arXiv:2301.04190v1 [math.DG] 10 Jan 2023

调和映射笔记

GEORGIOS DASKALOPOULOS 和 CHIKAKO MESE

这是为2022年6月6日至19日在 Abbaye de Saint-Jacut de la Mer 举办的非阿贝尔霍奇理论暑期学校编写的一组笔记。

Table of Contents

讲座1: Harmonic Maps Between Riemannian Manifolds 第 2讲座2: Existence and regularity 第 9讲座 3: Pluriharmonic Maps and the Siu-Sampson Formula 第16讲座 4: Donaldson Corlette Theorem 第30

日期: 2022年6月。GD 的部分研究经费由美国国家科学基金会 DMS-2105226 项目提供, CM 的部分研究经费由美国国家科学基金会 DMS-2005406 项目提供。我们感谢孙一桐认真阅读本文, 并提出有助于改进本文表述的宝贵建议。

1. Harmonic Maps Between Riemannian manifolds

1.1. 引言：基础知识。 本节将定义黎曼流形之间映射的能量、调和映射，以及在 Eells-Sampson 的开创性工作之后的一次和二次变分公式 [ES]。另一个很好的参考资料是 [J]。

1.2. 映射的能量。设 (M, g)、(N, h) 为黎曼流形。设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，它诱导映射 $df : TM \to TN$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\Big|_p = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)}$$

其中 (x^α)（分别为 (y^i)）是 M（分别为 N）的局部坐标。

映射 f 还在 M 上诱导一个向量丛 f^*TN。设 ∇ 是 f^*TN 上由 TN 上的 Levi-Civita联络继承而来的一个联络。于是 ∇ 诱导一个外微分

$$d_\nabla : C^\infty((\Lambda^p T^*M) \otimes f^*TN) \to C^\infty((\Lambda^{p+1} T^*M) \otimes f^*TN).$$

我们将 df 视为一个截面

$$df \in C^\infty(T^*M \otimes f^*TN) = \Omega^1(f^*TN).$$

采用记号

$$\frac{\partial}{\partial f^i} := \frac{\partial}{\partial y^i} \circ f \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(M, f^*TN),$$

我们有

$$df = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^i}.$$

设 $(g_{\alpha\beta})$（分别为 (h_{ij})）是关于局部坐标 (x^α)（分别为 (y^i)）的黎曼度量 g of M（分别为 $h$of N）的表达式。

定义 1.1. 令

$$e(f) := \frac{1}{2}|df|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} h_{ij} \circ f.$$

f 的能量为

$$E(f) := \int_M e(f) \star 1 = \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}(x) h_{ij}(f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta}\sqrt{g(x)}\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

这里回顾一下，霍奇星算子 $\star$：$\Lambda^k TM \to \Lambda^{n-k} TM$ 是满足对任意 α、$\beta \in \Lambda^k V$ 都有以下性质的唯一线性算子：

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta) \star 1.$$

引理 1.2. 设 $f=(f_t)$ 是一族光滑的单参数族 C^∞ 映射

$$f: M\times(-\epsilon,\epsilon)\to N,\quad f(x,t)=f_t(x).$$

Then

$$\nabla\frac{\partial f}{\partial t}=\nabla_{\partial/\partial t}df$$

其中 $f=f_t$ 和

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial f^i}\in C^\infty(f^*TN).$$

证明。$\nabla\frac{\partial f}{\partial t}=\nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial t}dx^\alpha$和 $\nabla_{\partial/\partial t}df=\nabla_{\partial/\partial t}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$都是取值于 f^*TN 的 1-形式。这里,

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial f^j}\in C^\infty(f^*TN).$$

将 f视为映射 $f\colon M\times(-\epsilon,\epsilon)\to N$。由于

$$\left[f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right]=f_*\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right]=0$$

并且 ∇无挠,

$$\nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\nabla_{f_*(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})}f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\circ f=\left(\nabla_{f_*(\frac{\partial f}{\partial t})}f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right)\circ f=\nabla_{\partial/\partial t}df(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})$$

这就证明了该等式。

□

推论 1.3（第一变分公式）。对于上述的 (f_t),

$$\frac{d}{dt}E(f_t)=\int_M\left\langle\nabla\frac{\partial f}{\partial t},df\right\rangle\star 1.$$

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(f_t)&=\frac{1}{2}\int_M\frac{d}{dt}\langle df,df\rangle\star 1\\&=\int_M\left\langle\nabla_{\partial/\partial t}df,df\right\rangle\star 1\\&=\int_M\left\langle\nabla\frac{\partial f}{\partial t},df\right\rangle\star 1.\end{aligned}$$

□

推论 1.4。泛函 E 的临界点 f 满足

$$\int_M\langle\nabla\psi,df\rangle\star 1=0,\quad\forall\psi\in C^\infty(f^*TN).\tag{1.1}$$

通过取在 ∂M 外紧支撑的 ψ，我们得到 E 的欧拉-拉格朗日方程,

$$\tau(f):=-d^\star_\nabla df=\star d_\nabla\star df=0.\tag{1.2}$$

这里， ∇ 是 $f^*(TN)$ 上 Levi-Civita 联络的拉回。

证明。设 f_t 是一族映射，满足

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t = \psi \in C^\infty(f^*TN).$$

令 ψ 紧支撑并分部积分，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(f_t) = \int_M \langle \psi, -\tau f\rangle \star 1 = 0$$

这对每个 $\psi \in C_c^\infty$（f^*TM）成立，当且仅当 $\tau f = 0$。 □

定义1.5. 满足 $d^\star_\nabla df = 0$ 的光滑映射 $f : M \to N$ 称为调和映射。

1.3. 局部坐标中的调和映射方程。首先定义

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) := \Gamma^i_{jk} dy^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^j},$$

其中 Γ^i_{jk} 是定义在 N 上的克里斯托费尔符号，并令

$$\tilde\omega := \omega \circ f = \left(\Gamma^k_{ij} dy^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \circ f = (\Gamma^j_{ik} \circ f)\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta} dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial f^j}.$$

那么 $d_\nabla = d + \tilde\omega$，且

$$\begin{aligned}
d^\star_\nabla df &= - \star d_\nabla \star df \\
&= - \star (d + \tilde\omega)\left(\star df^i \otimes \frac{\partial}{\partial f^i}\right) \\
&= -(\star d \star df^i)\frac{\partial}{\partial f^i} - (-1)^{m-1} \star \left(\star df^i \otimes \tilde\omega\left(\frac{\partial}{\partial f^i}\right)\right) \\
&= -\Delta f^i \ \frac{\partial}{\partial f^i} - (-1)^{m-1} \star \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \star dx^\alpha \wedge (\Gamma^j_{ik} \circ f)\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta} dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial f^j}\right) \\
&= -\Delta f^i \ \frac{\partial}{\partial f^i} - (-1)^{m-1}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta}\Gamma^j_{ik} \circ f \star (\star dx^\alpha \wedge dx^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial f^j}\right) \\
&= -\left(\Delta f^k + g^{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta}\Gamma^k_{ij} \circ f\right)\frac{\partial}{\partial f^k}.
\end{aligned}$$

因此，调和映射方程为

$$\Delta f^k + g^{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta}\Gamma^k_{ij} \circ f = 0. \tag{1.3}$$

例1.6。

(1) 假设 $N = \mathbb{R}$，则调和映射方程化简为 $\Delta f = 0$；即， f 是 M上的调和函数。

(2) 假设 $M = \mathbb{S}^1$。于是

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\dot{f}(t)|dt$$

而 $E(f)$ 的临界点是测地线。我们也可以从调和映射方程看出这一点。由于 $\mathbb{S}^1$ 是一维的，我们可以取 $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$。于是

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial t^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta} = 0.$$

这就是测地线方程。

(3) 我们将在后文证明，Kähler 流形之间的全纯映射是调和的（参见注3.3）。

1.4. 狄利克雷问题和诺伊曼问题。若 M 有非空边界（N没有边界），则需要考虑两种不同的边值问题：

- 狄利克雷问题：在从 M 到N 、相对于 M的边界的映射的固定同伦类中，使 E 最小化。这等价于考虑紧支变分 ψ。
- 诺伊曼问题：在从M 到 N的映射的一个固定自由同伦类中极小化 E，换言之，对变分类型不作任何限制。

1.5. 二次变分。黎曼张量

$$R^N : TN \times TN \times TN \to TN$$

以自然的方式导出一个算子

$$R^N : f^*TN \times f^*TN \times f^*TN \to f^*TN$$

以自然的方式。

引理 1.7. 设 $f_t : M \to N$，且设 V是沿着 f_t的一个向量场。那么

$$\nabla_{\partial/\partial t}\nabla V = \nabla\nabla_{\partial/\partial t}V - R^N\left(df, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V.$$

证明。两者

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial t}\nabla V - \nabla\nabla_{\partial/\partial t}V &= \left(\nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial x^\alpha}V - \nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\nabla_{\partial/\partial t}V\right)dx^\alpha \\ &= \left(\left(\nabla_{f_*(\partial/\partial t)}\nabla_{f_*(\partial/\partial x^\alpha)}V - \nabla_{f_*(\partial/\partial x^\alpha)}\nabla_{f_*(\partial/\partial t)}\right)f_*V\right)\circ f\ dx^\alpha\end{aligned}$$

and

$$R^N\left(df, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V = \left(R^N\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)f_*(V)\right)\circ f\ dx^\alpha$$

是定义在 M 上、取值于 f^*TN 的 $1-$形式。因此，根据黎曼张量 R^N 的定义，结论得证。

□

定理 1.8（二次变分公式）。有

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) = ||\nabla \frac{\partial f}{\partial t}||^2 - \int_M \left\langle R^N\left(df, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle \star 1 + \int_M \left\langle \nabla_{\partial/\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}, \tau f\right\rangle \star 1.$$

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) &= \int_M \frac{d}{dt}\left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle \star 1\\ &= \int_M \left(\left\langle \nabla_{\partial/\partial t}\nabla \frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle + \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\partial/\partial t} df\right\rangle\right) \star 1\\ &= \int_M \left(\left\langle \nabla\nabla_{\partial/\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle - \left\langle R^N\left(df, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle + ||\nabla \frac{\partial f}{\partial t}||^2\right) \star 1. \quad \square\end{aligned}$$

2. Existence and regularity

2.1. 引言：非正曲率。 本节考察目标度量的非正曲率在调和映射中的作用。我们证明其唯一性并讨论正则性。我们还研究等变问题，并证明映入非正曲率度量空间的等变调和映射的存在性。相关参考文献包括 [S], [KS1], [KS2] 和 [GS]。

2.2. 二次变分公式与非正曲率。 以下是定理 1.8的推论。

推论 2.1. 若 N 具有 ≤ 0 截面曲率，且 f_t 是测地插值，则 $E(f_t)$是凸的。

证明。在二次变分公式中，最后一项为零，其余各项均为 ≥ 0。$\square$

推论 2.2。设 $f, \phi\colon M \to N$同伦，且 $f|\partial M = \phi|\partial M$。若 N具有 ≤ 0截面曲率，且 f 是调和的，则

$$E(f) \leq E(\phi).$$

证明。设 f_t是 f, ϕ之间的测地同伦，因此 $f_0 = f$, $f_1 = \phi$。那么$E(t) = E(f_t)$ 是凸的，且 $E'(0) = 0$。因此 $E(1) \geq E(0)$，从而 $E(\phi) \geq E(f)$。$\square$

推论 2.3。若 $f_0, f_1\colon M \to N$ 是同伦的调和映射，且 $f_0|\partial M = f_1|\partial M$，并且 N 具有 ≤ 0 截面曲率，则：

（1）如果 ∂M 非空，则 $f_0 = f_1$。（2）如果 ∂M 为空， F 是 f_0 与 f_1 之间的测地同伦，并且 N 在 F的像中的某一点 p 处具有截面曲率 < 0，那么或者 $f_0 = f_1$，或者 f_0 的秩为 ≤ 1。

证明。 (1) 设 f_t 是 f_0 与 f_1 之间的测地同伦， $E(t) = E(f_t)$ 。则 E 是凸的。由于 $E'(0) = E'(1) = 0$，我们得到 $E'(t) = 0 = E''(t)$ 。根据定理 1.8,

$$\nabla \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

and

$$\left\langle R^N\left(df, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}, df\right\rangle = 0.$$

因此,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}||\frac{\partial F}{\partial t}||^2 = 2\left\langle \nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle = 0$$

这意味着 $||\partial F/\partial t||$ 是常数。但 $\partial F/\partial t = 0$ 在 ∂M 上，因此若 ∂M 非空，则 $\partial F/\partial t = 0$ 处处成立，从而 $f_0 = f_1$。

(2) 若 $||\partial F/\partial t|| = 0$，则 $f_0 = f_1$。否则，对每个 x， $\partial F/\partial t \neq 0$ t。 p 处的负截面曲率意味着 df 在 p 处与 $\partial F/\partial t$ 平行，因此处处如此。因此， df 的像维数为 ≤ 1。 □

2.3. Weitzenb¨ock 公式。

定理 2.4. 设 $f : M \to N$ 是一个调和映射，且 (e_α) 是 TM 的一个标准正交标架。那么

$$\begin{aligned}\Delta e(f) = |\nabla df|^2 &+ \frac{1}{2}\left\langle df(\mathrm{Ric}^M(e_\alpha)), df(e_\alpha)\right\rangle \\ &- \frac{1}{2}\left\langle R^N(df(e_\alpha), df(e_\beta))df(e_\beta), df(e_\alpha)\right\rangle.\end{aligned}$$

证明。 用局部坐标展开拉普拉斯算子，调和映射方程（1.3）为

$$g^{\alpha\beta}f^i_{/\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\,{}^M\Gamma^\eta_{\alpha\beta}f^i_{/\eta} + g^{\alpha\beta}\,{}^N\Gamma^i_{k\ell}\circ f f^k_{/\alpha}f^\ell_{/\beta} = 0.$$

我们在 $x \in M$ 和 $f(x) = y$处使用正规坐标。因此，度量张量 $(g_{\alpha\beta})$ 和 (h_{ij}) 分别在 x 和 y 处在一阶近似下为欧氏度量。对其求导,

$$\begin{aligned}f^i_{/\alpha\alpha\varepsilon} &= {}^M\Gamma^\eta_{\alpha\alpha/\varepsilon}f^i_{/\eta} - {}^N\Gamma^i_{k\ell/m}f^m_{/\varepsilon}f^k_{/\alpha}f^\ell_{/\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\eta/\alpha\varepsilon} + g_{\alpha\eta/\alpha\varepsilon} - g_{\alpha\alpha/\eta\varepsilon})f^i_{/\eta} \\ &\quad - \frac{1}{2}(h_{ki/\ell m} + h_{\ell i/km} - h_{k\ell/im})f^m_{/\varepsilon}f^k_{/\alpha}f^\ell_{/\alpha}.\end{aligned}$$

此外,

$$g^{\alpha\beta}_{/\epsilon\epsilon} = -g_{\alpha\beta/\epsilon\epsilon}$$

and

$$\triangle h_{ij}(f(x)) = h_{ij/kl}f^k_{/\epsilon}f^k_{/\epsilon}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}h_{ij}\circ f f^i_{/\alpha}f^j_{/\beta}\right) &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{g}g^{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}h_{ij}\circ f f^i_{/\alpha}f^j_{/\beta}\right)\right)\\ &= f^i_{/\alpha\sigma}f^i_{/\alpha\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta/\sigma\sigma}+g_{\sigma\sigma/\alpha\beta}-g_{\sigma\alpha/\sigma\beta}-g_{\sigma\alpha/\sigma\beta})f^i_{/\alpha}f^i_{/\beta}\\ &\quad+\frac{1}{2}(h_{ij/k\ell}+h_{k\ell/ji}-h_{ik/j\ell}-h_{j\ell/ik})f^i_{/\alpha}f^j_{/\alpha}f^k_{/\sigma}f^\ell_{/\sigma}\\ &= f^i_{/\alpha\sigma}f^i_{/\alpha\sigma}+\frac{1}{2}\mathrm{Ric}^M_{\alpha\beta}f^i_{/\alpha}f^j_{/\beta}-\frac{1}{2}R^N_{ikj\ell}f^i_{/\alpha}f^j_{/\alpha}f^k_{/\sigma}f^\ell_{/\sigma}.\end{aligned}$$ □

这里,

$$\mathrm{Ric}^M_{\alpha\beta}=g^{\delta\epsilon}R^M_{\alpha\delta\beta\epsilon}$$

是里奇张量。

2.4. 正则性。假设 N 具有 ≤ 0 截面曲率。那么由 Weitzenb¨ock 公式,

$$\Delta e(f)\geq -Ce(f) \tag{2.1}$$

其中 C 仅取决于 M的几何性质。

定理 2.5. 若 $f: M\to N$ 是调和的，且 N 具有 ≤ 0 截面曲率， n

$$|f|_{C^{2+\alpha}_{loc}}\leq c$$

其中 $c>0$取决于 E（f）以及 M、 N的几何性质。

证明。 由（2.1）和莫泽迭代可得,

$$\sup_{B_r(p)} e(f)\leq c\int_{B_{2r}(p)} e(f)\star 1 = E(f) \tag{2.2}$$

其中 c 仅取决于几何性质，而 r。现在， （2.1）右端C^0有界。因此，根据椭圆正则性， f_i 是 $C^{1+\alpha}$有界的。但这样一来， （2.1）右端就 C^α有界，因此 f_i 是 $C^{2+\alpha}$有界的。 □

推论 2.6. 若 f： $M\to N$ 是调和的，且 N 具有 ≤ 0 截面曲率，则$f\in C^\infty$（M,N）。

证明。 继续利用（2.1）进行自举。 □

定理 2.7. 如果 f： $M\to N$ 是调和映射， M 是紧的，且里奇曲率为≥ 0， N 具有截面曲率 ≤ 0，那么 f 是全测地的。

证明。由于

$$0=\int_M \triangle e(f)\star 1=\int_M \Big(|\nabla df|^2+\frac{1}{2}\left\langle df(\mathrm{Ric}^M(e_\alpha)),df(e_\alpha)\right\rangle \\ -\frac{1}{2}\left\langle R^N(df(e_\alpha),df(e_\beta))df(e_\beta),df(e_\alpha)\right\rangle\Big)\star 1,$$

由于右侧的每一项均非负，我们有

$$\nabla df=0.$$

□

2.5. 度量空间中的非正曲率。若完备度量空间 (X,d) 满足以下条件，则称其为非正曲率空间：

(i) 空间 (X,d) 是长度空间（或测地空间）。也就是说，对于 X 中任意两点 P和 Q，存在一条可求长曲线 c，使得 c 的长度等于 $d(P,Q)$（有时为简便起见，我们将其记作 d_{PQ}）。我们称这类实现距离的曲线为测地线。

(ii) 对于顶点为 $P,R,Q\in X$ 的任意测地三角形，设 $c:[0,l]\to X$ 是从 Q 到 R 的弧长参数化测地线，并设 $Q_t=c(tl)$。那么

$$d_{PQ_t}^2\le(1-t)d_{PQ}^2+td_{PR}^2-t(1-t)d_{QR}^2. \tag{2.3}$$

(iii) 条件 (ii) 蕴含四边形比较不等式（参见 [KS1，推论 2.1。3]）

$$d_{P_tQ_t}^2\le(1-t)d_{PQ}^2+td_{RS}^2-t(1-t)(d_{SP}-d_{QR})^2 \tag{2.4}$$

$$d_{Q_tP}^2+d_{Q_{1-t}S}^2\le d_{PQ}^2+d_{RS}^2-td_{QR}^2-2td_{SP}d_{QR}+2t^2d_{QR}^2 \tag{2.5}$$

例 2.8. 我们将要考虑的主要例子是非正曲率的黎曼流形和（局部紧致的）欧几里得建筑。

例 2.9. 设 (X,d) 是一个非正曲率空间，$P\in X$ 而 M 是一个紧黎曼流形。设 $Y=L^2(M,X)$ 是一个映射集合 $f:M\to X$，满足

$$\int_M d^2(f,P)\star 1<\infty.$$

通过设定来定义 d_Y 在 Y 上的距离函数

$$d_Y^2(f_0,f_1)=\int_M d^2(f_0(x),f_1(x))\star 1.$$

于是 (Y,d_Y) 是一个非正曲率空间（参见 [KS1，引理 2.1。2]），其中 f_0 与 f_1 之间的测地线是测地插值映射 $f_t(x)=(1-t)f_0(x)+tf_1(x)$。

2.6. 局部存在性。 我们求解光滑黎曼区域 $B \subset M$上的狄利克雷问题。为说明这一构造，我们先考虑 $X = \mathbb{R}$的情形（参见 [KS1，第 2 节。2]）。固定 $\phi \in H^1(B, X)$，并考虑空间

$$H^1_\phi(B, X) = \{f \in H^1(B, X) : f - \phi \in H^1_0(B, X)\}$$

Let

$$E_0 = \inf\{E(f) : f \in H^1_\phi(B, X)\}.$$

由平行四边形恒等式

$$2\int_B |d\frac{f+v}{2}|^2 \star 1 + 2\int_B |d\frac{f-v}{2}|^2 \star 1 = \int_B |df|^2 \star 1 + \int_B |dv|^2 \star 1$$

取极小化序列 f_i，并将前一个等式应用于 $f = f_i$、 $v = f_j$。这意味着

$$\begin{aligned} 2\int_B |d\frac{f_i - f_j}{2}|^2 \star 1 &= \int_B |df_i|^2 \star 1 + \int_B |df_j|^2 \star 1 - 2\int_B |d\frac{f_i + f_j}{2}|^2 \star 1 \\ &\leq 2E_0 + 2\epsilon_i - 2E_0 = 2\epsilon_i. \end{aligned}$$

因此

$$\lim \int_B |d\frac{f_i - f_j}{2}|^2 \star 1 = 0. \tag{2.6}$$

由庞加莱不等式

$$\lim \int_B |\frac{f_i - f_j}{2}|^2 \star 1 = 0 \tag{2.7}$$

因此

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f \text{ in } H^1_\phi(B, X) \text{ and } E(f) = E_0.$$

现在假设 X 是一个非正曲率空间。Korevaar-Schoen [KS1] 证明，可以通过取差商来定义能量密度。对于本讲座而言，如果 X 是一个局部有限的欧几里得建筑，那么我们可以在局部将其等距嵌入一个高维欧几里得空间。于是，我们可以将映射到该建筑的能量密度定义为把它视为映射到欧几里得空间时的能量密度。事实上，这正是 [GS]最初采用的观点。后来发展的更一般理论见 [KS1] 和 [KS2]。

据此，我们按照上文的方法进行论证，只需用四边形不等式替代平行四边形恒等式。事实上，对于 f， $v \in H^1_\phi(B,$ $X)$，定义 $w(x) = (1-t)f(x) + tv(x)$。那么，带有 2.4 的式子意味着 $t = \frac{1}{2}$

$$2d^2(w(x), w(y)) \leq d^2(f(x), f(y)) + d^2(v(x), v(y)) - \frac{1}{2}(d(f(y), v(y)) - d(f(x), v(x))^2$$

这就意味着

$$2E^w \leq E^f + E^v - \frac{1}{2}\int_B |\nabla d(f, v)|^2 \star 1$$

取一个极小化序列 f_i 并对 $f = f_i$ 和$v = v_i$ 应用前面的不等式，从而得到（参见（2.6））

$$\lim_{i,j\to\infty}\int_B |\nabla d(f_i, f_j)|^2 \star 1 \to 0.$$

根据庞加莱不等式， f_i 是Y, d_Y) 中的柯西序列，并且根据能量的下半连续性，收敛到一个极小化映射 [KS1，定理 1.6。1]。

2.7. Gromov-Schoen 和 Korevaar-Schoen 的基本正则性结果。 这是2.2的类似结果，但不使用偏微分方程。

定理 2.10. 如果 $f \in H^1(B, X)$ 是一个调和映射，那么 f 是局部利普希茨的。更确切地说，对于任意 $B' \subset\subset B$，存在一个常数 C，它仅取决于B' 上的度量以及 B' 到 ∂B 的距离，使得

$$\sup_{B'} |df|^2 \le c\int_B |df|^2 \star 1.$$

2.8. 等变映射 等变映射。设 $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(X)$ 是一个同态。一个映射

$$v : \tilde{M} \to X$$

称为 ρ-等变映射，如果

$$v(\gamma x) = \rho(\gamma)v(x).$$

由于 $|dv|^2$ 是 $\pi_1(M)$-不变的，它可以下降为 M 上的一个函数。定义：

$$E(v) = \int_M |dv|^2 \star 1.$$

如果 v 下降到 $M/\rho(\pi_1(M))$ 的映射，这与我们之前的定义一致。

2.9. ρ-等变局部利普希茨映射的存在性。设 $(\mathcal{M}, \nu)$ 为概率空间， X 为非正曲率空间，且 $f \in L^2(\mathcal{M}, X)$。

引理 2.11. 存在唯一一点 $Q_{f,\ \nu}$，使得它最小化积分 al

$$I_{f,\nu}(Q) := \int_{\mathcal{M}} d^2(f(m), Q)d\nu(m) \quad \forall Q \in X.$$

我们称$Q_{f,\ \nu}$ 为质心。

证明。 设 $\{Q_i\}$是一个极小化序列，并设 $Q_{ij} = \frac{1}{2}Q_i + \frac{1}{2}Q_j$。由（2.3）可得$t = \frac{1}{2}$，

$$d^2(f(x), Q_{ij}) \le \frac{1}{2}d^2(f(x), Q_i) + \frac{1}{2}d^2(f(x), Q_j) - \frac{1}{4}d^2(Q_i, Q_j).$$

积分后，我们得到

$$I_{f,\nu}(Q_{ij}) \le \frac{1}{2}I_{f,\nu}(Q_i) + \frac{1}{2}I_{f,\nu}(Q_j) - \frac{1}{2}d^2(Q_i, Q_j).$$

因此， $d^2(Q_i, Q_j)$ 是一个柯西序列。由此可知，任何极小化序列都是柯西序列，并且收敛到一个极小化元。□

~ ~引理 2.12. 存在一个局部利普希茨的 ρ-等变映射 $f\colon M \to X$。若 X 是~光滑的，则可选取 f 为光滑映射。

证明. 设 $Q_0 := Q_{f,\mu_0}$ （分别为 $Q_1 := Q_{f,\mu_1}$）是函数 $f \in L^2(\mathcal{M}, X)$ 关于概率空间 $(\mathcal{M}, \mu_0)$（分别关于 $(\mathcal{M}, \mu_1)$）的质心。令 $Q_t = (1-t)Q_0 + tQ_1$。由 Q_0 和 Q_1 的极小化性质，

$$\begin{aligned}
&\int d^2(f, Q_0) + d^2(f, Q_1)\, d\mu_0 \\
&= \int d^2(f, Q_0) d\mu_0 + \int d^2(f, Q_1) d\mu_1 + \int d^2(f, Q_1)(d\mu_0 - d\mu_1) \\
&\leq 2\int d^2(f, Q_{1/2})\, d\mu_0 + \int \left(d^2(f, Q_1) - d^2(f, Q_{1/2})\right)(d\mu_0 - d\mu_1) \\
&\leq \int d^2(f, Q_0) + d^2(f, Q_1) - \frac{1}{4} d^2(Q_0, Q_1)\, d\mu_0 \\
&\qquad + \int \left(d^2(f, Q_1) - d^2(f, Q_{1/2})\right)(d\mu_0 - d\mu_1).
\end{aligned}$$

最后一个不等式由三角形比较得出。因此，

$$d^2(Q_0, Q_1) \leq 4 \int \left(d^2(f, Q_1) - d^2(f, Q_{\frac{1}{2}})\right)(d\mu_0 - d\mu_1). \tag{2.8}$$

~对每个 $x \in M$，令

$$d\mu_x = \frac{d\mathsf{vol} \llcorner B_1(x)}{V(x)}, \quad V(x) = \mathsf{vol}(B_1(x)).$$

~其中 $\mathsf{vol} = \star 1$ 是 M的体积形式。由于 μ_x 仅取决于M的度量， $x \mapsto \mu_x$在 $\pi_1(M)$ 的等距作用下保持不变。此外，

$$\begin{aligned}
\int |d\mu_{x_0} - d\mu_{x_1}| &= \int \left| \frac{1}{V(x_0)} \chi_{B_1(x_0)} - \frac{1}{V(x_0)} \chi_{B_1(x_0)} \right| \star 1 \\
&\leq C\rho(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

其中， ρ 表示 M上的距离函数。

设 M_0 为一个基本域。令 $f(M_0) = P$，并将其等变地延拓至~$f\colon M \to X$. 为简单起见，假设 M_0 是紧的。则存在一个常数 L，使得

$$d(f(x_0), f(x_1)) \leq L \text{ whenever } \rho(x_0, x_1) < 2.$$

因此，对于 $\rho(x_0, x_1) < 1$ 且在 $|d\mu_{x_0} - d\mu_{x_1}|$的支撑中，

$$d^2(f, Q_1) - d^2(f, Q_{1/2}) \leq d^2(f, Q_1) + d^2(f, Q_t) \leq 2L^2.$$

定义

$$\tilde{f}:\tilde{M}\to X,\quad \tilde{f}(x)=Q_{f,\mu_x}$$

~.....的 $\pi_1(M)$-不变性以及 μ_x.....的 ρ-等变性 f意味着 ρ.....的 f-等变性。应用 (2.8)，令 $\mathcal{M}=M$, $\mu_0=\mu_{x_0}$ 和 $\mu_1=\mu_{x_1}$，即可得到

$$d^2(\tilde{f}(x_0),\tilde{f}(x_1))\le 2L^2\int|d\mu_{x_0}-d\mu_{x_1}|\le 2L^2C\rho(x_0,x_1). \qquad \square$$

2.10. 无穷远边界。一个很好的参考文献是 [BH]。设 X 是一个 NPC-空间。若存在常数 K，使得对于所有 $t>0$，都有 $d(c(t)\ c'(t))<K$，则称两条测地射线 $c,c':[0,\infty)\to X$ 渐近。∂X 表示 X 的边界点集合（我们也称其为无穷远点集合），即测地射线的等价类集合；两条测地射线等价，当且仅当它们渐近。¯我们记作 $X=X\cup\partial X$。注意，任意等距作用于 X 上时，两条渐近测地射线的像仍然是渐近测地射线，因此任意等距¯都延拓为 X的一个双射。下一个命题见 [BH，命题 8.2]。

命题 2.13. 如果 X 是一个非正曲率空间，且 $c:[0,\infty)\to X$ 是一条从 P出发的测地射线，那么对于每个点 $P_1\in X$，都存在唯一一条从P_1 出发并与 c渐近的测地射线。

¯ X 的拓扑定义如下：点 P_i 的一个序列收敛到点$P^*\in\partial X$，当且仅当连接 P_0 与 P_i 的测地线（在紧子集上一致地）收敛到从 P_0 出发且属于 P^*类的测地射线。

例 2.14. 如果 X 是一个完备的 n维、具有非正截面曲率的黎曼流形，那么 ∂X 同胚于 S^{n-1}。事实上，给定一个基点P_0，我们可以考虑如下映射来得到一个同胚：它将每个在 P_0 处切于 X 的单位向量 V，对应到从 P_0 出发且具有¯速度向量 V. 的测地射线 c 的类。特别地，如果 X 是 n维双曲空间，那么 X 同胚于 $\mathbb{R}^n$中的 n维球。如果 X 是一个局部紧的欧几里得建筑，那么 ∂X 是一个紧球面建筑（参见 [KL，命题 4.2.1]）。

引理 2.15. 若 P_i是 X中的一个序列，且 $\lim P_i=P^*\in\partial X$，并且若 Q_i是 X中的另一个序列，满足 $d(P_i,Q_i)\le C$且与 i无关，则 $\lim Q_i=P^*$。

证明。固定 $P_0\in X$。令 $\gamma:[0,\infty)\to\infty$ 为等价类 P^* 中满足 $\gamma(0)=P_0$的按弧长参数化的测地线射线。令 $t_i=d(P_0,P_i)$（分别为 $\tau_i=d(P_0,Q_i)$），并令 $\gamma_i:[0,t_i]\to X$（分别为 $\hat{}\gamma_i:[0,\tau_i]\to X$）为连接 P_0 与 P_i（分别为 Q_i）的按弧长参数化的测地线段。根据三角不等式，

$$d(\hat{\gamma}_i(t_i),\hat{\gamma}_i(\tau_i))=|t_i-\tau_i|=|d(P_0,P_i)-d(P_0,Q_i)|\le d(P_i,Q_i)\le C.$$

因此，假设 $t \le t_i \le \tau_i$，NPC条件蕴含

$$d(\hat{\gamma}_i(t), \gamma_i(t)) \le \frac{t}{t_i} d(\hat{\gamma}_i(t_i), \gamma_i(t_i)) \le \frac{t}{t_i}\Big(d(\hat{\gamma}_i(t_i), \hat{\gamma}_i(\tau_i)) + d(\hat{\gamma}_i(\tau_i), \gamma_i(t_i))\Big) \le \frac{2Ct}{t_i}.$$

同样，假设 $t \le \tau_i < t_i$，

$$d(\hat{\gamma}_i(t), \gamma_i(t)) \le \frac{2Ct}{\tau_i}.$$

因此，对于 $t \le \min\{t_i, \tau_i\}$，

$$d(\hat{\gamma}_i(t), \gamma(t)) \le d(\hat{\gamma}_i(t), \gamma_i(t)) + d(\gamma_i(t), \gamma(t)) \le \frac{2Ct}{\max\{t_i, \tau_i\}} + d(\gamma_i(t), \gamma(t)).$$

固定 $T_0 > \infty$。假设 $\lim P_i = P^*$，则意味着 t_i、$\tau_i \to \infty$ 以及测地线 γ_i 在 $[0, T_0]$中一致收敛到 γ。因此，$\hat{}\gamma_i$ 也在 $[0, T_0]$中一致收敛到 γ。□

引理 2.16。无穷远点的稳定子包含于某个抛物子群中。因此，若 ρ 的像是 Zariski稠密的，则它不可能固定一个无穷远点。

2.11. 整体存在性结果。 我们证明等变调和映射的存在性[GS，定理 7。1]。

定理 2.17. 设 X 是一个局部紧NPC空间。假设 $\tilde{\rho}$ 的像在 ∂X 中没有不动点，并且存在一个有限能量的 Lipschitz等变映射 $v : M \to X$。那么存在一个具有最小能量的 Lipschitz等变映射 f，且 f 在任意一点附近的小球上的限制都是极小的。

证明. 令 E_0 表示所有 Lipschitz等变映射的能量下确界。设 v_i 是一列 Lipschitz等变映射，满足 $E(v_i) \to E_0$。令 B 为 M 中的一个球，使得对于所有 $\gamma \in \pi_1(M)$，都有 $\gamma(B) \cap B = \emptyset$。于是，我们可以构造一个新的极小化序列 $\bar{v}_i$：在每个 $\gamma(B)$ 上，用狄利克雷问题的解替换 v_i。显然，$\bar{v}_i$ 也是一个极小化序列。

由定理 2.10，在 B的紧子集上，序列 $\bar{v}_i$ 是一致Lipschitz的。因此，$\bar{v}_i$ 的一个子序列在 B 的紧子集上一致收敛到¯，其值域包含于 X 的映射；该映射要么映入 X，要么映到单点 $P^* \in \partial X$。我们˜按如下方式排除第二种可能。令 $x_0 \in M$ 为所选球 B的中心。令 C 为从 x_0 到 $\gamma(x_0)$ 的任意光滑嵌入曲线。利用Fubini定理的一个初等论证表明，可以选取 C，使得每个映射 $\bar{v}_i$ 在 C 上的限制的能量均一致有界。因此，曲线 $\bar{v}_i(C)$ 的长度一致有界，特别是 $d(v_i(x_0)\ \rho(\gamma) v_i((x_0)) \le C$。引理 2.15 推出 $\lim \rho(\gamma) v_i(x_0) = P^*$，因此对所有 γ，都有 $\rho(\gamma) P^* = P^*$。这就产生了矛盾。因此，我们可以假设 $\bar{v}_i$ 在 B的紧子集上一致收敛。

由（2.6），如前所述，我们有

$$\int_K |\nabla d(\bar{v}_i, \bar{v}_j)|^2 \star 1 \to 0$$

˜对任意紧集 $K \subset M$。由于 $\bar{v}_i$ 在 B 的紧子集上一致收敛，函数 $d(\bar{v}_i, v)$ 在那里一致有界。因此，由庞加莱型不等式可得

$$\int_K d(\bar{v}_i, \bar{v}_j)^2 \star 1 \to 0.$$

特别地，序列 $\bar{v}_i \to f$ 是一个极小化子，这由能量的下半连续性得到。f 的局部极小化性质随之成立。证明至此完成。□

3. Pluriharmonic maps and the Siu-Sampson Formula

3.1. 引言：调和映射的 Bochner 方法。本节讨论 Siu 的 Bochner 公式[Siu] 和 Sampson 的 [Sa]。我们的阐述基本遵循 [LY]的方法。我们还介绍受 Mochizuki 的工作启发而对这些公式所作的一种变体[M]。最后，我们概述了映入欧几里得建筑的多重调和映射的存在性。

3.2. 从 K¨ahler 流形到黎曼流形的多重调和映射。设 (M, ω, J) 是一个 K¨ahler 流形，连同其 K¨ahler 形式和复结构。设

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M$$

是其复化切丛，按 J 的 $\pm\sqrt{-1}$ 特征空间分解。我们可以将 $v \in TM \otimes \mathbb{C}$ 分解为

$$v = v^{1,0} + v^{0,1} \text{ where } v^{1,0} = \frac{1}{2}(v - \sqrt{-1}Jv),\ v^{0,1} = \frac{1}{2}(v + \sqrt{-1}Jv).$$

余切空间 T^*M具有一个复结构，仍记作 J，定义为 $J\alpha = \alpha \circ J$。相应地，我们有类似的分解

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = T^{*(1,0)}M \oplus T^{*(0,1)}M.$$

设 (N, h) 是一个黎曼流形，$TN \otimes \mathbb{C}$ 是其复化切丛。对于光滑映射 $f\colon M \to N$，令

$$E := f^*(TN \otimes \mathbb{C}). \tag{3.1}$$

通过复线性延拓，$df\colon TM \to TN$诱导出映射 $df\colon TM \otimes \mathbb{C} \to TN \otimes \mathbb{C}$. 记 $\Omega^{p,q}(E)$ 为 E-值 (p, q)-形式空间。定义

$$d'f := \frac{1}{2}(df - \sqrt{-1}\, df \circ J) \in \Omega^{1,0}(E), \qquad d''f := \frac{1}{2}(df + \sqrt{-1}\, df \circ J) \in \Omega^{0,1}(E).$$

我们有

$$df = d'f + d''f \qquad Jdf = df \circ J = -\sqrt{-1}\,(d'f - d''f).$$

对于 N 的局部坐标 (y^i)，令 $\frac{\partial}{\partial f^i} = \frac{\partial}{\partial y^i} \circ f$。则

$$d'f = d'f^i \frac{\partial}{\partial f^i} \qquad d''f = d''f^i \frac{\partial}{\partial f^i}$$
$$\overline{d'f} = d''f \qquad \overline{d''f} = d'f.$$

类似地，我们可以将 Levi-Civita 联络的拉回（参见第 1 节）分解为

$$\nabla = \nabla' + \nabla''$$

其中

$$\nabla' : C^\infty(E) \to \Omega^{1,0}(E), \quad \nabla'' : C^\infty(E) \to \Omega^{0,1}(E).$$

进而， ∇' 和 ∇'' 诱导出微分算子

$$d'_E : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E), \quad d''_E : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

其中

$$\begin{aligned} d'_E(\phi \otimes s) &= d'\phi \otimes s + (-1)^{p+q}\phi \otimes \nabla'_E s \\ d''_E(\phi \otimes s) &= d''\phi \otimes s + (-1)^{p+q}\phi \otimes \nabla''_E s. \end{aligned}$$

直接计算可得

$$d'_E d'' f = -d''_E d' f, \quad d'_E d' f = 0, \quad d''_E d'' f = 0. \tag{3.2}$$

引理 3.1.

$$\tau(f) = 2i \star \left(\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge d'_E d'' f \right).$$

证明。我们断言

$$\star\alpha = \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge J\alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^1(M, \mathbb{R}).$$

为验证这一断言，在点 $x \in M$ 处使用正规坐标（$z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$）。对于$\alpha = dx^i$ 或 $\alpha = dy^i$，我们有

$$dx^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge Jdx^i = dx^i \wedge dy^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\omega^n}{n!}$$

and

$$dy^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge Jdy^i = -dy^i \wedge dx^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^i \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\omega^n}{n!}.$$

该结论由线性性可得。

接下来，注意到

$$\begin{aligned} Jd'f &= \frac{1}{2}(df \circ J + \sqrt{-1}df) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(df - \sqrt{-1}df \circ J) = \sqrt{-1}d'f \\ Jd''f &= \frac{1}{2}(df \circ J - \sqrt{-1}df) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(df + \sqrt{-1}df \circ J) = -\sqrt{-1}d''f, \end{aligned}$$

这意味着 $Jdf = Jd'f + Jd''f = \sqrt{-1}(d'f - d''f)$。将该断言应用于 $\alpha = df$，利用事实 $d\omega = 0$，得到

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= -d^{\star}_{\nabla} df \\
&= \star d_{\nabla}(\star df) \\
&= \star d_{\nabla}\left(\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge Jdf\right) \\
&= \star d_{\nabla}\left(\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge (\sqrt{-1}(d'f - d''f))\right) \\
&= -\sqrt{-1} \star \left(\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge (d'_E d''f - d''_E d'f)\right) \\
&= -2\sqrt{-1} \star \left(\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \wedge d'_E d''f\right).
\end{aligned}$$

□

定义 3.2. f 称为多重调和 $d'_E d''f = 0$.

注 3.3. 引理 3.1蕴含

$$\text{pluriharmonic} \Longrightarrow \text{harmonic}.$$

注意，K¨ahler 流形之间的全纯映射是多重调和的，因此也是调和的。

3.3. Sampson 的 Bochner 公式。

定理 3.4 (Sampson 的 Bochner 公式，[Sa])。 对于调和映射 $f: M \to N$，从 K¨ahler 流形 (M, g) 到黎曼流形 (N, h)，

$$d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 4\left(|d'_E d''f|^2 + Q_0\right)\frac{\omega^n}{n!}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 在定义 3.5 中给出，且

$$Q_0 = -2g^{\alpha\bar{\delta}} g^{\gamma\bar{\beta}} R_{ijkl} \frac{\partial f^i}{\partial z^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial f^j}{\partial z^\gamma}\frac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^\delta}$$

在 M 的局部坐标（z^α）和 N 的局部坐标（y^i）下。

证明。 结合引理 3.6、引理 3.8 和下面的引理 3.20即可。 □

定义 3.5。设 $\{s^i\}$ 是 E 的局部标架。对于

$$\psi = \psi_i \otimes s^i \in \Omega^{p,q}(E) \text{ and } \xi = \xi_i \otimes s^i \in \Omega^{p',q'}(E)$$

记

$$\{\psi, \xi\} = \langle s^i, s^j\rangle \psi_i \wedge \bar{\xi}_j \in \Omega^{p+q',q+p'}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 E 上黎曼度量的复线性延拓。

引理 3.6. 对于从 K ¨ahler 流形到黎曼流形的任意光滑映射 $f : M \to N$，我们有

$$d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = \left(-\{d'_E d''f, d'_E d''f\} + \{d''f, R_E^{(1,1)}(d''f)\}\right) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}$$

其中

$$R_E^{(1,1)} = (d'_E d''_E + d''_E d'_E)$$

是曲率 $R_E = d_E^2$ 的 (1, 1) 部分。

证明。 反复利用这一事实： $d''_E d''f = 0$ （参见（3.2））,

$$\begin{aligned} d'd''\{d''f, d''f\} &= -\{d'_E d''f, d'_E d''f\} + \{d''f, d''_E d'_E d''f\} \\ &= -\{d'_E d''f, d'_E d''f\} + \{d''f, (d''_E d'_E + d'_E d''_E + {d''_E}^2) d''f\}. \end{aligned}$$

由于 $\{d''f, d'_E d'_E d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)\,!}$ 是一个 $(n-1, n+1)$-形式，因维数原因必为零，因此我们可以配方得到

$$\begin{aligned} d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= \left(-\{d'_E d''f, d'_E d''f\} + \{d''f, (d'_E + d''_E)^2 d''f\}\right) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \left(-\{d'_E d''f, d'_E d''f\} + \{d''f, R_E^{(1,1)}(d''f)\}\right) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \end{aligned}$$

这就证明了第一个等式。 □

引理 3.7. 对于 M 上任意取值于 E 的 (1, 1)-形式 ϕ,

$$-\{\phi, \phi\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 4(|\phi|^2 - |\mathsf{Trace}_\omega \phi|^2)\frac{\omega^n}{n!}.$$

Pr证。令 (z^p) 为 $x \in M$ 处的正规坐标，并令 $\phi_{p\bar{q}} dz^p \wedge d\bar{z}^q$。在 x 处,

$$\frac{\omega^n}{n!} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2 \left(\sum_p dz^p \wedge d\bar{z}^p\right)^2 \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}.$$

对于满足 $p \neq q$ 的 p、q,

$$s \neq p \text{ or } t \neq q \;\Rightarrow\; dz^p \wedge d\bar{z}^q \wedge d\bar{z}^s \wedge dz^t \wedge \left(\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j\right)^{n-2} = 0.$$

对于 $p = q$,

$$s \neq t \;\Rightarrow\; dz^p \wedge d\bar{z}^q \wedge d\bar{z}^s \wedge dz^t \wedge \left(\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j\right)^{n-2} = 0.$$

此外,

$$\begin{aligned}\phi_{p\bar{q}}\overline{\phi_{p\bar{q}}}dz^p\wedge d\bar{z}^q\wedge d\bar{z}^p\wedge dz^q &= \phi_{p\bar{q}}\overline{\phi_{p\bar{q}}}dz^p\wedge d\bar{z}^p\wedge dz^q\wedge d\bar{z}^q\\ \phi_{p\bar{p}}\overline{\phi_{q\bar{q}}}dz^p\wedge d\bar{z}^p\wedge d\bar{z}^q\wedge dz^q &= -\phi_{p\bar{p}}\overline{\phi_{q\bar{q}}}dz^p\wedge d\bar{z}^p\wedge dz^q\wedge d\bar{z}^q.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2\{\phi,\phi\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2\left(\sum_{p,q,s,t}\phi_{p\bar{q}}\overline{\phi_{s\bar{t}}}dz^p\wedge d\bar{z}^q\wedge d\bar{z}^s\wedge dz^t\right)\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\\ &= \sum_{p\neq q}\left(|\phi_{p\bar{q}}|^2-\phi_{p\bar{p}}\phi_{q\bar{q}}\right)\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \sum_{p,q}\left(|\phi_{p\bar{q}}|^2-\phi_{p\bar{p}}\phi_{q\bar{q}}\right)\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \left(|\phi|^2-|\mathsf{trace}_\omega\phi|^2\right)\frac{\omega^n}{n!}.\qquad\square\end{aligned}$$

引理 3.8. 对于从 K ¨ahler 流形到黎曼流形的任意调和映射 $f\colon M\to N$，有

$$-\{d'_Ed''f,d'_Ed''f\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 4\,|d'_Ed''f|^2\,\frac{\omega^n}{n!}.$$

证明。 我们应用引理 3.7，其中 $\phi=d'_Ed''f$。由于 f 是调和的，根据引理 $\mathrm{Tr}_\omega d'_Ed''f=0$，3.1。 □

引理 3.9. 对于从 K ¨ahler 流形到 Hermitian-负黎曼流形的调和映射 $f\colon M\to N$，有

$$\{d''f,R_E^{(1,1)}(d''f)\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = -2\,R_{ijkl}d'f^i\wedge d''f^k\wedge d'f^j\wedge d''f^l\wedge\frac{\omega^n}{n!}$$

其中 $R_E^{(1,1)}$ 在引理 3.6中定义。

证明。设 (z^α)（分别为 (y^i)）是点 $x\in M$（分别为 $f(x)\in N$）处的正规坐标。那么

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\gamma}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\beta}}\frac{\partial}{\partial f^j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\gamma}}\left(\frac{\partial f^k}{\partial z^\beta}\nabla_{\frac{\partial}{\partial f^k}}\frac{\partial}{\partial f^j}\right)\\ &= \frac{\partial f^k}{\partial z^\beta}\frac{\partial f^l}{\partial\bar{z}^\gamma}\nabla_{\frac{\partial}{\partial f^l}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial f^k}}\frac{\partial}{\partial f^j}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d''_E d'_E d'' f &= d''_E d'_E \left(\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial f^j} \right) \\ &= d'' d' \left(\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha \right) \otimes \frac{\partial}{\partial f^j} - \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha \wedge d\bar{z}^\gamma \wedge dz^\beta \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\beta}} \frac{\partial}{\partial f^j} \\ &= d'' d' \left(\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha \right) \otimes \frac{\partial}{\partial f^j} + \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} \frac{\partial f^k}{\partial z^\beta} \frac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^\gamma} d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\gamma \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial f^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial f^k}} \frac{\partial}{\partial f^j}. \end{aligned}$$

同理,

$$d'_E d''_E d'' f = d' d'' \left(\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha \right) \otimes \frac{\partial}{\partial f^j} - \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} \frac{\partial f^k}{\partial z^\beta} \frac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^\gamma} d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\gamma \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial f^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial f^l}} \frac{\partial}{\partial f^j}.$$

结合上述两个等式,

$$R_E^{(1,1)}(d'' f) = \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^\alpha} \frac{\partial f^k}{\partial z^\beta} \frac{\partial f^l}{\partial \bar{z}^\gamma} dz^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\gamma \otimes R^s_{jkl} \frac{\partial}{\partial f^s}.$$

我们计算得

$$\begin{aligned} \{d'' f, R_E^{(1,1)}(d'' f)\} &= R_{ijkl} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} d\bar{z}^\delta \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \wedge dz^\gamma \\ &= R_{jilk} \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\delta \wedge dz^\gamma \wedge d\bar{z}^\beta \\ &= (-R_{jlki} + R_{jkli}) \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\delta \wedge dz^\gamma \wedge d\bar{z}^\beta. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & R_{jkli} \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\delta \wedge dz^\gamma \wedge d\bar{z}^\beta \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ = \; & R_{jkli} \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\beta \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ & + R_{jkli} \frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\delta} \frac{\partial f^l}{\partial z^\gamma} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\alpha \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\{d''f, R_E^{(1,1)}(d''f)\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= -R_{jlki}\frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\alpha}\frac{\partial f^l}{\partial z^\beta}\frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\beta \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\quad -R_{jlki}\frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial f^l}{\partial z^\beta}\frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\alpha} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\alpha \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= -2R_{jlki}\frac{\partial f^j}{\partial z^\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^\alpha}\frac{\partial f^l}{\partial z^\beta}\frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \wedge d\bar{z}^\beta \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= -2R_{jlki} d'f^j \wedge d''f^i \wedge d'f^l \wedge d''f^k \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \quad \square\end{aligned}$$

定义 3.10. 若黎曼流形 N 满足以下条件，则称其为厄米负（分别称为强厄米负）：

$$R_{ijkl}A^{i\bar{l}}A^{j\bar{k}} \leq 0 \ \ (\text{resp.} < 0)$$

对于任意厄米半正定矩阵 $A = \left(A^{i\bar{l}}\right)$。

注 3.11. 不可约局部因子均为非紧型或欧几里得型的局部对称空间是厄米负的（参见 [Sa，定理 2]）。

定理 3.12（Sampson）。若 $f\colon M \to N$ 是从 K¨ahler 流形到厄米负黎曼流形的调和映射，则 f 是多重调和的。

证明。对 M积分 Sampson 的 Bochner 公式。应用斯托克斯定理可得左侧为 0。右侧两项逐点非负，因此它们必定恒等于 0。特别地， $d'_E d''f = 0$；即 f是多重调和的。□

3.4. K¨ahler 流形之间的映射。设 $f\colon M \to N$ 是 K¨ahler 流形之间的光滑映射。通过分解

$$TN \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}N \oplus T^{(0,1)}N$$

我们得到 $E := f^{-1}(TN \otimes \mathbb{C})$ 的分解：

$$E = E' \oplus E'' \ \ \text{where} \ \ E' := f^{-1}(T^{(1,0)}N), \ \ E'' := f^{-1}(T^{(0,1)}N).$$

分别用 $\Omega^{p,q}(E)$、$\Omega^{p,q}(E')$ 和 $\Omega^{p,q}(E'')$ 表示 E 值、 E' 值和 E'' 值 (p,q)-形式空间。若 (w^i) 是 N 中的局部全纯坐标，则 $\{\frac{\partial}{\partial f^i} := \frac{\partial}{\partial w^i} \circ f, \ \frac{\partial}{\partial \bar{f}^i} := \frac{\partial}{\partial \bar{w}^i} \circ f\}$ 是 E 的局部标架。若 $d'f, d'f'$ 如第 3.2 节所述，则

$$d'f = \partial f + \partial \bar{f}, \qquad d''f = \bar{\partial} f + \bar{\partial}\bar{f}, \qquad df = d'f + d''f = \partial f + \partial \bar{f} + \bar{\partial} f + \bar{\partial}\bar{f}.$$

其中

$$\partial f = \partial f^i \frac{\partial}{\partial f^i} \qquad \bar{\partial} f = \bar{\partial} f^i \frac{\partial}{\partial f^i}$$
$$\partial \bar{f} = \partial \bar{f}^i \frac{\partial}{\partial \bar{f}^i} \qquad \bar{\partial} \bar{f} = \bar{\partial} \bar{f}^i \frac{\partial}{\partial \bar{f}^i}$$
$$\overline{\partial f} = \bar{\partial} \bar{f} \qquad \overline{\bar{\partial} f} = \partial \bar{f}.$$

¯类似地， $d_\nabla = d'_E + d''_E$ 分解为诱导算子 $\partial_{E'}$、 $\partial_{E'}$、 $\partial_{E''}$、 $\bar{\partial}_{E''}$。

直接计算可得

$$\partial_{E'} \bar{\partial} f = -\bar{\partial}_{E'} \partial f \qquad \partial_{E''} \bar{\partial} \bar{f} = -\bar{\partial}_{E''} \partial \bar{f} \tag{3.3}$$
$$\partial_{E'} \partial f = 0 \qquad \bar{\partial}_{E'} \bar{\partial} f = 0$$
$$\partial_{E''} \partial \bar{f} = 0 \qquad \bar{\partial}_{E''} \bar{\partial} \bar{f} = 0. \tag{3.4}$$

对于 K¨ahler 流形之间的任意映射 $f\colon M \to N$，有

$$\left|\partial_{E''} \bar{\partial} \bar{f}\right|^2 = \left|\bar{\partial}_{E''} \partial \bar{f}\right|^2 = \left|\partial_{E'} \bar{\partial} f\right|^2. \tag{3.5}$$

事实上，左边的等式由 (3.3) 得出，右边则是因为共轭变换是等距的。

3.5. Siu 曲率。

定义 3.13. 设 N 是一个 K¨ahler 流形， R 是其复化曲率张量。若 N 具有负（分别为非正）复截面曲率，则称

$$R(V, \bar{W}, W, \bar{V}) < 0 \,(\text{resp.} \leq 0) \quad \forall V, W \in TN^{\mathbb{C}}.$$

在 [Siu], Siu 引入了以下负曲率的概念。回顾一下，对于 Kw^iähler 流形 ¨的局部全纯坐标 N，曲率张量是 (1,1) 型的，并且可显式表示为

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 h_{i\bar{j}}}{\partial w^k \partial \bar{w}^l} + h^{p\bar{q}} \frac{\partial h_{k\bar{q}}}{\partial w^i} \frac{\partial h_{p\bar{l}}}{\partial \bar{w}^j}$$

其中 h 是 N上的 K¨ahler 度量。若 N 具有强负（分别为强半负）曲率，则称

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} (A^i \overline{B^j} - C^i \overline{D^j}) \overline{(A^l \overline{B^k} - C^l \overline{D^k})} < 0 \ (\text{resp.} \leq 0).$$

对于任意复数 A^i、 B^i、 C^i、 D^i，当至少存在一对指标 (i, j) 使得 $A^i \overline{B^j} - C^i \overline{D^j} \neq 0$ 时。

注记 3.14。 K¨ahler 流形 N 强半负的充要条件是它具有非正复截面曲率（参见 [LSY，定理 4。4]）。

引理 3.15。设 N 是一个带有 K¨ahler 形式 ω 且曲率强半负的 K¨ahler 流形。设 M 是另一个 K¨ahler 流形，且 $f : M \to N$ 是一个光滑映射。若 $Q : M \to \mathbb{R}$ 定义为

$$Q\frac{\omega^n}{n!} = -R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial\bar{f}^j \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}\bar{f}^l \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!},$$

则 $Q \geq 0$。

证明。在定义域中取一点，并采用正规坐标

$$\begin{aligned}
&R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial\overline{f^j} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}\,\overline{f^l} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= \sum_{\alpha,\beta}(\sqrt{-1})^{n-2}R_{i\bar{j}k\bar{l}}\Big(-\partial_{\bar{\alpha}}f^i\partial_\alpha\overline{f^j}\partial_\beta f^k\partial_{\bar{\beta}}\overline{f^l} + \partial_{\bar{\alpha}}f^i\partial_\beta\overline{f^j}\partial_\alpha f^k\partial_{\bar{\beta}}\overline{f^l}\\
&\quad +\partial_{\bar{\beta}}f^i\partial_\alpha\overline{f^j}\partial_\beta f^k\partial_{\bar{\alpha}}\overline{f^l} - \partial_{\bar{\beta}}f^i\partial_\beta\overline{f^j}\partial_\alpha f^k\partial_{\bar{\alpha}}\overline{f^l}\Big) \wedge (\wedge_\gamma(dz^\gamma \wedge d\bar{z}^\gamma))\\
&= 4\sum_{\alpha,\beta} R_{i\bar{j}k\bar{l}}\Big((\partial_{\bar{\alpha}}f^i)(\overline{\partial_\beta f^l}) - (\partial_{\bar{\beta}}f^i)(\overline{\partial_\alpha f^l})\Big)\overline{\Big((\partial_{\bar{\alpha}}f^j)(\overline{\partial_\beta f^k}) - (\partial_{\bar{\beta}}f^j)(\overline{\partial_\alpha f^k})\Big)}\frac{\omega^n}{n!}\\
&= 4\sum_{\alpha,\beta} R_{i\bar{j}k\bar{l}}\Big((\partial_{\bar{\alpha}}f^i)(\overline{\partial_\beta f^j}) - (\partial_{\bar{\beta}}f^i)(\overline{\partial_\alpha f^j})\Big)\overline{\Big((\partial_{\bar{\alpha}}f^l)(\overline{\partial_\beta f^k}) - (\partial_{\bar{\beta}}f^l)(\overline{\partial_\alpha f^k})\Big)}\frac{\omega^n}{n!}\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

最后一个等式是因为 $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{l}}$，而最后一个不等式是因为假设 N 具有强半负曲率。□

3.6. Siu 的 Bochner 公式。

定理 3.16 (Siu-Bochner 公式，[Siu] 命题 2)。 对于调和映射 $f : M \to N$ 在 K¨ahler 流形之间，

$$\partial\bar{\partial}\{\bar{\partial}f, \bar{\partial}f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = \Big(4\left|\partial_{E'}\bar{\partial}f\right|^2 + Q\Big)\frac{\omega^n}{n!}.$$

证明。 结合引理 3.15、引理 3.17、引理 3.18 和下文的推论 3.20 。 □

E' 和 E'' 的曲率算子分别为 $R_{E'} = -(\partial_{E'} + \bar{\partial}_{E'})^2$ 和 $R_{E''} = -(\partial_{E''} + \bar{\partial}_{E''})^2$ 。

引理 3.17. 对于任意的光滑映射 $f : M \to N$ （在 K¨ahler 流形之间），我们有

$$\partial\bar{\partial}\{\bar{\partial}f, \bar{\partial}f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = \big(-\{\partial_{E'}\bar{\partial}f, \partial_{E'}\bar{\partial}f\} - \{\bar{\partial}f, R_{E'}(\bar{\partial}f)\}\big) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}$$

and

$$\partial\bar{\partial}\{\bar{\partial}\bar{f}, \bar{\partial}\bar{f}\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = \big(-\{\partial_{E''}\bar{\partial}\bar{f}, \partial_{E''}\bar{\partial}\bar{f}\} - \{\bar{\partial}\bar{f}, R_{E''}(\bar{\partial}\bar{f})\}\big) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}.$$

证明。令 $\psi=\xi=\bar\partial f\in\Omega^{0,1}(E')$ 于 (3.5) 中，并反复利用这一事实 $\partial_{E'}\partial f=0$（参见 (3.3)），

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial\{\bar\partial f,\bar\partial f\} &= -\{\partial_{E'}\bar\partial f,\partial_{E'}\bar\partial f\}+\{\bar\partial f,\bar\partial_{E'}\partial_{E'}\bar\partial f\}\\ &= -\{\partial_{E'}\bar\partial f,\partial_{E'}\bar\partial f\}+\{\bar\partial f,(\bar\partial_{E'}\partial_{E'}+\partial_{E'}\bar\partial_{E'}+\bar\partial_{E'}^2)\bar\partial f\}.\end{aligned}$$

由于 $\{\bar\partial f,\partial_{E'}^2\bar\partial f\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{n-2)!}$ 是一个 $(n-1,n+1)$-形式，因维数原因必为零，因此我们可以配方得到

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial\{\bar\partial f,\bar\partial f\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= \left(-\{\partial_{E'}\bar\partial f,\partial_{E'}\bar\partial f\}+\{\bar\partial f,(\partial_{E'}+\bar\partial_{E'})^2\bar\partial f\}\right)\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\\ &= \left(-\{\partial_{E'}\bar\partial f,\partial_{E'}\bar\partial f\}-\{\bar\partial f,R_{E'}(\bar\partial f)\}\right)\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\end{aligned}$$

这就证明了第一个等式。令 $\psi=\xi=\partial f\in\Omega^{0,1}(E'')$ 代入 (3.5)，并完全按照相同的计算过程，即可得到第二个等式。□

引理 3.18. 对于 Kähler 流形之间的任意调和映射 $f:M\to N$，有

$$\begin{aligned}-\{\partial_{E'}\bar\partial f,\partial_{E'}\bar\partial f\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= 4\left|\partial_{E'}\bar\partial f\right|^2\frac{\omega^n}{n!}\\ -\{\partial_{E''}\bar\partial\bar f,\partial_{E''}\bar\partial\bar f\}\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= 4\left|\partial_{E''}\bar\partial\bar f\right|^2\frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned}$$

证明。应用引理3.7，取 $\phi=\partial_{E'}\partial f$（分别取 $\phi=\partial_{E''}\partial f$）。由于 f 是调和的，$\mathrm{Tr}_\omega\partial_{E'}\partial f=0$ 和 $\mathrm{Tr}_\omega\partial_{E''}\partial f=0$ 由引理3.1可得。□

引理 3.19. 对于 Kähler 流形之间的任意光滑映射 $f:M\to N$，我们有

$$\{\bar\partial f,R_{E'}(\bar\partial f)\}=R_{i\bar jk\bar l}\bar\partial f^i\wedge\partial\bar f^j\wedge\partial f^k\wedge\bar\partial\bar f^l=\{\bar\partial\bar f,R_{E''}(\bar\partial\bar f)\}.$$

证明。利用正规坐标，我们计算得

$$\begin{aligned}\{\bar\partial f,R_{E'}(\bar\partial f)\} &= \{\bar\partial f^i\frac{\partial}{\partial f^i},R_{E'}(\bar\partial f^j\frac{\partial}{\partial f^j})\}\\ &= \{\bar\partial f^i\frac{\partial}{\partial f^i},\bar\partial f^j\wedge R_{E'}(\frac{\partial}{\partial f^j})\}\\ &= \{\bar\partial f^i\frac{\partial}{\partial f^i},\bar\partial f^j\wedge R^s_{jk\bar l}\partial f^k\wedge\overline{\partial f^l}\frac{\partial}{\partial f^s}\}\\ &= R_{i\bar jk\bar l}\bar\partial f^i\wedge\partial\bar f^j\wedge\bar\partial\bar f^k\wedge\partial f^l\\ &= R_{i\bar jk\bar l}\bar\partial f^i\wedge\partial\bar f^j\wedge\partial f^k\wedge\bar\partial\bar f^l\end{aligned}$$

由此证明第一个等式。第二个等式的证明类似。 :

$$\begin{aligned}
\{\bar\partial \bar f, R_{E''}(\bar\partial \bar f)\} &= \{\bar\partial \bar f^i \frac{\partial}{\partial \bar f^i}, R_{E''}(\bar\partial \bar f^j \frac{\partial}{\partial \bar f^j})\} \\
&= \{\bar\partial \bar f^i \frac{\partial}{\partial \bar f^i}, \bar\partial \bar f^j \wedge R_{E''}(\frac{\partial}{\partial \bar f^j})\} \\
&= \{\bar\partial \bar f^i \frac{\partial}{\partial \bar f^i}, \bar\partial \bar f^j \wedge R^{\bar s}_{\bar j \bar k l} \partial \bar f^k \wedge \bar\partial f^l \frac{\partial}{\partial \bar f^s}\} \\
&= R_{\bar i j k \bar l} \bar\partial \bar f^i \wedge \partial f^j \wedge \bar\partial f^k \wedge \partial \bar f^l \\
&= R_{j \bar i k \bar l} \partial f^j \wedge \bar\partial \bar f^i \wedge \bar\partial f^k \wedge \partial \bar f^l \\
&= R_{i \bar j k \bar l} \partial f^i \wedge \bar\partial \bar f^j \wedge \bar\partial f^k \wedge \partial \bar f^l \\
&= R_{i \bar j k \bar l} \bar\partial f^i \wedge \partial \bar f^j \wedge \partial f^k \wedge \bar\partial \bar f^l. \qquad \square
\end{aligned}$$

推论 3.20. 对于任意光滑映射 $f : M \to N$，在 K ¨ahler 流形之间，我们有

$$-\{\bar\partial f, R_{E'}(\bar\partial f)\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = Q \frac{\omega^n}{n!}.$$

证明。 结合引理 3.19 与引理 Q 中给出的定义 3.15。 $\square$

定理3.21. 设 M 和 N 是紧致 K ¨ahler 流形，且 N 的曲率强半负定。若 $f : M \to N$ 是调和映射，则 f 是多重调和的。此外，若 N 的曲率强负定，且 $_{\mathbb{R}} df \geq 3$ 在 M的某一点处的秩，则 f 或为全纯，或为共轭全纯。

证明。对 M积分 Siu 的 Bochner 公式。应用斯托克斯定理，左边为 0。右边两项逐点非负¯，因此它们必定恒等于 0。特别地， $\partial_{E'} \partial f = 0$；即 f¯是多重调和的。若秩在某点 x处为 ≥ 3，根据 Q的定义， $\partial f = 0$ 在 x 的某个邻域¯内成立。因此 $\partial f = 0$ 在整个 M上成立。□

3.7. Siu 和 Sampson 公式的变式。 以下是 Sampson 的 Bochner 公式的一种变式。对于调和度量，这一结果归功于 Mochizuki（参见 [M，命题 21。42]）。

定理 3.22. 对于调和映射 $f : M \to N$ 从一个 K ¨ähler 流形到一个黎曼流形，

$$d\{d'_E d' f, d'' f - d' f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 8 \left(|d'_E d'' f|^2 + Q_0 \right) \wedge \frac{\omega^n}{n!}.$$

证明。关键观察是，由于 $d'\{d'_E d'' f, d'' f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)\,!}$ 是一个 $(n+1, n-1)$-形式，而 $d''\{d'_E d'' f, d' f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)\,!}$ 是一个 $(n-1, n+1)$-形式，这两个形式都

恒等于零。因此，

$$\begin{aligned} d'\{d'_E d'' f, d'f - d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= d'\{d'_E d'' f, d'f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= -d'\{d''_E d' f, d'f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \quad (\text{by } (3.2)). \\ &= -d'd''\{d'f, d'f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \qquad (3.6) \\ d''\{d'_E d'' f, d'f - d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= -d''\{d'_E d'' f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= -d''d'\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \qquad (3.7) \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} d\{d''_E d' f, d''f - d'f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= d\{d'_E d'' f, d'f - d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \quad (\text{by } (3.2)) \\ &= (d' + d'')\{d'_E d'' f, d'f - d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= 2d'd''\{d''f, d''f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \quad (\text{by } (3.6) \text{ and } (3.7)). \end{aligned}$$

因此，所述恒等式由定理 3.4 得出。 □

通过采用与定理 3.23 类似的证明，我们得到 Siu 的 Bochner 公式的一个变体。

定理 3.23. 对于 K ¨ahler 流形之间的调和映射 $f\colon M \to X$，

$$d\{\bar\partial_{E'}\partial f, \bar\partial f - \partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = \left(8\left|\partial_{E'}\bar\partial f\right|^2 + 2Q\right) \wedge \frac{\omega^n}{n!}.$$

证明。如定理3.22的证明中所示，$\partial\{\partial_{E'}\bar\partial f, \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 0 = \bar\partial\{\partial_{E'}\bar\partial f, \partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}$ 因此

$$\begin{aligned} \partial\{\partial_{E'}\bar\partial f, \partial f - \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= \partial\bar\partial\{\bar\partial\bar f, \bar\partial\bar f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}, \\ \bar\partial\{\partial_{E'}\bar\partial f, \partial f - \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= \partial\bar\partial\{\bar\partial f, \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} d\{\bar\partial_{E'}\partial f, \bar\partial f - \partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= d\{\partial_{E'}\bar\partial f, \partial f - \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= (\partial + \bar\partial)\{\partial_{E'}\bar\partial f, \partial f - \bar\partial f\} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \big(\partial\bar\partial\{\bar\partial f, \bar\partial f\} + \partial\bar\partial\{\bar\partial \bar f, \bar\partial \bar f\}\big) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \end{aligned}$$

所断言的恒等式由定理 3.16得出。 □

3.8. 欧几里得建筑中的多重调和映射。

定理 3.24. 设 M 是一个紧致 K ¨ahler 流形， $\Delta(G)$ 是与定义在非阿基米德局部域 K 上的半单代数群 G 相关联的 Bruhat-Tits建筑。对于任意 Zariski稠密表示 $\rho : \pi_1(X) \to G(K)$，存在一个˜ ρ-等变、局部利普希茨的多重调和映射 $f : M \to \Delta(G)$，它从万有˜覆盖空间 M出发。

定义 3.25. 维数为 n 的欧几里得建筑是一个分片欧几里得单纯复形 Δ，满足：

- Δ 是由一族 $\mathcal{A}$ 称为公寓的子复形 A构成的并集，使得 A 上的内在度量 d_A 令 (A, d_A) 与欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 等距，并在每个单形上诱导给定的欧几里得度量。

- 给定两个公寓 A 和 A'，它们都包含单纯形 S 和 S'，则存在一个从 (A, d_A) 到 $(A', d_{A'})$ 的单纯同构，它逐点固定 S 和 S'。

- Δ是局部有限的。

定义 3.26. 若存在 $r > 0$，使得 x 的 $f(B_r(x_0))$ 包含于 Δ的某个公寓中，则称点 x_0 是调和映射 f的正则点。 f 的奇异点是 Ω 中非正则的点。 f的正则集（分别为奇异集）$\mathcal{R}(f)$（分别为 $\mathcal{S}(u)$）是 f的所有正则点（分别为奇异点）组成的集合。

例 3.27. 考虑由二次微分zdz^2 在 $\mathbb{C}$上定义的测度叶状结构。水平叶状结构的叶定义了一个三叉树 T，而横截测度赋予 T一个距离函数 d，使(T, d)成为一个非正曲率空间。沿垂直叶状结构的投影 $u : \mathbb{C} \to T$ 是一个调和映射。包含 0 的叶是 T的一个非流形点。设 $K = u^{-1}(0)$。那么 K 也是一个三叉树。另一方面，除 0 以外， K 的每一点都有一个邻域映射到 $\mathbb{R}$ 的一个等距副本中，并且 $\mathcal{S}(0) = \{0\}$。特别地，奇异集的豪斯多夫余维为 2。类似地，通过取更高阶的二次微分，可以构造映射到其他齐性树的调和映射。

接下来的两个定理在[GS]中证明。

定理 3.28。调和映射 $f\colon M \to \Delta$ 的奇异集 $\mathcal{S}(f)$ 是一个豪斯多夫余维为 ≥ 2 的闭集。

定理 3.29。设 $f : M \to \Delta$ 如定理 3.28所述。存在一列光滑函数 ψ_i，满足 $\psi_i \equiv 0$ 在 $\mathcal{S}(u)$的一个邻域内，$0 \leq \psi_i \leq 1$ 并且 $\psi_i(x) \to 1$对所有 $x \in \mathcal{S}(u)$ 均成立，使得

$$\lim_{i\to\infty} \int_M |\nabla\nabla u||\nabla\psi_i| \, d\mu = 0.$$

˜根据定理 3.28，Siu 或 Sampson 的 Bochner 公式几乎处处成立 $x \in M$。现在我们沿用定理 3.21 的证明，其中可以利用定理 3.28 和定理 3.29来证明分部积分的合理性。

4. Donaldson Corlette theorem

4.1. 引言：通过调和映射研究 Higgs 丛。 本讲中，我们证明 Donaldson 和 Corlette 关于从非紧型对称空间到平坦联络的调和映射之间关系的定理。我们将针对 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 明确给出证明。这一对应关系广为人知，也有许多优秀的参考资料可供查阅。考虑到听众对这一主题的兴趣，我们决定明确给出证明的所有细节。另请参阅 [Do], [Co] 以及综述性论文 [Li]。

4.2. 与表示相关联的平坦向量丛。设 $\rho: \pi_1(M) \to G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 是一个同态，并且

$$E = \tilde{M} \times_\rho \mathbb{C}^n \to M$$

并令其为相应的平坦向量丛。令 $\mathcal{H}$ 表示行列式为一的正定自伴矩阵空间。对于 $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$，定义它在 $(n \times n)$ 矩阵空间 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 上的作用 $\mathcal{A}_g$，其定义为

$$\mathcal{A}_g(h) = g^{-1*} h g^{-1}. \tag{4.1}$$

注意， $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{A}_g$ 作用下不变，因此它定义了在 $\mathcal{H}$ 上的一个作用。

˜一个 ρ-等变映射 $h\colon M \to \mathcal{H}$ 通过首先定义下式，在 E 上定义一个厄米度量

$$H(s,t) = \bar{s}^t h t \tag{4.2}$$

˜在万有覆盖 $M \times \mathbb{C}^n$ 上，并通过等变性下降为 E 上的度量。

给定由 ρ 定义的平坦向量丛 (E,d)，以及由一个 ρ-等变映射定义的厄米度量 H，我们用如下公式定义 $\theta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$

$$H(\theta s, t) = 1/2\,(H(ds,t) + H(s,dt) - dH(s,t)) \tag{4.3}$$

以及 D，其定义公式为

$$d = D + \theta. \tag{4.4}$$

公式（4.3）和（4.4）立即推出

$$H(\theta s, t) = H(s, \theta t) \tag{4.5}$$

and

$$\begin{aligned} H(Ds,t) + H(s,Dt) &= H(ds,t) - H(\theta s,t) + H(s,dt) - H(s,\theta t) \\ &= dH(s,t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

换句话说， D 是 (E,H) 上的厄米联络。

我们断言

$$\theta = -\frac{1}{2} h^{-1} dh. \tag{4.7}$$

为了解释（4.7），计算

$$\begin{aligned} dH(s,t) &= d\bar{s}^t h\, t + \bar{s}^t dh\, t + \bar{s}^t h\, dt \\ &= H(ds,t) + \bar{s}^t dh\, t + H(s,dt) \\ &= H(Ds,t) + H(\theta s,t) + \bar{s}^t dh\, t + H(s,Dt) + H(s,\theta t) \\ &= dH(s,t) + H(\theta s,t) + H(s,h^{-1}dh\, t) + H(s,\theta t). \end{aligned}$$

因此，

$$H(\theta s,t) = H(s,\theta t) = -1/2 H(s,h^{-1}dh\, t)$$

且（4.7）得证。

令 $\mathrm{End}_0(E)$ 表示 E 的无迹自同态空间。我们声称，D 是一个 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-联络，且 $\theta \in \mathrm{End}_0(E)$。由（4.4）以及 d 无迹可知，只需证明 θ 无迹。事实上，由于 G/K 是一个 Cartan–Hadamard空间，我们可以在 M 中的单连通区域 U 上写出 $h = e^u$（或转到万有覆盖上），其中对所有 $x \in U$，$u(x) \in \mathfrak{p}$。因此，

$$\theta = h^{-1}dh = du$$

由于 u 无迹，因此它也是无迹的。

作为 $\mathrm{End}_0(E)$ 上的联络，

$$D = d + \frac{1}{2}\left[h^{-1}dh,\ \cdot\ \right]. \tag{4.8}$$

我们运用调和映射理论来证明：

定理 4.1. 给定一个不可约表示 $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$，存在一个 ρ-等变映射 $h\colon M \to \mathcal{H}$，使得对于由 (4.2)、(4.3) 和 (4.4) 分别定义的厄米度量 H、$\mathrm{End}_0(E)$ 上的厄米联络 D 以及 $\theta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}_0(E))$，

$$d_D^\star \theta = 0. \tag{4.9}$$

定理 4.1 的证明分为几个步骤：（1）选取 h 为调和映射（参见第 4.3 节）。（2）证明厄米联络 D 与 $\mathcal{H}$ 上的 Levi- Civita 联络有关（参见第 4.4 节）。（3）证明 h 的调和映射方程等价于（4.9）（参见第 4.5 节）。

4.3. 等变映射 h 是调和的。定理 4.1 证明的第一步是选取 h，使其成为定理 4.1 中的映射，并将其视为到 $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ 中的调和映射，其中度量定义为

$$g_{\mathcal{H}}(X,Y) = \frac{n}{2}\mathsf{trace}(h^{-1}Xh^{-1}Y) \text{ for } X,Y \in T_h\mathcal{H}.$$

定义4.2。我们称 h或 H 为调和度量。

对于 $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$，令 $K = \mathrm{SU}(n)$，$\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 为 Cartan 分解，并且

$$B(X,Y) = 2n\,\mathrm{trace}(XY)$$

是 $\mathfrak{sl}(n)$ 上的 Killing 型。该内积在 $\mathfrak{p}$ 上是正定的。

令 $L_g : G/K \to G/K$ 为左乘，并通过度量识别在 G/K 上定义度量 $g_{G/K}$

$$dL_{g^{-1}} : T_{gK}G/K \to T_{eK}G/K = \mathfrak{p}. \tag{4.10}$$

这将 $(G/K, g_{G/K})$ 定义为一个非紧型对称空间。

引理 4.3. 映射

$$\begin{aligned} \Psi : G/K &\mapsto \mathcal{H} \\ gK &\mapsto g^{-1*}g^{-1} = h \end{aligned}$$

将 $(G/K, g_{G/K})$ 等距地识别为 G 空间中的 $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$。

证明。首先，Ψ 关于 G/K 上的作用 L_g 和 $\mathcal{H}$上的作用 $\mathcal{A}_g$是等变的。事实上，

$$\begin{aligned} \Psi \circ L_g(g_1K) &= \Psi(gg_1K) = (gg_1)^{-1*}(gg_1)^{-1} = g^{-1*}(g_1^{-1*}g_1^{-1})g^{-1} \\ &= g^{-1*}\Psi(g_1K)g^{-1} = \mathcal{A}_g \circ \Psi(g_1K). \end{aligned}$$

其次，Ψ 是等距映射。由于度量$g_{G/K}$ 由（4.10）定义，我们需要证明当 $h = g^{-1*}g^{-1} \in \mathcal{H}$ 时，

$$d(L_{g^{-1}})_{gK} \circ d(\Psi^{-1})_h = d\big((\Psi \circ L_g)^{-1}\big)_h : T_h\mathcal{H} \to T_{eK}G/K = \mathfrak{p}$$

是等距映射。这是一个直接的计算：设 $t \mapsto g_t$ 是 G/K 中的一条路径，满足$g_0 = eK$ 和 $\dot{g}_0 \in T_{eK}G/K$（点表示 t导数）。对于 $\dot{g} \in T_{eK}G/K$，由于 $\dot{g}_0$ 是自伴的，

$$(d\Psi)_e(\dot{g}_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g_t^{-1*}g_t^{-1}) = -\dot{g}_0^* - \dot{g}_0 = -2\dot{g}_0. \tag{4.11}$$

对于 $X \in T_h\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} d\big((\Psi \circ L_g)^{-1}\big)_h(X) &= d\big((\mathcal{A}_g \circ \Psi)^{-1}\big)_h(X) = d(\Psi^{-1} \circ \mathcal{A}_{g^{-1}})_h(X) \\ &= d(\Psi^{-1} \circ \mathcal{A}_{g^{-1}})_{g^{-1*}g^{-1}}(X) = (d\Psi_e)^{-1} \circ (d\mathcal{A}_{g^{-1}})_{g^{-1*}g^{-1}}(X) \\ &= (d\Psi^{-1})_e(g^*Xg) = -\frac{1}{2}g^*Xg \\ &= -\frac{1}{2}Ad_{g^{-1}}(gg^*X) = -\frac{1}{2}Ad_{g^{-1}}(h^{-1}X). \end{aligned}$$

这里在倒数第三个等式中使用了（4.11）。利用这个公式以及 Killing 型的 Ad-不变性，对于 X， $Y \in T_h\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} B\left(d\big((\Psi\circ L_g)^{-1}\big)_h(X), d\big((\Psi\circ L_g)^{-1}\big)_h(Y)\right) &= \frac{1}{4}B(h^{-1}X, h^{-1}Y) \\ &= \frac{n}{2}\mathsf{trace}(h^{-1}Xh^{-1}Y) \\ &= g_{\mathcal{H}}(X,Y). \end{aligned}$$ □

根据定理 2.17，存在一个 ρ-等变调和映射 $f:\ M \to G/K$。根据引理 4.3，我们将 G/K 与 $\mathcal{H}$ 认同，并得到一个 ρ-等变调和映射

$$h = f^{-1*}f^{-1} : \tilde{M} \to \mathcal{H}, \quad d^{\star}_{\nabla}dh = 0$$

其中， ∇ 是 $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ 上 Levi-Civita联络沿 $h^*T\mathcal{H}$ 的拉回。

4.4. $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ 上的厄米联络 D 和 Levi-Civita联络。回顾一下， $\mathcal{H} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 是由行列式为一的正定自伴矩阵构成的空间，并考虑映射

$$P_h : T_h\mathcal{H} \to P_h(T_h\mathcal{H}) \subset \mathfrak{sl}(n), \quad X \mapsto h^{-1}X$$

其像的 mage $P_h(T_h\mathcal{H})$ 由关于 h 自伴的矩阵构成。事实上，

$$(h^{-1}X)^{*_h} = h^{-1}(h^{-1}X)^*h = h^{-1}X.$$

将此映射复线性延拓后，得到一个同构

$$P_h^{\mathbb{C}} : T_h\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{sl}(n)$$

由此定义了一个整体同构

$$P^{\mathbb{C}} : T\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}\times\mathfrak{sl}(n). \tag{4.12}$$

$\mathcal{H}\times\mathfrak{sl}(n)$上的平凡联络 d 经同构 $P^{\mathbb{C}}$ 拉回后，得到 $T\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$上的平坦联络 $\bar{\nabla}$； 即

$$\bar{\nabla}_X Y\Big|_h = P^{\mathbb{C}^{-1}} \circ d_X \circ P^{\mathbb{C}}(Y)\Big|_h.$$

接下来，我们计算相对于将 $(n\times n)$ 矩阵空间 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 与 $\mathbb{R}^{n^2}$ 识别的坐标而言的 ∇ 公式。设 $t \mapsto h_t$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一条曲线，满足 $h_0 = h$ 和 $h_0 = X(h)$。我们有

$$d_X(P^{\mathbb{C}}(Y)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(h_t^{-1}Y(h_t)\right) = h^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Y(h_t) - h^{-1}\dot{h}_0h^{-1}Y(h_0).$$

利用嵌入 $\mathcal{H} \hookrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{C})$，我们表示 $h_t = (h_t^{ij})$。此外，我们可以相对于坐标基 (∂_{ij}) 表示 $X = X^{ij}\partial_{ij}$ 和 $Y = Y^{kl}\partial_{kl}$。将 $Y = Y^{kl}\partial_{kl}$ 扩展为 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 上的向量场后，应用链式法则可得

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(h_t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y^{kl}(h_t)\partial_{kl} = \left(\partial_{ij}Y^{kl}\Big|_h \dot{h}_0^{ij}\right)\partial_{kl} = \left(X^{ij}\partial_{ij}Y^{kl}\right)\Big|_h \partial_{kl} = \frac{\partial Y}{\partial X}\Big|_h. \tag{4.13}$$

因此，点 $h \in \mathcal{H}$ 处的平坦联络公式为

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{\partial Y}{\partial X} - Xh^{-1}Y.$$

$T\mathcal{H}$上的 Levi-Civita联络记作 ∇，并将其复线性延拓至$T\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$，则在 $h \in \mathcal{H}$ 处由下式给出

$$\nabla_X Y = \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{1}{2}\left(Xh^{-1}Y + Yh^{-1}X\right).$$

事实上：
(i) ∇ 是无挠的：首先，对于定义在 h附近的函数 f，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y}\right) f &= (X^{ij}\partial_{ij}Y^{kl})\partial_{kl}f - (Y^{kl}\partial_{kl}X^{ij})\partial_{ij}f \\ &= (X^{ij}\partial_{ij}Y^{kl})\partial_{kl}f + X^{ij}Y^{kl}\partial_{ij}\partial_{kl}f - (Y^{kl}\partial_{kl}X^{ij})\partial_{ij}f - Y^{kl}X^{ij}\partial_{kl}\partial_{ij}f \\ &= X(Yf) - Y(Xf) = [X,Y]f.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \left(\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{1}{2}(Xh^{-1}Y + Yh^{-1}X)\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial Y} - \frac{1}{2}(Yh^{-1}X + Xh^{-1}Y)\right) \\ &= \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y} = [X,Y].\end{aligned}$$

(ii) ∇ 度量相容：使用上文给出的路径 $t \mapsto h_t$ 并使用（4.13），

$$\begin{aligned}&Xg_{\mathcal{H}}(Y,Z) \\ &= \frac{n}{2}\mathsf{trace}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(h_t^{-1}Y(h_t)h_t^{-1}Z(h_t)\right)\right) \\ &= \frac{n}{2}\mathsf{trace}\left[\left(h^{-1}\frac{\partial Y}{\partial X} - h^{-1}Xh^{-1}Y\right)h^{-1}Z + h^{-1}Y\left(h^{-1}\frac{\partial Z}{\partial X} - h^{-1}Xh^{-1}Z\right)\right] \\ &= \frac{n}{2}\mathsf{trace}\left[h^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{1}{2}\left(Xh^{-1}Y + Yh^{-1}X\right)\right)h^{-1}Z\right] \\ &\quad + \frac{n}{2}\mathsf{trace}\left[h^{-1}Yh^{-1}\left(\frac{\partial Z}{\partial X} - \frac{1}{2}(Xh^{-1}Z + Zh^{-1}X)\right)\right] \\ &= g_{\mathcal{H}}(\nabla_X Y, Z) + g_{\mathcal{H}}(Y, \nabla_X Z).\end{aligned}$$

在 $T\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ 上，平坦联络 $\bar{\nabla}$ 与 Levi-Civita联络 ∇ 的差为

$$\left(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right) = \frac{1}{2}\left(Yh^{-1}X - Xh^{-1}Y\right) = -\frac{1}{2}h\left[h^{-1}X, h^{-1}Y\right]. \tag{4.14}$$

设 $\hat{\nabla} = P^{\mathbb{C}} \circ \nabla \circ P^{\mathbb{C}^{-1}}$ 表示 $\mathcal{H}\times\mathfrak{sl}(n$上的 Levi-Civita联络$\nabla$ 经由 $T\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ （4.12）拉回所得的联络。那么，对于平坦联络 d 与 ∇ 在 $\mathcal{H} \times \mathfrak{sl}(n) \to \mathcal{H}$ 之间的差 $\hat{}$，相应于（4.14）的公式为

$$d_X - \hat{\nabla}_X = -\frac{1}{2}\left[h^{-1}X, \cdot\ \right]. \tag{4.15}$$

$\tilde{}$丛 $\mathcal{H} \times \mathfrak{sl}(n)$ 经 $h\colon\ M \to \mathcal{H}$ 拉回后，成为万有覆盖 M 上的平凡 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 丛 $h^*(\mathcal{H} \times \mathfrak{sl}(n))$。

$$\begin{array}{ccc} h^*(\mathcal{H} \times \mathfrak{sl}(n)) & \longrightarrow & \mathcal{H} \times \mathfrak{sl}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathcal{H} \end{array}$$

$\hat{}$由（4.15）可得，平坦联络 d 与拉回联络 $h^*\nabla$ 之差由以下公式给出

$$d_V - (h^*\hat{\nabla})_V = -\frac{1}{2}\left[h^{-1}dh(V), \cdot\ \right]. \tag{4.16}$$

$\tilde{}$接下来，端同态丛 $\mathrm{End}_0(E)$ 拉回到 M 后与平凡丛同构。对由 ρ 诱导作用所得到的商取商，$\mathrm{End}_0(E) \simeq \hat{} h^*(\mathcal{H} \times_\rho \mathfrak{sl}(n)) \to M$ 以及联络 $h^*\nabla$ 在 $\mathrm{End}_0(E)$ 上诱导出一个联络（我们也称其为 ∇）。

由（4.16），我们有

$$\hat{\nabla} = d + \frac{1}{2}\left[h^{-1}dh, \cdot\ \right].$$

因此，

$$\hat{\nabla} = D$$

由（4.8）。换言之， D 是由End_0（E）上的 Levi-Civita联络所诱导的 $T^{\mathbb{C}}\mathcal{H}$上的联络。

4.5. 定理 **4.1**证明的完成。 （ $P^{\mathbb{C}^{-1}}$ ）的丛同构（4.12）诱导出一个丛同构（仍记作 $P^{\mathbb{C}^{-1}}$）

$$\begin{array}{ccc} h^*(\mathcal{H} \times_\rho \mathfrak{sl}(n)) & \simeq & h^*(T\mathcal{H}^{\mathbb{C}}) \to M \\ \phi & \mapsto & h\phi. \end{array}$$

此外，

$$\hat{\nabla} = P^{\mathbb{C}} \circ \nabla \circ P^{\mathbb{C}^{-1}}. \tag{4.17}$$

特别是，由于

$$\theta = -\frac{1}{2}h^{-1}dh \in \Omega^1(M, \mathsf{End}_0(E)) \simeq \Omega^1(M, h^*(\mathcal{H} \times_\rho \mathfrak{sl}(n))),$$

我们有

$$P^{\mathbb{C}^{-1}}\theta = h\theta = -\frac{1}{2}dh \in \Omega^1(M, h^*(T\mathcal{H}^{\mathbb{C}})). \tag{4.18}$$

定理 4.1由以下推论得出：

$$\begin{aligned} h \text{ is harmonic} \quad &\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}d^*_\nabla dh = d^*_\nabla h\theta = d^*_\nabla P^{\mathbb{C}^{-1}}\theta \quad \text{by (4.18)} \\ &\Rightarrow \quad 0 = P^{\mathbb{C}} d^*_\nabla P^{\mathbb{C}^{-1}}\theta = d^*_{\hat{\nabla}}\theta = d^*_D\theta \quad \text{by (4.4) and (4.17).} \end{aligned}$$

References

[BH] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。《非正曲率度量空间》。Springer-Verlag，柏林（1999）。[Co] K. Corlette。带典范度量的平坦 G-丛。《微分几何杂志》28（1988）361-382。[Do] S. Donaldson。扭曲调和映射与自对偶方程。《伦敦数学会会刊》55（1987）127-131。[ES] J. Eells 和 J. H. Sampson。黎曼流形的调和映射。《美国数学杂志》86（1964）109-160。[GS] M. Gromov 和 R. Schoen。映入奇异空间的调和映射与秩一群中格的 p-进超刚性。《高等科学研究所数学出版物》76（1992）165-246。[J] J. Jost。《黎曼几何与 K ¨ahler 几何中的非线性方法》。Birkh¨auser Verlag，1988。[KL] B. Kleiner 和 B. Lieb。对称空间与欧几里得建筑上的拟等距映射刚性。高等科学研究所数学出版物，第86卷（1997），115-197。[KS1] N. Korevaar 和 R. Sc hoen。映入非局部紧空间的调和映射的整体存在性定理。《分析与几何通讯》5（1997）213-266。[KS2] N. Korevaar 和 R. Schoen。映入非局部紧空间的调和映射的整体存在性定理。《分析与几何通讯》5（1997），333-387。[Li] Q. Li。《通过调和映射介绍希格斯丛》。SIGMA 15（2019）。[LSY] K. Liu、X. Sun、X. Yang 和 ST. Yau。曲线模空间的曲率及其应用。《亚洲数学杂志》第21卷，第5期（2017）841-854。[LY] K. Liu 和 X. Yang。厄米调和映射与非退化曲率。《数学研究快报》21（2014）831-862。[M] T. Mochizuki。温和调和丛的渐近行为及其在纯 twistor D-模中的应用。《美国数学会回忆录》185（2007）。[Sa] J. H. Sampson。K ¨ahler 几何中的调和映射。《调和映射与极小浸入》，193–205，《数学讲义》1161，Springer，柏林，1985。[S] R. Schoen。《调和映射问题的解析方面》。《非线性偏微分方程研讨会》，1984，MSRI 出版物丛书，第2卷。[Siu] Y.-T.Siu。调和映射的复解析性与紧 K ¨ahler 流形的强刚性。《数学年刊》112（1980）73-111。