 $Q_{\underline{A}(\omega)}$ 中的闭包。类似地，$\mathcal{X}' \subset \tilde{Q}_{\underline{A}(\omega)}$，且点 $p^{\infty}_{i,j,k}$ 属于曲线 $\mathcal{X}'$ 在 $\tilde{Q}_{\underline{A}(\omega)}$ 中的闭包。

命题 5.4 (i) 曲面 X 和 X′ 与 ω 无关。我们给出了曲线 $\mathcal{X}'$ 的参数化（参见命题 3.16 和 [16]）。这条曲线不可约。

(i) 曲线 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}'$ 与 8 个点 $p^{0}_{i,j,k}$、$p^{\infty}_{i,j,k}$ 的并集。

(iii) 对于所有 $\omega \in$ 复数域*，我们有 $X \subset S_{\underline{A}(\omega)}$。

(iv) 对于所有 $\omega \in$ 复数域*，我们有 $X = S_{\underline{A}(\omega)} \cap S_{\underline{A}(1)}$

(iv) 设 $\omega_0 \in$ 复数域*，且为非共振的。对于所有 $\omega \in$ 复数域，二次曲面 $Q_{\underline{A}(\omega)}$ 属于由 $Q_{\underline{A}(\omega_0)}$ 和 $Q_{\underline{A}(1)}$ 生成的二次曲面铅笔。该铅笔的基底是不可约二次曲线 $\mathcal{X}' \cup \bigcup_{1\leq i<j<k\leq 4} \{p^{0}_{i,\ j,\ k}\}$。

证明。-由 [16, 定理 2.15 和 5.1] 可轻易得出。 □

我们将 $\mathcal{S}^*_{\underline{A}(\omega)} := \mathcal{S}_{\underline{A}(\omega)} \setminus \mathcal{X}$ 记作。我们考虑态射 $[\sigma] : F \to \left(P^1(\text{复数域})\right)^4$。与投影复合后，我们得到一个态射 $F \to \mathcal{K}_4$，，并利用范畴商的泛性质 $F \to \mathcal{F}$，得到一个态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{K}_4$。

若条件 (NR) 得到满足，则 $\omega \in C^*$ 是非共振的。

定理 5.5 我们假设条件 (NR) 和 (NS) 得到满足。

(i) 映射 $[\rho]$ 诱导一个单射态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{S}_{\underline{A}(\omega)}$ 以及一个双射：

$$\mathcal{F} \to \mathcal{S}^*_{\underline{A}(\omega)}$$

(ii) 态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{S}^*_{A(\omega)}$ 是一个同构。

(iii) 几何商$\mathcal{F}$是光滑的。

(iv) 代数簇$\mathcal{S}^{*}{}_{\underline{A}(\omega)}$是分离的。

证明。-

(i) 由 [16, 定理 2.15] 得出。

(ii) 由 (i) 和命题 1.21 得出。

(iii) 这直接由 (ii) 以及$\mathcal{S}_{\underline{A}(\omega)}$是光滑的这一事实得出（参见定理 4.2）。

(iv) 这直接由 (ii) 以及$\mathcal{F}$是拟射影的、因而是分离的这一事实得出（参见命题 2.3）。

□

曲面 $\mathcal{S}_{\underline{A}}$ 不是分离的，但曲面 $\mathcal{S}^{*}_{\underline{A}}$ 是分离的。通过观察这个“谜题”来理解其中的原因是很有意思的：

$$\mathcal{S}^{*}_{\underline{A}(\omega)} := \mathcal{S}_{\underline{A}(\omega)} \setminus \mathcal{X} = \left(Q_{\underline{A}(\omega)} \setminus \left(\mathcal{X}' \cup \bigcup_{1\le i<j<k\le 4} \{p^{0}_{i,j,k}\} \right) \right) \cup \bigcup_{i=1,2,3,4} (S^{\infty}_{\underline{A}(\omega),i} \setminus \mathcal{X}). \tag{5.5.1}$$

曲线 $S^{\infty}_{\underline{A},\,i}$ 和 $S^{0}_{\underline{A},\,i}$ 不是分离的。如果从 $S^{\infty}_{\underline{A}}$ 中移除它们，我们得到 $Q_{\underline{A}}$ 的一个开集，该开集属于 $\mathcal{K}_4$ 且是分离的。我们定义：

$$\Delta^{0}_{i} := S^{0}_{\underline{A},i} \cap Q_{\underline{A}},\ \ \Delta^{\infty}_{i} := S^{\infty}_{\underline{A},i} \cap \tilde{Q}_{\underline{A}}.$$

Δ^{0}_{i}是 $Q_{\underline{A}}$ 的完备有理曲线。我们可以将 $Q_{\underline{A}}$ 识别为 P^3(复数域) 中的一个二次曲面，于是Δ^{0}_{i}是 P^3(复数域) 中的射影直线。同样，Δ^{∞}_{i}是 $\tilde{Q}_{\underline{A}}$ 的完备有理曲线。

我们有：

$$S^{0}_{\underline{A},h} = \Delta^{0}_{h} \cup \bigcup_{j=1,2,3,4;\,j\neq h} \mathcal{S}^{0,\infty}_{\underline{A},h,j}.$$

因此，从曲线 $S^{0}_{\underline{A},\,h}$ 中移除 3 个点后，我们得到一条分离的完备有理曲线。我们将看到，还有另一种不太明显的方法，可以移除 3 个点以得到一条分离的完备有理曲线：即移除属于 $p^{0}_{i,\,j,\,k}$ 族的 3 个点。

我们设 $X_0 := X' \cup \bigcup_{1\le i<j<k\le 4} \{p^{0}_{i,j,k}\}$。它是包含于 $Q_{\underline{A}}$ 中的一条完备四次曲线。直线 Δ^{0}_{i}与该曲线相交于 4 个点。对于每个 $i = 1$、2、3、4，其中三个属于 p^{0}_{i}、j、k 的族，另一个[19]属于 X'。类似地，我们设 $X_\infty := X' \cup \bigcup_{1\le i<j<k\le 4} \{p^{\infty}_{i,j,k}\}$。它是包含于 $Q_{\underline{A}}$ 中的一条完备~四次曲线。直线 Δ^{∞}_{i}与该曲线相交于 4 个点。对于每个 $i = 1$、2、3、4，其中三个属于 p^{∞}_{i}、$_j$、$_k$的族，另一个属于 X'。

利用 [32], 的一些结果，我们稍后将证明 $\rho_i = 0$ 和 $\rho_i = \infty$ 在 **复数域** 中定义了与仿射直线 C 同构的代数曲线。因此，由 $\rho_i = 0$ 在 $\mathcal{S}^{*}_{\underline{A}}$ 中定义的曲线 $S^{*}_{\underline{A},\,i}$ 也与仿射直线 C 同构；它由完备有理曲线 Δ^{0}_{i} 经由 ~ 去掉 4 个点并添加 3 个不属于 $Q_{\underline{A}} \cup Q_{\underline{A}}$ 的点而得到。

[19]原则上可能存在一个重节点，但根据下文可知，这将意味着 $\rho_i = 0$ 在 $\mathcal{F}$ 中定义一条完备有理曲线，而这是不可能的。

5.2 将$\mathcal{F}$嵌入到 C^6 和 C^4

我们将给出 [16] 的一些结果的代数化版本（参见定理 2.21 和 5.3）。

5.2.1 嵌入到 C^6

我们将 $A_{T(\kappa_0)}$和 $A_{T(1)}$分别替换为 $A = A(\omega)$ 和 $A' = A(1)$，其中 $T(\kappa_0)$ 和 $T(1)$ 的定义见 [16],。我们假设 A 是非共振的。

从数据 A、A′出发，我们将定义一个仿射代数簇$\mathcal{Y} \subset C^6$。我们用 η_{ij}、i、$j = 1$、2、3、4、$i \neq j$ 表示 C^6上的坐标：(η_{12}、η_{13}、η_{14}、η_{23}、η_{24}、η_{34}) $\in C^6$。

现在，我们用以下方程定义$\mathcal{Y}$（参见 [16]，（2.26a）、（2.26b）、（2.26c）、（2.26d），第 12 页）：

$$A\eta_{12} + C\eta_{13} - D\eta_{14} - E\eta_{23} + F\eta_{24} + B\eta_{34} = 0, \tag{5.5.2}$$

$$A'\eta_{12} + C'\eta_{13} - D'\eta_{14} - E'\eta_{23} + F'\eta_{24} + B'\eta_{34} = 1, \tag{5.5.3}$$

$$\eta_{12}\eta_{34} - \eta_{13}\eta_{24} = 0. \tag{5.5.4}$$

$$\eta_{13}\eta_{24} - \eta_{14}\eta_{23} = 0. \tag{5.5.5}$$

簇$\mathcal{Y}$显然是一个曲面。该曲面的无穷远除子是一条代数曲线 $\check{\mathcal{X}}$，它与 ω 无关。可以验证，5.1 中定义的曲线 $\mathcal{X}'$ 同构于$\mathcal{X}$的一个˘扎里斯基稠密开子集。

我们考察 C^6 在无穷远处的 P^5(复数域)。我们使用坐标 $\eta_{12} = X_1/T$ .... 方程 5.5.4 和 5.5.5 给出两个二次曲面 $C_1 = \{X_1X_2 - X_3X_4 = 0\}$ 和 $C_2 = \{X_3X_4 - X_5X_6 = 0\}$。

我们假设 $X_4 \neq 0$。我们使用坐标 $\xi_i = X_i/X_4$, i = 1, 2, 3, 5, 6。于是方程为 $\{\xi_1\xi_2 - \xi_3 = 0\}$ 和 $\{\xi_3 - \xi_5\xi_6 = 0\}$。由$\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$ 定义的维数为 2 的射影空间 L 包含在两个二次曲面的交点中。方程 5.5.2 和 5.5.3 给出两个超平面 H_1 和 H_2:

$$A\xi_1 + C\xi_2 - D\xi_3 + F\xi_5 + B\xi_6 = E,$$

$$A'\xi_1 + C'\xi_2 - D'\xi_3 + F'\xi_5 + B'\xi_6 = E',$$

二次曲面 C_1 和 C_2 在唯一的点 (0, 0, 0, 0, 0) 处相切。由于 $EE' \neq 0$，该点˘不属于曲线$\mathcal{X}$。在其他坐标图中也有类似的计算。因此，曲线$\check{\mathcal{X}}$ 是光滑的。

参照 [16], (2.25)，我们在 $\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^4$上引入坐标：

$$\eta_{ij} := \frac{\rho_i \rho_j}{\Phi_{\underline{A}'}(\rho)}, \quad 1 \le i < j \le 4.$$

用齐次坐标表示：

$$\eta_{12} := \frac{\rho_i^x \rho_j^y}{\Phi_{\underline{A}'_{hom}}(\rho^x \rho^y)},$$

其他 i、j 也有类似的表达式。因此，我们得到一个代数簇态射：

$$[\eta] : \left(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\right)^6 \setminus S_{\underline{A}'} \to \mathbf{C}^6.$$

$[\sigma]$ 的像：$\mathrm{F} \to \left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^6$ 包含于 $\left(\mathrm{P}^1(\text{复数域})\right)^6 \setminus \mathrm{S}_{\underline{A}'}$ 中，因此 $[\eta] \circ [\sigma]$ 定义了一个从 F 到 C^6 的态射。它诱导出一个态射 $\mathcal{F} \to \mathrm{C}^6$。根据 η_{ij} 的定义，该态射的像包含于 $\mathcal{Y}$中。利用 [16] （参见定理 2.21）），该态射诱导出一个双射态射 $\vartheta: \mathcal{F} \to \mathcal{Y}$。我们将在下文证明[20] $\mathcal{Y}$ 是一个正规代数曲面；于是根据命题 1.21 可知，ϑ 是一个同构。

命题 5.6 假设条件 (NR) 和 (NS) 均成立。

(i) “自然的”态射 $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{Y}$（由 $[\eta] \circ [\rho]$诱导）是一个同构。

(ii) 代数曲面$\mathcal{Y}$是光滑的。

5.2.2 嵌入到复数域[4]

对于参数[21], 的一般值，我们可以消去两个坐标，并证明代数曲面$\mathcal{Y}$同构于复数域[4], 中两个二次曲面的交集$\mathcal{Y}'$，即一个仿射塞格雷曲面。

在坐标 η_{12}、η_{13}、η_{14}、η_{23}下，两个方程为（参见 [16], (2.27)）：

$$u_0\eta_{12}^2 + u_1\eta_{12}\eta_{13} + u_2\eta_{12}\eta_{14} + u_3\eta_{12}\eta_{23} + u_4\eta_{14}\eta_{23} + u_5\eta_{12} = 0$$

$$v_0\eta_{13}^2 + v_1\eta_{12}\eta_{13} + v_2\eta_{13}\eta_{14} + v_3\eta_{13}\eta_{23} + v_4\eta_{14}\eta_{23} + v_5\eta_{13} = 0.$$

塞格雷完备曲面是正规的（参见下文5.4.2），因此$\mathcal{Y}$和$\mathcal{Y}'$ 是正规曲面 s.

命题 5.7 我们假设条件 (NR) 和 (NS) 得到满足。

(i) 存在一个同构 $\theta: \mathcal{F} \to \mathcal{Y}'$，使$\mathcal{F}$与一个仿射 Segre 曲面同构。(ii) 代数曲面$\mathcal{Y}'$是光滑的。(iii) 代数曲面$\mathcal{F}$是有理的。

[20]在条件 (NR) 和 (NS) 下。[21]关于精确表述，请参见 [16]。

(iv) 代数曲面$\mathcal{F}$是仿射的。

我们注释说，u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 和 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 不依赖于 ω：在 [16], 中相应的公式不依赖于 κ_0。

我们将仿射曲面 $\tilde{Y}'$ 的“无穷远除子”记为 $\tilde{X}$。它是复数域 $P^3(C)$ 中两个二次曲面的交。它们的方程分别由 (u_0,u_1,u_2,u_3,u_4) 和 $(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)\tilde{}$ 定义，且与 ω 无关。因此，X 是与 ω 无关的四次曲线。假设 (NR) 和 ˜(NS) 成立，我们猜想这两个二次曲面在唯一一点相切。在这种情况下，X 将是一条亏格 2 的不可约有节点曲线（参见 7.2）。

可以证明，5.1 中定义的曲线 $\mathcal{X}'$ 同构于 $\tilde{X}$ 的一个扎里斯基稠密开集。

5.3 $\Pi_{k,l}$ 与 $\Pi'_{k,l}$，k，l $=1$，.....，4，属于 **[32]**

5.3.1 $\Pi_{k,l}$ 与 $\Pi'_{k,l}$

设 $M_1 =$ 复数域$_1L_1, M_2 =$ 复数域$_2L_2 \in \mathrm{Mat}_2$(复数域)$_1$，使得 $\Pi(M_1, M_2)$ 有定义，并像之前一样将 C_i 的列记作 $\begin{pmatrix} f_i \\ g \end{pmatrix}$。若 $\Gamma =$ 对角矩阵(c, c′)，则有：

$$\Pi(\Gamma M_1, \Gamma M_2) = [cf_1c'g_2 : cf_2c'g_1] = [f_1g_2 : f_2g_1] = \Pi(M_1, M_2).$$

另一方面，右乘只作用于 L_i，所以显然 $\Pi(M_1\Delta, M_2\Delta) = \Pi(M_1, M_2)$。对 Π' 也有类似结论，现陈述如下：

$\forall \Gamma, \Delta \in D_2$(复数域) $\times D_2$(复数域) $\Pi(\Gamma M_1\Delta, \Gamma M_2\Delta) = \Pi(M_1, M_2)$ 且 $\Pi'(\Gamma M_1\Delta, \Gamma M_2\Delta) = \Pi'(M_1, M_2)$。

（这里默认理解为“若一侧有定义，等等”。）

我们先从 $\Pi_{1,2}$ 开始。我们已经看到，若 $M \in F$，则 u(M) 和 v(M) 属于 Mat_2(复数域)$_1$，并且它们不能同时具有零第一行；也不能同时具有零第二行，列的情形也类似。因此，Π(u(M), v(M)) $\in P^1$(复数域) 和 Π'(u(M), v(M)) $\in P^1$(复数域) 都有定义。我们将它们分别记为$\Pi_{1,2}$(M) 和 $\Pi'_{1,2}$(M)。由于 $u(\Gamma M\Delta) = \Gamma u(M)\Delta$，可见 $\Pi_{1,2}$ 和 $\Pi'_{1,2}$ 在 F 上是 H-不变的。

利用对 $1 \le k < l \le l$ 的求值，我们由此得到十二个 H-不变正则映射 $\Pi_{k,l}$ 和$\Pi'_{k,l}$，它们从 F 映射到 P^1(复数域)；再通过取商空间，得到十二个正则映射 $\Pi_{k,l}$ 和 $\Pi'_{k,l}$，它们从 $\mathcal{F}$ 映射到 P^1(复数域)（这里对记号稍作滥用）。

我们可以像从 ρ 定义 ρ_i 一样，根据映射 ρ'（参见 3.2.1）定义映射 ρ'_i, i $=1, 2, 3, 4$。我们有 $\Pi_{i,j} = \rho'_i/\rho'_j$ 和 $\Pi'_{i,j} = \rho_i/\rho_j$。

5.3.2 F 的参数化

在 [32], 中，我们定义了一些 q-褡子参数化（参见 7.2.3）。它们是从一个光滑代数曲面（利用一条带 puncture 的椭圆曲线构造）到单值化数据集合的单射映射。我们可以很容易地验证，若在单值化数据集合上赋予$\mathcal{F}$结构，那么 q-褡型参数化就是态射。

利用 q-裤型参数化，我们很容易看出，由$\{\rho_i=0\}$、 $\{\rho_i=\infty\}$、 $\{\rho'_i=0\}$、 $\{\rho'_i=\infty\}$在$\mathcal{F}$上定义的 16 条代数曲线同构于仿射直线 复数域。因此，由 $\{\rho_i=0\}$ 和 $\{\rho_i=\infty\}$ 定义的八条曲线的像 $S^{0}_{,*A,i}$ 和 $S^{\infty}_{,*A,i}$ 也同构于仿射直线 复数域。

若 $\rho_i=0$或$\rho_j=\infty$，则 $\Pi_{i,\ j}=0$，因此，由 $\Pi_i^{-1},\ _j(0)$（参见 [32, 7.2.5]）定义的两条直线的交点，是 $\mathcal{F}$上的点，其在 $S^{*}_{\underline{A}}$ 中的像为 $p^{0},\ \infty\, i,\ j$。

5.4 塞格雷曲面上的16条直线

在 [32], 中，利用 Π_{ij} 和 Π'_{ij}，我们描述了单值化数据空间上的16条特殊曲线（参见 7.2.5），它们与部分可约性[22]的一些性质有关。利用 σ_i、 σ'_i，我们得到了对这一集合的等价定义（参见 5.3）。另一方面，在一个（一般的）完备曲面上存在16条直线。比较这两个集合是很自然的。显然，由 σ_i 定义的8条曲线是塞格雷曲面上的直线。由 σ'_i得到的另外8条曲线是否为直线则不那么明显。起初，我们怀疑这8条曲线是否是塞格雷曲面上的直线，直到 Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen 宣布，他们已在一篇尚待发表的文章“关于 q-Painlev´e VI 与塞格雷曲面的几何”（暂定标题）中证明了这一事实。随后我们仔细考察，发现实际上这一结论可由 [32], 的一个结果轻易推出，下面将对此作出解释。

5.4.1 这16条直线

我们回顾 [32] 中的一些公式（参见第 7.2.5 节，第 1229 页）。设:

$$\mathbf{e}_q^{1;1,2;3}(\underline{\rho},\underline{\sigma},\underline{x}) := \frac{\theta_q\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}x_1x_3\right)\theta_q\left(\frac{\sigma_1}{\rho_2}x_2x_3\right)}{\theta_q\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}x_2x_3\right)\theta_q\left(\frac{\sigma_1}{\rho_2}x_1x_3\right)},$$
$$\mathbf{e}_q^{2;1,2;3}(\underline{\rho},\underline{\sigma},\underline{x}) := \frac{\theta_q\left(\frac{\sigma_2}{\rho_1}x_1x_3\right)\theta_q\left(\frac{\sigma_2}{\rho_2}x_2x_3\right)}{\theta_q\left(\frac{\sigma_2}{\rho_1}x_2x_3\right)\theta_q\left(\frac{\sigma_2}{\rho_2}x_1x_3\right)}.$$

若条件 (NR)、(NS) 成立，则 $e_q^{1;1\ 2;3},\ (\underline{\rho},\underline{\sigma},x), e_q^{2;1\ 2;3},\ (\underline{\rho},\underline{\sigma},x)\ \neq 0$。我们有:

$$(\Pi')^{-1}_{1,2}(0)=\Pi^{-1}_{1,2}\left(\mathbf{e}_q^{1;1,2;3}\right),\ (\Pi')^{-1}_{1,2}(\infty)=\Pi^{-1}_{1,2}\left(\mathbf{e}_q^{2;1,2;3}\right), \tag{5.7.1}$$

其余情形也有类似的公式 Π_{ij} 和 Π'_{ij}，并交换 Π 和 Π'。

我们考虑由 $\rho'_1=0$ 定义的 $\mathcal{F}$ 曲线。利用将 Π 和 Π' 交换后由 (5.7.1) 得到的公式，我们看到它包含于:

$$\rho_1-\alpha\rho_2=0,\ \rho_1-\beta\rho_3=0,\ \rho_1-\gamma\rho_4=0,$$

对于某些 $\alpha,\beta,\gamma\in$ 复数域*。

[22]这是对 P 的 Fricke 曲面上作为部分可约轨迹的

24 *VI* [32], 条直线的一种描述的 q-类比，参见.....

7 1 3

我们考虑由 $\rho'_1 = 0$ 定义的$\mathcal{F}$曲线在$\mathcal{Y}'$中的像。我们不严谨地将其记作$\{\rho'_1\} = 0$。这条曲线包含于

$$\eta_{13} - \alpha\eta_{23} = 0,\ \eta_{12} - \beta\eta_{23} = 0,\ \eta_{13} - \gamma\eta_{34} = 0.$$

我们可以用等价方程 $\beta\eta_{13} - \gamma\eta_{14} = 0$ 替换最后一个方程，从而得到：

$$\eta_{13} - \alpha\eta_{23} = 0,\ \eta_{12} - \beta\eta_{23} = 0,\ \beta\eta_{13} - \gamma\eta_{14} = 0.$$

这些超平面方程彼此独立，并在复数域 $\mathbb{C}^4$中定义一条直线 L。曲线 $\{\rho'_1 = 0\}$ 包含在 L 中。

利用 [32], ，我们在上文证明了 $\{\rho'_1 = 0\} \subset \mathcal{F}$ 作为抽象代数曲线是一条仿射直线（参见 5.3.2），因此它在仿射塞格雷曲面中的像就是 L。我们也可以利用方程验证这一点。

对于 $\{\rho'_i\} = 0$、$i = 2$、3、4，证明方法类似，只需稍作调整。

命题 5.8 方程：

$$\sigma_i = 0, \infty,\ \sigma'_i = 0, \infty,\ i, j = 1, 2, 3, 4.$$

定义了仿射塞格雷曲面$\mathcal{Y}'$上的 16 条仿射直线。

另请参见 Nalini Joshi 在研讨会“Asymptotics if beyond all-orders phenomena”（艾萨克·牛顿研究所，剑桥，2022年11月3日）上关于这一结果的独立发布的演讲：“离散 Painlev´e 方程的渐近性”。

众所周知，完备塞格雷曲面上至多有 16 条直线。若该曲面光滑，则这 16 条直线两两不同。

请注意：上述命题中定义的 16 条直线不一定两两不同。以下结果（可由我们的描述轻易推出）是研究这一问题的第一步。我们将在 5.4.2 节重新讨论这个问题。

命题 5.9 假设 $\omega \in$ 复数域* 非共振。仿射塞格雷曲面 $\mathcal{Y}(\omega)$ 上，族 $\sigma_i = 0, \infty$（分别为 $\sigma'_i = 0, \infty$）的 8 条直线两两不同。

5.4.2 塞格雷曲面与 4 次德尔佩佐曲面

我们沿用 [9] 中关于德尔佩佐曲面的论述。在该专著中，Dolgachev 提出了德尔佩佐曲面的多种定义。我们将采用以下定义（参见 [9, 8.1.3，定义 8.1.2]）。

定义 5.10 德尔佩佐曲面是满足以下两个条件的射影正规代数曲面 X：

- 所有奇点都是有理双点；
- 典范层 ω_X 可逆，且 $\omega^{-1}{}_X$ 丰沛。

德尔佩佐曲面 X 的次数 d，按定义为[23] $d = K_X^2$。

次数为 d 的德尔佩佐曲面 ≥ 3 可以嵌入为 P^d(复数域) 中的 d 次曲面（ω_X^{-1}是丰沛的）。当 $d = 1,2$ 时，丰沛除子并非非常丰沛，但它可以给出到加权射影空间中的一个嵌入。

塞格雷曲面定义为 P^4(复数域) 中两个四次曲面的完全交，是次数为 4 的德尔佩佐曲面。特别地，它们是正规的。请注意：塞格雷曲面不一定光滑。

对于抽象的完备代数簇，我们将（-1）-有理曲线称为直线。对于 C^n 中的仿射曲面，直线就是通常意义上的直线。

我们回顾以下结果（参见 [9],命题 8.1.18）。

命题 5.11 将 P^2(复数域) 中的 $N \leq 8$ 个点膨胀，当且仅当这些点处于一般位置时，所得曲面是德尔佩佐曲面。

爆破中位于这 N 个点上方的 N 个除子是直线。

请注意，奇异的德尔佩佐曲面 X 不能描述为爆破[24] 但 X 的极小解消[25] 可以描述为爆破 Y[26]。在这种情况下，这 N 个点处于几乎一般位置（参见 [9]）。

光滑的塞格雷曲面同构于在复数域 $P^2(C)$ 中处于一般位置的 5 个点的爆破。在这种情况下，“处于一般位置”等价于“其中任意三个点均不共线”。这为 16 条直线提供了很好的描述。它们是：

- 位于这 5 个点上方的 5 个除子，
- 连接成对点的 $P^2(C)$ 中 10 条直线的严格变换，
- 经过这 5 个点的 $P^2(C)$ 中圆锥曲线的严格变换。

[9]中有一幅很好的光滑塞格雷曲面上 16 条直线的关联图：图 8.5。（另请参见 Nalini Joshi 的讲座幻灯片中的一幅图，该讲座在命题 5.8 后不久被引用。）

我们有如下结果（参见 [9], 表 8.6）。

命题 5.12 完备塞格雷曲面上的 16 条直线两两不同，当且仅当该曲面光滑。

若直线的数量为 < 16，则它是 ≤ 12（参见 [9], 表 8.6）。

如果命题 5.8 中定义的 16 条仿射直线两两不同，那么它们对应于完备塞格雷曲面上的 16 条直线，且该曲面是光滑的。我们猜想，在某些一般条件下，这些直线彼此不同；这些条件可以是 (NR)、(NS) 以及条件 $Hyp_{48}$of [32], 7.2.3。更一般地，我们猜想，在所有情形下，完备塞格雷曲面上的所有直线都由命题 5.8 的方程定义。

[23]按照通常的记号，K_X 是典范除子。[24]这样的爆破是光滑的。[25]也就是说，纤维中没有（-1）曲线。[26]更准确地说，X 是由 Y 吹下若干非奇异的（-2）有理曲线得到的。

每个族中的 8 条直线两两不同，但一个族中的直线可能与另一个族中的直线重合。如果两条直线重合，就会出现无穷远奇点[27]，且不同直线至多有 12 条。

5.5 从$\mathcal{F}$到 $(\mathrm{P}^1(\mathrm{C}))^6$ 以及到 $(\mathrm{P}^1(\mathrm{C}))^3$的态射

六个函数 $\Pi'_{ij} = \rho_{ij} = \rho_i/\rho_j$、 $1 \le i < j \le 4$ 定义了一个从$\mathcal{F}$到 $(\mathrm{P}^1(\mathrm{C}))^6$的态射（参见 [32]）。因此，三个函数 ρ_{12}、 ρ_{23}、ρ_{34} 定义了一个从$\mathcal{F}$到 $(\mathrm{P}^1(\mathrm{C}))^3$的态射 ϕ。根据 [16], ，这个态射是单射。它是一个浸入。一个自然的问题是，这个浸入是否为嵌入。我们将该态射的像记为$\mathcal{Z}'$，并将其在 $(\mathrm{P}^1(\mathrm{C}))^3$中的扎里斯基闭包记为$\mathcal{Z}$。由于$\mathcal{F}$是光滑的，根据命题 1.21， ϕ 是一个嵌入，当且仅当$\mathcal{Z}'$ 中的点是$\mathcal{Z}$的光滑点。这个问题似乎很难，我们只会给出一些说明。

在 [16] 中，作者给出了一个方程 $F = 0$，它由$\mathcal{Z}'$ 满足（参见 5.32）。乍看之下，利用 F 的梯度来判断 $\{F = 0\}$ 是否光滑似乎很容易。然而，我们将看到，光滑性涉及 A、B、C、D 之间可能存在的一些代数关系，而这些关系是否成立并不显而易见。采用我们的记号（即用 A 替换 T_{ij}），有：

(5.12.1) $$A\rho_{12}\rho_{23}^2\rho_{34} + C\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34} - D\rho_{12}\rho_{23} - E\rho_{23}\rho_{34} + F\rho_{23} + B = 0.$$

$$\mathbf{F}(X,Y,Z) = AXY^2Z + CXYZ - DXY - EYZ + FY + B = 0.$$

$$\mathbf{F}_X = AY^2Z + CYZ - DY,\ \mathbf{F}_Y = 2AXYZ + CXZ - DX - EY + F,\ \mathbf{F}_Z = AXY^2 + CXY - EY.$$

由于排除了 $Y = 0$，条件变为：

$$\mathbf{F} = 0,\ AYZ + CZ - D = 0,\ \mathbf{F}_Y = 0,\ AXY + CX - E = 0$$

利用 $Z = \underline{D\ AY} + C$ 和 $X = \underline{E\ AY} + C$，可以从 $F = 0$和 $F_Y = 0$中消去 X 和 Z。得到两个关系：

$$CDE + (AY + C)^2(-EY + F) = 0,\ DE - 2DEY(AY + C) + (AY + C)^2(FY + B) = 0,$$

也就是说

$$P_{\underline{A}}(Y) := -A^2EY^3 + A(AF - 2CE)Y^2 + C(2AF - CE)Y + C(DE + CF) = 0,$$
$$Q_{\underline{A}}(Y) := AF^2Y^3 + A(2CF - 2DE + AB)Y^2 + C(2AB - 2DE + CF)Y + BC^2 = 0$$

利用这两个三次多项式的结式，可得 A、B、C、D、E 之间的代数关系 $\mathrm{Res}(P_{\underline{A}}, Q_{\underline{A}}) = 0$。它可能恒成立，也可能仅在 A 取某些值时成立。若它不成立，则该曲面在相应坐标图的定义域内是光滑的。若它成立，则此定义域内存在一个奇点。

其他坐标图也有类似的关系。如果满足其中一个关系，那么曲面$\{F = 0\}$ 就是奇异的。还需要检查$\mathcal{Z}'$ 是否含有奇点。用这种方法似乎很难得出结论。或许可以借助 [32], 的一些思路，结合式（5.12.1）所允许的显式计算，研究$\mathcal{F}$上的16条“直线”。

[27]它位于无穷远四次曲线的一个节点上。

6 $\mathcal{G}$ 模型

这里我们回到对单值化数据空间的另一种描述，这种描述在 [32, §4], 中以$\mathcal{G}$ 之名引入，参见§4.4，尤其是该节。我们先采用一种稍微抽象的观点，如上文第2节所述。首先，假设有一个4维空间W以及两个同构:

$$\mu_+ : V_{1,1} \otimes V_{2,2} \simeq W \text{ and } \mu_- : V_{1,2} \otimes V_{2,1} \simeq W.$$

在 $V_{i,\ j} = V2,\ \rho_i/\sigma_j$ 和 $W := V4,\ \frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$ 的情形下，μ_+ 和 μ_- 都来自乘法映射 $V1,\ _1 \times V2,\ _2 \to W$ 和 $V1,\ _2 \times V2,\ _1 \to W$，其定义为 $(f, g) \mapsto fg$。然而，诱导映射 $f \otimes g \mapsto fg$ 是单射，当且仅当满足以下特殊条件（SC）（已在 3.1 开头回顾） [32,§4.4]:

$$\text{(SC)} \quad \frac{\rho_1}{\sigma_1} \neq \frac{\rho_2}{\sigma_2} \quad \text{and} \quad \frac{\rho_2}{\sigma_1} \neq \frac{\rho_1}{\sigma_2}.$$

事实上，例如 $\rho_1/\sigma_1 = \rho_2/\sigma_2$，允许交换 $m^{1,1}$ 和 $m^{2,2}$，且不会改变其在 W 中的像。因此，这里我们在假设 (SC) 下进行。此外，为了简化记号，我们将 $\mu_+(x1,\ _1 \otimes x^{2,2})$ 写作 $x^{1,1}x^{2,2}$，将 $\mu_-(x1,\ _2 \otimes x^{2,1})$ 写作 $x^{1,2}x^{2,1}$。

6.1 双射态射

6.1.1 正则映射

复合映射的乘积:

$$\begin{cases} V_{1,1} \times V_{2,2} \longrightarrow V_{1,1} \otimes V_{2,2} \xrightarrow{\mu_+} W, \\ (x_{1,1}, x_{2,2}) \mapsto x_{1,1}x_{2,2}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} V_{1,2} \times V_{2,1} \longrightarrow V_{1,2} \otimes V_{2,1} \xrightarrow{\mu_-} W, \\ (x_{1,2}, x_{2,1}) \mapsto x_{1,2}x_{2,1}, \end{cases}$$

定义了一个映射[28]:

$$\begin{cases} V := V_{1,1} \times V_{2,2} \times V_{1,2} \times V_{2,1} \to W \times W, \\ (x_{1,1}, x_{2,2}, x_{1,2}, x_{2,1}) \mapsto (y_+, y_-) := (x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,2}x_{2,1}), \end{cases}$$

它限制为一个正则态射 $V^{(*)} \to W^* \times W^*$（因为一般而言，$f, g \neq 0$蕴含 $f \otimes g \neq 0$）。源空间 $V^{(*)}$ 上的自然 H-作用（显然的记号）：

$$(\lambda_i, \mu_j).(x_{i,j}) := (\lambda_i x_{i,j}/\mu_j)$$

对应于目标端 $W^* \times W^*$上由 $\lambda_1\lambda_2$给出的复数域*-齐次作用。回顾 $W^* \times W^* \subset \mu_1\mu_2(W \times W)^*$，其在复数域*-作用下存在几何商 $P(W \times W)$，由此可得:

引理 6.1 上述映射诱导出一个正则映射 $V^{(*)}/H \to P(W \times W)$。

证明。-这由几何商 $V^{(*)}/H$ 的泛性质得出，参见命题 2.3。□

[28]思路是，如果 $M = (x_{i,j})_{i,j=1,2}$，那么 $\det M = y_+ - y_-$。

6.1.2 单射性

映射 $V^{(*)} \to W^* \times W^*$ 具有这样的性质：源中属于同一 H-轨道的两个元素，其像属于同一复数域*-轨道；这一点显而易见，因为：

$$(x_{i,j})_{i,j=1,2} \mapsto (y_+, y_-) \Longrightarrow (\lambda_i x_{i,j}/\mu_j)_{i,j=1,2} \mapsto \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}(y_+, y_-).$$

反向命题也成立，因此我们得到：

引理 6.2 上述映射 $V^{(*)}/H \to P(W \times W)$ 是从 $V^{(*)}/H$ 到像 $(W^* \times W^*)$/复数域* 中 $W^* \times W^*$ 在 $P(W \times W)$ 中的像之一个子集 $\overline{\Sigma}$ 的双射正则态射。

证明。- 的确，上述蕴含的逆命题很容易由以下一般事实推出：对于任意两个向量空间 E、F：

$$\forall x, x' \in E \setminus \{0\}\ ,\ \forall y, y' \in F \setminus \{0\}\ ,\ \left(x' \otimes y' = x \otimes y\right) \Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{C}^*\ :\ (x', y') = (\lambda x, \lambda^{-1} y)\right).$$

□

6.1.3 $V^{(*)}/H$ 的像 $\overline{\Sigma}$

对于任意两个二维空间 E、F，设其对应的基分别为 (e_1, e_2) 和 (f_1, f_2)，空间 $E \otimes F$ 有相应的基 $(e_i \otimes f_j)_{i,j=1,2}$，而 $x \otimes y$（其中 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2, y = y_1 f_1 + y_2 f_2,$）在该基下的坐标为 $(x_i y_j)_{i,j=1,2}$。因此，$E^* \times F^*$ 在 $(E \times F)^*$ 中的像是齐次二次超曲面 $XT = YZ$（在适当的坐标下）。

特别地，将 Σ_+、Σ_- 分别称为 $V_{1,1} \times V_{2,2}$ 和 $V_{1,2} \times V_{2,1}$ 在 W 中的像，因此 $V^{(*)}/H$ 在 $P(W \times W)$ 中的像为 $\overline{\Sigma} = (\Sigma_+ \times \Sigma_-)/C^*$。注意，$\Sigma_+ \times \Sigma_- \to \overline{\Sigma}$ 作为几何商 $(W \times W)^* \to P(W \times W)$ 的限制，本身也是一个几何商。

因此，我们可以假设在射影空间 $P(W \times W)$ 上选取齐次坐标 $[X : Y : Z : T : X' : Y' : Z' : T']$，使得 $\overline{\Sigma}$ 是由方程定义的 $(W^* \times W^*)/C^*$ 的闭子集：

$$\overline{\Sigma} : (XT = YZ) \wedge (X'T' = Y'Z').$$

命题 6.3 (几何)商空间 $V^{(*)}/H$ 与 $\overline{\Sigma}$ 同构；后者是一个维数为 5 的光滑拟射影簇。

证明。显然，Σ 在 $(W^* \times W^*)$/复数域* 中是闭的，因此是一个拟射影簇。它是由两个坐标非零所定义的 16 个仿射图的并集：

$$(\{X \neq 0\} \cup \{Y \neq 0\} \cup \{Z \neq 0\} \cup \{T \neq 0\}) \times \left(\{X' \neq 0\} \cup \{Y' \neq 0\} \cup \{Z' \neq 0\} \cup \{T' \neq 0\}\right)$$

在这些坐标图中的每一个坐标图上，都很容易验证它是光滑的；例如，在坐标图 $X, X' \neq 0$ 中，它写作（在相应的仿射坐标下）$t = yz,\ t' = y'z'$。其维数显然为 5。同构的结论源于这样一个事实：目标端光滑的双射正则态射是同构 [24,pp 46-48]。□

6.2 $\mathcal{G}$ 的像$\mathcal{F}$

这里我们不再采用抽象观点，而是从一开始就取 $W := V4$，$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2}$ 并借助 1.1.2 中阐述的空间 $V_{k,\ c}$ 的一般性质。

为表达定义 $F_{R,S,\underline{x}}$ 的条件 $\det M(x_k) = 0$、$\det M \neq 0$，我们先引入 W 上的四个线性形式 λ_k：$f \mapsto f(x_k)$、$k = 1$、$\ldots, 4$，以及它们的核，即超平面 $H_k := \mathrm{Ker}\ \lambda_k$。由 Fuchs关系和 (NR) 可推得，族 $(\lambda_k)_{k=1,\ldots,4}$ 的秩为 3，因此 W 的线性子空间 $L := H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ 是一条直线。

另一方面，若 $x_0 \in C^*$ 任意选取，且模 $q^{\mathbf{Z}}$ 与 $x1, \ldots, x_4$, 中的任何一个都不同，则相应的线性形式 λ_0：$f \mapsto f(x_0)$ 定义了一个与 L 横截的超平面 $H_0 := \mathrm{Ker}\ \lambda_0$，即满足 $H_0 \cap L = \{0\}$。

因此，我们将考虑以下集合：

$$G := \{(y_+, y_-) \in \Sigma_+ \times \Sigma_- \mid y_+ - y_- \in L \setminus H_0\} \subset \Sigma_+ \times \Sigma_- \text{ and } \mathcal{G} := G/\mathbf{C}^* \subset \overline{\Sigma}.$$

显然，G 是 $\Sigma_+ \times \Sigma_-$ 的一个子簇；由几何商 $\Sigma_+ \times \Sigma_- \to \overline{\Sigma}$ 的限制（见 6.1.3），映射 G $\to \mathcal{G}$ 本身就是一个几何商；而 $\mathcal{G}$ 是 $\overline{\Sigma}$ 的一个准射影子簇。现在回想定理3.2，$\mathcal{F}_{R,S,\underline{x}}$ 是 $V^{(*)}/H$ 的一个分离子簇，也是 $F_{R,S,\underline{x}}$ 的一个几何商。

命题 6.4 态射 $V^{(*)}/H \to \Sigma$ 诱导出一个双射态射，从 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{R,S,\underline{x}}$ 到 $\mathcal{G}$。

证明。- 若 $(x_{i,j})_{i,j=1,2} \in V^{(*)}$，则它对应于 $F_{R,S,\underline{x}}$ 中一个点这一事实意味着：$y_+ - y_- = \det M$ 在 $x1, \ldots, x_4$ 处消失，但并非恒等于零；等价地：$y_+ - y_- \in L \setminus H_0$。因此，$\mathcal{F}$ 的像是 $\mathcal{G}$。□

遗憾的是，我们无法证明上述结果是一个同构。当然，这等价于目标端是光滑的（一个方向显然成立；另一个方向则得益于 6.1.3 末尾所用的结果 [24] ）。

7 结论

7.1 本文取得的成果。

本文改进了 [32] 和 [16] 的一些结果。

- 我们将 q-P_{VI} 的单值化数据空间解释为一个几何商（从代数几何的意义上说）。

- 我们在 [16] （参见定理 2.15）中定义的曲面[29] $\mathcal{S}^*(\kappa,t0)$上赋予代数簇结构。我们证明了，在条件 (NR) 和 (NS) 下，解析流形结构

[29]用我们的记号表示，它是 $\mathcal{S}^*(\omega)$。

是 [16]中定义的该曲面上的解析空间结构，且它在 GAGA 意义下与我们的代数结构相对应。我们证明了，在条件 (NR) 和 (NS) 下，代数曲面 $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(\kappa,t_0)$ 是光滑的，并且自然映射 $\mathcal{F} \to \mathcal{S}^*$ 是代数簇之间的同构。因此，$\mathcal{F}$ 是光滑的，且 $\mathcal{S}^*$ 是分离的。

• 在 [16], 中，作者引入了复数域 $\mathbb{C}^4$ 中的一个仿射塞格雷曲面[30] $\mathcal{F}(\kappa,t0)$（两个二次曲面的交），并定义了单值化数据集合与 $\mathcal{F}(\kappa,t0)$ 之间的双射。我们证明，这个双射对应于代数簇的一个同构：$\mathcal{F} \to \mathcal{H}(\kappa,t0)$。由此可知，仿射塞格雷曲面 $\mathcal{Y}' = \mathcal{F}(\kappa,t0)$ 是光滑的，并且 $\mathcal{F}$ 是有理曲面。

• 我们证明，完备塞格雷曲面 $\mathcal{Y}$ 上的16条直线都包含在仿射塞格雷曲面 $\mathcal{Y}'$ 中，并且它们对应于 [32] 中引入的16条“直线”，这些直线与部分可约性的某些问题有关（参见7.2.5）。

• 在 [32], 中，利用映射 $\Pi_{i,j}$，我们定义了从单值化数据集合分别到 $\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^6$ 和 $\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^3$的两个映射。 [16]中证明了它们是单射。于是它们导出单射态射 $\mathcal{F} \to \left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^6$ 和 $\mathcal{F} \to \left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^3$。根据定义，它们是浸入。我们不知道它们是否是嵌入[31]。我们猜想第一个是嵌入，但认为第二个似乎不太可能是嵌入。

• 存在一个从 $\mathcal{F}$ 到 [32] 中定义的曲面 $\mathcal{G}$ 的自然态射。它是一个双射。我们不知道它是否为同构。

正如我们将在下一段中解释的那样，从我们对 q-P_{VI} 单值化数据空间的详细代数描述中，出现了一种有趣的抽象结构（以辛代数几何的形式表述），这种结构或许存在于所有 Painlev´ 方程中，无论是连续的还是离散的。

7.2 未解决问题

即使我们已经取得了显著进展，关于 q-P_{VI} 单值化数据空间的一些问题仍未解决。更一般地说，与左侧已知的结果形成鲜明对比的是，对离散 Painlev´ 方程的单值化数据空间的研究才刚刚开始。我们提出一些探索方向。

1. 塞格雷曲面上的无穷远曲线。在微分情形中，P_{VI} 的完备 Fricke 曲面在一般情形下是一个光滑三次曲面。无穷远平面具有特殊性，它是一个三切平面。它沿着 27 条直线中的 3 条切割完备曲面。在我们的情形中，$\mathbb{C}^4$ (a $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$) 的无穷远射影空间沿着四次曲线 $\tilde{\mathcal{X}}$ 切割完备塞格雷曲面 $\mathcal{Y}$，该曲线是此 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中两个二次曲面的交（参见第 51 页）。自然会产生这样的问题：这个无穷远处的 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的选择有何特殊之处，以及超平面截面 $\mathcal{X}$ 具有何种相应的几何性质？我们提出以下猜想（假设 (NR) 和 (NS) 得到满足）：

• 定义 $\mathcal{X}$ 的两个二次曲面在唯一的点 $\mathrm{p} \in \tilde{\mathcal{X}}$ 处相切；

[30]用我们的记号，它是 $\mathcal{Y}'$。[31] [16] 中相应陈述所用的术语具有误导性。

• 四次曲线$\mathcal{X}$是不可约有节点曲线，它有唯一的节点，该节点是简单节点32，且位于 p 处；˜

• 曲线 $\mathcal{X}$的亏格为 2，其雅可比曲面在同源意义下是两份椭圆曲线[33] $E_q := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ 的乘积。（这可能与命题 3.16 中描述的参数化有关。）

那么，$\tilde{\mathcal{X}}$将是一个反典范环，而（$\mathcal{Y}$ $\tilde{\mathcal{X}}$）将构成一个 Looijenga 对（参见 [21] 的引言），如同 Fricke 曲面的情形。请与[7]的猜想 7.1 比较。

另一个问题是，在所有塞格雷曲面中识别出与 q-P_{VI} 相关联的塞格雷曲面。这可能与上述猜想有关。

2. 浸入与双射态射。从$\mathcal{F}$到 $\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^6$ 的映射由 Π_{ij} 定义，是一个浸入。我们猜想它是一个嵌入。

从$\mathcal{F}$到曲面$\mathcal{G}$的“自然映射”（定义见 [32, §4], ，请参阅本文第 6 节）在满足条件 (NR)、(NS) 和 (SC) 时是一个双射态射。我们猜想它是一个同构。

3. 椭圆纤维化。在 [32], 中，我们描述了单值化数据空间上的一些（由穿孔椭圆曲线构成的）“椭圆纤维化”，并将其与 Mano 分解联系起来（参见 6.6.2）。这些纤维化仍然令人费解。若能将它们解释为由某些曲面上的真正椭圆纤维化“诱导”而来，那就好了。考察这些“椭圆纤维化”时，似乎还缺少一些“直线”，才能得到真正的椭圆纤维化。我们提出了两种“添加直线”的方法。第一种似乎更好。

• 使用 $\mathcal{F}$的双重覆盖。

• 尝试寻找 $\mathcal{F}$的一种“良好紧化”，并在无穷远处添加一些直线。

a) 双重覆盖。我们可以考虑完备塞格雷曲面$\tilde{\mathcal{Y}}$到无穷远曲线 $\mathcal{X}$上的双重覆盖。（这可能与 [32], 5.1.4 中出现的某个对合有关。）那 16 条直线的原像分裂成 32 条曲线。我们可以期待这个双重覆盖是一个椭圆曲面。甚至可以更乐观一些[34]，进一步假设它是一个 K3 曲面。这样的图景曾出现在 [32]第 7.3 节的启发式考察中（其中混淆了曲面与双重覆盖[35]）。

b) 良紧化。我们猜想，从$\mathcal{F}$到 $\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^6$ 的映射由 Π_{ij}定义，且是一个嵌入。假设这一点成立，我们将像记为 Z，将其在 $\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^6$中的扎里斯基闭包记为 $\overline{Z}$。我们可以期待 $\overline{Z} \setminus Z$ 包含一些直线，它们有助于理解“椭圆纤维化”。更乐观地说，$\overline{Z}$ 可能是一个椭圆曲面。

[32]如果这两个二次曲面都是光滑的，那么一个实模型就是维维亚尼窗。[33]若该猜想成立，则曲线 $\tilde{\mathcal{X}}$将是洪贝尔特曲线。[34]参见 [9],注释 8.6.2。[35]根据本文的结果，我们现在知道该曲面是有理的，而不是 K3 曲面。

4. 参数的特殊情形 研究参数取共振值的情形以及可约情形[36]将会很有意思。在微分情形中，黎曼–希尔伯特映射不再是解析同构（它只是适当映射），并且在特征簇的奇点上方存在一些例外纤维，它们对应于 Riccati 解。商空间不再是良商。此时需要抛物结构和栈。T. Mochizuki 在 [23]中引入了抛物结构的 q-类比。

5. 带参数的方程。对于经典的 P_{VI} 情形，存在一个考虑参数的相对黎曼-希尔伯特对应。我们计划在未来的工作中，将 [32] 及本文的工作扩展为相对黎曼-希尔伯特-比尔霍夫对应。

6. 辛结构。左侧的初始条件空间上存在一个由 2-形式[37] $dp\wedge dq\ pq$ 定义的辛结构。我们预期右侧的单值化数据空间上存在一种~~"自然"~~的辛结构，它由一个正则且非退化的 2-形式 $\omega_{\mathcal{F}}$ 在 $\mathcal{F}$ 上定义。

承认这一点后，我们可以将辛形式 $\omega_{\mathcal{F}}$ 传递到仿射塞格雷曲面 $\mathcal{Y}'$ 上。我们得到一个 2-形式 $\mathcal{Y}'$，记作 $\omega_{\mathcal{Y}'}$。它延拓为完备塞格雷曲面 $\mathcal{Y}$ 上的一个有理二形式 $\omega_{\mathcal{Y}}$。由 $\omega_{\mathcal{Y}}$ 定义的除子（典范除子），与由无穷远曲线 $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}'$ 定义的除子互为相反数（更准确地说，这条曲线是 $\omega_{\mathcal{Y}}$ 的极除子）。

我们将介绍仿射塞格雷曲面上一种非退化正则 2-形式的定义思路，它有望定义辛结构。（从某种意义上说，这仿照了 Fricke 曲面情形下通过 Poincar´e 留数构造辛形式的方法。）为简化记号，我们在复数域 $\mathbb{C}^4$, 上使用坐标 (x_1,x_3,x_3,x_4)；记 f_1, f_2 为定义这两个二次曲面的二次多项式，并记 $S = V(f_1, f_2)$ 为仿射塞格雷曲面。令 $\Omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$。由于 (f_1, f_2) 是一个完全交，我们可以将符号 $\left[\frac{\Omega}{f_1 f_2}\right]_1$ 与一个 (4, 2) 流 $R := \mathrm{Res}_{f_1 f_2}\left[\frac{\Omega}{f_1 f_2}\right]_1$ 联系起来，该流定义在复数域 $\mathbb{C}^4$ 上（参见 [34]，引理 17[38]）。我们可以将此流 R 写为 $= \omega \wedge [S],$，其中 ω 是一个有理二形式，而 $[S]$ 是 S 上的 (2, 2) 积分流。ω 在 S 上的限制 ω_S 是正则且非退化的。这个 2-形式就是我们为 S[39]上的辛形式提出的候选形式。

7. 推广到村田列表中的方程。自然地，我们可以尝试将[40] [32] 以及本文的一些结果推广到方程 $q-P(A_2)$，以及村田列表 [26][41]中 $q-P(A_3)$ 以下的方程。在 $q-P(A_3)$ 以下的方程情形中，0 或 ∞ 处似乎会出现不规则性，因此有必要将 q-Stokes 乘子加入单值化数据。在微分情形中，所有 Painlev´e 特征簇都是仿射三次曲面。类比之下，

[36]关于最后一种情况，参见 [16], 4.2.[37]它在方程作用下不变，其极点集为例外除子 [35].[38]这类留数是对 [11], 5 中研究的留数的推广。[39]利用 $\Omega = \omega \wedge d f_1 \wedge d f_2,$，可以在 S 上轻松地进行代数计算。[40]Anton Eloy 在其 2016年 学位论文《q-差分方程的分类与几何：q-Painlevé 的整体研究、非等谱分类及任意斜率的 Stokes 现象》中迈出了第一步。该论文可在以下网址找到：https://www.theses.fr/2016TOU30223，研究的情形包括 $q-P(A_4) = q\text{-}P_V$、$q-P(A_5)$ 和 $q-P(A_6)$。[41]对于方程 $q-P(A_0^*)$ 和 $q-P(A_1)$，Murata 没有给出 Lax 对。

Yousuke Ohyama 最近提出了[42] 以下问题：q-Painlev´e 方程的其他单值化流形是否为塞格雷曲面？我们认为答案可能是否定的。正如 H. Sakai 所指出的，在 q-差分情形中，$q\text{-}P_{VI} = q - P(A_3)$“并非核心”：村田列表中还有比它更高阶的 q-差分方程。我们引用 [16]：“我们还注意到，Chekhov 等人 [7] 猜想，Sakai 分类体系[35] 中高于 $q\text{-}P_{VI}$的 q-Painlev´e 方程，其单值化流形是次数为三的显式仿射德尔佩佐曲面”（参见表 4）。相反，我们认为，对于 $q - P(A_3)$ 以下的方程，单值化数据空间是（奇异）仿射塞格雷曲面。
单值化数据空间上的直线最多似乎为 21 条。我们猜测，对于上述曲面，在参数的一般值下，直线的数量如下：$q - P(A_3) : 21$，$q - P(A_0^*) : 18$，$q - P(A_1) : 18$，$q - P(A_2) : 16$。

我们猜想，Murata 列表中的所有 q-Painlev´e 方程的单值化数据空间都是仿射的，并且具有满足文献 7 中猜想的辛形式（参见下文 13）。

8. 不同的 Lax 对。对于给定的 Painlev´e ´方程（更一般地，对于给定的初始数据空间），可能存在多个 Lax 对。在微分情形中，大多数 Lax 对可通过中间卷积、拉普拉斯变换或变量替换相互关联。一个经典例子是 P_{VI}：

- $Y' = A(x,t)Y$，其中 A 的秩为二，且有四个正则奇点：0、1、t ∞；该系统是福克斯系统；
- $Y' = (A + B/x)Y$，其中 A、B 的秩为三，且 $A = \mathrm{diag}(0,1,t)$，该系统是不规则的。

这两个 Lax 对“通过拉普拉斯变换等价”。对于微分 P_V， [19]中有一个类似的例子。

对于 q-差分情形， [15] 中研究的方程 $q\text{-}P_{IV}$ 由一个线性福克斯系统定义。它是 [32], I.3.1 中引入的系统的一个特例，其中 A(x,t) 关于 x 的次数为 3。但这个方程是村田列表中的一个方程 $q - P(A_5)$，而在 Murata 的 Lax 对中，A(x,t) 关于 x 的次数为 2，且是不规则的。这两个初始数据空间相同，但 Painlev´e 方程不同，二者之间的等价关系并不显然。

每个 Lax 对都会给出一个单值化数据空间。目前尚不清楚这些空间上的“自然代数结构”是否与选择[43]无关。

9. 特征簇。若能将单值化数据空间表述为某些“基本群”（或群胚）的表示（模等价），将会很有意思。这与理解“中间奇点”有关，参见[32]的结论。这或许有助于理解辛结构。

10. 合流。合流有几种类型。

[42]讲座：Painlev´e 方程的整体分析；会议：Painlev´e 方程：从古典到现代分析，2022年10月26日，IRMA，斯特拉斯堡。[43]由 GAGA 关联的解析空间是同构的。

(a) Murata 列表中的合流。Murata 的退化模式（参见 [26], 表 2）是 Ohyama-Okumura 合流图式的 q-类比， [31]而 Murata 描述了从 $q-P(A_3)$ 出发的合流。在微分情形中，Martin Klimes 发现，合流 $P_{VI} \to P_V$ 可以转化为从一个特征簇到另一个特征簇的双有理辛映射： $\chi_{VI} \to \chi_V$ （参见 [19] 以及 E. Paul 和 J.P. Ramis 于 2022年 提交的文章《第五 Painlev´e 叶状结构的动力学》），Klimes-Paul-Ramis 猜想，Ohyama-Okumura 合流图式中的所有合流也都如此 [31]。自然可以猜想，Murata 列表中的单值化数据空间也会出现类似现象。由三次曲面和塞格雷曲面组成的一个族中，可能会出现一系列双有理变换。

在微分情形中，可以从线性化 Painlev´e 方程的野基本群胚之间非常简单自然的映射推导出双有理映射（参见 E. Paul 和 J.P. Ramis 上文提到的已投稿文章）。因此，q-类比的问题可以与将单值化数据空间解释为某些“q-野群胚”的表示空间联系起来。不过，也许可以直接使用 [36]。

(b) q-P_{VI}向 P_{VI}的合流。Jimbo-Sakai 描述了当 $q \to 1$ 时，q-P_{VI}向 P_{VI}的合流（参见 [13], 5）。这似乎很难转化为双有理映射：合流会使直线的数量增加。

11. 差分方程。Sakai列表中也包含差分方程。借助 Birkhoff[3], ，可以为这类方程定义单值化数据空间。一个例子是与 Birkhoff 所研究的 [32], 中的族（1.1）类似的差分族。可以尝试在这类空间上赋予几何商结构（至少在某些情况下，例如 [1] 中的方程），并检验它是否同构于一个仿射德尔佩佐曲面。

12. 椭圆方程。根据 H. Sakai 的说法，“老大”是其分类中位于最顶端的方程 $A_0^{(1)}$ 。这是一个椭圆方程（参见 [35], 7.4, [17], 5.5, [14], 以及 Nalini Joshi 在悉尼大学发表的预印本《椭圆差分型 Painlev´e 方程》）。据我们所知，这个椭圆方程的单值化数据空间尚未得到定义[44]。利用 Igor Krichever 的一些结果，似乎可以对其进行定义 [20]。在 [7],中，作者猜想椭圆 Painlev´e 方程的单值化数据空间是一个三次仿射del Pezzo曲面（参见表 4 第一行）。根据他们的描述，该曲面没有无穷远直线，因此我们预期这个仿射曲面上有 27 条直线 [45]。

13. 猜想 我们（大胆地）将 [7] 的猜想 7.1 扩展为以下猜想，适用于所有椭圆型及乘法型/加法型 Painlev´ 方程。

对于这些方程，Sakai 扩展了 Okamoto 对初始条件空间的定义，并定义了冈本对。这样的一个冈本对（S Δ）包含一个广义 Halphen 曲面[46]S 以及一个满足某些条件的反典范除子 Δ。特别是，存在一个

[44]在所有其他情形中，这可由 Birkhoff 的工作 [3] 得出。[45]他们对无穷远超平面的选择似乎令人费解。[46]也就是说，在非一般位置的复数域 P^2(复数域) 中爆破 9 个点。

有理二形式 ω_S，其在 $S \setminus \Delta$ 上的限制是一个辛形式。于是，黎曼-希尔伯特对应[47] 将一个冈本对对应到一个 Looijenga 对（Y ˜X），其中：

- Y 是一张（可能奇异的）德尔佩佐曲面；˜
- X 是 Y 的“无穷远除子”，它是 Looijenga 意义下的反典范循环（参见 [21], 引言）；
- 仿射曲面[48] $Y \setminus \tilde{X}$ 是带有代数商结构的单值化数据空间[49]；
- 与 Looijenga 对相关联的是一个有理二形式 ω_Y，其在 $Y \setminus \tilde{X}$ 上的限制是一个辛形式50，它由广义留数定义（相差一个复数域 $\mathbb{C}^*$中的比例因子）；
- 黎曼-希尔伯特对应诱导出一个从 $S \setminus \Delta$ 到 $Y \setminus \tilde{X}$ 的满的真解析映射，而二形式 ω_S 是二形式 ω_Y 在此映射下的拉回（相差一个比例因子）。

对于经典 Painlev´é 方程（微分情形），上述猜想成立（Δ 是定义哈密顿结构的辛形式的极除子）。在每种情形中，曲面 Y 都是三次曲面，无穷远除子 X 是一个三角形。在 P_{VI} 情形下（对所有参数值），三角形的顶点都是 Y 的光滑点；但沿 Ohyama-Okumura合流图式向右移动时，光滑顶点可能变成奇异点，奇异顶点也可能变得“更加奇异”。这种现象正是合流的导子[51] （参见 J.-P. Ramis 在斯特拉斯堡 Painlev´é 方程会议上所作的讲座“Painlev´é 方程特征簇上的典范动力学”，该会议于 2022年10月举行，以纪念 Yousuke Ohyama）。

在 [7], 与 Painlev´e 方程相关的情形中，只出现三次德尔佩佐曲面。（对于 $A_0^{(1)}$、$A_0^{(1)*}$ 的情形，无穷远除子是不可约有节点曲线；对于 $A_1^{(1)}$、$A_2^{(1)}$ 的情形，它是一个三角形。）对于 q-P_{VI} ($A_3^{(1)}$)，会出现四次曲面。我们不知道是否会出现其他次数的曲面。Painlev´e 方程（经典或离散）的单值化数据空间上直线的最大数量似乎是 27。

参考文献

[1] D. Arinkin 和 A. Borodin。《d-联络的模空间与差分 Painlev´e 方程》。Duke Math. J., 134(3):515–556, 2006。

[2] 克洛德·贝尔热。《图论》。由 Alison Doig 根据1958年的法文版译出。纽约州米尼奥拉：多佛出版社，1962年首版英文版的第2次印刷，2001年。

[47]在某些情况下，有必要将斯托克斯型元素添加到单值化数据中，并考虑对应的野版本。[48]从某种意义上说，它是一个仿射卡拉比-丘曲面。[49]参数的一般值对应一个良商。[50]但若存在奇点，则奇点处除外。[51]显式计算很容易。

[3] George D. Birkhoff. 线性微分方程的广义黎曼问题，以及相关的线性差分方程和 q- 差分方程问题。《 Proc. Amer. Acad. 》，49:521–568，1913 年。[4] Armand Borel.《线性代数群》，数学研究生教材第126卷。纽约等地：施普林格出版社，第2版（增订版），1991年。[5] Nicolas Bourbaki. ´El ´éments de math ´ématique. Alg` èbre commutative. Chapitres 8 et 9. 柏林：施普林格出版社，1983年原版的重印本，2006年。[6] Michel Brion.《代数群作用导论》，2009年。[7] Leonid Chekhov、Marta Mazzocco 和 Vladimir Rubtsov。量子化的 Painlev´é 单值化流形、Sklyanin 代数与 Calabi-Yau 代数。《Adv. Math.》，376:53，2021年。编号：107442。[8] Igor Dolgachev.《不变量理论讲义》，伦敦数学学会讲义丛书第296卷。剑桥：剑桥大学出版社，2003年。[9] Igor V. Dolgachev.《经典代数几何：一种现代观点》。剑桥：剑桥大学出版社，2012年。[10] Jean-Marc Dr´ézet. Luna 切片定理及其应用。载于《代数群作用与商空间：代数几何第23届秋季学校讲义》，波兰 Wykno，2000年9月3日至10日，第39–89页。开罗：Hindawi 出版公司，2004年。[11] Phillip Griffiths 和 Joseph Harris.《代数几何原理》。纽约州纽约市：John Wiley & Sons Ltd.，第2版，1994年。[12] James E. Humphreys.《线性代数群》。第2次印刷修正版，数学研究生教材第21卷。施普林格出版社，Cham，1981年。[13] Michio Jimbo 和 Hidetaka Sakai。第六 Painlev´é 方程的 q-类比。《Lett. Math. Phys.》，38(2):145–154，1996年。[14] Nalini Joshi 和 Nakazono Nobutaka。《椭圆差分 Painlev´é 方程综述》（arxiv 1902.07842v1），2019年。[15] Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen。关于 q-差分 Painlev´é 方程的黎曼-希尔伯特问题。《数学物理通讯》，384(1):549–585，2021年。[16] Nalini Joshi 和 Pieter Roffelsen。关于 q-Painlev´é VI 的单值化流形及其黎曼-希尔伯特问题（arxiv 2202.10597），2022年。[17] K. Kajiwara、M. Noumi 和 Y. Yamada。Painlev´é 方程的几何方面（arxiv 1509.08186v8），2017年。[18] G. Kempf、F. Knudsen、D. Mumford 和 Bernard Saint-Donat。《环面嵌入 I》，数学讲义第339卷。施普林格出版社，Cham，1973年。

[19] Martin Klimes. 第五Painlevé方程的野单值及其在野特征簇上的作用：一种合流方法（arxiv 1609.05185），2022年。[20] I. M. Krichever. 具有有理和椭圆系数的差分方程解析理论及黎曼-希尔伯特问题。《俄罗斯数学评论》，59(6):1117–1154，2004年。[21] Eduard Looijenga. 带有反典范循环的有理曲面。《数学年刊》(2)，114:267–322，1981年。[22] Domingo Luna. 切片。《法国数学会通报》，增刊，回忆录，33:81–105，1973年。[23]Takuro Mochizuki. 双周期单极子与 q-差分模（arxiv 1902.03551），2019年。[24] David Mumford. 代数几何。I：复射影簇。《经典数学》。柏林：施普林格出版社，1976年更正后的第2次印刷版重印，1995年。[25] David Mumford. Tata θ 函数讲义。II：雅可比 θ 函数与微分方程。与 C. Musili、M. Nori、E. Previato、M. Stillman 和 H. Umemura 合作。《现代 Birkhäuser 经典著作》。巴塞尔：Birkhäuser，重印1984年版，2007年。[26] Mikio Murata. q-Painlevé方程的 Lax 形式。《物理学杂志 A：数学与理论》，42(11):17，2009年。编号 115201。[27] P. E. Newstead. 模问题与轨道空间导论讲义，《数学物理讲义》，数学，塔塔基础研究院，第51卷。施普林格，柏林；塔塔基础研究院，孟买，1978年。[28] P. E. Newstead. 几何不变理论。载于《模空间与向量丛：致敬 Peter Newstead》，第99–127页。剑桥：剑桥大学出版社，2009年。[29] Tadao Oda. 环面嵌入及其应用讲义。（基于与 Katsuya Miyake 的合作成果。）《数学物理讲义》，数学，塔塔基础研究院，第58卷。施普林格，柏林；塔塔基础研究院，孟买，1978年。[30] Tadao Oda. 凸体与代数几何：环面簇理论导论。《数学与其边界领域成果》，第3辑，第15卷。柏林等地：施普林格出版社，1988年。[31] Yousuke Ohyama 和 Shoji Okumura. 从等单值变形的角度看 Painlevé 方程的合并图。《物理学杂志 A：数学与一般》，39(39):12129–12151，2006年。[32] Yousuke Ohyama、Jean-Pierre Ramis 和 Jacques Sauloy. Jimbo-Sakai 族 q-差分方程的单值化数据空间。《图卢兹科学学院年刊：数学》(6)，29(5):1119–1250，2021年。[33] V. L. Popov 和 Eh. B. Vinberg. 不变量理论。代数几何。IV：线性代数群、不变量理论，《数学科学百科全书》55，123–278（1994）；译自《科学与技术成果》，《现代数学问题丛书》，《基础方向》55，137–309（1989），1989年。

[34] Jean-Pierre Ramis 和 Gabriel Ruget. 留数与对偶。《数学发明》，26:89–131，1974年。[35] Hidetaka Sakai. 与仿射根系相关的有理曲面及 Painlevé 方程的几何。《数学物理通讯》，220(1):165–229，2001年。[36] Jacques Sauloy. 奇异正则 q-差分系统：分类、连接矩阵与单值化。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），50(4):1021–1071，2000年。[37] Jacques Sauloy. 福克斯型 q-差分方程的伽罗瓦理论。《高等师范学校科学年刊》(4)，36(6):925–968，2003年。[38] Jean-Pierre Serre. 代数几何与解析几何。《傅里叶研究所年刊》，6:1–42，1956年。[39] T. A. Springer. 线性代数群。代数几何 IV：线性代数群、不变量理论，《数学科学百科全书》55，1–121（1994）；译自《科学与技术成果》，《现代数学问题丛书》，《基础方向》55，5–136（1989），1989年。[40] T. A. Springer. 线性代数群。《现代 Birkhäuser 经典著作》。巴塞尔：Birkhäuser，重印1998年第2版，2009年。