arXiv:2301.04127v1 [math.AG] 10 Jan 2023

通过三角集合研究 $K3$-四次曲面上的直线

ALEX DEGTYAREV 和 S LAWOMIR RAM S

Abstract. 我们证明，对于具有非空奇异轨迹的四次复$K3$曲面，其上的直线数至多为 52，且这一上界是锐利的。我们还对光滑复四次曲面上直线数超过 48 的构型进行了分类。

1. Introduction引言

我们的主要目标是提出一种研究复射影 $K3$-四次曲面上大型直线构型的方法。特别地，我们证明以下定理。

定理 1.1 (见§7.2)。 设 $X_4 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 是一个具有非空奇异轨迹的次数 4 $K3$ 曲面。那么 X_4 至多包含 52 条直线。此外，每个至少含有 $K3$ 条直线的四次曲面都包含四条共面的直线。49

上述界是紧的：2016 年，首位署名作者证明了存在一个具有 52 条直线且奇异轨迹非空（有两个简单节点）的复 $K3$ 四次曲面（借助 Torelli定理，见 [6, 定理 1.10]）；相关曲面的方程由 D. Veniani 找出，见 [25, 例 5.5]。

我们猜想在 [6, 定理 1.10] 中发现的四次曲面是唯一达到 定理1.1所给界的四次曲面，但证明这一事实超出了本文的范围。

众所周知，在射影$K3$曲面上，随着极化 d 次数的增大，大型直线构型的复杂性会降低。特别是，对于八次曲线（见[2, 定理 1。1]）和六次曲面（即将发表在 [3]）而言，接近极大构型的完整分类已为人所知：存在奇点时，相应的上界分别为 32 和 36，而在光滑情形下则为 36 和 42。相比之下，尽管带奇点的四次曲面自 19 世纪以来便受到广泛研究（参见，例如，经典专著 例如，经典专著 [12]），但关于这类曲面上的大型直线构型，几乎鲜为人知。主要原因在于四次曲面上存在所谓的三角形的构型（定义见 §2.4 ）——这一性质大幅增加了问题的复杂性。本文借助所谓的三角集合来绕开这一困难；该概念在§3中引入。

容易验证，对于 $d > 2$，次数为 d 的费马曲面（定义在 $\mathbb{C}$ 上）恰好包含 $3d^2$ 条直线。此外，对于几乎所有整数 d ，费马曲面都是拥有众多直线的光滑复射影曲面的已知最佳例子，而是否存在含有更多直线的光滑 d 次曲面，仍是一个悬而未决的问题。为展示我们方法的威力，我们改进了 [8] 的结果，并对

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14J28；次要分类：14J27、14N25。
Key words and phrases. $K3$曲面、四次曲面、椭圆铅笔、整格、判别形式。A.D. 部分获得了 T ¨UB ˙ITAK 资助项目 118F413 的支持。S.R. 部分获得了波兰国家科学中心 Opus资助项目（编号：2018/31/B/ST1/02857）的支持。

TABLE 1. 至少含有49条直线的光滑复四次曲面

Γ	$\lvert$自同构群 $\Gamma\rvert$	$\lvert$对称群 $X_4\rvert$	(r,c)	$\mathrm{NS}(X_4)^\perp$
$\mathbf{X}_{64}$	4608	$(192, 1493)^6$	(1, 0)	$[8,4,8]$
$\mathbf{X}'_{60}$	480	$(60, 5)^2$	(1, 0)	$[4,2,16]$
$\mathbf{X}''_{60}$	240	$(60, 5)^2$	(0, 1)	$[4,1,14]$
$\mathbf{X}_{56}$	128	$(16, 11)^4$	(0, 1)	$[8,0,8]$
$\mathbf{Y}_{56}$	64	$(16, 8)^2$	(1, 0)	$^*[2,0,32]$
$\mathbf{Q}_{56}$	384	$(48, 50)^2$	(1, 0)	$[4,2,16]$
$\mathbf{X}_{54}$	384	$(24, 12)^2$	(1, 0)	$[4,0,24]$
$\mathbf{Q}_{54}$	48	(8, 5)	(1, 0)	$[4,2,20]$
$\mathbf{X}'_{52}$	24	(3, 1)	(1, 0)	$[8,4,12]$
$\mathbf{X}''_{52}$	36	(6, 1)	(1, 0)	$[4,2,20]$
$\mathbf{X}'''_{52}$	320	$(20, 3)^4$	(1, 0)	$[10,0,10]$
$\mathbf{X}^{\mathrm{v}}_{52}$	32	$(4, 1)^2$	(1, 0)	$[10,4,10]$
$\mathbf{Y}'_{52}$	8	$(4, 1)^2$	(1, 0)	$^*[2,0,38]$
			(0, 1)	$[8,2,10]$
Y''_{52}	8	$(4, 2)^2$	(1, 0)	$^*[2,1,40]$
			(0, 1)	$[4,1,20]$
			(0, 1)	$[8,1,10]$
$\mathbf{Z}_{52}$	384	$(12, 3)^2$	(1, 0)	$^*\mathrm{U}(2) \oplus [24]$
(52)	384	(8, 5)	(1, 0)	$[-8] \oplus [4,2,4]$
$\mathbf{Q}'_{52}$	64	(8, 5)	(1, 0)	$[4,0,24]$
Q''_{52}	64	(16, 11)	(0, 1)	$[8,4,12]$
Q'''_{52}	96	$(4, 1)^6$	(1, 0)	$[10,5,10]$
$\mathbf{X}_{51}$	12	(6, 1)	(0, 1)	$[4,1,22]$
			(1, 0)	$[6,3,16]$
$\mathbf{X}'_{50}$	18	(3, 1)	(1, 0)	$[4,2,28]$
$\mathbf{X}''_{50}$	12	(3, 1)	(2, 0)	$[4,0,24]$
$\mathbf{X}'''_{50}$	16	$(2, 1)^2$	(0, 1)	$[4,0,24]$
$\mathbf{Z}_{50}$	160	$(10, 1)^2$	(1, 0)	$\mathrm{U}(5) \oplus [4]$
(50)	96	(8, 5)	(1, 0)	$^*\mathrm{U}(2) \oplus [28]$
$\mathbf{Z}_{49}$	36	(3, 1)	(1, 0)	$^*\mathrm{U}(2) \oplus [28]$

所有包含至少 49 条直线的构型光滑四次曲面（即，比费马四次曲面上的构型更大的构型）。值得注意的是，与[8], 相比，我们只发现了三个新构型：一个秩为 20 的构型（$\mathbf{Q}'''_{52}$ 此前由 [6]发现）以及两个秩为 19 的构型（在表1中分别标记为 (52) 和 (50)）。另一方面，光滑四次曲面上至少存在 28 个包含 48 条直线的构型，这又说明 48 是一个合理阈值（另见下文的命题 5.6 和注 4.11 ）。

定理 1.2 (参见§7.3)。 在同构意义下，存在 26 种构型，其上至少含有49 条直线，见光滑四次曲面，参见 表1。它们由 34 奇异(又称 射影刚性) 曲面 (其中有18个 实曲面和 8 对复共轭曲面) 以及五个连通的1参数族实现。

因此，我们回答了 [8, 补遗 1.4] 中遗留的一个问题。

补遗 1.3 (参见§7.4)。 实实直线的条数所取值的完整列表，适用于实光滑四次曲面，是

$$\{0, 1, \dots, 49, 50, 52, 56\}.$$

实光滑四次曲面上超过 48 条实直线的构型，在表1中以 * 标出表1。

表1 列出了：

- 构型的名称 Γ （大多沿用 [8]）； 下标始终指直线的数量（ Γ的顶点）；
- 群 Aut Γ 的大小，即 Γ的抽象图自同构群；
- 具有给定 Fano 图的一般四次曲面 X_4 的辛自同构群 Sym X_4 ，以（阶数，序号）的形式表示，参见 GAP 中的 SmallGroup 库 [9]；上标表示 Sym X_4 在 X_4 的射影自同构全群 Aut(X_4, h) 中的序号（若大于 1）；
- 等线模空间的实分支数与复共轭分支对数，分别为（r, c）；
- 超越格（若 rk $\geqslant 3$，则为一般情形） $T := \mathrm{NS}(X_4)^{\perp}$；若相应的变形族包含所有直线均为实直线的实四次曲面，则以 * 标记（见 [8, 引理 3.8]）。

若 T 不能由 Γ 确定，则将每个格分别列在单独一行（紧随主条目之后），并相应地逐项列出分支数（r, c）。

与 [5]，一样，我们对常见的整格采用以下记号：

- $[a] := \mathbb{Z}u$ 是由条件 $u^2 = a$ 给出的秩 1 格；
- $[a, b, c] := \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$, $u^2 = a$, $u \cdot v = b$, $v^2 = c$ 是一个秩 2 格；当它是正定的，我们假设 $0 < a \leqslant c$ 和 $0 \leqslant 2b \leqslant a$：于是， u 是最短向量， v 是次短向量，且三元组（a, b, c）唯一；
- U $:= [0, 1, 0]$ 是秩 2 的偶幺模格；
- $L(n)$表示将给定格 L 按固定整数 $n \in \mathbb{Z}$缩放后得到的格。

对于与格 L 相关的各种对象（行列式、判别群等），我们通常沿用标准记号——例如参见 [1, 16]。二次型 $L \otimes \mathbb{R}$ 的惯性指数记为$\sigma_{\pm,\ 0}(L)$。

1.1. 论文内容。 粗略地说，论文分为两部分：离散部分（§2–§6）和几何部分（§7）。

我们的方法是对 [8, 2], 中提出的方法的改进；我们在例如，可接受图）§2中回顾必要的事实并引入一些技术术语（§3中定义主要的技术工具，即 三角集合，并讨论如何用一组三角集合扩展给定的图。最后，在完成这些准备工作后，我们给出命题 3.12的证明，它是定理 1.1中最困难情形的离散对应。。

§4 是一个旁论：我们将讨论范围限制在光滑格的情形（即假设格中不含例外除子），并运用三角集合对顶点数至少为 49 的几何 Fano 图进行分类。

在 §5 和 §6，我们回到一般情形（允许存在例外除子），并研究无三角集 Fano 图的性质。

最后，在§7 中，我们回顾曲面的 Fano 图（分别为扩展 Fano 图）的定义，以及它与格的 Fano 图的几何性的关系

，参见定理 7.4 （分别参见定理 7.7），并证明论文的主要结果，即定理 1.1 和定理 1.2。

1.2. 问题的历史。如前所述，自 19 世纪以来，人们一直在深入研究 $\mathbb{P}^3$ 上的四次曲面上的直线构型（或更一般地说，光滑有理曲线）。然而，意大利学派的方法还不足以有效处理此类曲面上大型直线构型的分类。直到最近十年，椭圆纤维化、Mordell–Weil群、Torelli定理，以及格理论中算法方法的进展，才使光滑四次曲线的研究取得了重大进展：特征为 $p \neq 2$、3（见 [20, 18, 8]）、$p = 3$ （见 [17]）、$p = 2$ （见 [7]）的域上的直线数目锐界，大型构型的分类（见 [8]），以及含有许多直线的曲面的显式方程（见 [24] 及其中的参考文献）。奇怪的是，Bogomolov–Miyaoka–Yau不等式对四次曲面的情形并不给出任何界（见 [14]）。

相比之下，尽管人们长期以来对此颇感兴趣（例如参见经典著作 [12]），但对于带奇点的四次曲面，人们所知甚少——本质上，已知的只有：在特征为 $p \neq 2$ 的域上，带奇点的四次曲面上的直线数不会超过光滑四次曲面上的直线最大数目——参见 [23, 25, 11]。对于 $p = 2$，带奇点的四次曲面上的直线最大数目为 68（而光滑情形下为 60，参见 [22]），且我们确实知道能达到这一最大值的曲面的射影模型（参见 [17]）。

对 [8] 中首创的方法加以改进后，得以完整描述 [5] 中 $d > 2$ 的光滑 d $K3$ 次曲面上的大型直线构形。将 Vinberg 算法与上述方法结合，可用于分类 $d > 4$ 上至多具有 Du Val 奇点的 d $K3$ 次曲面上的大型直线构形（参见 [2, 3]）。 [2] 中的方法不足以处理 ˜ 四次曲面的情形（即 $d = 4$）：直线三角形的存在（即 A_2 构形），以及这些三角形在四次曲面上可能彼此交错这一事实，导致出现许多在 $d > 4$ 的 d $K3$ 次曲面上不会出现的构形。本文讨论一种处理此类构形的方法。不过，为使论述简洁，我们将此方法用于求出奇异轨迹非空的复数 $K3$ 次四次曲面上的直线最大数目，但不尝试对含有 52 条直线的所有构形进行分类。

1.3. 致谢。本文主要是在我们于波恩马克斯·普朗克数学研究所访问期间完成的。我们感谢 MPIM 为我们创造了理想的工作条件。S.R. 感谢 IM PAN（波兰克拉科夫）提供的支持，使他得以完成这个项目。

2. Preliminaries

本节回顾我们在工作中使用的主要技术工具。为使叙述简洁，我们重点讨论 4-极化的 2-容许格和图的情形。详细内容和更一般的陈述可见 [2]。为保持叙述连贯，我们假设读者熟悉 $K3$-曲面、(-2)-曲线、等的基础理论，并采用形式化的图论语言。关于 §2–§6 中所考察的图与当前问题（即四次曲面上的直线）之间的关系，将在下文 §7.1 简要讨论，位置就在论文主要结果的证明之前。

2.1. 极化格。 回顾一下，非退化格 S 称为双曲的，如果 $\sigma_+ S = 1$。极化格 $S \ni h$ 是配备了一个指定向量 S 的双曲格 h ，该向量的平方为正；其平方 h^2 称为极化的次数，并且 S 称为 h^2-极化的。这里我们假设 $h^2 = 4$，因此凡是提到极化格，均指 4-极化格。此外，我们只考虑直线和例外除子（在 §4 中则仅考虑直线），不讨论次数更高的光滑有理曲线。

注记 2.1. 我们经常使用以下显然的观察：若 S 是双曲格，那么任意子格 $N \subset S$ 不是半正定的（此时有 $\operatorname{rk} \ker N = 1$），就是非退化的。

对于极化格以及 $n = 0, 1$，定义以下集合

$$\operatorname{root}_n(S, h) := \big\{ r \in S \;\big|\; r^2 = -2,\, r \cdot h = n \big\}.$$

如 [2, § 2.2], 中一样，我们用 $\mathfrak{rt}(S, h) \subset h^\perp \subset S$（分别用 $\mathcal{C}^+(S, h)$）表示由根 $_0(S, h)$（分别由正锥）生成的子格。回忆一下，每个连通分支 $\Delta^\sharp$ 的

$$\mathcal{C}^+(S, h) \smallsetminus \bigcup_{r^2=-2} r^\perp$$

都是由 S 的反射生成的群的基本多面体。

根据定义， $\mathfrak{rt}(S, h)$ 是根格，而每个固定的 Weyl 室 Δ 对于（由反射生成的）$\mathfrak{rt}(S, h)$ 都对应一个特定的基本多面体 $\Delta^\sharp$。我们用 $\{\Delta\}$ 表示与 Δ 的各面正交的“向外”根，并将带有一个特定 Weyl 室 Δ （对应于 $\mathfrak{rt}(S, h)$）的极化格 (S, h) 的（普通）Fano 图定义为顶点集合

$$\operatorname{Fn}_\Delta(S, h) := \{\Delta^\sharp\}_1 := \big\{ l \in \operatorname{root}_1(S, h) \;\big|\; l \cdot e \geqslant 0 \text{ for all } e \in \{\Delta\} \big\}, \tag{2.2}$$

由两个顶点 $l_1 \neq l_2$ 通过一条重数为 $l_1 \cdot l_2$的边相连。双色扩展法诺图定义为

$$\operatorname{Fn}^{\mathrm{ex}}_\Delta(S, h) := \{\Delta^\sharp\}_1 \cup \{\Delta\}, \tag{2.3}$$

边和顶点的重数遵循相同约定，顶点 v 根据数值 $v \cdot h \in \{0, 1\}$着色。

定义 2.4. 设 $S \ni h$ 为一个极化格，且 Γ 为根$_1(S, h)$的子集。

(1) 若 $\Gamma \subset \operatorname{Fn}_\Delta(S, h)$，则称 Weyl 室 Δ 与 Γ 相容。(2) 若存在一对顶点 $u, v \in \Gamma$ 被 r 分隔，使得 $r \cdot u > 0$ 且 $r \cdot v < 0$，则称根 $r \in \operatorname{root}_0(S, h)$相对于 Γ 是分隔的。

最后，为了在下文中运用关于 $K3$-曲面的通用理论，我们需要以下定义。

定义 2.5. 称极化格 $S \ni h$ 为:

(1) 可容许的，若不存在向量 $p \in S$ 使得 $p^2 = 0$ 和 $p \cdot h = 2$; (2) 几何的，若其可容许且存在一个本原等距变换

$$S \hookrightarrow \mathbf{L} := 2\mathbf{E}_8 \oplus 3\mathbf{U}.$$

2.2. 次几何图与几何图。设 Γ 为一个（普通）图。我们将极化格与 Γ 关联

$$\mathcal{F}(\Gamma) := (\mathbb{Z}\Gamma + \mathbb{Z}h)/\ker, \qquad h^2 = 4, \quad h \cdot v = 1 \text{ for } v \in \Gamma. \tag{2.6}$$

其中 $\mathbb{Z}\Gamma$ 是由顶点 $v \in \Gamma$ 自由生成的格，因此当 $u \neq v$ 之间由一条重数为 n 的边连接时， $u \cdot v = n$，且对每个 $v \in \Gamma$， $v^2 = -2$ 。

约定 2.7。与 [2, § 4], 中一样，我们讨论极化图 Γ （省略固定为 4 的度），并对 Γ 使用格论术语，例如秩 $\operatorname{rk}\Gamma := \operatorname{rk}\mathcal{F}(\Gamma)$ 等。此外，我们将 Γ 的顶点视为 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 中的向量：例如， $u \cdot v \in \mathbb{Z}$ 表示边 $[u, v]$ 的重数，并且我们称 u 与 $v \in \Gamma$ 相交，如果 $u \cdot v = 1$。唯一的例外是根据 $\mathbb{Z}\Gamma$ 的惯性指数而非 $\mathcal{F}(\Gamma)$（其总是假定为双曲的）对图进行分类：因此，我们称 Γ 为

- 若 $\sigma_+(\mathbb{Z}\Gamma) = \sigma_0(\mathbb{Z}\Gamma) = 0$，则为椭圆的，
- 若 $\sigma_+(\mathbb{Z}\Gamma) = 0$ 且 $\sigma_0(\mathbb{Z}\Gamma) > 0$，则为抛物的，并且
- 若 $\sigma_+(\mathbb{Z}\Gamma) = 1$ （不对 σ_0作任何假设），则为双曲的。

回顾一下，任意连通椭圆图（分别为抛物图）都是 Dynkin 图（分别为仿射 Dynkin 图）；如 [5], 所述，我们按照 Milnor 数的顺序排列仿射 Dynkin 图的同构类，其次为 $\mathsf{A} < \mathsf{D} < \mathsf{E}$。还要回顾的是，对于每个连通抛物子图 Σ，存在唯一的正的最小生成元 $\kappa_\Sigma \in \ker \mathbb{Z}\Sigma$；它具有 $\kappa_\Sigma = \sum m_c c$, $c \in \Sigma$ 的形式，且所有 $m_c > 0$。

我们在椭圆图和抛物图（的同构类）集合上定义扰动序： $\Gamma' \lhd \Gamma''$ 若 Γ' 同构于 Γ''的一个导出子图。

给定一个各向同性子群 $\mathcal{K} \subset \operatorname{discr}\mathcal{F}(\Gamma)$（又称核），我们考虑 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 关于 $\mathcal{K}$ 的有限指数扩张 $\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K})$（参见 [16]）。若一对 $(\Gamma, \mathcal{K})$ 存在与 $\mathfrak{rt}(\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K}) \ h)$ 相容的 Weyl 室 Δ，则称其为可扩展的（见定义 2.4）：

$$\Gamma \subset \operatorname{Fn}_\Delta \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K}).$$

回顾一下，根据 [2, 引理 3.4],，我们有

$$(\Gamma, \mathcal{K}) \text{ is extensible if and only if } \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K}) \text{ has no separating roots} \tag{2.8}$$

(见 定义 2.4)；此外，若此条件成立，则相容的 Weyl 室$\Delta \subset \mathfrak{rt}\,\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K})$ 是唯一的。因此，对于一对可扩展的 $(\Gamma, \mathcal{K})$，可以定义其饱和 和 扩展饱和

$$\operatorname{sat}(\Gamma, \mathcal{K}) := \operatorname{Fn}_\Delta \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K}), \qquad \operatorname{sat}^{\mathrm{ex}}(\Gamma, \mathcal{K}) := \operatorname{Fn}^{\mathrm{ex}}_\Delta \mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K}).$$

若图 Γ （分别地，一对 $(\Gamma, \mathcal{K})$）既可扩展，且格 $\mathcal{F}(\Gamma)$（分别地， $\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K})$）是可容许的，则称其为可容许的。于是，若格 $\mathcal{F}(\Gamma, \mathcal{K})$ 是几何的，则称各向同性子群 $\mathcal{K} \subset \operatorname{discr}\mathcal{F}(\Gamma)$ 为几何核。我们沿用 [2] 的约定，并记

$$\mathfrak{G}(\Gamma) := \big\{ \mathcal{K} \subset \operatorname{discr}\mathcal{F}(\Gamma) \;\big|\; \mathcal{K} \text{ is geometric} \big\}.$$

完成这些准备工作后，我们可以回顾以下定义。

定义 2.9。设 Γ 为一个图。

(1) 如果集合 $\mathfrak{G}(\Gamma)$非空，我们称 Γ 为子几何。(2) 如果对于某个核 $\mathcal{K} \in \mathfrak{G}(\Gamma')$, 有 $\Gamma \cong \operatorname{sat}(\Gamma', \mathcal{K})$，则称子几何图 Γ 为几何图。(3) 如果对于某个几何极化格 $S \ni h$，有 $\Gamma' \cong \operatorname{Fn}^{\mathrm{ex}}_\Delta(S, h)$，则称双色图 Γ' 为几何图。

2.3. 算法。 在许多论证中，我们使用计算机辅助测试来检查给定的图是否满足某些条件。所有算法均见 [2, 附录]。给定一个图 Γ，可以检查以下内容：

(1) $\mathcal{F}(\Gamma)$ 是双曲的，即 $\sigma_+\mathcal{F}(\Gamma) = 1$；尽管这很直接，但通常可以批量快速完成，参见 [2, 引理 A.3、A.4]；(2) Γ 是可扩展且可容许的，参见 [2, §A.1.1] 中的主测试；(3) Γ 是（子）几何的，参见 [2, §A.1.2]。

的主要工具 [2] 是从一个足够大的初始图 Γ_0开始，并通过每次添加一个顶点来扩展它，参见 §A.4，见 前引文。本文也采用了这种方法，参见 §5 和 §6，其中我们没有作过多解释，只陈述更新后的结果。本文的主要创新之处在于 §3；由于问题具有更复杂的几何性质，必须以每组三个以内的方式添加额外顶点。详情见 §3.3。

注 2.10. 我们的方法（以及任何基于格的方法）中一个技术性但至关重要的部分，是这样一个事实：几何图 Γ 的秩为 $\Gamma \leqslant 20$。由此可知，若 $\Gamma' = 20$ 的秩为 $\Gamma \supset \Gamma'$，则任何几何上图 Γ' 都具有某个 $\mathcal{K}$($\mathcal{K} \in \mathfrak{G}$) 的形式 sat($\Gamma'$, $\mathcal{F}$)，而且所有这类 Γ'([16]) 的有限指标扩张都可以通过 [2, （参见 3]§ A.1. 中的饱和列表）轻松找到。因此，我们引入另一个技术术语：

$$\Gamma \text{ is } \textit{acceptable} \text{ if it is subgeometric and } \operatorname{rk}\Gamma \leqslant 19.$$

我们约定，在每个算法的每一步之后，只有 符合要求的图会留待进一步处理（因此，我们无需添加数十个顶点来使直线数超过 50）；而每个秩为 Γ $\operatorname{rk}\Gamma = 20$的中间图在计算其饱和列表并将所有“有趣的”（参见下文的注3.24 ）几何上图记录到全局主列表后，都会被排除。

2.4. 按围长对图进行分类。 按照[5, 8], 我们根据最小仿射 Dynkin 图的类型 Γ （按 约定 2.7 的意义）将抛物图和双曲图细分 $\Sigma \subset \Gamma$。最重要的类别也可以用围长 girth(Γ) 来刻画（即 Γ中最短圈的长度；约定森林的围长为 ∞）。因此， Γ 称为

- 三角形的，或 A_2 型的，若girth(Γ) = 3,
- 四边形的，或 A_3 型的，若 girth(Γ) = 4,
- 五边形的，或 A_4 型的，若 girth(Γ) = 5,
- 星形的，或 D_4 型的，若 girth(Γ) $\geqslant 6$ 且 Γ 有一个度数为 $\geqslant 4$ 的顶点。

所有其他图都是局部椭圆的，即对每个顶点 $v \in \Gamma$，都有 val $v \leqslant 3$ （并且我们假设 girth(Γ) $\geqslant 6$ ，以排除几个平凡情形）。

给定一个图 Γ 和一个指定的连通抛物子图 $\Sigma \subset \Gamma$，由 Σ 诱导的铅笔 Π 定义如下：

$$\Pi := \Pi(\Gamma \supset \Sigma) := \Sigma \cup \left\{ l \in \Gamma \;\middle|\; l \cdot c = 0 \text{ for all vertices } c \in \Sigma \right\}. \tag{2.11}$$

这个图 $\Pi \supset \Sigma$ 是抛物的，因为它与 κ_Σ 正交（参见 约定 2.7 和注记 2.1）。我们有 $\Gamma = \Pi \cup$ 割线*，其中

$$\sec^* := \sec^*(\Gamma \supset \Sigma) := \left\{ l \in \Gamma \smallsetminus \Sigma \;\middle|\; l \cdot c = 1 \text{ for a vertex } c \in \Sigma \right\}. \tag{2.12}$$

sec* 的元素称为（多重）截面，或称为 Π的 m-截面，其中整数 $m := l \cdot \kappa_\Sigma$ 是截面 l的重数。若 $m = 1$，则该截面称为

单重，否则称为多重。固定一个次序 $\Sigma = (c_1, \dots, c_n)$，我们还考虑

$$\begin{aligned} \sec_i &:= \sec(\Gamma \supset \Sigma \ni c_i) \;\; := \bigl\{ l \in \Gamma \smallsetminus \Sigma \;\big|\; l \cdot c_j = \delta_{ij} \text{ for } c_j \in \Sigma \bigr\}, \\ \sec_i^* &:= \sec^*(\Gamma \supset \Sigma \ni c_i) := \bigl\{ l \in \Gamma \smallsetminus \Sigma \;\big|\; l \cdot c_i = 1 \bigr\} \supset \sec_i, \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 δ_{ij} 是克罗内克符号。我们有

$$\text{each set } \sec_i^* \supset \sec_i,\ i = 1, \dots, n, \text{ is either elliptic or parabolic,} \tag{2.14}$$

因为它与各向同性向量 $h - c_i \neq 0$ (见 注记 2.1)。

今后，我们几乎从不使用指代完全旗的正确但冗长的记法，因为 $\Gamma \supset \Sigma = (c_1, \dots, c_n)$ 总是假定为固定的。

3. 三角集合

三角集合（或 $\triangle$-集合）是容许图的一个导出子图，其˜所有连通分支均为 A_2, A_3, A_2, 或 A_1 型。显然，每个三角铅笔都是一个 $\triangle$-集合，但反之不成立： $\triangle$-集合也可能是椭圆的，即不含˜A_2 型分支。从组合学角度看， $\triangle$-集合 Θ 唯一地具有如下形式

$$\tilde{a}_2 \tilde{\mathbf{A}}_2 \oplus a_3 \mathbf{A}_3 \oplus a_2 \mathbf{A}_2 \oplus a_1 \mathbf{A}_1, \qquad (\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{N}^4, \tag{3.1}$$

系数四元组 $(\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1)$ 在同构意义下唯一确定 Θ。 $\triangle$-集（或系数四元组）的同构类称为模式。

我们将模式 θ 的基数 $|\theta|$ 定义为其任意代表元的基数，并在模式集合上引入以下序：

$$\theta' \prec \theta'' \quad \text{iff} \quad \begin{cases} |\theta'| < |\theta''| \text{ or} \\ |\theta'| = |\theta''| \text{ and } (\tilde{a}_2', a_3', a_2', a_1') > (\tilde{a}_2'', a_3'', a_2'', a_1''), \end{cases} \tag{3.2}$$

其中系数四元组按字典序比较。（请注意逆字典序！）此序不要与约定 2.7中定义的扰动序混淆。对于 $\triangle$-集，后者可用系数四元组轻易描述：当且仅当 $\theta' \lhd \theta''$,$\tilde{a}_2'$, $a_3', a_2', a_1')$ 可由 $(\tilde{a}_2'', a_3'', a_2'', a_1'')$ 经有限次如下形式的初等扰动得到

$$\begin{gathered} (\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1) \mapsto (\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1) + \delta, \\ \delta \in \bigl\{ (0, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 2), (-1, 0, 1, 0) \bigr\} \end{gathered}$$

前提是每一步中四元组始终属于 $\mathbb{N}^4$。

3.1. 构造三角图。 设 Γ 是一个三角形的可容许图，˜参见 §2.4。固定一个类型 $\mathbf{A}_2$ 纤维 $\Sigma = (c_1, c_2, c_3) \subset \Gamma$ 并考虑铅笔 Π 以及集合 $\sec_i$, $i = 1, 2, 3$，分别见（2.11）和（2.13）。

引理 3.3. 三角铅笔 Π 至多有一个多重截面；因此，

$$0 \leqslant |\Gamma| - |\Pi \cup \sec_1 \cup \sec_2 \cup \sec_3| \leqslant 1.$$

此外，若存在多重截面 s，则它与每个 $\sec_i$, $i = 1, 2, 3$ 都不相交。

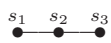
证明。考虑一个多重截面 s，并令 $e := h - c_1 - c_2 - c_3 - s$。

若 $s \cdot c_1 = s \cdot c_2 = s \cdot c_3 = 1$，则 e 与 h 正交，且每个 c_i、 $i = 1$、2、3。因此， $e = 0$（见注记 2.1）且任何其他直线 l 恰与 c_1、 c_2、c_3、 s中的一条相交，从而得到这两个结论。

同理，若 $s\cdot c_1 = s\cdot c_2 = 1$ 且 $s\cdot c_3 = 0$，则 e 是一个例外除子，且 $e\cdot s = e\cdot c_3 = 1 > 0$。因此，任何其他直线 l 至多与其中 一条相交：c_1、c_2、c_3、s，否则 $l\cdot e < 0$ 和 e 会将 s 与 l分隔开，见（2.8）。□

引理 3.4. 每个集合 sec_i, $i = 1,2,3$ 都是一个 $\triangle$-集合。

证明。 根据（2.14），只需排除 sec_i˜中包含 $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, 或 $\mathbf{D}_4$的连通分支。每个有问题的图都包含一条链



以及另一个与至少一个 l 相邻的顶点 s_1、s_2、s_3。于是 $s := s_1 + s_2 + s_3$是一个根，$s\cdot h = s\cdot c_i = 3$，且 $l\cdot s > 0$；因此，$e := -h + c_i + s$ 是一个分隔 s_1 与 l的例外除子，见（2.8）。□

现在，我们的目标是描述所有大小为 Γ 的几何图 $|\Gamma| \geqslant 53$。根据引理 3.3，只需考虑满足以下条件的三角铅笔 $\Sigma \subset \Pi \subset \Gamma$：

$$|\Pi| + |\mathrm{sec}_1| + |\mathrm{sec}_2| + |\mathrm{sec}_3| \geqslant 52.$$

显然，我们也可以假设 $\Pi \subset \Gamma$ 关于（3.2）是极大的，并且 c_1、c_2、c_3 的边 Σ 按如下顺序排列：$\mathrm{sec}_1 \succcurlyeq \mathrm{sec}_2 \succcurlyeq \mathrm{sec}_3$。这些假设给出了关于模式 的相容条件，适用于模式 $\pi \ni \Pi$ 和 $\theta_i \ni \mathrm{sec}_i$:

$$\pi \vdash \theta_1 \quad \text{if} \quad 3|\theta_1| + |\pi| \geqslant 52 \text{ and } \big(\theta_1 \preccurlyeq \pi \text{ or } \theta_1 \text{ is elliptic}\big); \tag{3.5}$$

$$(\pi \vdash \theta_1) \vdash \theta_2 \quad \text{if} \quad 2|\theta_2| + |\theta_1| + |\pi| \geqslant 52 \text{ and } \theta_2 \preccurlyeq \theta_1; \tag{3.6}$$

$$(\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2) \vdash \theta_3 \quad \text{if} \quad |\theta_3| + |\theta_2| + |\theta_1| + |\pi| \geqslant 52 \text{ and } \theta_3 \preccurlyeq \theta_2. \tag{3.7}$$

在（3.5）中，我们假设其中一项 π 或 θ_1固定，并将该条件视为对另一项的限制。若括号中的部分固定，则另外两个条件是对最后一项的限制。

由于 $\triangle$-集表现为截面集合，对于一个有定义维 $\mathrm{A}_2 \cong \Sigma = (c_1, c_2, c_3)$ 和 $\triangle$-集 Θ，我们定义 $\Sigma \sqcup_i \Theta$，其中˜ $i = 1$、2、3，是由 Σ 与 Θ 的不交并构成的图，并将 c_i 与每个顶点 $v \in \Theta$ 用一条简单边连接。

此构造可推广至模式，从而得到一个图的同构类。逐一检查参数四元组 $(\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1)$，便相当容易计算出模式集合

$$\mathcal{P} := \{\text{subgeometric triangular pencils}\}/\cong, \text{ and}$$
$$\mathcal{T} := \{\triangle\text{-sets } \Theta \text{ such that } \tilde{\mathbf{A}}_2 \sqcup_i \Theta \text{ is subgeometric}\}/\cong.$$

（为简化计算，对于 $\mathcal{P}$，可以从 Shimada 的列表 [21] 中的雅可比椭圆 $K3$曲面出发；对于 $\mathcal{T}$，则可以考虑界 $\mathrm{val}\, c_i \leqslant 20$，该界见于 [23]。）于是，条件（3.5）成为从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{T}$的二元关系。其他条件也同样下降到模式上，秩函数亦然：

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(\pi) &= |\Pi| - \tilde{a}_2(\Pi) + 2, \quad \Pi \in \pi \in \mathcal{P} \\ \mathrm{rk}(\tilde{\mathbf{A}}_2 \sqcup_i \theta) &= |\Theta| - \tilde{a}_2(\Theta) + 4, \quad \Theta \in \theta \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $\tilde{a}_2(\cdot)$ 表示抛物分量的数量。

下一个引理是这一计算的直接推论。对于最后一条陈述，我们只需列出四个秩为18或19的图的所有几何扩张（例如，使用 [2,附录 A]中的算法，见（3.8）；事实上，引理 3.9(3) 中的精确界为 $|\Gamma| \leqslant 29$。

˜引理 3.9。在几何图 Γ中，对于任意类型为 A_2 的纤维 Σ，有：

(1) 对每个 $i=1$，$\mathsf{sec}_i|\leqslant 18$ 为 2、3；(2) 若 sec_i 是椭圆的，则 $|\mathsf{sec}_i|\leqslant 15$；(3) 若 sec_i 是椭圆的且 $|\mathsf{sec}_i|>13$，则 $|\Gamma|\leqslant 52$。 ◁

注记 3.10。 根据 引理 3.9，相容条件 (3.5)可简化为

$$\pi\vdash\theta_1 \quad \text{if} \quad 3|\theta_1|+|\pi|\geqslant 52 \text{ and } \theta_1\preccurlyeq\pi$$

与 (3.6) 及 (3.7) 更为一致。事实上，若 θ_1 是椭圆的，我们可以假设$|\theta_1|\leqslant 13$；于是必有 $|\pi|\geqslant 13$，见 (3.5)，且 $\theta_1\preccurlyeq\pi$ 自动成立。

引理 3.11。 若 $\Pi\subset\Gamma$ 是关于 (3.2) 极大的三角铅笔，且$|\Gamma|>52$，则 $|\Pi|\geqslant 14$。

证明。正如注记 3.10 中所述，根据引理 3.9，我们有 $|\Pi|\geqslant 13$ 和$|\text{截面}_3|\leqslant|\text{截面}_2|\leqslant|\text{截面}_1|\leqslant|\Pi|$。若 $|\Pi|=13$，则由 (3.5) 得 $|\text{截面}_3|=|\text{截面}_2|=|\text{截面}_1|=13$，此外，$\Pi$ 必有一个多重截面 s。假设 $s\cdot c_1=s\cdot c_2=1$，于是 c_1、c_2、s 构成一个三角形，则并集 $(c_1,c_2,s)\sqcup$ 截面$_3\subset\Gamma$ 是一个有 16 个顶点的三角铅笔（见引理 3.3），这与 Π 的极大性矛盾。□

˜3.2. 丰足集合。令 $\Gamma_0\supset\Sigma=(c_1,c_2,c_3)\cong\mathrm{A}_2$ 为一个三角图，$i=\varnothing$、1、2、3 为参数，$\theta\in\mathcal{P}$（若 $i=\varnothing$）或 $\theta\in\mathcal{T}$（否则）为一个模式。若超图 $\Gamma\supset\Gamma_0$ 表示 $(\Gamma_0,\theta)_i$，则称其

$$\mathsf{sec}(\Gamma\supset\Sigma\ni c_i)\in\theta \text{ and } \Gamma\smallsetminus\mathsf{sec}_i=\Gamma_0, \quad \text{if } i=1,2,3$$
$$\Pi(\Gamma\supset\Sigma)\in\theta \text{ and } \Gamma\smallsetminus\Pi=\Gamma_0\smallsetminus\Sigma, \qquad \text{if } i=\varnothing.$$

一对 $(\Gamma_0,\theta)_i$ 称为丰足的，若它不能由可接受图表示，参见注 2.10。这两个概念都可推广到图的集合 $\mathcal{G}$：若图 $\Gamma_0\in\mathcal{G}$能够表示 $(\Gamma_0,\theta)_i$，则称 Γ 表示 $(\mathcal{G},\theta)_i$；若每个 $(\Gamma_0,\theta)_i$，$\Gamma_0\in\mathcal{G}$ 都是丰足的，则称 $(\mathcal{G},\theta)_i$ 是丰足的。通过迭代，我们将这两个概念推广到一个相容的（即满足 §3.1 中相容条件的）模式集合

$$\pi\in\mathcal{P}, \quad \theta_i\in\mathcal{T},\ i=1,\dots,n\leqslant 3.$$

显然，如果 $\pi\vdash\ldots\vdash\theta_n$ 是丰富的，那么任何带有 $\pi\lhd\pi'$、……、$\theta_n\lhd\theta'_n$ 的 $\pi'\vdash\ldots\vdash\theta'_n$ 也都是丰富的。

我们对 定理 1.1 的证明，实质上是应用下文 §3.3中的算法，来证明任意相容集合 $\pi\vdash\theta_1\vdash\theta_2\vdash\theta_3$ 都是丰富的：事实上，条件（3.5）–（3.7）保证，在此过程中我们会遇到 所有 次几何图 Γ，使得要么 $|\Gamma|>52$，要么 $\mathbf{rk}\,\Gamma=20$；后一种情况下，只需分析 Γ的所有几何饱和。为此，我们引入 排除集合这一归纳概念：

- 任何丰富的相容集合都被视为排除的；
- 一般而言，如果任意相容扩张（$\pi\vdash\theta_1\vdash\ldots\vdash\theta_n$）$\vdash\theta_{n+1}$、$\theta_{n+1}\in\mathcal{T}$ 都是排除的，那么相容集合 $\pi\vdash\theta_1\vdash\ldots\vdash\theta_n$、$n\leqslant 2$ 也是排除的。

通过机器辅助计算，我们建立以下结论；其证明见§3.6，在§3.3、§3.4 和§3.5，我们汇总所有必要事实之后。

命题 3.12 （见§3.6）。 每个相容对 $\pi\vdash\theta_1$，其中

$$\pi\in\mathcal{P}_{14}:=\bigl\{\pi\in\mathcal{P}\;\big|\;|\pi|\geqslant 14\bigr\} \quad \textit{and} \quad \theta\in\mathcal{T},$$

被排除。

根据定义，命题 3.12 的断言意味着，对于任意相容集合 Γ 的每个代表元 $\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2 \vdash \theta_3$，$\pi \in \mathcal{P}_{14}$，要么 $|\Gamma| = 52$，要么 $\mathbf{rk}\,\Gamma = 20$；此外，证明过程中会遇到所有这类代表元。后一事实使我们能够得到满足 Γ 的相容集合 $\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2 \vdash \theta_3$的代表元 $\pi \in \mathcal{P}_{14}$的完整列表，其中$|\Gamma| > 52$ 且 $\mathbf{rk}\,\Gamma = 20$ （见补遗 3.23）。

3.3. 用三角集合扩展图。计算的核心是一种算法：用给定的模式 $\theta \in \mathcal{T}$扩展给定的次几何图 Γ_0，目标是列出所有表示 $(\Gamma_0, \theta)_i$ 的次几何上图 $\Gamma \supset \Gamma_0$ （其中 $i = \varnothing$, 1、2、3 也固定，见 §3.2）。 $\Gamma \smallsetminus \Gamma_0$ 的元素称为截面，而 $\Gamma \smallsetminus \Gamma_0 \in \theta$ 的连通分支称为多截面。该算法与 [2], 中的算法类似，只是我们无法再保证各截面两两不相交。因此，我们不再每次向 Γ 添加一个截面，而是预先固定 θ，并按 $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1$ 的顺序添加整个多截面。

约定 3.13. 从现在起，遵循 [2, §A.3], ，我们将截面 v 与其支撑等同

$$\operatorname{supp} v := \{u \in \Gamma_0 \mid v \cdot u = 1\}$$

因此将其视为 Γ_0的子集。我们也保留记号

$$\Gamma_0 \sqcup \mathbf{v} \quad \text{and} \quad \Gamma_0 \sqcup \mathbf{v}(\mathfrak{m})$$

对于一个多重集 $\mathbf{v}$ (我们不再假设其已排序)以及一个 $(|\mathbf{v}| \times |\mathbf{v}|)$-矩阵 $\mathfrak{m}$。正如 §2.3 中所述，每一步之后仅保留可接受图。

实际操作中，我们首先计算群 $G_0 := \operatorname{Aut}\Gamma_0$ 并设定

$$\mathcal{S}(\Gamma_0) := \{s \subset \Gamma_0 \mid s \cap \Sigma = \underline{\text{fixed}}\} \tag{3.14}$$

满足当前问题所施加的额外条件的 Γ_0 截面集合。（这里，预先固定的$\subset \Sigma$ 是一~~个事~~先确定的特定子集。我们也可以考虑一些显而易见的几何限制，但这并非关键：“不合适”的截面会立即被 §2.3(1) 中的初步检验排除。我们省略了许多其他技术性调整，并以代码 [4] 作为最终依据。）接着，运行 §2.3(2) 和 (3) 中所述的检验，计算集合

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\Gamma_0) &:= \{v \in \mathcal{S}(\Gamma_0) \mid \Gamma_0 \sqcup v \text{ is acceptable}\}, \\ \mathfrak{m}(\Gamma_0) &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{A}_1(\Gamma_0)^{\dim \mathfrak{m}} \mid \Gamma_0 \sqcup \mathbf{v}(\mathfrak{m}) \text{ is acceptable}\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

˜其中 $\mathfrak{m} = \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2$, $2\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$ (按此顺序)。当然，检验是针对每个 G_0-轨道的一个代表元进行的；下文中（参见，例如，注记 3.19）均默认采用这一约定。如果“必需”列表˜为空（例如，若 $\mathbf{A}_2(\Gamma_0) = \varnothing$ 而 θ 包含 $\mathbf{A}_2$ 或 $\mathbf{A}_3$, 参见 下一条注记）。

注记 3.16（一个技术细节）。在计算 ˜$\mathrm{A}_2(\Gamma_0)$ 时会用到集合 $\mathrm{A}_2(\Gamma_0)$：我们只考虑满足对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant 3$，$(v_i, v_j) \in \mathrm{A}_2(\Gamma_0)$ 的三元组 (v_1, v_2, v_3)。同样，在计算 $\mathrm{A}_3(\Gamma_0)$ 时，$\mathrm{A}_2(\Gamma_0)$ 和 $2\mathrm{A}_1(\Gamma_0)$ 都会用到。此外，在所有后续步骤中都会用到 $2\mathrm{A}_1(\Gamma_0)$：在迭代时

$$\Gamma_{n-1} \sqcup \mathbf{v}(\mathfrak{m}_n) = \big(\Gamma_0 \sqcup \mathbf{u}(\cdot)\big) \sqcup \mathbf{v}(\mathfrak{m}_n),$$

在（3.17）中，我们首先检查（u, v） $\in 2\mathbf{A}_1$（Γ_0）对所有 $u \in \mathbf{u}$、$v \in \mathbf{v}$均成立。

˜现在，令 $\theta = \tilde{a}_2\mathbf{A}_2 + a_3\mathbf{A}_3 + a_2\mathbf{A}_2 + a_1\mathbf{A}_1,$，使得 $N := \tilde{a}_2 + a_3 + a_2 + a_1$ 为分量数，并令 $\mathfrak{m}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{m}_N$ 为分量类型˜，其中 θ 通过 $\mathbf{A}_2 > \mathbf{A}_3 > \mathbf{A}_2 > \mathbf{A}_1$ 排序）。然后，我们从以下内容开始

$$\mathfrak{S}_0 := \{\Gamma_0\}$$

并在最多 N 步内完成计算。

步骤 $n \geqslant 1$：对于每个图 $\Gamma_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$，我们选取 $\mathbf{v}$ 作为每个 $(\operatorname{Aut}\Gamma_{n-1})$-轨道在 $\mathfrak{m}_n(\Gamma_0)$ 上的一个代表元，并使用 §2.3(2) 和 (3) 中的检验进行计算

$$\mathfrak{S}_n(\Gamma_{n-1}) := \bigl\{\Gamma_{\mathbf{v}} := \Gamma_{n-1} \sqcup \mathbf{v}(\mathfrak{m}_n) \;\big|\; \Gamma_{\mathbf{v}} \text{ is acceptable}\bigr\}. \tag{3.17}$$

该步骤最后将所有集合 $\mathfrak{S}_n(\Gamma_{n-1})$、$\Gamma_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ 合并起来，随后保留每个图同构类的一个代表元。

算法在完成步骤 N 时终止（此时得到列表 $\mathfrak{S}_N(\Gamma_0)$，需通过其他方式处理），或者在先前某一步得到空列表 $\mathfrak{S}_n(\Gamma_0) = \varnothing$ 时终止，这意味着 (Γ_0, θ) 是丰沛的。

注3.18. 图的自同构和同构均使用有向图软件包 GAP [9]计算。所有态射均受到限制：我们假设纤维 Σ作为一个集合固定，并且通常还将一条或两条边 $c_i \in \Sigma$ 逐点固定，因此集合 $\mathcal{S}(\Gamma_0)$ 在 (3.14) 中是不变的。

注记 3.19（一个技术细节）。每当矩阵 $\mathfrak{m}$ 发生变化，即每当$\mathfrak{m}_n > \mathfrak{m}_{n+1}$时，我们都会为每个图 $\Gamma_n \in \mathfrak{S}_n$ 重新计算相关集合 $\mathfrak{m}(\Gamma_n)$，并在后续步骤中使用这些新列表。与 Γ_0的情形不同，我们不必从头开始，而只需对最后一个已计算过这些集合的子图 $\Gamma_m \subset \Gamma_n$ 所对应的现成列表 $\mathfrak{m}(\Gamma_m)$运行检验。

3.4. 处理多个模式。本节内容纯属技术性内容；然而，正是此处所述的调整使计算速度大幅提升，并最终有助于计算在合理的时间内终止。

通常，我们固定一个子几何图 Γ_0，并尝试排除一整组模式 $\mathcal{T}(\Gamma_0)$。由于这些模式往往具有相似的初始序列，逐一处理它们会迫使我们反复执行相同的计算步骤。为避免重复并删去若干冗余步骤，我们按直接字典序对模式排序，并同时处理它们˜，将计算组织成四层：最外层 $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$, ，最内层为 $\mathbf{A}_1$。

每个内部层都从某个中间图 Γ 开始，并处理一组模式 $\mathcal{T}$（Γ）。如果算法提前终止，在某个模式 θ处，我们便得出结论：(Γ, θ) 是丰足的，因此，只要$\theta \lhd \theta'$，(Γ, θ') 也同样丰足。我们会将这一事实报告给前一层，在那里汇总这些信息，并且通常会因此排除图 Γ 和/或某些模式，不再进一步考虑。关于具体细节，请参见代码 [4]（我们将每个后续层实现为前一层中的一个钩子，用来修改中间列表）；这里，我们仅通过以下简单示例来说明这一范式。

例 3.20. 假设要考虑的模式为

$$\mathcal{T}(\Gamma_0) = \bigl\{2\mathbf{A}_2 \oplus 6\mathbf{A}_1, 3\mathbf{A}_2 \oplus 4\mathbf{A}_1, 4\mathbf{A}_2 \oplus 2\mathbf{A}_1\bigr\},$$

因此只需进行两层计算。我们执行 A_2 层的前两步，得到一个列表 $\mathfrak{S}_2 = \{\Gamma_2', \Gamma_2''\}$，然后针对两个图分别切换到 A_1 层。假设这个内部层终止于

- step 4 for $\Gamma_2' \Rightarrow (\Gamma_2', 4\mathbf{A}_1), (\Gamma_2', \mathbf{A}_2 \oplus 3\mathbf{A}_1), (\Gamma_2', 2\mathbf{A}_2 \oplus 2\mathbf{A}_1)$ are abundant,
- step 5 for $\Gamma_2'' \Rightarrow (\Gamma_2'', 5\mathbf{A}_1), (\Gamma_2'', \mathbf{A}_2 \oplus 4\mathbf{A}_1)$ are abundant.

（显然，$4\mathrm{A}_1 \lhd \mathrm{A}_2 \oplus 3\mathrm{A}_1 \lhd 2\mathrm{A}_2 \oplus 2\mathrm{A}_1$ 和 $5\mathrm{A}_1 \lhd \mathrm{A}_2 \oplus 4\mathrm{A}_1$。）由此可知，$\Gamma_2'$ 可以从 $\mathfrak{S}_2$ 中排除，且 $2\mathrm{A}_2 \oplus 6\mathrm{A}_1$ 和 $3\mathrm{A}_2 \oplus 4\mathrm{A}_1$ 都可以从 $\mathcal{T}(\Gamma_0)$中排除。因此，我们可以在新的缩减列表 $\{\Gamma_2''\}$上再运行两步 A_2-层，随后对结果运行 A_1-层。（第 3 步之后的 A_1-层可以跳过，因为 $\theta = 3\mathrm{A}_2 \oplus 4\mathrm{A}_1$ 已经被排除！）

若非 Γ_2''（例如，若对于两个图中的每一个，A_1-层都在第 6 4 步终止），我们本会立即停止，因为 $\mathcal{T}(\Gamma_0)$中的所有元素都已被第 2 步之后的 A_1-层排除。

3.5. 激进版本。在某些情况下，可以论证，为了实现目标 $|\Gamma| \geqslant 53$，超图 $\Gamma \supset \Gamma_0$ 必须由少数几个关于 Γ_0相互独立的两两不相交顶点在 Γ_0 上张成。（确切地说，这一条件意味着$\mathcal{F}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ 由关于 $\mathcal{F}(\Gamma_0) \otimes \mathbb{Q}$ 的 $(\mathrm{rk}\ \Gamma - \mathrm{rk}\,\Gamma_0)$ 个两两不相交顶点生成。）在这种情况下，我们切换到算法的激进版本，即我们

- 仅添加不相交顶点（A_1层），
- 忽略不会增加秩的额外顶点，并且
- 检查所有中间图的饱和列表，包括 Γ_0,

参见 第 渐进模式 见 [2, §A.4.4]。

确切地说，这种方法用于

- 在引理 3.9（3）的证明中：我们至多添加两个不相交顶点，并且
- 在下文 $= \{c_2\}$ 或 $\{c_3\}$ 在 §3.6中固定的步骤（另参见 注 4.11），扩展一个 Γ_0 次极大秩 rk 的图 $\Gamma_0 = 19$。

3.6. 命题 3.12 的证明。 如前所述，该证明是一次明确的机器辅助计算，使用了 §3.3 和 §3.4 中描述的算法。计算分两步进行：首先，对于每个模式 $\theta_1 \in \mathcal{T}$，我们排除几乎所有相容模式 $\pi \in \mathcal{P}_{14}$；这些模式的集合记为 $\mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$。然后，对于每个 $\pi \in \mathcal{P}_{14}$，我们排除剩余的模式 $\theta_1 \in \mathcal{T}$，使得 $\pi \vdash \theta_1$ 且$\pi \notin \mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$。

注 3.21。第一步中集合 $\mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$ 的选取看起来相当随意，事实上也确实如此。通常，若 $\pi \vdash \theta_1$，我们令 $\pi \in \mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$ 并

$$\mathrm{rk}\,\pi \leqslant \mathrm{rk}(\Sigma \sqcup_1 \theta_1).$$

不过，少数边界情形还需根据实验进行进一步的人工调整。更确切地说，根据 $r := \mathrm{rk}(\Sigma \sqcup_1 \theta_1)$、$n := |\theta_1|$ 的取值，以下系数四元组 $(\tilde{a}_2, a_3, a_2, a_1)$ 将从 $\mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$ 中排除：

$$\begin{aligned}
(r,n) = (12,11)&\colon \quad (*,*,*,*),\\
(12,12)&\colon \quad (*,*,*,*),\\
(13,11)&\colon \quad (*,*,*,*),\\
(13,12)&\colon \quad (3,*,*,*), (2,*,*,*), (1,*,*,*),\\
(13,13)&\colon \quad (2,*,*,*), (1,*,*,*),\\
(14,11)&\colon \quad (*,*,*,*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14,12)\colon&\quad (3,*,*,*),(2,*,*,*),(1,*,*,*),\\
(14,13)\colon&\quad (2,*,*,*),(1,*,*,*),\\
(14,14)\colon&\quad (2,*,*,*),(1,*,*,*),\\
(15,11)\colon&\quad (*,*,*,*),\\
(15,13)\colon&\quad (2,0,0,*),(1,0,*,*),\\
(15,14)\colon&\quad (2,1,0,*),(2,0,*,*),(1,0,*,*),\\
(15,15)\colon&\quad (1,*,*,*)
\end{aligned}$$

（其中，照常，$*$ 表示任意值）。

第一步从图开始

$$\Gamma_0 := \Sigma \sqcup_1 \Theta_1, \quad \Theta_1 \in \theta_1 \in \mathcal{T},$$

并使用 §3.4 找出所有表示 $(\Gamma_0,\pi)_\varnothing$, $\pi \in \mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$ 的图 Γ。严格来说，~~我们~~通过一个模式 θ 将 Γ_0 扩展，使得 $\mathsf{A}_2 \oplus \theta = \pi$。因此，我们令 (3.14) ~~中的~~ $= \varnothing$ 固定，并使用保持 $\Sigma \ni c_1$ 的图自同构/同构（见注3.18）。对于所得列表 $\mathfrak{S}_N$ 中的每个图 Γ，我们考虑满足 (3.6) 的模式 $\theta_2 \in \mathcal{T}$ 的全集 $\mathcal{T}(\Gamma)$，并在固定 $= \{c_2\}$ 且图态射保持 c_1 和 c_2的条件下运行相同的算法。

注3.22。严格来说，我们还应再运行一次算法，使用固定的 $= \{c_3\}$ 以及满足 θ_3（3.7）~~的~~模式。不过，我们选择的阈值使得 $\mathfrak{S}_N$ 第一次运行所得的列表仅包含少量秩19的图（对这些图使用激进版本，见 §3.5），以及极少数秩18的图；对于后者，算法很快终止并排除所有情况。

在第二步中，我们从一支铅笔开始

$$\Gamma_0 := \Pi \in \pi \in \mathcal{P}_{14}$$

并使用 §3.4 找出所有表示 Γ $(\Gamma_0,\ \theta_1)_1$，$\pi \vdash \theta_1$ 以及 $\pi \notin \mathcal{P}_{14}^-(\theta_1)$ 的图。我们令 $= \{c_1\}$ ~~在~~（3.14）中固定，并使用保持 $\Sigma \ni c_1$的图态射。如上所述，得到的图为数不多，秩均为19或18，在下一轮中利用固定的 $= \{c_2\}$ 以及 $\theta_2 \in \mathcal{T}$ 按照（3.6）的意义相容这一条~~件将~~其排除。至此，命题 3.12及下文的 补遗 3.23 的证明均告完成。□

如 命题 3.12之后紧接着的说明所述，在舍弃一个 Γ 秩20的图之前，我们会分析它的几何有限指数扩张，并记录其中大小大于52的扩张。下文将陈述这一分析的结果。

补遗 3.23。设 Γ是相容集合$\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2 \vdash \theta_3$，$\pi \in \mathcal{P}_{14}$的一个几何代表元，且 秩 $\Gamma = 20$ 并且 $|\Gamma| > 52$。那么 Γ 是 [8], 中的八个光滑构形之一，见表1的前八行。◁

注3.24。为了构造大量具有大量直线的构型实例，在舍弃秩20的图之后（见 注 2.10），我们收集了所有至少含48条直线或至少含六个例外除子的扩展图；结果见 [4]。特别是，除 表1中列出的曲面外，我们还发现一个含52条直线和两个节点的四次曲面，以及两个各含50条直线和一个节点的四次曲面。此外，还有不少奇异轨迹非空且含48条直线的四次曲面，这再次表明，48是截断分类的合理阈值。

4. 光滑四次曲面

本节中，我们暂时假设极化格 $S \ni h$ 不含例外除子；这一假设将在稍后研究光滑四次曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^3$上的直线构型时用到。

在这种情况下，我们需要改变可容许格/图的概念。具体而言，若一个极化格 $S \ni h$ 既不包含例外除子（$e^2 = -2, e \cdot h = 0$），也不包含 2-各向同性向量（$e^2 = 0, e \cdot h = 2$），则称其为光滑的，或称为 s-可容许的。若格 $\mathcal{F}$（Γ）具有上述性质，则称图 Γ 为光滑的，或称为 s-可容许的。

若 $S \ni h$ 是光滑的，则 $\mathfrak{rt}(S,h) = \varnothing$；因此， $\Delta = \varnothing$ 自动满足（2.2）中的条件，并且我们有一个定义良好的 Fano 图

$$\mathrm{Fn}(S,h) := \mathrm{Fn}_{\varnothing}(S,h) = \mathrm{root}_1(S,h). \tag{4.1}$$

（4.1）的一个关键结论是 Fn 单调：

$$\text{if } S' \supset S \ni h \text{ are smooth, then } \mathrm{Fn}(S',h) \supset \mathrm{Fn}(S,h). \tag{4.2}$$

引理 4.3. 设 Γ 是一个光滑图，且 $\Sigma = (c_1, c_2, c_3) \subset \Gamma$ 是一个三角形。那么：

(1) Σ 有唯一的 3-截面 $c_0 := h - c_1 - c_2 - c_3 \in \Gamma$；(2) 铅笔 Π 如 (2.11) 以及 Δ-集 截面$_i$ 如 (2.13) 没有类型为 $\mathbf{A}_2$ 或$\mathbf{A}_3$ 的连通分支。

证明。 显然， c_0 如陈述（1）所示，是由 h和 Σ张成的格中的一个 3-截面。根据（4.2），它在任何更大的光滑格/图中仍然是一个 3-截面。

若铅笔 Π 根据（4.2）有一对 $(s_1, s_2) \cong \mathbf{A}_2$，，则它也有 $s_3 := \kappa_\Sigma - s_1 - s_2$，

~

，使得 $(s_1, s_2, s_3) \cong \mathbf{A}_2$。若 Π 有 $(s_1, s_2, s_3) \cong \mathbf{A}_3$，，则 $\kappa_\Sigma - s_1 - s_2 - s_3$ 是一个例外除子。同样的论证适用于每个集合 sec_i, $i = 1$、2、3，只是我们将 κ_Σ 替换为 $(c_0 + \ldots + c_3) - c_i = \kappa_\Sigma + c_0 - c_i$。 □

~根据引理 4.3(1)，每个 $\mathbf{A}_2$ 型纤维 $\Sigma_0 := \Sigma = (c_1, c_2, c_3)$ 都会产生另外三个，即 $\Sigma_i := (c_0, \ldots, \hat{c}_i, \ldots)$，$i = 1, 2, 3$（照例，$\hat{c}_i$ 表示省略了c_i ）。因此，我们可以转换范式：不再考虑一个铅笔 Π 和三个集合 sec_i，而是讨论“四个铅笔的混合”

$$\Pi_0 := \Pi = \Pi(\Gamma \supset \Sigma_0), \qquad \Pi_i := \Sigma_i \sqcup \mathrm{sec}_i = \Pi(\Gamma \supset \Sigma_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

假设如上所述， Π 是 Γ中的一个极大铅笔，我们可以用一组更强的相容条件替换（3.5）–（3.7）：

$$\pi \vdash \theta_1 \quad \text{if} \quad 3|\theta_1| + |\pi| \geqslant 48 \text{ and } \theta_1' \preccurlyeq \pi; \tag{4.4}$$

$$(\pi \vdash \theta_1) \vdash \theta_2 \quad \text{if} \quad 2|\theta_2| + |\theta_1| + |\pi| \geqslant 48 \text{ and } \theta_2' \preccurlyeq \theta_1'; \tag{4.5}$$

$$(\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2) \vdash \theta_3 \quad \text{if} \quad |\theta_3| + |\theta_2| + |\theta_1| + |\pi| \geqslant 48 \text{ and } \theta_3' \preccurlyeq \theta_2'. \tag{4.6}$$

~这里， $'$ 表示算子 $\Theta \mapsto \Theta' := \mathbf{A}_2 \sqcup \Theta$ 及其向模式集的自然下降。（还要记住，对于定理 1.2，我们需要将阈值改为$|\Gamma| \geqslant 49$。）特别地，由（4.4）–（4.6）可立即得出

$$|\Pi| \geqslant 15, \tag{4.7}$$

参见 引理 3.11。事实上，考虑到由 引理 4.3给出的 3-截面，我们可以将 (4.6) 改写为 $|\theta_3'| + |\theta_2'| + |\theta_1'| + |\pi| \geqslant 57 = 48 + 9$，接下来只需注意到假设 $\theta_3' \preccurlyeq \theta_2' \preccurlyeq \theta_1' \preccurlyeq \pi$ 蕴含 $|\theta_3'| \leqslant |\theta_2'| \leqslant |\theta_1'| \leqslant |\pi|$。因此，与 命题 3.12不同，我们无需引入类似物 $\mathcal{P}_{15}^{\mathrm{s}}$ 来对应集合 $\mathcal{P}_{14}$：下界 (4.7) 可由相容性假设推出。

现在，进行与 §3 中的计算类似（但快得多）的计算，可得如下结果（参见 命题3.12; 我们沿用 §3 中的术语，并将 $\mathcal{P}^{\mathrm{s}} \subset \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}^{\mathrm{s}} \subset \mathcal{T}$ 分别记作光滑图中出现的模式集合）。

命题 4.8（参见 §3.6）。如（4.4）–（4.6）中所述的每个相容集合 $\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2 \vdash \theta_3$，连同 $\pi \in \mathcal{P}^{\mathrm{s}}$ 和 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{T}_{\mathrm{s}}$，要么被排除，要么具有以下五种图之一

$$\mathbf{Z}_{49}, \quad (50), \quad \mathbf{Z}_{50}, \quad (52), \quad \mathbf{Z}_{52} \tag{4.9}$$

(见 表1) 作为几何代表元。 ◁

与 命题 3.12类似，这一陈述的意思是，除（4.9）中列出的五种例外外，任何符合假设的集合的几何代表元 Γ 都有 $\operatorname{rk}\Gamma = 20$ ；此外，所有此类秩为 20 的代表元都会在证明过程中被找到并排除。与 §3中一样，在排除一张图之前，我们会计算它所有的几何有限指数扩张，从而得到以下完整的几何秩 20 Fano 图列表 Γ，其中 $|\Gamma| \geqslant 48 + 1$ （额外的 1 表示由 引理 4.3给出的 3-截面）。

补遗 4.10。设 Γ是相容集合的一个几何代表$\pi \vdash \theta_1 \vdash \theta_2 \vdash \theta_3$，如 (4.4)–(4.6)所示，其中 $\pi \in \mathcal{P}^{\mathrm{s}}$， θ_1， θ_2， $\theta_3 \in \mathcal{T}_{\mathrm{s}}$，且 秩$\Gamma = 20$。那么 Γ 是 21 个光滑秩 20 构型之一，见表1。 ◁

注 4.11。由于阈值较低 $|\Gamma| \geqslant 49$，我们有时确实必须运行算法，直到固定的最后一步 $= \{c_3\}$，参见 注3.22。这最后~~一步~~开销相当大（因为初始的截面集合相当大），但幸运的是，只需对四个图执行这一步。这再一次表明，将分类缩减到48条或更少的直线几乎不可行。

注 4.12。在光滑情形下，我们可以利用基于单调性的若干技巧进一步减少重复计数（4.2），方法是使用格中存在的所有直线，而不只是显式添加的直线。尤其是，在切换到下一个固定步骤 $= \{c_i\}$， $i \leqslant 3$之前，我们可以将每个图 Γ 替换为其并集

$$\Pi \cup \operatorname{sec}_1 \cup \ldots \cup \operatorname{sec}_{i-1} \quad \text{in} \quad \operatorname{Fn}(\mathcal{F}(\Gamma))$$

然后，从所得列表的每个同构类中保留一个代表元。此外，在后续计算中，我们可以附加一个条件，即上述并集应保持不变。更多细节请参见[5] 。

5. 四边形图

本节中， $K3$-四次曲面 X_4 允许具有 §3.˜所述的奇点。考虑一个 $\mathbf{A}_3$-图 Γ，并固定一个四边形 $\Sigma := (c_1, c_2, c_3, c_4) \subset \Gamma$。假设边 $c_i \in \Sigma$ 按循环顺序编号且依次排列:

$$c_{i+4} = c_i, \qquad c_i \cdot c_{i\pm1} = 1, \quad c_i \cdot c_{i\pm2} = 0.$$

除了（2.11）–（2.13）之外，我们还考虑以下集合

$$\operatorname{sec}^*_{ij} := \operatorname{sec}^*_i \cup \operatorname{sec}^*_j, \quad i = j \pm 2.$$

假设围长$(\Gamma) = 4$ 意味着

$$\operatorname{sec}^*_{13} \cap \operatorname{sec}^*_{24} = \varnothing \qquad \text{and} \qquad \text{each graph } \operatorname{sec}^*_i \text{ is discrete.}$$

每个 sec_i 的元素都是 Π 的简单截面，而其中的元素

$$\mathrm{sec}_i^* \smallsetminus \mathrm{sec}_i = \mathrm{sec}_j^* \smallsetminus \mathrm{sec}_j = \mathrm{sec}_i^* \cap \mathrm{sec}_j^*, \quad j = i \pm 2,$$

是双截面； Π 的所有（多重）截面构成的集合为 $\mathsf{sec}^* = \mathsf{sec}^*_{13} \cup \mathsf{sec}^*_{24}$。

从现在起，我们陈述的结果针对几何图，而非次几何图；换言之，我们假设 Γ 具有无三角形几何饱和。

引理 5.1. 对于上述几何四边形图 $\Gamma \supset \Sigma$，有

(1) $|\mathsf{sec}_i| \leqslant 10$ 和 $|\mathsf{sec}_i^*| \leqslant 10$（紧界），(2) $|\mathsf{sec}^*_{ij}| \leqslant 20$（一个紧界），以及 (3) $|\mathsf{sec}^*| \leqslant 32$（已知最佳例子为 30）。

证明。 陈述（1）可通过直接计算得出：由于每个 sec_i^* 都是离散的，因此并集 $\Sigma \cup \mathrm{sec}_i^*$ 只取决于两个参数，它们可取以下值：

$$\begin{array}{lrcccccccccccc} p_i := |\mathrm{sec}_i| & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ q_i := |\mathrm{sec}_i^* \smallsetminus \Theta_i| & \leqslant & 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \tag{5.2}$$

(2)中的界由(1)推出（假设 $p_i \geqslant p_j$，我们有 $|\mathsf{节}^*_{ij}| \leqslant 2p_i + q_i$），其紧致性则由一个显式构造确立（将在下一步计算中得到）。最后，命题(3)也通过类似于[2, §B.5]的计算得到：假设

$$|\mathrm{sec}_1| \geqslant |\mathrm{sec}_3|, \quad |\mathrm{sec}_2| \geqslant |\mathrm{sec}_4|, \quad |\mathrm{sec}_{13}^*| \geqslant |\mathrm{sec}_{24}^*|, \tag{5.3}$$

我们从一个“标准”图 $\Sigma \cup \mathsf{节}_1^*$ 出发，令 $(p_1, q_1) = (10, 0)$、$(9, 1)$、$(8,2)$、$(8,1)$ 或 $(9, 0)$，$(7,3)$，并构造所有可能的连续扩张

$$\Gamma := (\Sigma \cup \mathrm{sec}_1^*) \cup \mathrm{sec}_3 \cup \mathrm{sec}_2 \cup (\mathrm{sec}_2^* \smallsetminus \mathrm{sec}_2) \cup \mathrm{sec}_4 \tag{5.4}$$

通过离散集；每个待添加集合的最小大小由(5.2)、(5.3)以及目标 $|\Gamma| \geqslant 37$确定。在大多数情况下，该算法会终止（这意味着任何足够大的、具有几何三角形自由饱和性质的图都不可接受，三角形自由饱和，参见注 2.10）于第一个非平凡步骤 $\mathsf{节}_3$；极少数情况下，我们还需要使用 $\mathsf{节}_2$。□

注 5.5。 下文 引理 5.1 和 命题 5.6 的证明与 [2] 的本质区别在于，我们不限制同时与给定两条直线相交的直线数量（因此会出现双四边形和更长的“多重四边形”）；这使得计算稍微复杂了一些。

命题 5.6。对于几何四边形图 Γ，有 $|\Gamma| \leqslant 48$。

注 5.7。 命题 5.6 给出的界不太可能是紧的：我们找到的最佳例子有 39 条直线（另见 [2, 命题 6。14]）。

命题 5.6 的证明。 证明是通过类似于 [2, §C。3]的计算完成的。根据 引理 5.1，只需考虑所有大小为 Π 的四边形铅笔 $|\Pi| \geqslant 17$；使用 [21]编制了其中允许极化的铅笔列表。然后，在假设 (5.3) 下，必须有 $4p_1 + 2q_1 + |\Pi| \geqslant 49$。与 (5.4) 类似，我们从铅笔 Π 开始，构造连续可接受扩张列表

$$\Gamma := \Pi \cup \mathrm{sec}_1 \cup (\mathrm{sec}_1^* \smallsetminus \mathrm{sec}_1) \cup \mathrm{sec}_3 \cup \mathrm{sec}_2 \cup (\mathrm{sec}_2^* \smallsetminus \mathrm{sec}_2) \cup \mathrm{sec}_4.$$

由于我们的目标并不高 $|\Gamma| \geqslant 49$，实际上算法在第一步（偶尔在第二步）就会终止，因此我们甚至无需考虑 sec_3。□

6. Other types of graphs

对于图的其他类型（按 §2.4 中的定义），计算过程与 [2]，完全相同，我们只在下文陈述更新后的结果。值得注意的是，所得上界与光滑情形完全相同（见 [5]）；此外，与八次曲线的情形不同（见 [2]），所有极端构型都是光滑的。

6.1. 五边形图。回顾一下，围长(Γ) = 5 这一假设意味着：˜对于纤维 $A_4 \cong \Sigma \subset \Gamma$，有

- $\mathsf{sec}^* = \mathsf{sec}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{sec}_5$，即所有截面都是简单的；
- 每个图 $\mathsf{sec}_i^* = \mathsf{sec}_i$, $i = 1, \ldots, 5$ 都是离散的。

以下界是精确的，并且只有两个具有 30 个顶点的几何五边形图，即 Φ'_{30} 和 Φ''_{30} （见 [5]）。二者都仅表示光滑四次曲面上的直线构形。

引理 6.1（参见 [2,引理 7.6]）。设 Γ 是一个几何五边形图，且˜$\Sigma \subset \Gamma$ 是一个 A 型$_4$ 子图。则：

(1) 有 $|\mathsf{sec}_*| \leqslant 16$；(2) 若 $|\mathsf{sec}_*| \geqslant 14$，则 $|\Gamma| \leqslant 29$。 ◁

命题 6.2。对于任意几何五边形图 Π，有 $|\Gamma| \leqslant 30$。

证明。 鉴于 引理 6.1，只需考虑满足 Π 的五边形铅笔$|\Gamma| \geqslant 17$；可以利用 [21] 找到它们。 □

6.2. 星形图。我们将 D_4 纤维 Σ 的顶点 $(c_1, \ldots, c_5)$ 编号，使得中心顶点 c_1 是 Σ中度数为 4 的顶点。回想一下，假设˜围长(Γ) $\geqslant 6$ 意味着，对于纤维 $D_4 \cong \Sigma \subset \Gamma$，有

- $\mathsf{sec}^* = \mathsf{sec}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{sec}_5$，且
- 图 sec^* 是离散的。

不过请注意，并非所有截面都是简单的：sec_1中的元素都是双截面。（回想一下，$\kappa_\Sigma = 2c_1 + c_2 + \ldots + c_5$。）

以下界限是锐利的，而唯一拥有27个顶点的几何星状图是 Δ'_{27} （见[5]）；它由唯一一个光滑四次曲面表示。

引理6.3（参见 [2, 引理7.3]）。设 Γ 是一个几何星状图， Σ ⊂ Γ 是一个D_4 型˜子图，其中心顶点 c_1 在 Γ中具有最大度数。那么：

(1) 有 $|\mathsf{sec}^*| \leqslant 12$；(2) 如果 $|\mathsf{sec}^*| \geqslant 11$，那么 $|\Gamma| \leqslant 27$。 ◁

命题6.4. 对任意几何星状图 Π，都有 $|\Gamma| \leqslant 27$。

证明。鉴于引理6.3，只需考虑 Π 满足 $|\Gamma| \geqslant 18$的星状铅笔，可利用 [21]找到。□

6.3. 局部椭圆图。回顾一下，局部椭圆图的情形已在 [2] 中讨论过。我们有如下不等式

$$|\Gamma| \leqslant 29 \tag{6.5}$$

对于所有几何局部椭圆图 Γ （见 [2, (7.1)]）。机器辅助实验表明，紧确上界为 $|\Gamma| \leqslant 25$，且有唯一的图 Λ_{25} 达到最大值，但这些考量对定理 1.1的证明并不重要。

7. 证明

为使我们的论述自成一体，我们先回顾 [2]中的若干结果，见 §7.1，然后在§7.2、§7.3中给出本文主要结果的证明。

7.1. $K3$-四次曲面的 Fano 图。设 $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ 是一个复数域上的四次曲面˜，其奇点至多为 Du Val（又称 A–D–E 或简单）奇点，并设 $\pi\colon \tilde{X}_4 \to X_4$˜是其奇点的极小解消。记 $h := \pi^*\mathcal{O}_{X_4}($1) $\in \mathrm{NS}(\tilde{X}_4)$。

回顾 $\tilde{X}_4$ 是一个 $K3$-曲面。特别地，给定一条不可约曲线 $C \subset \tilde{X}_4$，我们有˜

$$C \cdot h = 1 \text{ and } C^2 = -2 \text{ if and only if } \pi(C) \text{ is a degree one curve on } X_4. \tag{7.1}$$

˜满足（7.1）的曲线称为直线，位于 X_4上；显然它们是光滑有理曲线。我们沿用 [5] 的做法，将四次曲面（平凡）Fano 图定义为四次曲面 X_4 上以顶点

$$\mathrm{Fn}(X_4) := \big\{(-2)\text{-curves } C \subset \tilde{X}_4 \text{ with } C \cdot h = 1\big\} \tag{7.2}$$

并且每对顶点 $v, w \in \mathrm{Fn}(X_4)$ 之间由一条重数为 $v \cdot w$ 的边连接。˜（以下总是在 $\mathrm{NS}(X_4)$ 上考虑交形式“·”。）

回忆一下，根据 [2, (4.5)],

(7.3) 至少含有 25 条直线的 $K3$-四次曲面的图 $\mathrm{Fn}(X_4)$ 是双曲的。

关于格极化 $K3$-曲面的一般理论（Nikulin [15], Saint-Donat [19]；另见 [8, 定理 3.11] 和 [6, 定理 7.3]）给出如下结论。（如˜在 [2, 约定 1.4], 中一样，我们称格 $\mathrm{NS}(X_4)$由直线张成，是指它是由˜上直线的类及准极化 h生成的子格的有限指标扩张，即由直线和 h $\mathbb{Q}$张成。）

定理 7.4（参见 [2, 定理 3.9]）。图 Γ 是几何的，当且仅当存在一个˜，使得对于某个四次曲面 X_4，有 $\Gamma \cong \mathrm{Fn}(X_4)$，且 $\mathrm{NS}(X_4)$ 由直线张成。◁

注记 7.5。与 $K3$-八次曲线的情形一样，根据 [2, 引理 2.8], ，为了研究直线的最大数目，我们可以将注意力限制在格˜$\mathrm{NS}(X_4)$ 由直线和例外除子张成的情形（另见 [2, § 8]）

显然，对于奇异轨迹非空的四次曲面 X_4，图 $\mathrm{Fn}(X_4)$ 不能完整描述 X_4上的直线构型。后者可以从双色扩展法诺图中推知

$$\mathrm{Fn}^{\mathrm{ex}}(X_4) := \big\{(-2)\text{-curves } C \subset \tilde{X}_4 \text{ with } C \cdot h \leqslant 1\big\}, \tag{7.6}$$

其中每个顶点 C 的颜色定义为 $C \cdot h$。对于这类图，我们有一个更一般的陈述。

定理 7.7（参见 [2, 定理 3.10]）。双色图 Γ' 是几何的，当且仅当 $\Gamma' \cong \mathrm{Fn}^{\mathrm{ex}}(X_4)$ 对于某个 $K3$-四次曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^3$成立。◁

7.2. 定理 定理 1.1的证明。 根据 定理 7.7，定理 1.1 的断言等价于以下陈述：不存在

$$\text{几何双色图 } \Gamma' \text{ such with } |\mathrm{sp}_1 \Gamma'| \geqslant 53 \text{ and } |\mathrm{sp}_0 \Gamma'| \neq 0, \tag{7.8}$$

其中 $\mathrm{sp}_j \Gamma'$ 表示由以下所有顶点所确定的 Γ' 的导出子图，这些顶点的颜色为$j = 0$，1。此外，根据（7.3），（普通）图 $\Gamma := \mathrm{sp}_1 \Gamma'$ 是某个 Σ-图，其对应的˜仿射 Dynkin 图为 $\Sigma \geqslant \mathbf{A}_2$。

由 [2, 引理 2.8] 给出的单调性§6 中的考察结合起来，意味着图 Γ 既非五边形的（见 命题 6.2），也非星形的（见命题6.4），也非局部椭圆的（见（6.5））。最后，命题 5.6 表明

$$\Gamma \text{ is triangular.}$$

于是，根据 引理 3.11 和 命题 3.12，必有 $\mathrm{rk}(\Gamma) = 20$，由此 补遗 3.23 可知 Γ 是 [8] 中找到的八种光滑构形之一。对于所得的每个图 Γ，我们计算其扩展饱和 (s) $\mathrm{sat}^{\mathrm{ex}}\,\Gamma$，并检验所得的双色图均不含颜色为零（例外除子）的顶点，从而完成 定理 1.1 的证明。□

7.3. 定理 定理 1.2 的证明。处理光滑四次曲面时，我们可以将问题限定在格 NS(X_4) 由直线张成的情形，参见 注记 7.5和（4.2）。 定理 7.4 将证明归结为对所有满足以下条件的图 Γ 进行分类

$$\Gamma \text{ is geometric and } |\Gamma| \geqslant 49;$$

于是，根据（7.3），（普通）图 Γ 是某个仿射 Dynkin 图 Σ对应的一个~$\Sigma \geqslant \mathbf{A}_2$-图。如同 定理 1.1 的证明中那样，我们推得 Γ 既不是四边形的（命题 5.6），也不是五边形的（命题 6.2），不是星形的（命题6.4），也不是局部椭圆的（参见（6.5））。

对于一个几何三角图 Γ，若其至少有 49 个顶点且 $\mathrm{rk}(\Gamma) < 20$，我们应用 命题 4.8 来证明 Γ 是五个图之一（4.9）。否则，根据补遗 4.10，图 Γ 是表1中出现的秩20图之一表1。

为了完成变形分类，设 Γ 是表1中的一个图。作为对饱和列表研究的一部分，我们注意到，$\mathcal{F}(\Gamma)$ 唯一的几何有限指标扩张是平凡扩张；因此有

$$\mathrm{NS}(X_4) = \mathcal{F}(\Gamma) \quad \text{and} \quad O_h(\mathrm{NS}(X_4)) = \mathrm{Aut}\,\Gamma \tag{7.9}$$

对于任意光滑四次曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^2$ 且具有 Fn $X_4 \cong \Gamma$，后一个群可通过 GAP [9]中的有向图软件包求得。根据 [8, 定理 3.9]，，此类四次曲面的等线性变形族与本原等距嵌入一一对应

$$S := \mathcal{F}(\Gamma) \hookrightarrow \mathbf{L} = 2\mathbf{E}_8 \oplus 3\mathbf{U} \tag{7.10}$$

视为在 $S \ni h$ 的带极化自等距变换以及 $\mathbf{L}$ 的保持其最大正定子空间一致定向的自等距变换下$\mathbf{L} \otimes \mathbb{R}$（即所谓的正号结构）；当且仅当 (7.10) 允许一个反转正号结构的带极化自等距变换时，这样的变形族才是实的。因此，为完成证明，我们使用 Nikulin 的 [16] 判别形式理论，以及 Gauss [10] 的二元二次型理论（在正定情形 $\mathrm{rk}\,T = 2$）或 Miranda–Morrison [13] 理论（在不定情形 $\mathrm{rk}\,T \geqslant 3$），对嵌入 (7.10) 进行分类。□

注记 7.11。群 Sym X_4和 Aut(X_4, h) 在 表1 中，是作为（7.9）的子群计算得到的；它们分别在判别群 discr S 上恒等作用，或扩张为 $\mathbf{L}$的适当自等距变换：后者须保持正号结构（若 rk $T = 2$），或在 T上按 ± 1 作用（若 $\mathrm{rk}\,T \geqslant 3$）。

7.4. 补遗 1.3 的证明。正如 [8, 补遗 1.4], 所述，实直线的数量确实取遍范围 $\{0,\dots,48\}$ 中的所有值。接下来我们回顾一下，在统计光滑四次曲面上的实直线数量时，只需考虑所有直线均为实直线的四次曲面 X_4 （相对于某个实结构σ: $X_4 \to X_4$，参见 [8, 命题 3.10] 或 [5, 定理 2.7]）；当且仅当一般超越格 T 含有一个与 [2] 或 U(2) 同构的子格时，后者才成立，参见 [8, 引理 3.8]。因此，补遗中的结论可由表1推出，该表列出了所有直线数超过 48 的构型及其对应的超越格。□

References

1. J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane, *Sphere packings*, 数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], 第 290 卷，施普林格出版社，纽约，1988年。E. Bannai、J. Leech、S. P. Norton、A. M. Odlyzko、R. A. Parker、L. Queen 和 B. B. Venkov 参与撰写。MR 920369 (89a:11067) 2. A. Degtyarev 和 S. Rams, *Counting lines with Vinberg's algorithm*, 2021年，即将出版，arXiv:2104.04583。3. , *Lines on $K3$-sextics*, 准备中，2021年。4. , *Ancillary files for the paper: Lines on $K3$-quartics via triangular sets*, 2022年，可在 arXiv 中作为~~本预印本~~的补充文件获取。5. Alex Degtyarev, *Lines on Smooth Polarized K3-Surfaces*, 离散与计算几何 62 (2019)，第 3 期，601–648。MR 3996938 6. , *Smooth models of singular $K3$-surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. 35 (2019)，第 1 期，125–172。MR 3914542 7. , *Lines in supersingular quartics*, 日本数学会杂志 74 (2022)，第 3 期，973–1019。MR 4484237 8. Alex Degtyarev、Ilia Itenberg 和 Ali Sinan Sert¨oz, *Lines on quartic surfaces*, 数学年刊 ~~368 2~~017 1 2, 753 809 3651588 ( )，第 - 期，–。MR ., , , , *Version 4.10.1*, 9 *GAP – Groups Algorithms and Programming* https://www.gap-system.org，2019年2月。10. 卡尔·弗里德里希·高斯, *Disquisitiones arithmeticae*, 施普林格出版社，纽约，1986年，由 Arthur A. Clarke 翻译并作序，William C. Waterhouse 修订，Cornelius Greither 和 A. W. Grootendorst 修订，并由 Waterhouse 作序。MR 837656 (87f:01105) 11. V´ıctor Gonz´alez-Alonso 和 S lawomir Rams, *Counting lines on quartic surfaces*, 台湾数学杂志 20 3535673 12 2016 4, 769 785 ( )，第 – 期。MR 。C.M. Jessop, *Quartic surfaces with singular points*, 剑桥大学出版社，剑桥，1916年。13. Rick Miranda 和 David R. Morrison, *Embeddings of integral quadratic forms*, 电子版, http://www.math.ucsb.edu/~drm/manuscripts/eiqf.pdf，2009年。14. Yoichi Miyaoka, *Counting lines and conics on a surface*, 数学科学研究所出版物 45 (2009)，第 3 期，919–923。MR 2569571 15. V. V. Nikulin, *Finite groups of automorphisms of Kählerian $K3$ surfaces*, 莫斯科数学会会刊 38 544937 16 1979 75 137 ( )，–。MR。, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, 《苏联科学院消息数学辑》43 (1979)，第 1 期，111–177，238，英文译本：苏联科学院消息数学辑 14 (1979)，第 1 期，103–167 (1980)。MR 525944 (80j:10031) 17. S lawomir Rams 和 Matthias Sch¨utt, *112 lines on smooth quartic surfaces (characteristic 3)*, Q. J. Math. 66 3396099 18 2015 3, 941 951 ( )，第 – 期。MR。, *64 lines on smooth quartic surfaces*, 数学年刊 362 (2015)，第 1-2 期，679–698。MR 3343894 19. B. Saint-Donat, *Projective models of K-3 surfaces*, 美国数学杂志 96 (1974)，602–639。MR 0364263 (51 #518) 20. B. Segre, *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, 季刊数学杂志，牛津系列 14 (1943)，86–96。MR 0010431 (6,16g) 21. Ichiro Shimada, *Connected components of the moduli of elliptic $K3$ surfaces*, 密歇根数学杂志 67 (2018)，第 3 期，511–559。MR 3835563

22. Davide Cesare Veniani, *Lines on K3 quartic surfaces in characteristic 2*, Q. J. Math. 68 (2017 3667213 23 2, 551 581), 第 – 期。MR .,
The maximum number of lines lying on a K3 quartic surface, Math. Z. 285 (2017), 第 3-4 期, 1141–1166。MR 3623744 24., *Symmetries and equations of smooth quartic surfaces with many lines*, Rev. Mat. Iberoam. 36 4061988 25 2020 1, 233 256 ( ), 第 – 期。MR .,
Lines on K3 quartic surfaces in characteristic 3, Manuscripta Math. 167 (2022), 第 3-4 期, 675–701。MR 4385387

Department of Mathematics, Bilkent University, 06800 Ankara, TURKEY
Email address: degt@fen.bilkent.edu.tr

Institute of Mathematics, Jagiellonian University, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland*Email address*: slawomir.rams@uj.edu.pl