arXiv:2301.04111v1 [math.NA] 10 Jan 2023

自适应 Quarklet 树近似

Stephan Dahlke*、Marc Hovemann*、Thorsten Raasch† 和 Dorian Vogel*

2023年1月11日

摘要。本文研究如何利用多项式增强小波框架（即所谓的 Quarklet 框架）中的元素，对给定函数$f \in L_2([0,1])$进行近乎最优的逼近。受 Binev 的 hp-逼近技术启发，我们利用框架元素的底层树结构，推导出一种自适应算法。在关于局部误差的标准假设下，该算法可针对给定基数生成逼近，其误差接近最佳树逼近误差。我们通过数值实验验证了这些结论，结果表明，该方法可实现逆指数收敛率。

Ma数学主题分类（2020年）：41A15、42C40、65D07、65D15、65T60。

关键词：自适应数值算法、hp 加密、近乎最佳近似、Quarklet 分解、基于树的算法、小波。

1 引言

科学、工程和金融领域的许多问题都可以建模为偏微分方程。未知解通常没有闭式表达，因此，用于构造性逼近未知解的数值格式是不可或缺的工具。最常用的方法是有限元方法（FEM）。经典的 h-FEM 依赖于对所研究区域进行空间细化。另一种方法是提高试探函数的多项式次数，这称为 p-方法。也可以将两者结合起来，即所谓的 hp-FEM。为了处理大型实际问题，采用能够提高整体效率的自适应策略至关重要。其目标是在合理的时间内获得令人满意的逼近。原则上，自适应算法是一种迭代策略，用于识别当前逼近仍与精确解相差甚远的区域，并且只在这些区域进行细化（多项式增阶）。尤其是关于自适应 h-FEM，已有大量文献，我们请参阅 [11, 20, 24, 25]。如今，自适应 p-和 hp-方法的收敛性分析日益成为研究重点。这些格式收敛非常快，甚至常常呈指数收敛。然而，关于理论分析以及有无收敛速率的严格收敛证明，直到最近才出现少数研究结果。据我们所知，关于

本研究得到德国研究联合会（DFG）资助，资助编号为 DA360/24 - 1 和 RA2090/3 -1。

*马尔堡菲利普大学数学与计算机科学系，Hans-Meerwein Str. 6, Lahnberge, 35043 马尔堡，德国，电子邮箱：dahlke@mathematik.uni-marburg.de, hovemann@mathematik.uni-marburg.de, vogeldor@mathematik.uni-marburg.de。

†锡根大学数学系，瓦尔特-弗莱克斯街3号，德国锡根57068，电子邮箱：raasch@mathematik.uni-siegen.de。

hp-自适应策略收敛性的最新成果见 [2, 7, 18, 19] 和 [8, 9], ，其中包括最优性结果。

另一种方法是使用小波。小波的优势在于具有很强的分析性质，借助这些性质可以推导出自适应格式，并保证其以最佳 N 项小波逼近的最优收敛阶收敛 [12, 27]。只要所研究问题的精确解能够由 N 小波的线性组合逼近，且误差与 N^{-s} 成正比，其中 $s > 0$ 为逼近率，自适应小波格式就能够达到这一逼近率 s。这些格式本质上是空间细化方法，因此可归类为 h 方法。那么，一个很自然的问题是，是否存在自适应小波方法的 hp 版本？此时，夸克小波的概念便派上了用场。这类多项式增广小波于过去十年间被引入，参见 [16]。它们由双正交、紧支撑的 Cohen-Daubechies-Feauveau 样条小波构造而成，其原始生成元为基数 B 样条。关于这类双正交小波的理论，参见 [14] 中的第 6.A 节。粗略地说，夸克小波是若干平移后的基数 B 样条与某个单项式相乘后所得函数的线性组合。其精确定义见定义 2.2。夸克小波的性质已在 [15, 17, 21, 22] 中进行了研究。特别是，它们可用于设计类似于自适应小波方法 hp 版本的格式。此外， [17] 中还证明，可以利用夸克小波直接逼近椭圆边值问题在多边形区域上出现的某些模型奇异性，且误差以 $e^{-\alpha N^{\beta}}$ 的速度指数衰减，其中 α、 $\beta > 0$ 满足相应条件。我们的长期目标是设计一种基于夸克小波求解偏微分方程的自适应方案，并证明其收敛且达到最优（指数）速率。本文可视为朝这一目标迈出的又一步。

大多数力求实现最优性的自适应格式都有一个共同特点。为了确保最优复杂度，它们需要交替进行细化和反细化步骤。 [8] 的第 1.1 节给出了一个例子来说明这一点。这种反细化过程有时称为粗化。其主要思想可概括如下。考虑一个函数，例如，它可以是偏微分方程未知解的当前逼近，并表示为试探系统中若干元素的线性组合。现在，我们以接近最优收敛阶的速率，在某个容差范围内逼近该函数。这些粗化后的逼近通常不如原函数精确，但它们在精度和自由度之间实现了最优平衡，进而可用于保证整个方案的最优性。针对 hp-FEM，Binev 最近在 [4] 中开发了一种能够提供合适逼近的例程。其中，hp-自适应逼近被表述为树上的一个逼近问题，叶节点集合起到局部细化网格的作用，并且为每个叶节点指定一个多项式次数 $p \geq 1$ 。本文将在夸克小波框架下设计一个类似的例程。因此，为了成功开展理论分析和实际计算，需要对哪些夸克小波可以同时使用提出一定的结构要求。这一约束同样以树结构的形式出现。然而，这与经典的 hp-网格有一个重要区别。在夸克小波情形下，叶节点的祖先（即所谓的内部节点）仍会积极参与逼近。因此，我们不仅需要为叶节点集合指定多项式次数，也需要为所有内部节点指定多项式次数。如何正确处理这一问题并非平凡。

本文将着手解决这一任务，并引入一种在理论和实践中均适用的夸克小波树概念。我们以 [4] 中发展的理论为起点，构造 NEARBEST TREE 算法。对于给定的函数 $f \in L_2([0,1])$

该算法生成基数为 $\#T_N \lesssim N$ 的夸克小波树 T_N，并已证明这些树是近最优的。具体而言，树 T_N 中夸克小波的线性组合能够为 f 提供逼近，其全局误差接近基数为 $n \leq N$ 的最优树所达到的误差；主要结果见定理 3.7。此外，我们的数值实验表明，对于一些自然的单变量测试案例，使用这一算法确实可以实现指数收敛率。作者相信，NEARBEST TREE 可作为自适应夸克小波方案的构建模块，用于求解偏微分方程，并且可以证明该方案以接近最优（指数）收敛率的速度收敛。

本文结构如下。第 2 节回顾将夸克小波框架视为多项式增强小波基的基本思想，并介绍相应的树结构。接着，在第 3 节中，我们证明可以调整 [4] 中的构造，使其适用于夸克小波框架。特别地，我们可以构造一种算法，生成近最优树逼近。最后，在第 4 节中，我们介绍一种将该算法应用于实践的方法，并进行一些初步数值实验。

在结束引言之前，我们先约定一些记号。用 c、C、C_1、C_2、... 表示正的常数。除非另有说明，它们仅依赖于固定参数。写作 $a \sim b$ 时，表示存在常数 $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ 使得 $a \leq C_1 b \leq C_2 a$。

2 quark 与夸克小波

2.1 实数轴上的夸克小波

本节定义 quark 和夸克小波。为此，首先回顾基数 B 样条的定义。基数 B 样条定义如下：$N_1 := \chi_{[0,1)}$ 并且对于$m \in \mathbb{N}$，利用卷积 $m \geq 2$ 递归定义

$$N_m := N_{m-1} * N_1 = \int_0^1 N_{m-1}(\cdot - t)dt.$$

下文中，对于固定的 $m \in \mathbb{N}$，我们将使用对称化基数 B 样条$\varphi(x) := N_m(x + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$。我们注意到 $\operatorname{supp} \varphi = [-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lceil \frac{m}{2} \rceil]$。对称化基数 B 样条出现在所谓 quark 的定义中。

定义 2.1。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbb{N}_0$。则第 p 阶基数 B 样条 quark φ_p 定义为

$$\varphi_p(x) := \Big(\frac{x}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}\Big)^p N_m\Big(x + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\Big).$$

定义夸克小波时，quark 对我们非常重要。其性质已在 [16] 中研究。对于给定的 $\tilde{m} \in \mathbb{N}$，满足 $\tilde{m} \geq m$ 且 $m + \tilde{m} \in 2\mathbb{N}$，存在一个紧支撑样条小波 ψ，使得

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(2 \cdot - k) \tag{2.1}$$

其展开系数为 $b_k \in \mathbb{R}$。其中只有有限个系数不为零。此外，ψ具有 $\tilde{m}$ 个消失矩，该系统

$$\Big\{\varphi(\cdot - k) \,:\, k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k) \,:\, j \in \mathbb{N}_0 \,,\, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

是 $L_2(\mathbb{R})$ 的 Riesz 基。关于 ψ 的构造细节，请参阅 [14]，尤其是第 6.A 节。我们使用这些 Cohen-Daubechies-Feauveau（CDF）样条小波ψ 来定义夸克小波。

定义 2.2。设 $p \in \mathbb{N}_0$。则第 p 个夸克小波 ψ_p 定义为

$$\psi_p := \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \varphi_p(2\cdot - k).$$

这里的 b_k 与(2.1)中的相同。此外，对于 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们记作

$$\psi_{p,j,k} := 2^{\frac{j}{2}} \psi_p(2^j \cdot - k) \qquad and \qquad \psi_{p,-1,k} := \varphi_p(\cdot - k).$$

可以证明，quark 和夸克小波分别继承了 B样条和 B样条小波的一些重要性质。特别地，可以证明 Jackson 估计和 Bernstein估计，并且夸克小波具有相同数量的消失矩。关于这一主题的详细内容，请参阅 [16]。适当加权的夸克小波系统构成函数空间的稳定表示系统（所谓的框架），例如勒贝格空间L_2(ℝ)或 Sobolev 空间 H^s(ℝ)，其中 $0 \le s < m - \frac{1}{2}$。甚至更为复杂的空间，如 Besov 空间或 Triebel-Lizorkin 空间，也可以用夸克小波来刻画，参见 [26] 和 [21]。为方便读者，我们将回顾框架的基本定义，并给出一种替代性刻画。关于框架主题的详细综述，请参阅 [10]。

定义 2.3。设 Λ 为一个可数指标集， H 为一个带有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ 的希尔伯特空间。若存在常数 A、$B > 0$，使得对所有 $f \in H$ 都有

$$A\|f\|_H^2 \le \|\{\langle f, f_\lambda\rangle_H\}_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_2(\Lambda)}^2 \le B\|f\|_H^2.$$

命题2.4。系统 $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ 是 H 的框架，当且仅当 clos$_H$(span($\mathcal{F}$)) $= H$，并且对所有 $f \in H$ 都有

$$B^{-1}\|f\|_H^2 \le \inf_{\{\mathbf{c}\in\ell_2(\Lambda): f=\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda f_\lambda\}} \|\mathbf{c}\|_{\ell_2(\Lambda)}^2 \le A^{-1}\|f\|_H^2. \tag{2.2}$$

命题2.4 的证明可见于 [28], ，参见命题 2.2。与 Riesz 基不同，框架允许存在冗余性。这里我们陈述 L_2（ℝ）中夸克小波的框架性质，参见 [16] 中的定理3。

定理 2.5。设权重 $w_p \ge 0$ 的选取满足 $w_0 = 1$，且 $w_p\ (p+1)^{-1/2}$ 可求和。则，系统

$$\Psi_{Q,w} := \{w_p \psi_{p,j,k} : p \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}, k \in \mathbb{Z}\},$$

构成 L_2(ℝ) 上的一个框架。

注 2.6。也可以在包含于 $\mathbb{R}^d$ 中的相当一般的区域上构造 Quarklet 框架。使用边界适配夸克小波即可实现这一点。有关详情，请参阅 [15]。

2.2 树结构指标集

本节将介绍树结构指标集。因此，首先回顾小波指标的概念。用 Ψ_0 表示所有小波的集合

$$\Psi_0 := \{\psi_{0,j,k} : j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}, k \in \mathbb{Z}\}$$

并令 Λ_0 为所有小波指标的集合

$$\Lambda_0 \coloneqq \{(j,k) : j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

因此，一对 $\lambda = (j,k) \in \Lambda_0$ 被称为小波指标。这些指标可以与参考区间相匹配。为此，我们定义二进区间 $I_{j,k} \coloneqq 2^{-j}[k, k+1)$。显然，每个区间 $I_{j,k}$ 都对应一个小波指标（j,k），反之亦然。这些区间 $I_{j,k}$ 具有一些特殊性质，这些性质对我们之后的讨论非常重要：

(i) 对所有（j,k）$\in \Lambda_0$，存在一个与 j 和 k 无关的常数 $c > 0$，使得 $\operatorname{supp}\psi_{0,j,k} \subset cI_{j,k}$。换句话说，每个区间 $I_{j,k}$，以及因此每个指标（j,k），都可以与一个小波 $\psi_{0,j,k}$ 相关联，反之亦然。

(ii) 对固定的 $j \in \mathbb{N}_0$，区间 $I_{j,k}$ 构成 $[0,1)$ 的不交划分，即 $\bigcup_{k=0}^{2^j-1} I_{j,k} = [0,1)$。此外，设 $j_1 \in \mathbb{Z}$ 和 $k_1 \in \mathbb{Z}$ 固定。令 $j_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $j_2 > j_1$。那么存在 $2^{j_2-j_1}$ 个区间 $I_{j_2,k}$，使得存在如下不交划分 $\bigcup_k I_{j_2,k} = I_{j_1,k_1}$。

(iii) 区间 $I_{j,k}$ 彼此嵌套。每个区间 $I_{j,k}$ 都是下一更高层级的两个区间的不交并，即

$$I_{j,k} = I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,2k+1} \qquad \text{and} \qquad I_{j+1,2k} \cap I_{j+1,2k+1} = \emptyset.$$

我们称 $I_{j+1,2k}$ 和 $I_{j+1,2k+1}$ 是 $I_{j,k}$ 的子节点。反过来，$I_{j,k}$ 是 $I_{j+1,2k}$ 和 $I_{j+1,2k+1}$ 的父节点。

(iv) 结合 (ii) 和 (iii) 可知，还可以使用不同的 $j_i > j$ 对 $I_{j,k}$ 进行不交划分。在此情形下，还可以通过逐步将划分中的一个区间拆分成更细层级的两个区间，生成 $I_{j,k}$ 的划分序列。由此得到的划分彼此嵌套。

注意，每个指标 (j,k) 恰有两个子节点（指标），即 $(j+1, 2k)$ 和 $(j+1, 2k+1)$。因此，使用区间 $I_{j,k}$ 的概念自然地引出了祖先—后代关系。因此，对于指标 $\lambda = (j_1, k_1) \in \Lambda_0$ 和 $\mu = (j_2, k_2) \in \Lambda_0$，若有 $I_{j_1,k_1} \subsetneq I_{j_2,k_2}$，，我们将使用以下记号

$$\lambda \succ \mu$$

并称 λ 是 μ 的后代。反过来，我们称 μ 是 λ 的祖先。$\lambda \succeq \mu$ 表示 λ 是 μ 的后代或等于 μ。现在，我们有了建立树结构指标集所需的工具。

定义 2.7。设 $\mathcal{T} \subset \Lambda_0$ 是一个指标集。若对所有 $\mu \prec \lambda$，$\lambda \in \mathcal{T}$ 蕴含 $\mu \in \mathcal{T}$，则称集合 $\mathcal{T}$ 为一棵树（由小波指标构成）。

定义 2.8。设 $\mathcal{T} \subset \Lambda_0$ 是一棵树。

(i) 称指标 $\lambda \in \mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}$ 的节点。

(ii) 我们定义

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) \coloneqq \{\lambda \in \mathcal{T} : \eta \notin \mathcal{T} \text{ for all } \eta \succ \lambda\}.$$

$\mathcal{V}(\mathcal{T})$ 的元素称为 $\mathcal{T}$ 的叶节点。集合 $\mathcal{T} \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 表示内部节点。

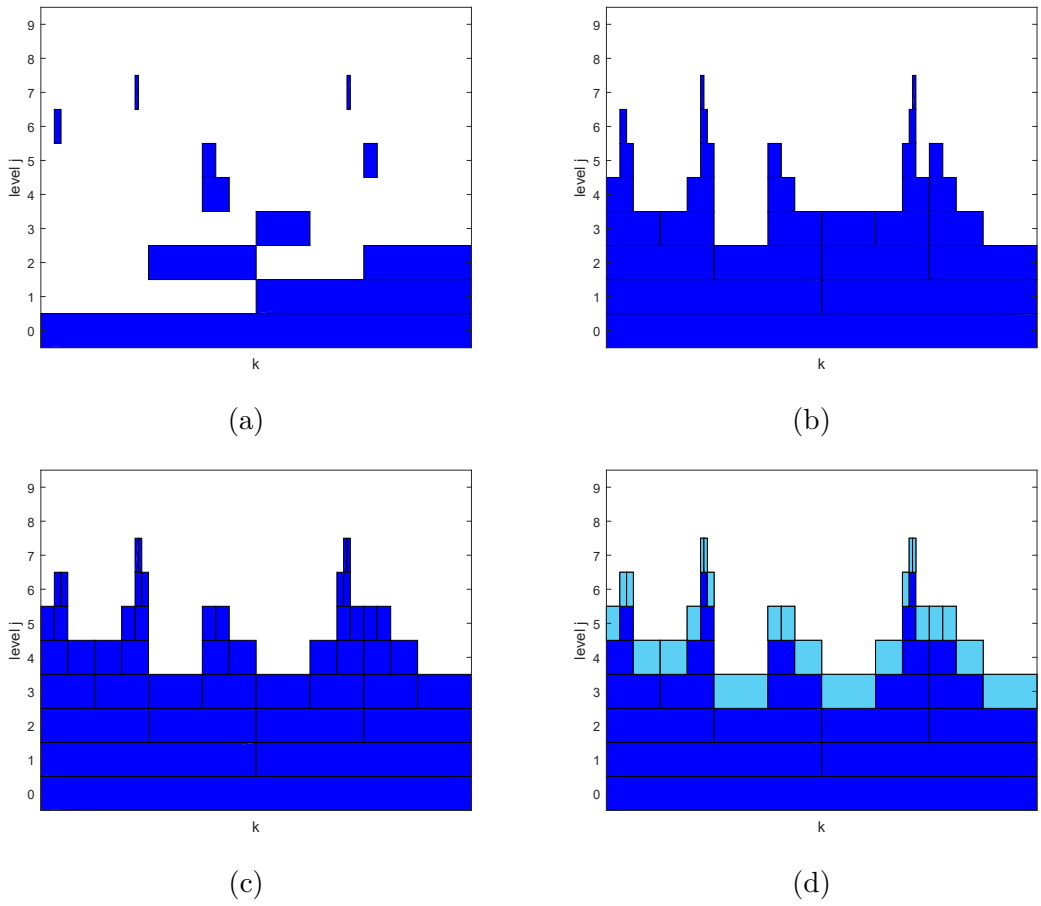


图 1：一个非结构化指标集 (a)、包含该指标集的最小（非完全）树 (b)、对应的完全树 (c)，以及再次展示并突出显示叶节点的同一棵树 (d)。

(iii) 若对于所有 $\eta \in \mathcal{T}$ 均有 $\eta \succeq \lambda$，则称指标 $\lambda \in \mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}$ 的根节点。此时通常记作 $\lambda = \mathcal{R}$。

除非另有说明，我们始终使用完全树。这意味着一个指标$\lambda \in \mathcal{T}$恰好有零个或两个子节点，示意图见图 1。为便于后续使用，我们还将 $\mathcal{J}_\lambda$ 定义为以 $\lambda \in \Lambda_0$为根的无限小波树。

例 2.9。我们上面描述的小波指标概念可用于构造区间的划分序列，并使其形成树结构。例如，考虑 $I = [0,1]$。初始划分就是区间本身，即 $I_{0,\ 0} = [0,1]$，且 $\mathcal{R} = (0,0)$ 是树的根节点。为得到下一个划分，我们将 $I_{0,\ 0}$ 细分为两个更高层级的区间，即 $I_{1,\ 0}$ 和 $I_{1,\ 1}$。这一细分过程可以不断重复，从而得到划分序列。每一步中，我们都会细分当前划分的一个元素，也就是当前树的一个叶节点，并在其下添加两个较小的区间作为新的叶节点。被细分的元素不属于新的划分，但它仍保留在树中，作为一个不再是叶节点的内部节点。在这一过程几乎所有步骤中，我们都有多种选择，可以决定细分当前划分中的哪个区间来得到下一个划分。在我们的例子中，为得到第三个划分，我们可以细分 $I_{1,\ 0}$ 或 $I_{1,\ 1}$。在后续步骤中，可选项会越来越多。这将使我们能够在之后构造自适应算法。

现在我们可以介绍局部空间细化了。为此，设 $\mathcal{T} \subset \Lambda_0$ 是一棵小波树， $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 是一个叶节点。通过将 η_1、 $\eta_2 \in \Lambda_0$ 这两个子节点添加到 λ，树 $\mathcal{T}$ 就得到了细化。这种空间细化可以写作

$$\mathcal{T} \cup \{\eta_1, \eta_2\}. \tag{2.3}$$

当然，这一过程随后可以用另一个叶节点重复进行。

注 2.10. 进一步推广树结构索引集的方法有多种。在某些情况下，为了实现高效实现，这些推广甚至是必要的。例如，可以考虑具有两个以上子节点的细分，或者从多个根节点开始。也可以针对多变量情形进行调整 [13]。

现在，我们将小波指标的概念推广为更高级的夸克小波指标概念。对于每个小波指标 $\lambda = (j,k) \in \Lambda_0$，我们为其匹配第三个参数$p \in \mathbb{N}_0$，从而得到夸克小波指标 (p,j,k)。每个夸克小波指标都对应一个夸克小波 $\psi_{p,\ j,\ k}$反之亦然。我们用 Ψ 表示所有夸克小波的集合

$$\Psi := \{\psi_{p,j,k} : p \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

相应的指标集定义为

$$\Lambda := \{(p,j,k) : p \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

对于给定的夸克小波指标 $\lambda = (p,j,k) \in \Lambda$，我们采用记号 $|\lambda| := j$。此外，我们使用映射 $\circ : \Lambda \to \Lambda_0$，其定义为

$$\lambda \mapsto \lambda^\circ := (p,j,k)^\circ := (0,j,k),$$

它为给定的夸克小波指标提供对应的小波指标。我们也将具有 $(j,k) = (0,j,k)$ 的小波指标视为夸克小波指标。因此，我们有 $\Lambda_0 \subset \Lambda$。

将波浪树 $\mathcal{T} \subset \Lambda_0 \subset \Lambda$ 视为夸克小波指标集合。现在，细化叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 有两种选择。我们总是可以在空间上进行细化，将 λ 的两个子节点小波指标添加到 $\mathcal{T}$ 中，如式 (2.3) 所示。由于现在我们处理的是夸克小波，还可以通过将满足 $p > 0$ 的某些夸克小波指标 (p,j,k) 添加到 $\mathcal{T}$ 中来增加多项式次数。不过，应该添加哪些夸克小波并非平凡问题，见下文注 2.11。为此，我们考虑集合 $\Upsilon(\lambda) \subset \Lambda_0$，使得对于每棵波浪树 $\mathcal{T} \subset \Lambda_0$，所有叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 对应的集合 $\Upsilon(\lambda)$ 之并构成 $\mathcal{T}$ 的不交分解。更准确地说，我们要求 $\Upsilon(\lambda)$ 满足以下性质。

(i) 集合 $\Upsilon(\lambda)$ 具有如下形式

$$\Upsilon(\lambda) = \{\mu \in \Lambda_0 : \lambda \succeq \mu \succeq \mu_\lambda\} \tag{2.4}$$

对于某个固定的 $\mu_\lambda \preceq \lambda$，它与树 $\mathcal{T}$ 无关。

(ii) 对于每棵树 $\mathcal{T}$ 和内部节点 $\lambda \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T})$，其子节点为 η_1、 $\eta_2 \in \mathcal{T}$，均有 $\Upsilon(\eta_1) \cap \Upsilon(\eta_2) = \emptyset$。

(iii) 对于每棵树 $\mathcal{T}$，均有 $\bigcup_{\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})} \Upsilon(\lambda) = \mathcal{T}$。

根据 (i) 中确定节点 μ_λ 的具体规则，可以通过多种方式构造集合 $\Upsilon(\lambda)$。我们将在第 4.2 节介绍其中一种方案，见图 2。借助集合 $\Upsilon(\lambda)$，现在可以引入叶节点的多项式增强。我们提高

$\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 的最大多项式次数，为每个节点 $\mu \in \Upsilon(\lambda)$ 添加带有 $p = 1$ 的夸克小波指标。更正式地，我们可以将叶节点 λ 的这种多项式增强写作

$$\mathcal{T} \cup \bigcup_{\mu=(i,\ell)\in\Upsilon(\lambda)} (p, i, \ell).$$

然后可以对不同的叶节点，或对同一个叶节点和 $p = 2$ 等重复这一过程。

注 2.11。乍看之下，上述构造似乎并不是引入多项式增强最直观的方式。一个直接的想法可能是，仅像 [4] 中那样提高所考虑的树的叶节点上的多项式次数。然而，这样得到的夸克小波集合在实践中往往并不比单纯的小波树表现得显著更好。要充分利用具有较高多项式次数的夸克小波的逼近能力，似乎有必要纳入在不同尺度上且保持祖先—后代关系的夸克小波 $p > 0$。那么，一个很自然的想法就是沿着从叶节点 λ 到根节点的路径，提高每个节点上的最大多项式次数。在这种情况下，集合 $\Upsilon(\lambda)$ 就只是所有 λ 的祖先（包括其自身 λ）。但这意味着集合 $\Upsilon(\lambda)$ 永远不会彼此不相交，因为它们至少都以根节点为共同元素。遗憾的是，这反过来会给第 3 节中的理论分析带来严重问题。

现在我们可以引入夸克小波树了。

定义 2.12. 设 $T \subset \Lambda$ 为一个指标集，并对所有 $\lambda^\circ = (j, k) \in T$ 定义

$$p_{\max}(\lambda^\circ) := p_{\max}(\lambda^\circ, T) := \max\{p \in \mathbb{N}_0 : (p, j, k) \in T\}.$$

如果满足以下条件，则称 T 为一棵树（由夸克小波指标组成）。

(i) 对每个 $\lambda \in T$，对于所有 $\mu^\circ \preceq \lambda^\circ$，都有 $\mu^\circ \in T$。

(ii) 对每个 $\lambda^\circ \in \mathcal{V}(T)$，对于所有 $\mu^\circ \in \Upsilon(\lambda^\circ)$，都有 $p_{\max}(\lambda^\circ) = p_{\max}(\mu^\circ)$。

(iii) 对每个 $\lambda^\circ = (j, k) \in T$，对于所有 $0 \le p \le p_{\max}(\lambda^\circ)$，都有 $(p, j, k) \in T$。

换言之，夸克小波树结构由一个具有树结构的小波指标集构成；此外，该树的节点还扩充了所有次数不超过某个多项式次数的夸克小波。当我们谈到夸克小波树的叶节点、节点或根节点时，始终指的是小波指标。该指标保证属于这棵树，并且可以通过映射 $\circ$从任意夸克小波指标中获取。用$|T|$ 表示任意指标集 T中的小波指标数量。对于夸克小波树 T，我们将其基数定义为树中夸克小波的数量，即

$$\#T := |T| + \sum_{\lambda^\circ\in T} p_{\max}(\lambda^\circ).$$

我们针对小波树 $\mathcal{T}$引入另一个量。对于 $\lambda \in \mathcal{T}$，定义

$$r(\lambda, \mathcal{T}) := |\mathcal{V}(\mathcal{J}_\lambda \cap \mathcal{T})| - 1, \tag{2.5}$$

可以将其解释为创建从 λ 延伸出的 $\mathcal{T}$ 子树所需的细化次数。如果上下文清楚，我们会省略第二个参数。这个量稍后将用于撤销空间细化的某些步骤

而改为采用 $r(\lambda)$ 步多项式增强。

为结束本节，我们将探讨刻画夸克小波树 T 的两种不同方式。第一种方式是考虑一棵小波树 $\mathcal{T}$，然后固定其所有叶节点上的最大多项式次数。为此，我们记

$$P_{\max} \coloneqq \{p_{\max}(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})}.$$

随后，内部节点上的最大多项式次数可由定义 2.12 直接推出。对于所有 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 和 $\mu \in \Upsilon(\lambda)$，我们必须设置 $p_{\max}(\mu) = p_{\max}(\lambda)$，从而得到一棵夸克小波树 T。因此，赋值 $P_{\max}$ 已经确定了所有节点（而不仅仅是叶节点）上的最大多项式次数，我们可以写作 $T = (\mathcal{T}, P_{\max})$。第二种方式是考虑两棵小波树 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$，其中 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$。通过对所有 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 设置 $p_{\max}(\lambda) = r(\lambda, \mathcal{T}')$，子树 $\mathcal{T}$ 可导出一棵夸克小波树 $T = (\mathcal{T}, P_{\max})$。因此，我们也可以写作 $T = (\mathcal{T}, \mathcal{T}') = (\mathcal{T}, P_{\max})$，因为 $P_{\max}$ 由 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 给出。其背后的直观想法是，删除 $\lambda \in \mathcal{T}'$ 的后代节点，并改为在 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 上进行多项式增强。这个过程也称为修剪，之后将用于我们的自适应方案。

2.3 局部误差、全局误差与最佳逼近

如上所述，本文的主要目标是构造一种自适应夸克小波算法，以高效地逼近给定函数。为了说明“高效”的含义，我们需要引入一些误差泛函。首先，对于每个小波指标 $\lambda = (j,k) \in \Lambda_0$ 以及多项式次数 $p \in \mathbb{N}_0$，我们引入局部误差$e_p(\lambda)\colon \Lambda_0 \to [0,\infty)$。我们希望它们满足以下两个非常重要的性质。

(i) 最低阶误差具有次可加性。这意味着，对于带有子节点 η_1 和 η_2 的 $\lambda \in \Lambda_0$，我们要求

$$e_0(\lambda) \geq e_0(\eta_1) + e_0(\eta_2). \tag{2.6}$$

(ii) 通过提高多项式次数可以减小误差，

$$e_p(\lambda) \geq e_{p+1}(\lambda). \tag{2.7}$$

注 2.13. 条件 (2.6) 和 (2.7) 相当一般。尽管如此，局部误差 $e_p(\lambda)$ 可用于在第 3.2 小节中描述一种自适应 Quarklet 算法，并在第 3.3 小节中证明该算法是近最优的。然而，在实际应用中，还需要对误差的形状作出更多限制。对此有不同的选择。令 $I = [0,1]$。一方面，可以为函数 $f \in H^1(I)$ 定义局部误差。第 4.4 节的 [8] 中给出了一个例子。作者使用 hp- 有限元方法求解椭圆问题，并假设未知解属于 Sobolev 空间 $H^1(I)$。另一种选择是，为表示函数 $f \in L_2(I)$ 的 quarklet 系数序列 $\mathrm{c} = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 定义局部误差 $e_p(\lambda)$，见定理 2.5。这种方法似乎适合我们的目的。关于 quarklet 系数序列的局部误差 $e_p(\lambda) \coloneqq e_p(\lambda, \mathrm{c})$，更多细节及其精确定义可见第 4.1 节。

局部误差可用于定义全局误差。对于给定的 quarklet 树 $T = (\mathcal{T}, P_{\max})$，我们将全局误差 $\mathcal{E}(T)$ 定义为

$$\mathcal{E}(T) := \sum_{\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})} e_{p_{\max}(\lambda)}(\lambda). \tag{2.8}$$

它汇集了树中所有叶节点的局部误差。也可以说，它收集了当前划分中所有成员的局部误差。

注 2.14. 值得指出的是，(2.8) 可以有两种不同的理解。一方面，这个等式可以看作全局误差的定义。另一方面，在实际应用中，通常需要全局误差满足额外的要求。例如，它应与残差的范数等价。这样的要求会影响局部误差$e_p(\lambda)$的选择。因此，(2.8) 也可以看作关于局部误差的一个附加条件。

全局误差可用于定义所谓的最佳逼近误差。

定义 2.15. 基数为 $n \in \mathbb{N}$ 的最佳 quarklet 树逼近的误差定义为

$$\sigma_n := \inf_{T=(\mathcal{T}, P_{\max})} \inf_{\#T \le n} \mathcal{E}(T).$$

我们可以将这个最佳逼近误差改写为

$$\sigma_n = \inf_{T=(\mathcal{T}, \mathcal{T}')} \inf_{\#T \le n} \mathcal{E}(T).$$

这启发我们先找到一棵小波树 $\mathcal{T}'$，然后考察所有可能的子树 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$。我们的主要目标是找到一种增量算法，使其对每个$N \in \mathbb{N}$都能生成一棵 quarklet 树 $T_N = (\mathcal{T}_N, \mathcal{T}'_N) = (\mathcal{T}_N, P_{\max})$，且满足 $\#T_N \le CN$，从而在以下意义下提供近最佳 quarklet 逼近

$$\mathcal{E}(T_N) \le C\sigma_{cN}, \tag{2.9}$$

其中常数 $C \ge 1$ 和 $c \in (0, 1]$ 相互独立。换言之，我们要寻找一种算法，使其生成的 quarklet 树逼近的全局误差与~可能达到的最佳误差相当。关于常数 c、C、C的详细讨论，请参见引理 3.4 和注 3.8。

3 自适应细化策略

3.1 自适应细化的误差泛函

为了构造近最优夸克小波算法，我们还需要一些误差泛函以及用于决定在何处细化给定树的指标。我们将分三个步骤介绍它们。第一步，我们考察最低阶局部误差的一种惩罚版本，它可用于设计近最优的空间自适应格式。接着，我们将为同时对空间和多项式次数进行自适应的情形定义一个对应版本。最后，我们将引入两个指标，根据这些信息帮助我们决定在何处细化。这些函数都是专为我们的目的设计的，在算法及其最优性的证明中都发挥着关键作用。

步骤 1：我们需要一个修正的局部误差泛函，记为 $\tilde{e}(\lambda)$，其中 $\tilde{e}(\lambda): \Lambda_0 \to [0,\infty)$。它与最低阶局部误差 $e_0(\lambda)$ 密切相关，并将通过递归方式定义。为方便起见，我们记 $e(\lambda) = e_0(\lambda)$。设 $\mathcal{R}$ 是一棵树的根节点，μ 是 λ 的父节点。然后，我们通过局部误差逐步定义修正误差 $\tilde{e}$，如下所示：

$$\tilde{e}(\mathcal{R}) := e(\mathcal{R}), \qquad \tilde{e}(\lambda) := \frac{e(\lambda)\tilde{e}(\mu)}{e(\lambda) + \tilde{e}(\mu)}. \tag{3.1}$$

在 $e(\lambda) = \tilde{e}(\mu) = 0$ 的情况下，我们令 $\tilde{e}(\lambda) = 0$。与 (3.1) 等价的公式为

$$\frac{1}{\tilde{e}(\lambda)} = \frac{1}{e(\lambda)} + \frac{1}{\tilde{e}(\mu)}.$$

迭代该方程可得以下有用关系

$$\frac{1}{\tilde{e}(\lambda)} = \sum_{\mu \preceq \lambda} \frac{1}{e(\mu)}. \tag{3.2}$$

步骤 2：我们引入一个误差泛函，记为 $E(\lambda)$，其中 $E(\lambda): \mathcal{T} \to [0,\infty)$。它仅对给定的小波树 $\mathcal{T}$ 定义，因此我们有时写作 $E(\lambda) := E(\lambda, \mathcal{T})$。该泛函从树 $\mathcal{T}$ 的叶节点开始递归说明。这里，对于 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$，我们定义

$$E(\lambda) := e(\lambda) = e_0(\lambda).$$

对于树的内部节点，该误差泛函从叶节点向根节点逐步定义。设 η_1 和 η_2 是 λ 的子节点，并假设 $E(\eta_1)$ 和 $E(\eta_2)$ 已定义。此外，回顾一下，$r(\lambda) = r(\lambda, \mathcal{T})$ 由 (2.5) 给出。那么，对于内部节点 λ，我们令

$$E(\lambda) := \min\{E(\eta_1) + E(\eta_2), e_{r(\lambda)}(\lambda)\}. \tag{3.3}$$

这指的是在两种细化类型之间进行自适应选择。

接下来，我们要引入 $E(\lambda)$ 的一个修正版。为此，我们首先注意到，只有当 $r(\lambda, \mathcal{T})$ 发生变化时，扩展树 $\mathcal{T}$才会改变量 $E(\lambda) = E(\lambda, \mathcal{T})$。[4], 中也有类似的观察，见第 3353 页。关于这一主题，还可以找到更多解释，参见注 3.1。我们利用这一观察，考虑一个不断增长的树序列 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots$。这意味着，每棵树 $\mathcal{T}_{k+1}$ 都是通过细分一个叶节点并添加两个子节点指标，从 $\mathcal{T}_k$ 得到的。对于节点 λ 和$j \in \mathbb{N}_0$，可能存在多棵树 $\mathcal{T}_\star$，满足 $\lambda \in \mathcal{T}_\star$ 且 $r(\lambda, \mathcal{T}_\star) = j$，并出现在树序列$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots$ 中。这意味着，从 λ延伸出的子树在所有树 $\mathcal{T}_\star$ 中保持不变，因此量 $E(\lambda, \mathcal{T}_\star)$ 不会改变。利用这一观察，我们可以令 $j \in \mathbb{N}_0$和 $\mathcal{T}_\star$为序列 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots$ 中任意满足 $r(\lambda, \mathcal{T}_\star) = j$ 的树，以定义

$$E_j(\lambda) := E(\lambda, \mathcal{T}_\star). \tag{3.4}$$

以误差泛函 $E_j(\lambda)$ 为出发点，我们现在可以定义修正误差 $\tilde{E}_j(\lambda)$。它们与公式 (3.1) 中说明的误差有一些相似之处。对于 $j = 0$ 我们令 $\tilde{E}_0(\lambda) := \tilde{e}(\lambda)$。对于 $j > 0$ 误差泛函 $E_j(\lambda)$ 通过以下方式递归定义：

$$\tilde{E}_j(\lambda) := \frac{E_j(\lambda)\tilde{E}_{j-1}(\lambda)}{E_j(\lambda) + \tilde{E}_{j-1}(\lambda)}. \tag{3.5}$$

˜ ˜ ˜对于情形 $E_j(\lambda) = E_{j-1}(\lambda) = 0$，我们令 $E_j(\lambda) = 0$。误差泛函 $E_j(\lambda)$ 可以用上文说明过的其他一些误差泛函来重写。我们多次使用˜定义 $E_j(\lambda)$，并代入公式 (3.2)，得到

$$\frac{1}{\tilde{E}_j(\lambda)} = \frac{1}{E_j(\lambda)} + \frac{1}{\tilde{E}_{j-1}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{E_k(\lambda)} + \frac{1}{\tilde{E}_0(\lambda)} = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{E_k(\lambda)} + \sum_{\mu \prec \lambda} \frac{1}{e(\mu)}. \tag{3.6}$$

作为 $E_j(\lambda)$ 的延伸，我们使用 (3.5) 和 $j = r(\lambda)$ 来定义

$$\tilde{E}(\lambda) \coloneqq \tilde{E}(\lambda, \mathcal{T}) \coloneqq \tilde{E}_{r(\lambda)}(\lambda).$$

步骤 3：我们还需要另外两个函数，分别记作 q 和 s。它们与上述定义的误差泛函密切相关。首先定义函数 $q : \mathcal{T} \to [0, \infty)$。对于叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$，它就是修正局部误差，即

$$q(\lambda) \coloneqq \tilde{e}(\lambda) = \tilde{E}_0(\lambda).$$

对于内部节点 $\lambda \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T})$，函数 q 是从 λ 朝叶节点方向递归定义的。令 η_1 和 η_2 表示 λ 的子节点，则定义

$$q(\lambda) \coloneqq \min \left\{ \max\{q(\eta_1), q(\eta_2)\}, \tilde{E}_{r(\lambda)}(\lambda) \right\}. \tag{3.7}$$

粗略地说，可以认为 $q(\lambda)$ 与子树 $\mathcal{T} \cap \mathcal{J}_\lambda$ 所产生的误差有关。现在定义函数 $s : \mathcal{T} \to \mathcal{V}(\mathcal{T})$。它将树中的每个节点映射到该树的一个叶节点。对于叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ 本身，我们只需令

$$s(\lambda) \coloneqq \lambda.$$

对于内部节点 $\lambda \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T})$，函数 s 通过使用函数 q 递归定义。令 η_1 和 η_2 表示 λ 的子节点，则定义

$$s(\lambda) \coloneqq s\left(\operatorname{argmax}\{q(\eta_1), q(\eta_2)\}\right).$$

因此，s 指向所考察子树中惩罚局部误差最大的叶节点。随后，s 在我们的算法中发挥关键作用，因为它告诉我们接下来要细化哪个叶节点。

˜注 3.1. 所有误差泛函 $\tilde{e}(\lambda)$、$E(\lambda)$ 和 $E(\lambda)$ 都基于局部误差$e_p(\lambda)$，见 (2.6) 和 (2.7)。因此，我们对$e_p(\lambda)$的定义方式会直接影响修正误差泛函的形式。

注 3.2. (3.1) 中的修正局部误差可用于制定空间自适应细化策略。事实上，它们已成功应用于算子方程的自适应小波方法和有限元方法中，见 [4], [5], [6] 和 [23]。

3.2 Quarklet 树逼近算法

现在我们可以明确地陈述自适应 Quarklet 算法了。该算法基于局部误差$e_p(\lambda)$以及据此定义的修正局部误差泛函。不失一般性，我们考虑定义在 $I = [0, 1]$上的函数；通过适当的重缩放论证，一般情形可以化归为这一模型设定。作为输入，我们可以使用函数 $f \in L_2(I)$，也可以使用其 Quarklet 展开系数序列。根据$e_p(\lambda)$的定义，符号 f 表示这两种选项之一。

NEARBEST TREE 算法以 f 为输入，并自适应地生成一个仅由小波指标构成的树 $\mathcal{T}'_N$。该树经过专门设计，可以轻松转换为由夸克小波指标构成的树 $T_N = (\mathcal{T}_N, P_{\max}) = (\mathcal{T}_N, \mathcal{T}'_N)$，从而提供近最优的夸克小波树逼近。该算法本身与 [4]中的算法类似。需要说明的是，我们不固定根节点 $\mathcal{R}$ 。不过，在我们的应用中，我们始终使用 $\mathcal{R} = (0, 0)$。

Algorithm. NEARBEST_TREE $[\mathbf{f}, N_{\max}] \mapsto \mathcal{T}'_N$

set $\mathcal{T}'_0 := \{\mathcal{R}\}$, $\tilde{e}(\mathcal{R}) := e(\mathcal{R})$, $E_0(\mathcal{R}) := e(\mathcal{R})$, $\tilde{E}_0(\mathcal{R}) := \tilde{e}(\mathcal{R})$,
$q(\mathcal{R}) := \tilde{e}(\mathcal{R})$, $s(\mathcal{R}) := \mathcal{R}$, $r(\mathcal{R}) := 0$;
`for` $N = 1$ `to` $N_{\max}$
  expand the current tree $\mathcal{T}'_{N-1}$ *to* $\mathcal{T}'_N$ *by subdividing* $\lambda_N := s(\mathcal{R})$ *and*
  adding its children $\hat{\eta}_1$ *and* $\hat{\eta}_2$ *to it;*
  `for` $\lambda \in \{\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\}$
    calculate $\tilde{e}(\lambda) := \frac{e(\lambda)\tilde{e}(\lambda_N)}{e(\lambda)+\tilde{e}(\lambda_N)}$, $E_0(\lambda) := e(\lambda)$, $\tilde{E}_0(\lambda) := \tilde{e}(\lambda)$,
    $q(\lambda) := \tilde{e}(\lambda)$, $s(\lambda) := \lambda$, $r(\lambda) := 0$;
  `end for`
  set $\lambda = \lambda_N$;
  `while` $\lambda \neq \emptyset$
    set $r(\lambda) := r(\lambda) + 1$ *and calculate* $e_{r(\lambda)}(\lambda)$;
    set η_1 *and* η_2 *to be the children of* λ;
    set $E_{r(\lambda)}(\lambda) := \min\{E_{r(\eta_1)}(\eta_1) + E_{r(\eta_2)}(\eta_2), e_{r(\lambda)}(\lambda)\}$;
    set $\tilde{E}_{r(\lambda)}(\lambda) := \frac{E_{r(\lambda)}(\lambda)\tilde{E}_{r(\lambda)-1}(\lambda)}{E_{r(\lambda)}(\lambda)+\tilde{E}_{r(\lambda)-1}(\lambda)}$;
    set $\eta := \operatorname{argmax}\{q(\eta_1), q(\eta_2)\}$, $q(\lambda) := \min\{q(\eta), \tilde{E}_{r(\lambda)}(\lambda)\}$ *and* $s(\lambda) := s(\eta)$;
    replace λ *with its parent (or* $\emptyset$ *if* $\lambda = \mathcal{R}$*);*
  `end while`
`end for`

NEARBEST TREE 算法的主要思想可概括如下。我们从树 $\mathcal{T}'_0 := \{\mathcal{R}\}$ 开始，然后迭代进行。只要对于给定的树 $\mathcal{T}'_{N-1}$，我们有 $N \leq N_{\max}$，就细分叶节点 $s(\mathcal{R})$，并为其添加两个子节点，形成 $\mathcal{T}'_N$。内循环会将所有重要量从新创建的叶节点一路更新回根节点 $\mathcal{R}$。请注意，对于所有不在这条路径上的节点 ˜，都无需进行更改。此时，我们要强调误差泛函 E 的重要性。由于我们关注的是误差 $E(\mathcal{R})$ 的降低，直接采用基于误差 $E(\lambda)$ 的贪心策略，可能无法保证有效降低误差。为克服 ˜ 这一问题，我们采用修正后的误差 E (λ)。它会对未能降低 $E(\lambda)$ 的情况施加惩罚，而 $s(\mathcal{R})$ 则指向惩罚后误差最大的叶节点。˜因此， E 以及在 q 和 s 中基于其信息作出的后续决策，可视为该算法的自适应方向盘。下面的引理给出了 NEARBEST TREE 算法复杂度的估计。

引理 3.3。设 $N \in \mathbb{N}$。增量算法 NEARBEST TREE 执行 $\sum_{\lambda\in\mathcal{T}'_N}(r(\lambda)+1)$ 步以得到 $\mathcal{T}'_N$。

这一结果可参照 [4] 第 3354 页引理 3.2 的证明过程得出。文中针对 hp 自适应逼近研究了一个类似的算法。因此，我们略去证明细节。引理 3.3 中给出的复杂度取决于树的平衡性。在最好和最坏情况下，复杂度分别为 $\mathcal{O}(N\log N)$ 和 $\mathcal{O}(N^2)$。

现在让我们仔细看看修剪过程。如前所述，算法 NEARBEST TREE 生成的树 $\mathcal{T}'_N$ 只包含小波指标。不过，该算法经过设计，可以轻松地将其转换为夸克小波树 $T_N=(\mathcal{T}_N, \mathcal{T}'_N)$。为了得到 $\mathcal{T}'_N$ 的最优子树 $\mathcal{T}_N$，我们从 $\mathcal{T}'_N$ 开始。然后从根节点 $\mathcal{R}$ 沿着路径走向叶节点 $\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{T}'_N)$。在第一个观察到 (3.3) 中的 $E(\lambda)=e_{r(\lambda)}(\lambda)$ 的节点处，我们对树进行修剪。也就是说，删除 λ 的所有后代节点。根据定义，在叶节点 $\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{T}'_N)$ 上有 $E(\eta)=e_0(\eta)$。因此，我们必然会遇到这种情况。随后，对所有尚未处理的剩余路径重复这一过程。这样，$\mathcal{T}_N$ 就成为满足其所有叶节点上都有 $E(\lambda)=e_{r(\lambda)}(\lambda)$ 的最小树。根据第 2.2 节中的说明，通过设置 $p_{\max}(\lambda)=r(\lambda,\mathcal{T}'_N)$，可以利用该树及其子树定义夸克小波树 $T_N=(\mathcal{T}_N,\mathcal{T}'_N)=(\mathcal{T}_N,P_{\max})$。如果 $\mathcal{T}'_N$ 是由 NEARBEST TREE 算法生成的，则可以直接从算法中提取量 $E(\lambda)$ 和 $e_{r(\lambda)}(\lambda)$，无需进一步计算。下面的 TRIM 算法提供了一种实现修剪过程的方法。

算法。TRIM $[\mathcal{T}']\mapsto\mathcal{T}$

设置 $B=\{\mathcal{R}\}$ 和 $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$;
当 $B\neq\emptyset$
  取 $\lambda\in B$;
  如果 $E(\lambda)=e_{r(\lambda)}(\lambda)$
    从 $\mathcal{T}$中的 λ 移除所有后代节点;
  else
    将 λ 的子节点 η_1 和 η_2 添加到 B;
  结束条件判断
  从 B中移除 λ;
结束循环

接下来，我们估算由算法构建的树 T_N 的基数。

引理 3.4. 设 $N\in\mathbb{N}$且令 $\mathcal{R}=(0,0)$。设树 $T_N=(\mathcal{T}_N,\mathcal{T}'_N)$ 由 NEARBEST TREE 算法及其后续修剪生成。则有

$$N+1\le\#T_N\le\frac{N^2+6N+5}{4} \tag{3.8}$$

and

$$\#T_N\le\left(\max_{\lambda\in\mathcal{T}_N}|\lambda|+1\right)N+1. \tag{3.9}$$

证明。先回顾一下，每棵夸克小波树 T 都可用两个细化序列来刻画。第一个序列以小波树 $\mathcal{T}$ 的形式描述空间中的细化，第二个序列则通过赋值 $\{p_{\max}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T})}$ 表示 $\mathcal{T}$ 上的多项式增强步骤。现在令 $N_h := r(\mathcal{R},\mathcal{T})$ 且 $N_p := \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T})} p_{\max}(\lambda)$，其中 $N = N_h + N_p$ 分别表示空间细化次数和多项式次数细化次数的总数。增加两个更精细的小波总会使树的基数增加 2，而在叶节点 λ 上提高多项式次数，则会使基数增加，增量取决于集合 $\Upsilon(\lambda)$ 的大小。由于该集合具有形式 $\Upsilon(\lambda) = \{\mu\in\mathcal{T}\colon \lambda\succeq\mu\succeq\mu_\lambda\}$，其中某个 $\mu_\lambda \preceq \lambda$，我们可以估计

$$1 \le |\Upsilon(\lambda)| \le |\{\mu\in\mathcal{T} : \lambda\succeq\mu\succeq\mathcal{R}\}| = |\lambda| + 1.$$

在节点 $\lambda = \mathcal{R}$ 上将多项式次数细化 $N_p = N$ 次，直接得到式 (3.8) 中的下界估计。

为了得到上界，我们需要考察如何构造一棵树 T，使得经过 N 次细化后，$\#T$ 最大。单步操作中，对于深度为 $J =$ 的树 $(\mathcal{T}, P_{\max})$，通过多项式增强所能实现的最大基数增量，发生在存在一个叶节点 $\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T})$ 满足 $|\lambda| = J$ 且 $\Upsilon(\lambda) = \{\mu\in\mathcal{T}\colon \lambda\succeq\mu\succeq\mathcal{R}\}$ 时。在这种情况下，对 λ 进行多项式增强会使夸克小波树的基数增加 $|\Upsilon(\lambda)| = J+1$。另一方面，我们应避免在高层级上出现许多叶节点，因为空间细化只会使基数增加 2。因此，经过 N 次细化后可能得到的最大树仅由叶节点以及一条通向高层级叶节点 λ 的路径构成，该叶节点满足 $\Upsilon(\lambda) = \{\mu\in\mathcal{T}\colon \lambda\succeq\mu\succeq\mathcal{R}\}$，并且多项式增强仅应用于此叶节点。这意味着，我们首先需要沿着这条路径进行 N_h 次空间细化，使得满足 $|\lambda| = N_h$。然后，在叶节点 λ 上将多项式次数细化 N_p 次。这种树的基数为

$$\#T = 2N_h + (N_h+1)(N-N_h) + 1, \tag{3.10}$$

其在 $N_h = \frac{N+1}{2}$ 中于 $[0,N]$ 处取最大值。将其代入 (3.10)，即可得到 (3.8) 中的上界。

为证明 (3.9)，我们先考虑特殊情形 $\max_{\lambda\in\mathcal{T}_N}|\lambda| = 0$。在此情形下，根节点 $\mathcal{R}$ 已进行了 N 次多项式增强，并且我们有 $\#T_N = N+1$。现在令 $\max_{\lambda\in\mathcal{T}_N}|\lambda| \ge 1$，并令 η 为 $\mathcal{T}_N$ 中满足 $|\eta| = \max_{\lambda\in\mathcal{T}_N}|\lambda|$ 的一个节点。这尤其意味着 $\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)$。提高叶节点 η 上的多项式次数，会使树的基数增加至 $|\eta|+1$。细化的总次数有上界 N，因此结论成立。 □

3.3 树 T_N 近最优

现在我们将证明，NEARBEST TREE 算法生成的树确实在 (2.9) 的意义下是近最优的。我们将把这项任务分为两个步骤。首先，我们根据阈值参数 $q_N = q(\mathcal{R})$，推导最佳逼近误差 σ_n 的一个下界。

引理 3.5。设 $n, N\in\mathbb{N}$ with $n\le N$。设 $T^\star = (\mathcal{T}^\star, P^{\star\text{最大值}})$ 为基数为 n 的最优夸克小波树，使得 $\sigma_n = \mathcal{E}(T^\star)$。设树 $T_N = (\mathcal{T}_N, \mathcal{T}_N')$ 由 NEARBEST TREE 算法及其后续修剪生成。定义相对于树 $\mathcal{T}_N'$ 的阈值参数 $q_N := q(\mathcal{R})$。则有

$$\sigma_n \ge q_N(N-n+1).$$

证明。考虑叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)$ 及其阶 $P^\star_{\max} = \{p^\star_{\max}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)}$。在情形 $r(\lambda, \mathcal{T}'_N) \le p^\star_{\max}(\lambda)$ 下，我们忽略 $e_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda)$ 对总误差$\mathcal{E}(T^\star)$的贡献。这意味着我们估计

$$\sigma_n = \mathcal{E}(T^\star) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} e_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda) \ge \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star),\\ r(\lambda,\mathcal{T}'_N)>p^\star_{\max}(\lambda)}} e_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda). \tag{3.11}$$

现在令 $k \in \mathbb{N}_0$ 满足 $k \le N$。那么，对于和中其余满足$r(\lambda, \mathcal{T}'_N) > p^\star_{\max}(\lambda)$的项，我们考虑树 $\mathcal{T}'_N$ 生长过程中，在 $r(\lambda)$最后一次增加时的阶段 $\mathcal{T}'_k$的量 $q_k := q(\mathcal{R})$。换言之，$\mathcal{T}'_k$ 是算法生成的树序列 $\mathcal{T}'_1, \dots, \mathcal{T}'_N$中最后一棵在其中添加了 λ的后代的树。注意，根据 (3.1) 和 (3.5)，定义 $q(\lambda)$ 所涉及的量在树的生长过程中单调不增。因此，数值 q_k 随 k 递减，且我们有$q_k \ge q_N$。根据 q 和 s 的定义可知，在此阶段，对于所有 $\mu \preceq \lambda$，都有 $s(\mathcal{R}) = s(\lambda) = s(\mu)$。现在令 μ 为 λ的父节点。接着我们利用 (3.7) 观察到

$$q(\mu) = \min\{q(\lambda), \tilde{E}_{r(\mu,\mathcal{T}'_k)}(\mu)\} \le q(\lambda).$$

˜通过反复应用这一论证，我们得到 $q(\lambda) \ge q_k = q(\mathcal{R})$ 和 $E_j(\lambda) \ge q(\lambda) \ge q_N$ 当 $j = r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - 1$。接下来，我们利用公式 (3.6) 中给出的计算，得到

$$\frac{1}{\tilde{E}_j(\lambda)} = \sum_{i=p^\star_{\max}(\lambda)+1}^{j} \frac{1}{E_i(\lambda)} + \frac{1}{\tilde{E}_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda)}.$$

然后，按照 [4], 参见第3355页中的思路，我们得到估计

$$E_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda) \ge q_N(j - p^\star_{\max}(\lambda) + 1).$$

接下来，我们利用误差 E_j 的定义（参见公式 (3.3) 和 (3.4)），并回忆 $j = r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - 1$。于是我们也得到

$$e_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda) \ge E_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda) \ge q_N \max\{r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda), 0\}. \tag{3.12}$$

剩下的任务是估计所有叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)$ 对应的差值 $r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda)$。由 $P_{\max}$ 诱导的、满足 $\lambda \in \mathcal{T}^\star \backslash \mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)$ 的$p^\star_{\max}(\lambda)$，我们观察到

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} \max\{r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda), 0\} \ge \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star\cap\mathcal{T}'_N)} r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda). \tag{3.13}$$

为了进一步估计 (3.13) 的右侧，我们需要两个中间估计。一方面，我们有

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star\cap\mathcal{T}'_N)} p^\star_{\max}(\lambda) \le \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} p^\star_{\max}(\lambda) \le n - |\mathcal{T}^\star|,$$

而另一方面，它满足

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star\cap\mathcal{T}'_N)} r(\lambda, \mathcal{T}'_N) = N - \frac{|\mathcal{T}^\star \cap \mathcal{T}'_N| - 1}{2} \ge N - |\mathcal{T}^\star| + 1.$$

我们将这些估计与 (3.13) 结合，得到

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} \max\{r(\lambda, \mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda), 0\} \ge N - n + 1. \tag{3.14}$$

最后，结合 (3.11)、(3.12) 和 (3.14) 可得

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} e_{p^\star_{\max}(\lambda)}(\lambda) \geq q_N \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}^\star)} \max\{r(\lambda,\mathcal{T}'_N) - p^\star_{\max}(\lambda), 0\} \\ &\geq q_N(N-n+1).\end{aligned}$$

□

接下来，我们要给出关于阈值参数 q_N 的全局误差上界。

引理 3.6. 令 $N \in \mathbb{N}$，并设树 $T_N = (\mathcal{T}_N, \mathcal{T}'_N)$ 由 NEARBEST TREE 算法及随后进行的修剪生成。设 $q_N = q(\mathcal{R})$ 关于树 $\mathcal{T}'_N$。那么，全局误差有如下上界

$$\mathcal{E}(T_N) \leq q_N\,(2N+1)\,. \tag{3.15}$$

证明. 一般而言，可以用与 [4], 中所述类似的方法证明这一结果，参见第 3355-3356 页。不过，仍需做一些修改。考虑树 $\tilde{\mathcal{T}}'_N$。令 L 表示满足 $q(\lambda) = E_{r(\lambda,\mathcal{T}'_N)}(\lambda)$ 的节点 $\lambda \in \mathcal{T}'_N$ 的集合。此外，令 Q 为从 $\mathcal{R}$ 出发、满足 $L \cap Q = \mathcal{V}(Q)$ 的 $\mathcal{T}'_N$ 的极大子树。因此， Q 中没有内部节点属于集合 L。与 [4] 中一样，我们注意到 Q 是一棵完全树。此外，对于 $\lambda \in \mathcal{V}(Q)$，可得

$$\tilde{E}_{r(\lambda,\mathcal{T}'_N)}(\lambda) = q(\lambda) \leq q(\mathcal{R}) = q_N.$$

现在令 $\lambda \in \mathcal{V}(Q)$，并令 $r(\lambda,\mathcal{T}'_N) = j$。那么，按照与 [4], 中类似的论证，特别参见第 3356 页的公式 (3.9)，我们得到

$$E_j(\lambda) = \tilde{E}_j(\lambda)\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{E_j(\lambda)}{E_k(\lambda)} + \sum_{\mu\prec\lambda}\frac{E_j(\lambda)}{e(\mu)}\right) \leq q_N\left(j+1+\sum_{\mu\prec\lambda}\frac{e(\lambda)}{e(\mu)}\right). \tag{3.16}$$

注意，对于叶节点 $\lambda \in \mathcal{V}(Q)$，可能出现两种不同的情况。一方面，可能存在一个 $\nu \in \mathcal{V}(\mathcal{T}_N)$，使得 $\lambda \preceq \nu$。那么我们可以写成

$$E_{r(\lambda,\mathcal{T}'_N)}(\lambda) = \sum_{\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{J}_\lambda\cap\mathcal{T}_N)} E_{r(\eta,\mathcal{T}'_N)}(\eta) = \sum_{\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{J}_\lambda\cap\mathcal{T}_N)} e_{r(\eta,\mathcal{T}'_N)}(\eta). \tag{3.17}$$

另一方面，也可能存在一个 $\nu \in \mathcal{V}(\mathcal{T}_N)$，使得 $\lambda \succ \nu$。在这种情况下，我们观察到

$$e_{r(\nu,\mathcal{T}'_N)}(\nu) = E_{r(\nu,\mathcal{T}'_N)}(\nu) \leq \sum_{\eta\in\mathcal{V}(\mathcal{T}'_\nu\cap Q)} E_{r(\eta,\mathcal{T}'_N)}(\eta). \tag{3.18}$$

因此，我们可以将叶节点 $\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)$ 划分为对应这两种情况的两个集合。结合 (3.17) 和 (3.18) 可得

$$\mathcal{E}(T_N) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)} e_{r(\lambda,\mathcal{T}'_N)}(\lambda) \leq \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(Q)} E_{r(\lambda,\mathcal{T}'_N)}(\lambda).$$

接下来代入 (3.16)，即可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(T_N) &\leq q_N\left(\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(Q)}\big(r(\lambda,\mathcal{T}'_N)+1\big) + \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(Q)}\sum_{\mu\prec\lambda}\frac{e(\lambda)}{e(\mu)}\right) \\ &= q_N\left(\sum_{\lambda\in\mathcal{V}(Q)}(r(\lambda,\mathcal{T}'_N)+1) + \sum_{\mu\in(Q\setminus\mathcal{V}(Q))}\frac{\sum\limits_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{J}_\mu\cap Q)} e(\lambda)}{e(\mu)}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

这里在最后一步中，我们改变了求和的顺序。注意，(2.6) 蕴含弱次可加性

$$e(\lambda) \geq \sum_{\eta \in \mathcal{V}(\mathcal{J}_\lambda \cap \mathcal{T})} e(\eta)$$

对所有树 $\mathcal{T}$ 都成立。这尤其意味着，式 (3.19) 中第二个和里的每个分数都不大于 1。因此我们得到

$$\mathcal{E}(T_N) \leq q_N \left(|\mathcal{V}(Q)| + \sum_{\lambda \in \mathcal{V}(Q)} r(\lambda, \mathcal{T}_N') + |Q \backslash \mathcal{V}(Q)| \right). \tag{3.20}$$

注意，$\mathcal{T}_N'$ 中节点的数量可以改写为

$$|\mathcal{T}_N'| = |Q| + 2 \sum_{\lambda \in \mathcal{V}(Q)} r(\lambda, \mathcal{T}_N').$$

将其代入式 (3.20)，得到

$$\mathcal{E}(T_N) \leq q_N \left(|Q| + \frac{|\mathcal{T}_N'| - |Q|}{2} \right).$$

回顾一下，$|Q| \leq |\mathcal{T}_N'| = 2N + 1$。于是最终得到

$$\mathcal{E}(T_N) \leq q_N \left(2N + 1\right).$$

这正是我们在式 (3.15) 中陈述的结论。 □

现在我们已做好充分准备，证明 NEARBEST TREE 算法给出的夸克小波树是一种符合式 (2.9) 意义下的近乎最佳近似。

定理 3.7. 设 $n, N \in \mathbb{N}$ 满足 $n \leq N$，且令 $e_p(\lambda)$ 为满足 (2.6) 和 (2.7) 的局部误差。随后进行修剪的 NEARBEST TREE 会找到一个夸克小波树 $T_N = (\mathcal{T}_N, \mathcal{T}_N')$，使得相应的夸克小波逼近在如下意义下是近最优的

$$\mathcal{E}(T_N) \leq \frac{2N+1}{N-n+1} \sigma_n. \tag{3.21}$$

证明. 公式 (3.21) 由引理 3.5 和引理 3.6 合并得到。 □

注 3.8. 设 $M \geq 2$ 为自然数，并暂且忽略我们的算法只能执行整数步这一事实。那么引理 3.4 的第一部分表明，我们最多可以执行算法的 $N_1 = 2\sqrt{M+1} - 3$ 步，同时保证所得的树 T_{N_1} 满足 $\#T_{N_1} \leq M$。现在令 $n_1 = \frac{N_1}{2}$。利用平凡估计

$$\frac{2N_1 + 1}{N_1 - n_1 + 1} = \frac{2\left(2\sqrt{M+1} - 3\right) + 1}{2\sqrt{M+1} - 3 - \sqrt{M+1} + \frac{5}{2}} \leq 4,$$

公式 (3.21) 随即变为

$$\mathcal{E}(T_{N_1}) \leq 4\sigma_{\sqrt{M+1} - \frac{3}{2}}.$$

特别是，这意味着

$$\mathcal{E}(T_{N_1}) \leq C_1 \sigma_{c_1 M^{1/2}},$$

其中常数 $C_1 > 0$ 和 $c_1 \in$ 相互独立 $(0, 1]$。实际上，夸克小波的全局最大细化层级通常由某个 $j_{\mathrm{MAX}} \in \mathbb{N}$界定。于是 (3.9)

推出 $\#T_N \le CN$，其中常数 $C>0$ 取决于最大细化层级j_{MAX}。因此，我们可以运行算法的 $N_2 = C^{-1}M$ 步，同时保证所得的树 T_{N_2} 满足 $\#T_{N_2} \le M$。对于 $n_2 = \frac{N_2}{2}$，显然有估计

$$\frac{2N_2+1}{N_2-n_2+1} = \frac{2C^{-1}M+1}{C^{-1}M - C^{-1}\frac{M}{2}+1} \le 4$$

于是得到（3.21）变为

$$\mathcal{E}(T_{N_2}) \le 4\sigma_{\frac{M}{2C}}.$$

特别地，这意味着

$$\mathcal{E}(T_{N_2}) \le C_2\sigma_{c_2M},$$

其中有一个与之无关的常数 $C_2>0$，以及一个常数 $c_2 \in (0,1]$，它取决于最大细化层级。

4 实际实现

4.1 ℓ_2中的逼近

本节介绍一种将 NEARBEST TREE 应用于函数 $f \in L_2(I)$ 的可行方法。为避免在处理边界适配拟夸克和夸克小波时引入额外记号并带来技术上的困难，我们仅考虑 Haar 拟夸克小波的情形$m=\tilde{m}=1$，此时有 $\operatorname{supp}\psi_p = \operatorname{supp}\varphi_p = [0,1]$ 且 $\operatorname{supp}\psi_{p,j,k} = 2^{-j}[k,k+1]$。因此，与同 I相交的夸克小波相对应的无限夸克小波指标集为

$$\Lambda_I = \{(p,j,k_j) : p\in\mathbb{N}_0, j\in\mathbb{N}_0\cup\{-1\}, 0\le k_j\le k_{j,\max} := \max\{0,2^j-1\}\}.$$

对于相应的小波指标集合，我们记作

$$\Lambda_{I,0} = \{(j,k_j) : j\in\mathbb{N}_0\cup\{-1\}, 0\le k_j\le k_{j,\max}\}.$$

这与二进区间的设定相吻合，见第 2.2 节，但有一个小例外。我们令 $\mathcal{R}=(0,0)$，并将带有 $j=-1$ 的指标也分配给根节点。这样做是合理的，因为夸克小波 $\psi_{p,0,k}$ 与 quark$\psi_{p,-1,k} = \varphi_p(\cdot-k)$ 之间不存在直接的父子关系，因为 $\operatorname{supp}\psi_{p,-1,k} = \operatorname{supp}\psi_{p,0,k}$ 以及 $k_{-1,\max} = k_{0,\max} = 0$。这意味着，如果我们考虑一个夸克小波指标树 $T=(\mathcal{T},P_{\max})$，并将根节点上的最大多项式次数 $p=p_{\max}(\mathcal{R})$ 增加 1，那么我们实际上会向该树中添加两个指标，即 quark 指标 $(p+1,-1,0)$ 和夸克小波指标 $(p+1,0,0)$。此外，当我们对某个指标 $\lambda\in\mathcal{T}$ 的所有祖先求和时，也将 quark 指标包括在内。

注 4.1. 当处理阶为 $m\ge 2$ 的夸克小波时，我们有 $\operatorname{supp}\psi_p \not\subseteq [0,1]$。在这种情况下，通常从最小层级 $j_{\min}>0$ 开始，并采用额外的边界拟夸克小波，详情见 [15] 。此时的无限指标集由层级 $j_{\min}$ 上的多个节点构成。这意味着我们有 $R>1$ 个根节点。要处理这种情况，可以采用 [8] 中所述的策略。如果 R 是 2 的幂，我们将现有根节点两两配对，为每一对创建一个新的父节点，从而统一这些根节点。然后重复此过程，直到只剩下一个根节点。否则，我们会在统一过程开始前创建至多 $\lceil\log_2(R)\rceil-1$ 个空节点。更多详情请参见 [8] 中的注 6。

现在我们将重点转向局部误差$e_p(\lambda)$的精确定义。前几节中，我们作出了一些显式和隐式假设，为清晰起见，现重述如下：

- 最低阶误差具有次可加性，见式（2.6）。
- 最大多项式次数增加时，误差会减小，见 (2.7)。
- 全局误差 $\mathcal{E}(T)$ 等价于当前逼近误差，见注 2.14。

我们的目标是推导出这些局部误差的恰当定义，并在第 4.2 节的实践中应用。首先回顾一下，每个 $f \in L_2(I)$ 都可以（非唯一地）写成

$$f = \sum_{(p,j,k)\in\Lambda_I} c_{p,j,k} w_p \psi_{p,j,k} \tag{4.1}$$

其中系数序列为 $\mathsf{c} = \{c_{p,j,k}\}_{(p,j,k)\in\Lambda_I}$。现在我们可以给出局部误差的恰当定义了。

定义 4.2. 设 $f \in L_2(I)$ 具有形式 (4.1)。那么，对于每个节点 $\lambda \in \Lambda_{I,\,0}$以及 $p \in \mathbb{N}_0$，我们通过以下方式定义局部误差 $e_p(\lambda)$:

$$e_p(\lambda) := \sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\lambda)} \sum_{q>p} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\lambda} \sum_{q\geq 0} |c_{q,i,\ell}|^2. \tag{4.2}$$

(4.2) 中的第一个和涉及 λ 及其祖先的一个子集，其中多项式次数大于最大次数 p。第二个和汇集了λ 的所有后代节点，涵盖所有可能的多项式次数。

注记 4.3。定义 4.2 受自适应小波格式中的树逼近启发。特别是在非线性变分问题中，基于小波展开系数大小、采用树结构指标集进行逼近的方法已被成功应用，参见例如 [13] and [23]。

下文将检验第 2.3 节中提到的必要条件 (2.6) 和 (2.7) 是否得到满足。

引理 4.4。设 $f \in L_2(I)$ 具有形式 (4.1)。设 $\lambda \in \Lambda_{I,\,0}$ 且 $p \in \mathbb{N}_0$。那么，定义 4.2 中的局部误差 $e_p(\lambda)$ 满足性质 (2.6) 和 (2.7)。

证明。首先证明 (2.6) 成立。因此，设 $p = 0$，且 η_1、η_2 是 λ 的子节点。注意，根据集合 Υ 的定义，我们有 $\Upsilon(\lambda) \cup \{\eta_1, \eta_2\} = \Upsilon(\eta_1) \cup \Upsilon(\eta_2)$，参见 (2.4) 及其后续内容。于是，对于关于 λ 的最低阶局部误差，我们得到

$$\begin{aligned}
e_0(\lambda) &= \sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\lambda)} \sum_{q>0} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\lambda} \sum_{q\geq 0} |c_{q,i,\ell}|^2 \\
&\geq \sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\lambda)} \sum_{q>0} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\in\{\eta_1,\eta_2\}} \sum_{q>0} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\eta\in\{\eta_1,\eta_2\}} \sum_{q\geq 0} |c_{q,i,\ell}|^2 \\
&= \sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\eta_1)} \sum_{q>0} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\eta_2)} \sum_{q>0} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\eta\in\{\eta_1,\eta_2\}} \sum_{q\geq 0} |c_{q,i,\ell}|^2 \\
&= e_0(\eta_1) + e_0(\eta_2).
\end{aligned}$$

性质（2.7）可直接由定义 4.2 得出。 □

现在我们已准备好运行 NEARBEST TREE 算法，并使用后续的修剪程序 TRIM。我们将证明，全局误差确实能够描述逼近的质量。

引理 4.5. 设 $f \in L_2(I)$ 具有形式 (4.1)。设局部误差 $e_p(\lambda)$ 如定义 4.2 所定义。对于 $N \in \mathbb{N}$，由 $T_N = (\mathcal{T}_N, P_{\max})$ 得到的、经后续修剪的 NEARBEST TREE 算法生成的夸克小波树记为 $N \in \mathbb{N}$。相应的逼近 f_{T_N} 为

$$f_{T_N} = \sum_{(p,j,k)\in T_N \subset \Lambda_I} c_{p,j,k} w_p \psi_{p,j,k}. \tag{4.3}$$

那么，存在一个与 f 和 N 无关的常数 $C > 0$，使得全局误差满足

$$\|f - f_{T_N}\|^2_{L_2(I)} \le C\mathcal{E}(T_N). \tag{4.4}$$

证明. 首先，结合定义 4.2，利用全局误差的定义（见 (2.8)）来证明该结果。于是可得

$$\mathcal{E}(T_N) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)} e_{p_{\max}(\lambda)}(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)} \left(\sum_{(i,\ell)\in\Upsilon(\lambda)} \sum_{q>p_{\max}(\lambda)} |c_{q,i,\ell}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\lambda} \sum_{q\ge 0} |c_{q,i,\ell}|^2 \right).$$

回顾集合 $\Upsilon(\lambda)$ 的定义，可知 $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)} \Upsilon(\lambda) = \mathcal{T}_N$。利用这一观察，我们还可以写出

$$\mathcal{E}(T_N) = \sum_{\lambda=(j,k)\in\mathcal{T}_N} \sum_{q>p_{\max}(\lambda)} |c_{q,j,k}|^2 + \sum_{(i,\ell)\succ\lambda\in\mathcal{V}(\mathcal{T}_N)} \sum_{q\ge 0} |c_{q,i,\ell}|^2.$$

让我们仔细看看这个表达式。第一个和汇集了所有夸克小波系数，其对应的小波指标是树 $\mathcal{T}_N$ 的节点。然而，由于相应夸克小波的多项式次数，这些系数并不属于树 T_N。第二个和汇集了所有不属于 T_N 的系数，因为它们对应的指标是 $\mathcal{T}_N$ 的叶节点的后代。因此，我们可以写成

$$\mathcal{E}(T_N) = \sum_{(p,j,k)\in\Lambda_I} |c_{p,j,k}|^2 - \sum_{(p,j,k)\in T_N\subset\Lambda_I} |c_{p,j,k}|^2.$$

接下来，我们结合定理 2.5 的框架性质与 (2.2) 中的下界估计，得到

$$\Big\| \sum_{(p,j,k)\in\Lambda_I} c_{p,j,k} w_p \psi_{p,j,k} - \sum_{(p,j,k)\in T_N\subset\Lambda_I} c_{p,j,k} w_p \psi_{p,j,k} \Big\|^2_{L_2(I)} \lesssim \mathcal{E}(T_N).$$

回想一下，$f \in L_2(I)$ 具有 (4.1) 的形式。然后结合 (4.3)，最终得到

$$\|f - f_{T_N}\|^2_{L_2(I)} \lesssim \mathcal{E}(T_N).$$

证明至此完成。 □

我们指出，满足 (4.4) 的误差估计器称为可靠的。现在我们已经做好充分准备，可以描述关于 f 的逼近 f_{T_N} 的质量。为此，我们采用最佳树逼近误差 σ_n（见定义 2.15），并应用定理 3.7。由此得到以下结果。

引理 4.6. 设 $f \in L_2(I)$ 具有形式 (4.1)，且局部误差 $e_p(\lambda)$ 按定义 4.2 定义。对于由 $T_N = (\mathcal{T}_N, P_{\max})$ 所给出的 $N \in \mathbb{N}$，我们用 $\#T_N \lesssim N$ 表示经 NEARBEST TREE 算法处理并随后修剪所得到的夸克小波树，其常数取决于树中夸克小波指标的最大层级。相应的逼近 f_{T_N} 定义为

$$f_{T_N} = \sum_{(p,j,k)\in T_N} c_{p,j,k} w_p \psi_{p,j,k}.$$

设 $n \le N$。那么存在一个常数 $C > 0$，它与 f、N 和 n 无关，使得

$$\|f - f_{T_N}\|^2_{L_2(I)} \le C \frac{2N+1}{N-n+1} \sigma_n.$$

证明。首先，我们使用引理 4.5 来证明这一结果。注意，其中的所有条件都已满足。由此得到

$$\|f - f_{T_N}\|^2_{L_2(I)} \le C \mathcal{E}(T_N).$$

现在我们要应用定理 3.7。为此，回顾一下，定义 4.2 中的局部误差 $e_p(\lambda)$ 满足性质 (2.6) 和 (2.7)，见引理 4.4。因此我们得到

$$\|f - f_{T_N}\|^2_{L_2(I)} \le C \frac{2N+1}{N-n+1} \sigma_n.$$

证明至此完成。 □

注 4.7。本节的结果可以从 L_2 框架推广到更复杂的函数空间，例如 Sobolev 空间 H^s、Besov 空间 $B^s_{r,\,q}$ 或 Triebel-Lizorkin 空间 $F^s_{r,\,q}$。正如我们在引理 4.5 的证明中所看到的，关键在于函数空间的范数与夸克小波系数的序列范数等价。关于夸克小波系统在不同函数空间中的框架性质，可参见 [16],[26] 和 [21] 。然而，对于 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间，证明会复杂得多。此外，在这些情形下，还需要对参数 s、r 和 q 施加一些额外条件。

注 4.8. 到目前为止，我们还没有讨论如何实际找到 (4.1) 中 $f \in L_2(I)$ 的一种表示。在某些应用中，我们的函数本身已经给出为夸克小波的线性组合。例如，若 f 源自先前的计算，情况便是如此，因此 f 可能是用 Quarklet 框架离散化的线性椭圆算子方程之未知解的当前逼近。不过，也有一些情况并非如此。这时，我们必须寻找合适的系数序列 $\{c_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_I}$。如前所述，这种表示不一定唯一。因此，应用本节所述方法所得的结果将取决于系数序列的选择。在实际中，我们总是使用一个有限子集 $\overline{\Lambda}_I \subset \Lambda_I$。例如，我们可以将 Λ_I 截断于某个统一最大细化层级和多项式次数。于是，计算系数序列 $\mathbf{c} \in \ell_2(\overline{\Lambda}_I)$ 的一种方法是求解以下矩阵-向量方程

$$\mathbf{G}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{4.5}$$

其中 $\mathbf{b} := \big(\langle f, w_\lambda\psi_\lambda\rangle_{L_2(I)}\big)_{\lambda\in\overline{\Lambda}_I}$ 和 $\mathbf{G} := \big(\langle w_\lambda\psi_\lambda, w_\mu\psi_\mu\rangle_{L_2(I)}\big)_{\lambda,\mu\in\overline{\Lambda}_I}$ 表示 Gram 矩阵。然而，由于存在冗余性，Gram 矩阵具有非平凡核

在夸克小波系统中。因此，(4.5) 并无唯一解。尽管如此，诸如阻尼 Richardson 迭代这样的经典迭代方法

$$\mathbf{c}^{(j+1)} := \mathbf{c}^{(j)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{G}\mathbf{c}^{(j)}), \quad 0 < \omega < \frac{2}{||\mathbf{G}||_2}, \quad j = 0, 1, \dots$$

或其变体仍可用数值稳定的方式应用。遗憾的是，以这种方式得到的系数有时在定性表现上不佳：在 f 被认为是“光滑”的区域内，高层上仍存在模值较大的系数。这有悖直觉，因为光滑部分应当能由低层且多项式次数较高的夸克小波充分解析。如果此时采用局部误差如式 (4.2) 所示的 NEARBEST TREE，这种系数选择会导致不断细化，以逼近这些较大的系数，进而对最终的收敛率产生负面影响。从实际角度看，与找到范数最小的解相比，我们更关注表示的稀疏性。基于这些原因，我们采用迭代方法。首先从一个较小的指标集 $\Lambda \subset \overline{\Lambda}_I$ 开始，并针对 Λ 求解(4.5)，而不是针对 $\overline{\Lambda}_I$求解。然后对所得解应用零延拓算子，得到序列 $\mathbf{c} \in \ell(\overline{\Lambda}_I)$。根据残差 $\mathbf{G}\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 所提供的信息，我们随后向 Λ中添加额外的小波或夸克小波指标。重复此过程，直到残差误差 $\|\mathbf{G}\mathbf{c} - \mathbf{b}\|_2$ 小于给定容差。这样做得到的系数序列在定性表现上更好，但代价是只将矩阵向量方程 (4.5) 求解到一定精度。我们仍需求解 Gram 矩阵具有非平凡核的矩阵向量方程。不过，这些系统远小于整个截断指标集，因此可通过经典迭代方法或专用软件包更轻松地处理。从理论角度看，这一过程并不完全令人满意。如何找到更可靠的方法来计算合适的夸克小波系数，例如借助适当的对偶框架，是后续研究的课题。

4.2 数值实验

本节使用第 4.1 节中的局部误差检验 NEARBEST TREE 算法。长远来看，我们计划将该算法作为构建模块，用于设计求解椭圆算子方程的自适应数值方法。因此，我们选取的测试示例是偏微分方程典型解的（模型），因为我们预计自适应格式的表现将优于经典一致格式。特别是，对于具有再入角的多边形区域上的二阶椭圆边值问题，众所周知，精确解由正则部分和奇异部分组成。边缘奇异性的一个简单模型是单变量函数 x^α，其中 $\alpha > \frac{1}{2}$，参见例如[1]。文献 [17] 证明，该函数可直接从夸克小波系统 Ψ 的张成空间中逼近，且收敛速度为反指数阶。确切地说，[17] 中的逼近阶为 $e^{-2\ln(2)n^{1/5}}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 表示自由度的数量。因此，在我们的设定中，指数收敛是指形如 $e^{-\beta n^\gamma}$ 的衰减率，其中某个 β、$\gamma > 0$成立。这将作为 NEARBEST TREE 自适应算法所提供逼近的基准。

在所有实验中，我们考虑单位区间 $I = [0, 1]$ 以及第 4.1 节中相应的 Haar quarklet 指标集 Λ_I，并将其截断至统一最大细化层级 $j_{\mathrm{MAX}} = 10$ 和最大多项式次数 $p_{\mathrm{MAX}} = 5$，记为 $\overline{\Lambda}_I$。此外，局部误差 $e_p(\lambda)$ 由 (4.2) 给出。这意味着我们令 $f \in L_2(I)$ 具有 (4.1) 的形式，并取适当的系数 $\mathbf{c} = \{c_{p,j,k}\}_{(p,j,k)\in\overline{\Lambda}_I}$，参见注 4.8。进行数值实验时，我们还需要说明集合 $\Upsilon(\lambda)$ 的具体形式。为此，我们将

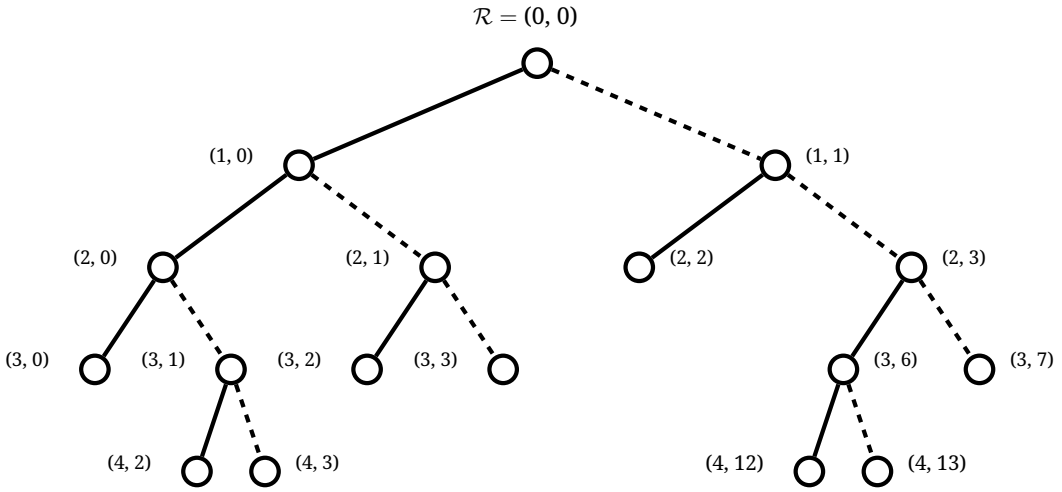


图 2：树 $\mathcal{T}$及集合 Υ的示例。每个节点对应一个小波指标$\lambda \in \mathcal{T}$。实线表示集合 $\Upsilon(\lambda)$、$\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$，其中 μ_λ 集如式 (4.6) 所示。

每个小波指标 $(j,k) = \lambda \in \Lambda_{I,\,0}$ 分为两个不同的组。如果 $k \in 2\mathbb{N}_0$，则称 λ 为左节点。否则，如果 $k \in 2\mathbb{N}_0 + 1$，则称其为右节点。对于给定的节点 $\lambda \in \Lambda_{I,\,0}$，我们通过以下方式指定一个特定的祖先 μ_λ

$$\mu_\lambda = \begin{cases} \mathcal{R}, & \text{all } \mu \preceq \lambda \text{ are left nodes,} \\ \arg\max\limits_{\mu \preceq \lambda} \{|\mu| : \mu \text{ is a right node}\}, & \text{else.} \end{cases} \tag{4.6}$$

换句话说，μ_λ 是从 λ 到根节点的路径上第一个满足为右节点或$\mu_\lambda = \mathcal{R}$ 的节点，其中 $\lambda = (j, 0)$。接下来我们考虑这些集合

$$\Upsilon(\lambda) = \{\mu \in \Lambda_{I,0} \,:\, \lambda \succeq \mu \succeq \mu_\lambda\}.$$

现在令$\mathcal{T} \subset \Lambda_{I,\,0}$ 为一棵由小波指标构成的树。容易验证，对于两个兄弟节点η_1和 $\eta_2 \in \mathcal{T}$，有 $\Upsilon(\eta_1) \cap \Upsilon(\eta_2) = \emptyset$，且$\bigcup_{\lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{T})} \Upsilon(\lambda) = \mathcal{T}$。因此，所有涉及 Υ 的条件都已满足，见（2.4）。图 2 展示了集合$\Upsilon(\lambda)$的可视化结果。

现在我们可以应用该算法了。第一个例子是前面提到的函数

$$f(x) \coloneqq x^\alpha, \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

与往常一样，我们在研究中选择 $\alpha = \frac{3}{4}$。注意，该函数除 $x = 0$ 外均光滑。因此，我们预期在区间左边界附近会进行大量空间细化，而 f 的光滑部分应能由多项式次数较高的夸克小波充分解析。在图 3 中，可以观察到随着 N 增大，逼近误差$\|f - f_{T_N}\|_{L_2\,(I)}$ 和全局误差 $\mathcal{E}(T_N)^{1/2}$ 在半对数尺度下的衰减。回顾一下，自由度取决于 N，见引理 3.4。我们观察到，全局误差能够非常精确地估计 L_2-逼近误差，参见引理 4.5。此外，在半对数尺度下，误差呈线性衰减，这表明其具有类型为 $e^{-\beta n^\gamma}$ 的指数收敛，且 γ 接近 1。作为比较，我们也纳入了自适应小波方法的误差。为此，我们应用了 NEARBEST TREE 算法，并将指标集 Λ_I 截断于 $p'_{\mathrm{MAX}} = 0$ 和 $j_{\mathrm{MAX}} = 10$。这一空间自适应方案实现了线性收敛率 n^{-1}。在算法的最初几步中

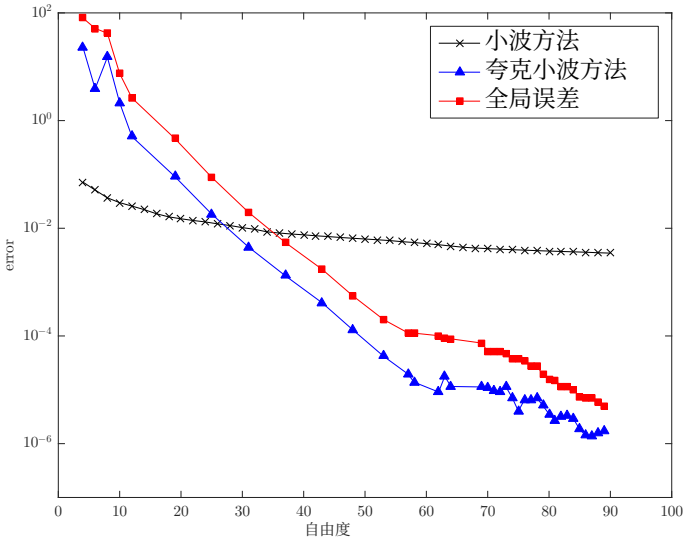


图 3：测试问题 f 在半对数尺度下的误差渐近行为。黑线和蓝线分别描述了小波方法和夸克小波方法的 L_2逼近误差。红线显示了夸克小波情形下估计量 $\mathcal{E}(T_N)^{1/2}$ 的变化趋势。

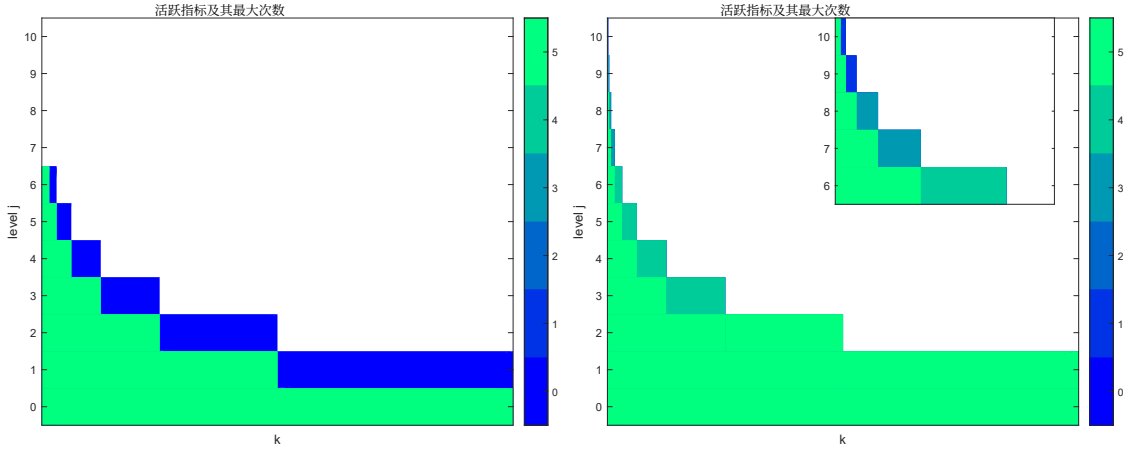


图 4：经过 $N = 12$ 步后，示例 f 的树 T_N 中活跃夸克小波系数及其最大多项式次数的分布；具有 48 个自由度（左）和经过 $N = 50$ 步后具有 100 个自由度（右）。

小波方法达到更高的精度。这意味着，我们在夸克小波方案的表示式（4.1）中所采用的系数选择还可以改进。尽管如此，我们仍观察到自适应夸克小波方法具有显著更高的渐近收敛率。在图 4 中，我们展示了 NEARBEST TREE 算法不同阶段下 T_N 中的活跃夸克小波系数。可以看到，尺度朝奇异点方向显著细化，同时也采用了较高的多项式次数。在第二个实验中，我们将研究集合 $\overline{\Upsilon(\lambda)}$ 的具体选择所起的作用。为此，我们将考虑 f 的反射和平移版本，其定义为

$$g(x) := (-x + 1)^\alpha, \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

同样，我们设定 $\alpha = \frac{3}{4}$。结果如图5和图6所示。与

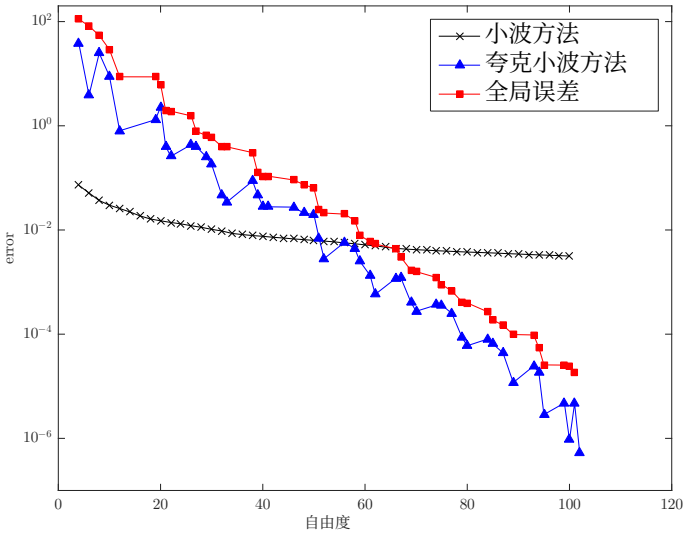


图 5：测试问题 g 在半对数尺度下的误差渐近行为。黑色和蓝色曲线分别表示小波方法和夸克小波方法的 L_2-逼近误差。红色曲线显示了夸克小波情形下估计量 $\mathcal{E}(T_N)^{1/2}$ 的变化情况。

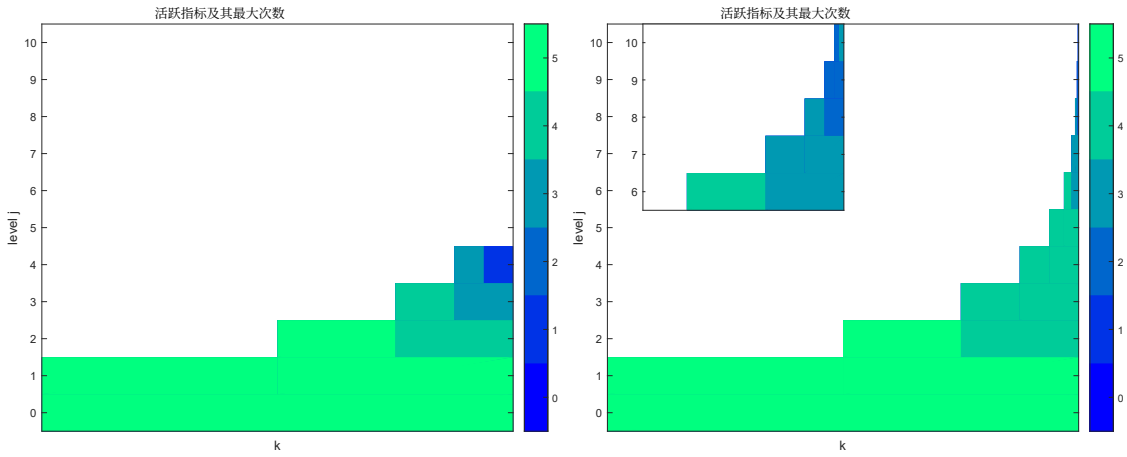


图 6：树 T_N 中示例 g 经过 $N = 23$ 步后、自由度为 50 时（左）以及经过 $N = 50$ 步后、自由度为 102 时（右）的活跃夸克小波系数及其最大多项式次数分布。

前一个例子相比，我们注意到收敛率和活跃系数分布都有所改善。特别是，我们看到，较高的多项式次数更多地集中在较低层级。前一个例子中并非如此。这是集合 $\Upsilon(\lambda)$ 的定义所导致的。在根节点 $\mathcal{R} = (0, 0)$ 上取较高的多项式次数，会自动意味着最左侧叶节点及沿此路径的节点也具有较高的多项式次数。这正是我们在图 4 中遇到的情况。另一个影响是，在第一个例子的前几步中，随着 N 增大，自由度分配要快得多。相比之下，对于 g，这一过程更加均匀。事实上，在函数可归类为“粗糙”的区域，采用“较小”的集合 $\Upsilon(\lambda)$ 似乎更有利。从这个意义上说，我们选择集合 $\Upsilon(\lambda)$ 似乎很适合 g。尽管如此，我们看到两种情况下都出现了指数收敛。在最后的实验中，我们将考察另外两个广受欢迎的测试函数

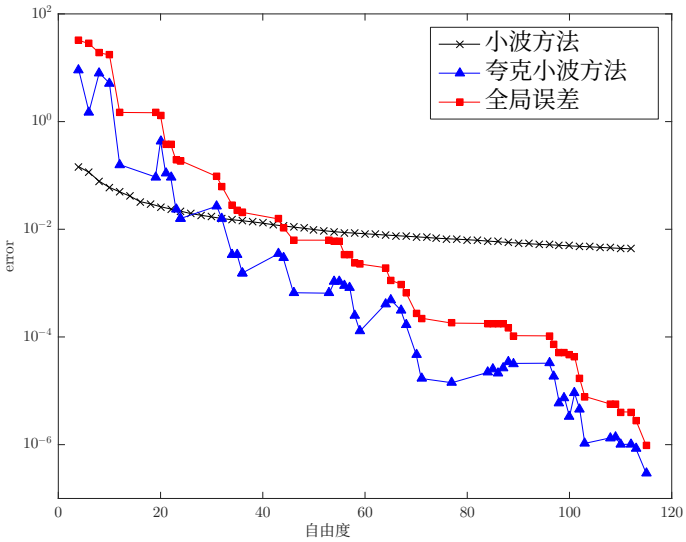


图7：测试问题的误差渐近行为 u （半对数尺度）。黑线和蓝线分别表示小波方法和夸克小波方法的 L_2-逼近误差。红线显示了夸克小波情形下估计量 $\mathcal{E}(T_N)^{1/2}$ 的变化。

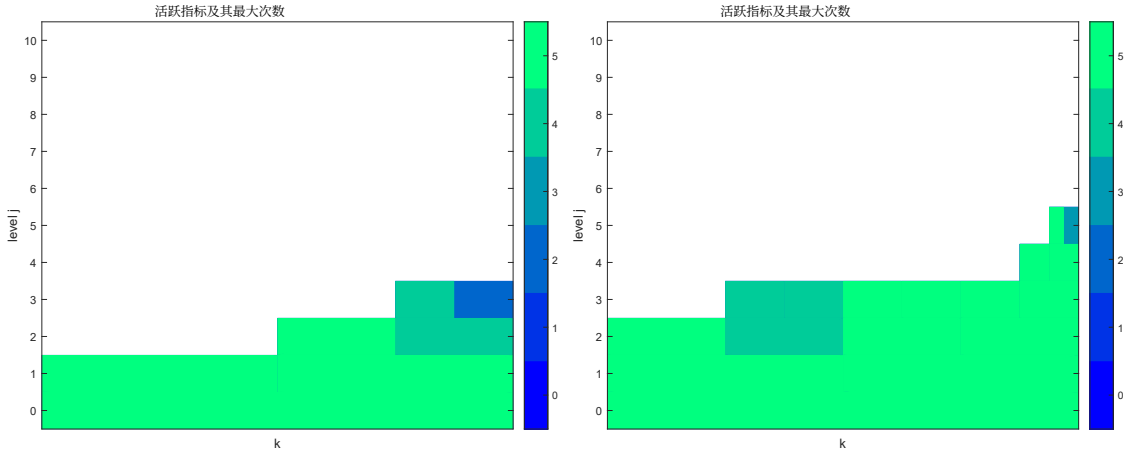


图8：树 T_N 中活跃夸克小波系数及其最大多项式次数的分布，该示例在经过 $N = 20$ 步后具有43个自由度（左），在经过 $N = 50$ 步后具有103个自由度（右）。

作为椭圆问题的解的情形。第一个由下式给出

$$u(x) := 4\frac{e^{ax} - 1}{e^a - 1}\left(1 - \frac{e^{ax} - 1}{e^a - 1}\right).$$

与 [3] 中一样，我们选择 $a = 5$，但也可以采用其他值。该函数是光滑的，但在 $x = 1$处具有较大的梯度。第二个函数取自 [29]，并在 $x = \frac{1}{3}$ 处呈现一个尖峰。它由下式给出

$$v(x) := \frac{x(1-x)}{1 + 10^4\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}.$$

所得收敛率和活跃指标的分布如图 7–10 所示。特别是，我们注意到这些示例中的误差也实现了指数衰减。

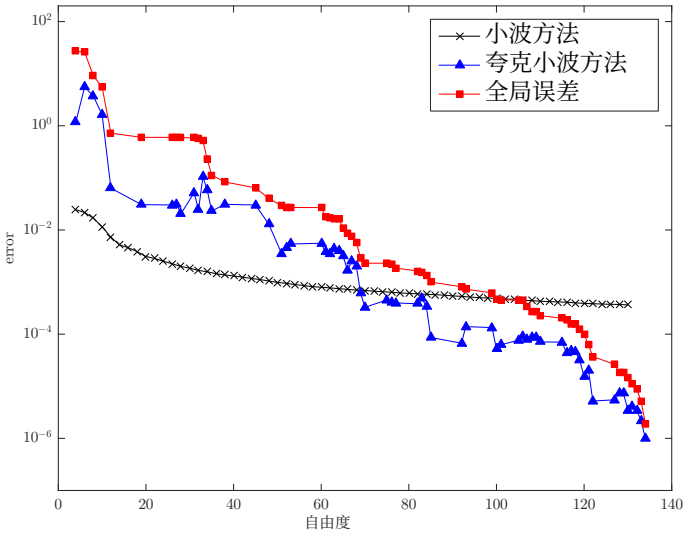


图 9：测试问题 v 在半对数尺度下的误差渐近行为。黑线和蓝线分别表示小波方法和夸克小波方法的 L_2-逼近误差。红线表示夸克小波情形下估计量 $\mathcal{E}(T_N)^{1/2}$ 的变化情况。

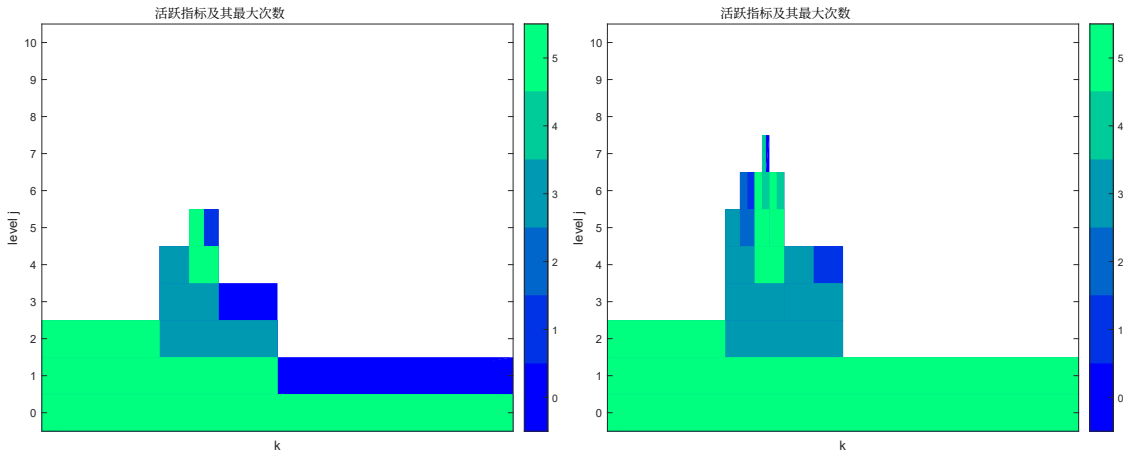


图 10：示例 v 经过 $N = 20$ 步后，树 T_N 中活跃夸克小波系数及其最大多项式次数的分布：自由度为 52（左）和经过 $N = 50$ 步后自由度为 110（右）。

资助。本文是德国研究联合会（DFG）项目“椭圆算子方程的自适应高阶夸克小波框架方法”的研究成果，资助编号为 DA360/24−1 （Stephan Dahlke、Marc Hovemann）和 RA2090/3−1 （Thorsten Raasch）。

参考文献

[1] I. Babuˇska 和 M. Suri，《有限元方法的 p 版本和 h-p 版本：基本原理与性质》，SIAM Rev. 36（1994），第 4 期，578-632。[2] R. E. Bank、A. Parsania 和 S. Sauter，《hp 有限元方法的饱和估计》，Comput. Vis. Sci. 16（2013），第 5 期，195-217。

[3] A. Barinka、T. Barsch、P. Charton、A. Cohen、S. Dahlke、W. Dahmen 和 K. Urban, 《椭圆问题的自适应小波格式——实现与数值实验》, SIAM 科学计算杂志 23（2001）, 第 3 期, 910-939。[4] P. Binev, 《hp-自适应的树逼近》, SIAM 数值分析杂志 56（2018）, 第 6 期, 3346-3357。[5] P. Binev、W. Dahmen 和 R. DeVore, 《具有收敛率的自适应有限元方法》, 数值数学 97（2004）, 第 2 期, 219-268。[6] P. Binev 和 R. DeVore, 《自适应树逼近中的快速计算》, 数值数学 97（2004）, 第 2 期, 193-217。[7] M. B¨urg 和 W. D¨orfler, 《高维空间中自适应 hp 有限元策略的收敛性》, 应用数值数学 61（2011）, 第 11 期, 1132-1146。[8] C. Canuto、R. H. Nochetto、R. Stevenson 和 M. Verani, 《hp 自适应有限元方法的收敛性与最优性》, 数值数学 135（2017）, 第 4 期, 1073-1119。[9] C. Canuto、R. H. Nochetto、R. Stevenson 和 M. Verani, 《关于 hp 自适应有限元方法的 p-稳健饱和》, 计算数学与应用 73（2017）, 第 9 期, 2004-2022。[10] O. Christensen, 《框架与 Riesz 基导论》, Birkh¨auser, Cham, 2016。[11] P. G. Ciarlet, 《椭圆问题的有限元方法》, SIAM, 2002。[12] A. Cohen、W. Dahmen 和 R. DeVore, 《椭圆算子方程的自适应小波方法：收敛率》, 数学计算 70（2001）, 第 233 期, 27–75。[13] A. Cohen、W. Dahmen 和 R. DeVore, 《非线性变分问题的自适应小波方案》, SIAM 数值分析杂志 41（2003）, 第 5 期, 1785-1823。[14] A. Cohen、I. Daubechies 和 J.-C. Feauveau, 《紧支撑小波的双正交基》, 纯粹与应用数学通讯 45（1992）, 第 5 期, 485-560。[15] S. Dahlke、U. Friedrich、P. Keding、A. Sieber 和 T. Raasch, 《用于椭圆偏微分方程的自适应 quarkonial 区域分解方法》, IMA 数值分析杂志 41（2021）, 第 4 期, 2608-2638。[16] S. Dahlke、P. Keding 和 T. Raasch, 《具有压缩性质的 quarkonial 框架》, Calcolo 54（2017）, 第 3 期, 823-855。[17] S. Dahlke、T. Raasch 和 A. Sieber, 《自适应 quarklet 逼近的指数收敛》, 复杂性杂志 59（2020）, 101470。[18]P. Daniel 和 M. Vohral´ık, 《具有实际停止准则的自适应非精确 hp-细化策略的保证收缩》, 预印本, 2020。[19] W. D¨orfler 和 V. Heuveline, 《一维空间中自适应 hp 有限元策略的收敛性》, 应用数值数学 57（2007）, 第 10 期, 1108-1124。[20] W. Hackbusch, 《椭圆微分方程：理论与数值处理》, Springer, 柏林、海德堡, 2017。[21]M. Hovemann 和 S. Dahlke, 《Triebel-Lizorkin 空间的 quarklet 刻画》, 预印本, 2021年。arXiv:2112.06010。

[22]M. Hovemann、A. Kopsch、T. Raasch 和 D. Vogel，《B样条准小波与双正交多小波》，预印本，2022年。arXiv:2212.02187。[23] J. Kappei，《非线性椭圆问题的自适应框架方法》，《应用分析》90（2011），第8期，1323–1353页。[24] R. H. Nochetto、K. G. Siebert 和 A. Veeser，《自适应有限元方法理论：导论》，载于 DeVore, Ronald（编）等，《多尺度、非线性与自适应逼近：献给 Wolfgang Dahmen 六十岁生日的纪念文集》。Springer，柏林，409–542页，2009年。[25] C. Schwab，《p 型与 hp 型有限元方法：固体与流体力学中的理论与应用》。克拉伦登出版社，牛津，1998年。[26] A. Sieber，《自适应准小波格式：逼近、压缩与函数空间》。Logos 出版社，柏林，2020年。[27]R. Stevenson，《求解算子方程的自适应小波方法：综述》，载于 DeVore, Ronald（编）等，《多尺度、非线性与自适应逼近：献给 Wolfgang Dahmen 六十岁生日的纪念文集》。Springer，柏林，543–597页，2009年。[28] M. Werner，《椭圆算子的自适应小波框架区域分解方法》，博士论文，菲利普大学马尔堡，2009年。[29] T. P. Wihler，《基于连续索伯列夫嵌入的 hp 自适应策略》，《计算与应用数学杂志》235（2011），第8期，2731–2739页。