arXiv:2301.04211v1 [math.GR] 10 Jan 2023

随机阿廷群

ANTOINE GOLDSBOROUGH 和 NICOLAS VASKOU

摘要。我们引入了一种随机阿廷群的新模型。我们考察的两个变量是阿廷群的秩，以及其定义图的允许的系数集合。

我们模型的核心在于控制允许的系数集合相对于群的秩的增长速度；事实证明，不同的增长速度会产生截然不同的结果。我们通过函数（通常是多项式函数）来描述这些速度。在该模型中，我们证明，对于相当广泛的一类此类函数，随机 Artin 群渐近几乎必然满足关于 Artin 群的大多数猜想。

我们的工作还研究了通常所研究的 Artin 群族具有多大的限制性，因为我们明确计算了随机 Artin 群属于各种 Artin 群族的概率，例如二维 Artin 群、 FC-型 Artin 群、大类型阿廷群等类别。

1. 引言。

Artin 群是一族在过去几十年间日益受到关注的群。其定义如下。设 Γ 是一个**定义图**，即顶点集为 $V(\Gamma)$、边集为 $E(\Gamma)$ 的单纯图，并且 Γ 中连接两个顶点 a 和 b 的每条边 e_{ab} 都赋有一个系数 $m_{ab} \in \{2, 3, \cdots\}$。那么 Γ 定义了一个**阿廷群**：

$$A_\Gamma := \langle\, V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m_{ab}\ terms} = \underbrace{bab\cdots}_{m_{ab}\ terms}, \forall e_{ab} \in E(\Gamma) \,\rangle.$$

$V(\Gamma)$ 的基数，即 A_Γ 的**标准生成元**的数量，称为 A_Γ 的**秩**。当 a 与 b 之间没有边相连时，令 $m_{ab} := \infty$。

阿廷群之所以备受关注，主要原因之一是围绕它们仍有大量（通常表述简单的）猜想和问题有待解决。其中一些猜想属于代数范畴（挠元、中心），另一些则更偏向几何范畴（非初等双曲性、CAT(0) 性）、算法范畴（字问题和共轭问题、双自动性），甚至拓扑范畴。尽管这些猜想或问题几乎没有一个在最一般的情形下得到解答，但各个方向都已有进展。证明这些猜想的一个常见思路，是先对较小的阿廷群族证明它们。

本文旨在以概率论的视角研究 Artin 群。人们或许会好奇："典型的 Artin 群是什么样的？"，进而希望为 Artin 群定义一种随机性概念。通过计算最常研究的几类 Artin 群各自的不同"规模"，我们提出了一种衡量这些类别究竟有多严格的方法。鉴于此，我们的模型为量化有关上述 Artin 群猜想和问题的普遍认知现状，提供了一种新颖而明确的方法。

尽管阿廷群是通过定义图定义的，但一般而言，两个定义图何时会导出同构的阿廷群，尚不清楚。这个问题称为**同构问题**，即便对于限制性较强的阿廷群类别，也相当难以解决。根据我们目前的认知，任何关于 Artin 群的（可行的）随机性理论，都必须以定义图的随机性为基础，而非 Artin 群本身的随机性。

随机直角 Coxeter（及阿廷）群已由文献中的多位作者进行研究（[CF12], [BHS17]），所采用的是 Erd˝os–R´enyi 模型。在 [CF12]中，作者将边出现的概率固定为某个常数 $0 \le p \le 1$；而在 [BHS17] 中，这一模型得到了改进： $p = p(N)$ 取决于

群的秩 N。不过，这些模型仅限于直角群，其相关定义图没有标签。在 [Dei20], 中，作者为一般的 Coxeter 群引入了一种随机性模型。该模型与我们的模型存在相似之处，但前者更多地围绕改变特定系数出现的概率展开。特别是，这一模型并不十分适合用于深入了解最常研究的 Coxeter 群与阿廷群类别的“规模”。相反，这正是我们模型的核心目标。

谈及阿廷群时，首先想到的两个变量是它们的秩（即定义图的顶点数），以及相关系数的选取。理论研究的第一步，是考察将范围限制在族$\mathcal{G}^{N,\ M}$ 时会发生什么：该族包含所有具有 N 个顶点、系数取自$\{\infty,\ 2,\ 3,\ \cdots\ M\}$的定义图，其中 $N \geq 1$ 和 $M \geq 2$ 满足相应条件。由于我们希望任何可能的秩和系数最终都能出现在随机阿廷群中，一种方便的理解随机性的方式是：从族$\mathcal{G}^{N,\ M}$中随机选取一个定义图，然后令 N 和 M 趋于无穷。

事实证明，定义图的随机性在很大程度上取决于 N 和 M 增长的速度。一个典型例子是：当 M 的增长远快于 N 时，来自$\mathcal{G}^{N,\ M}$ 的定义图对应的阿廷群为大类型（即所有系数都不等于 2）的概率趋于 1；而当 N 的增长远快于 M 时，该概率趋于 0。为解决这个问题，我们决定通过函数 f 将 N 和 M 联系起来，使得 $M := f(N)$。这样，当 N 趋于无穷时，我们只需考察族$\mathcal{G}^{N,\ f(N)}$。

如果 $A_{\mathcal{F}}$ 是来自一族定义图$\mathcal{F}$的 Artin 群族，那么衡量 $A_{\mathcal{F}}$ “规模”的一种方法是计算极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^{N,f(N)})}{\#(\mathcal{G}^{N,f(N)})}.$$

当然，这个比率取决于我们为函数 f 所作的选择。当上述极限为 1 时，也就是说，当从$\mathcal{G}^{N,f(N)}$ 中随机选取一张图，并由此得到的阿廷群属于上述族 $A_{\mathcal{F}}$ 的概率趋于 1 时，我们称相对于 f 随机选取的阿廷群**渐近几乎必然** 属于 $A_{\mathcal{F}}$。

话虽如此，仍有一些阿廷群族 $A_{\mathcal{F}}$，无论我们为函数 f 作出何种（合理的）选择，上述极限都会趋于 1。我们称这样的族为一**致大的**（若该极限始终为 0，则一**致小的**）。我们的第一个结果涉及这类阿廷群族：

定理 1.1. 不可约 *Artin* 群族以及具有连通定义图的 *Artin* 群族是一致大的。另一方面，*FC* 型 *Artin* 群族是一致小的。特别地，这一结论同样适用于 *RAAG* 族和无三角形阿廷群族。

如前所述，有许多 Artin 群族的“规模”取决于函数 f 的选择。当 f 足够大时，也就是说，与阿廷群的秩相比，定义图可能采用的系数的选择增长得足够快时，我们可以得到强得多的结果。接下来的两个定理将对此作出明确说明。

在陈述这些结果之前，我们回顾一下定义在（非递减且发散的）函数上的一个非常自然的偏序：当 $\lim_{N\to\infty} f(N)/g(N) = \infty$ 时，由 $f \succ g$ 给出。

定理 1.2。设 $A_{\mathcal{F}}$ 是任意一个 *Artin* 群族，其定义图中禁止出现有限个 k 系数，并考虑函数 $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$。设 Γ 是从 $G^{N,\ f(N)}$ 中随机选取的图。那么：

（1）若 $f(N) \succ N^2$，则 A_Γ 渐近几乎必然属于 *F*。（2）若 $f(N) \prec N^2$，则 A_Γ 渐近几乎必然不属于 *F*。（3）若 $f(N) = N^2$，则 A_Γ 属于 *F* 的概率在 $N \to \infty$ 时趋于 $e^{-k/2}$。

注意，前述定理适用于大类型、超大类型，或大类型且无无穷型的 Artin 群。文献中关于这些 Artin

群的研究已有许多重要成果，因为有关 Artin 群的大多数著名猜想和问题，至少对其中一类已经得到解决（见第 2 节）。

尽管这些不同的 Artin 群族具有相同的阈值 $f(N) = N^2$，无论我们禁止多少个系数，二维 Artin 群这一类最终都要大得多。通过研究这一类，我们得到了以下结果：

定理 1.3。设 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是一个非递减发散函数。令 Γ 为从 $G^{N,f(N)}$ 中随机选取的图。那么：

(1)若 $f(N) \succ N^{3/2}$，则 A_Γ渐近几乎必然是二维的。(2)若 $f(N) \prec N^{3/2}$，则 A_Γ渐近几乎必然不是二维的。

前两个定理的一个推论是，当 f 增长得足够快时，我们能够证明，随机选取的阿廷群渐近几乎必然满足关于 Artin 群的大多数主要猜想：

定理 1.4。设 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$满足 $f(N) \succ N^{3/2}$，并令 Γ为从 $G^{N,f(N)}$中随机选取的图。那么渐近几乎必然，以下性质成立：

(1) A_Γ 无挠；(2) A_Γ 具有平凡中心；(3) A_Γ 的字问题和共轭问题可解；(4) A_Γ 满足 $K(\pi,1)$-猜想；(5) A_Γ 的抛物子群集合在（任意）交运算下封闭；(6) A_Γ 是圆柱双曲的；(7) A_Γ 满足蒂茨替代定理。

Mor此外，若 $f(N) \succ N^2$，那么渐近几乎必然，以下性质也成立 $d:$

(8) A_Γ 是 $CAT(0)$；(9) A_Γ 是分层双曲的；(10) A_Γ 是收缩的，因此是双自动的；(11) $Aut(A_\Gamma) \cong A_\Gamma \rtimes Out(A_\Gamma)$，其中 $Out(A_\Gamma) \cong Aut(\Gamma) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 是有限的。

最后，对于一些 Artin 群族，我们也证明了有趣的结果：其中允许的系数数量 M 相对于秩 N增长得“足够缓慢”。我们聚焦于这样一类 Artin 群 A_Γ：其关联图 Γ 不是锥；并证明对于大多数（非递减发散）函数，随机 Artin 群是圆柱双曲且具有平凡中心的概率趋于 1。

定理 1.5. 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是满足条件 $f(N) \prec N^{1-\alpha}$的非递减发散函数。现在设 Γ是从 $G^{N,f(N)}$ 中随机选取的一个图。那么，相应的阿廷群 A_Γ 渐近几乎必然是圆柱双曲且具有平凡中心。

尽管（非递减发散）函数上的序并非全序，但上述定理关于多项式函数的结果可以概括于图 1 中。

前面的结果表明，我们已经非常接近于得出这样的结论：“几乎所有 Artin 群都是圆柱双曲的，且具有平凡中心”。尽管如此，仍有一小类函数无法得出关于拟双曲性或中心平凡性的概率性结果。鉴于此，我们提出以下问题：

问题 1.6. 构造一个圆柱双曲阿廷群族或具有平凡中心的阿廷群族 $A_\mathcal{F}$，使其满足以下条件：

存在一个 $\alpha \in (0,1)$，使得对于所有满足 $N^{1-\alpha} \preccurlyeq f(N) \preccurlyeq N^{3/2}$ 的函数 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$，从 $G^{N,f(N)}$ 中随机选取的图 Γ 渐近几乎必然属于 $A_\mathcal{F}$。

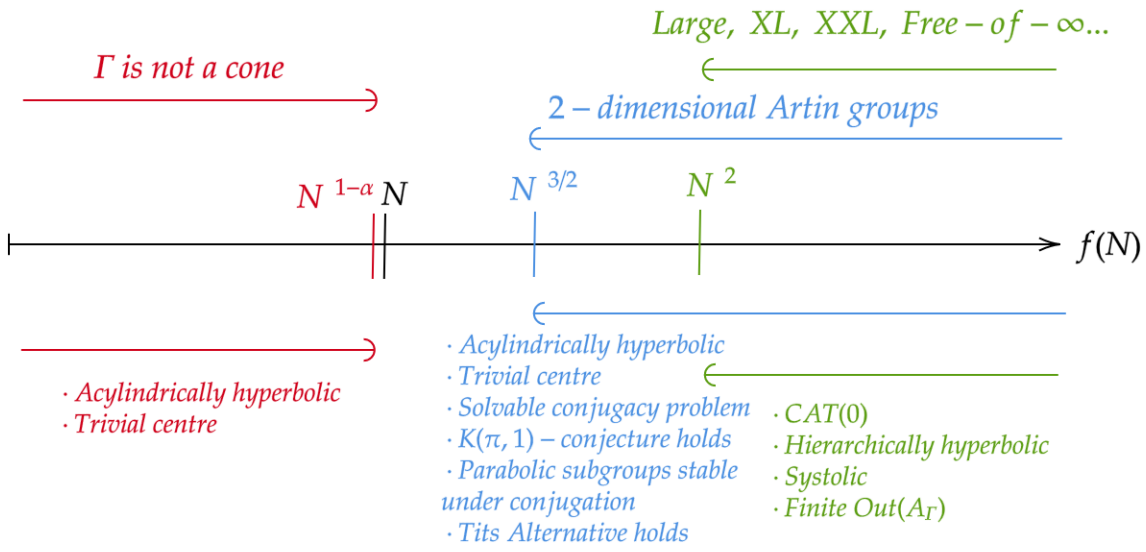

图 1。坐标轴表示各种（多项式）函数 f。主轴上方描述的是相对于 f，我们渐近几乎必然得到的阿廷群类；主轴下方则列出了我们知道这些群渐近几乎必然满足的性质。

致谢。 作者感谢 Alessandro Sisto 的有益交流，以及他指出二阶矩方法的策略；也感谢 Alexandre Martin 提供的宝贵意见。我们还要感谢亨利·庞加莱研究所（UAR 839 CNRS-Sorbonne Université）和 LabEx CARMIN (ANR-10-LABX-59-01)，为本项目的启动提供了温馨的环境。第一作者的工作得到了 EPSRC-UKRI 博士生奖学金 EP/V520044/1 的资助。

2. 预备知识与初步结果。

本节将进一步详细介绍引言中讨论的一些概念，包括对大多数常见阿廷群类的讨论，以及与阿廷群相关的未解猜想。

在本文中，我们常将图中的一个 三**角形** 称为 Γ 中由 3 个顶点生成的任意子图 Γ 。这种记法很方便，不过需要注意，按照此定义，作为 Γ的子图，三角形的边数可能严格少于 3 条。

关于阿廷群的大多数主要猜想总体上仍未解决。尽管如此，其中许多猜想已在较小的阿廷群族中得到证明。这些族中有两个重要的族：二维阿廷群族和 FC 型阿廷群族。继 Charney 和 Davis 的工作之后，人们对这两个族进行了广泛研究（参见 [CD95a]）。其他研究较为充分的族通常是这两个族的子族。

在介绍这些定义之前，我们先回顾一下阿廷群的抛物子群是什么。设A_Γ 是任意一个阿廷群， Γ' 是 Γ的一个全子图。关于 Artin 群的一个标准结果指出，由 Γ' 的顶点生成的 A_Γ 的子群也是一个阿廷群，即与 $A_{\Gamma'}$([vdL83])同构。这样的子群称为 A_Γ的**标准抛物子群** 。这些子群的共轭子群称为 A_Γ的**抛物子群** 。

定义 2.1。 (0) 若阿廷群 A_Γ 的关联 Coxeter 群 W_Γ 有限，则称 A_Γ 为**球面型** 。

(1) 若一个阿廷群 A_Γ 对每一组三个互不相同的标准生成元a、 b、 $c \in V(\Gamma)$，由 a、 b和 c张成的子图 Γ'所对应的阿廷群 $A_{\Gamma'}$ **不是**

球面的，则称其为二维的。根据（[CD95a]）中的一项结果，这等价于要求

$$\frac{1}{m_{ab}}+\frac{1}{m_{ac}}+\frac{1}{m_{bc}}\leq 1.$$

二维 Artin 群族包含若干经过深入研究的族：**大类型** Artin 群（每个系数至少为 3）、**超大类型** Artin 群（每个系数至少为 4）以及 **XXL**Artin 群（每个系数至少为 5）。

(2) 若每个完全子图 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 生成的阿廷群 $A_{\Gamma'}$ 都是球面的，则称阿廷群 A_Γ 为 **FC 型** 。FC 型 Artin 群族包含直角阿廷群族（也称为**RAAG** ，允许的系数只有 2 和 ∞）、球面阿廷群族，以及**无**三**角形** Artin 群族（其关联图不含任何 3-圈的 Artin 群）。实际上，无三角形等价于同时满足 FC 型和二维。

现在我们转向与 Artin 群相关的主要猜想。对于每个猜想，我们将简要介绍当前围绕证明该猜想的研究进展，并提及一两项在我们的模型中最终会被证明具有更大“概率相关性”的结果。换句话说，就是涵盖范围最广的结果。

猜想 2.2. 设 A_Γ 是任意一个 Artin 群。那么：

(1) A_Γ 无挠。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群证明（[CD95b]）。(2) 如果 A_Γ 不可约且非球面，那么 A_Γ 的中心平凡。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群（[Vas22a]）以及其图不是单顶点之锥的 Artin 群（[CMW19]）证明。(3) A_Γ 的字问题和共轭问题可解。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群证明（[HO19]）。(4) A_Γ 满足 $K(\pi,1)$-猜想。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群证明（[CD95b]）。(5) A_Γ 的抛物子群的交集是 A_Γ的抛物子群。$\to$ 这一点已对大类型阿廷群（[CMV22]）证明，更一般地，也已对 (2, 2)-无关二维阿廷群（[Blu21]）证明。(6) A_Γ 是 CAT(0) 群。$\to$ 这一点已对 XXL Artin 群证明（[Hae22]）。(7) 如果 A_Γ 不可约且非球面，那么 A_Γ 是圆柱双曲的。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群（ [Vas22a]）以及其图不是单顶点之锥的 Artin 群（[KO22]）证明。(8) A_Γ 是分层双曲的。这一点已对超大类型 Artin 群证明。[HMS21](9) A_Γ 是收缩的且双自动的。这一点已对大类型阿廷群证明。 [HO20](10) A_Γ 满足 Tits 二分性。$\to$ 这一点已对二维 Artin 群证明（[Mar22]）。除了这些猜想之外，人们还提出了以下问题：(11) 何时 $Out(A_\Gamma)$ 是有限的？$\to$ 这一点已对无穷系数自由的大类型阿廷群证明（[Vas22b]）。

定义 2.3. 设 $\mathcal{F}$ 为一族定义图， $A_\mathcal{F}$ 为相应的阿廷群类。设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 为一个非递减发散函数。若以下极限存在，我们将随机选取（相对于 f）的阿廷群 A_Γ 属于 $A_\mathcal{F}$ 的概率定义为：

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma\in A_\mathcal{F}\big]\coloneqq\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\big[\Gamma\in\mathcal{F}\mid\Gamma\in\mathcal{G}^{N,f(N)}\big]=\lim_{N\to\infty}\frac{\#(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{N,f(N)})}{\#(\mathcal{G}^{N,f(N)})}.$$

此外，如果随机选取（相对于 f）的阿廷群 A_Γ 满足 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = 1$，我们就称其渐近几乎必然属于 $A_{\mathcal{F}}$。类似地，如果 A_Γ 满足 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = 0$，我们就称其渐近几乎必然不属于 $A_{\mathcal{F}}$。

定义 2.4. 设 $A_{\mathcal{F}}$ 是一个 Artin 群族。若对每个非递减发散函数 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，从 f 中随机选取的 Artin 群 A_Γ 渐近几乎必然属于 $A_{\mathcal{F}}$，则称 $A_{\mathcal{F}}$ **一致大**。若 A_Γ 渐近几乎必然不属于 $A_{\mathcal{F}}$，则称 $\mathcal{F}$ 一致小。

现在我们来介绍第一个结果。首先要证明的是，不可约 Artin 群族以及具有连通定义图的 Artin 群族都是一致大的。这一点很重要，因为许多关于 Artin 群的结果都假设相应的群不可约，和／或具有连通定义图。我们的工作表明，这两个假设实际上并不构成什么限制。

定义 2.5. 设 Γ_1 和 Γ_2 是两个定义图。图 $\Gamma_1 *_k \Gamma_2$ 是通过用标签为 k 的边（其中 $k \in \{\infty, 2, 3, \cdots\}$）将 Γ_1 的每个顶点与 Γ_2 的每个顶点相连而得到的图。

现在令 Γ 为任意一个定义图。若存在两个子图 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$，使得 $V(\Gamma_1) \sqcup V(\Gamma_2) = V(\Gamma)$，并且 $\Gamma = \Gamma_1 *_k \Gamma_2$，则称 Γ 相对于 Γ_1 和 Γ_2 是一个**k-连接**。

我们用$\mathcal{A}_{\mathcal{J}_k}$ 表示定义图可分解为 k-连接的阿廷群类。

注 2.6. *(1)* 若 $\Gamma \in J_2$，则 A_Γ 以显然的方式分解为直积$A_{\Gamma_1} \times A_{\Gamma_2}$。在这种情况下，称 Γ 为可约。不可约定义图类J_2^C记作**Irr**。*(2)* 若 $\Gamma \in J_\infty$，则它是不连通的。连通定义图类J_∞^C 记作**Con**。

引理 2.7. 族$A_{\mathcal{J}_k}$ 一致小。特别地，阿廷群类 A_{Irr} 和 A_{Con} 均一致大。

证明。我们将计算图 Γ 分解为 $\Gamma = \Gamma_1 *_k \Gamma_2$的方式数。不失一般性，设 Γ_1 表示秩较低的子图，从而 $|V(\Gamma_1)| \leq \lfloor N/2 \rfloor$。令$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 为一个非递减发散函数，并考虑族 $\mathcal{J}_k$。给定 $N \geq 1$，有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{J}_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] &= \mathbb{P}\big[\exists\, \Gamma_1, \Gamma_2 \quad \text{with} \quad |V(\Gamma_1)| \leq N/2 \quad \text{such that} \quad \Gamma = \Gamma_1 *_k \Gamma_2 \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathbb{P}\big[\exists\, \Gamma_1, \Gamma_2 \quad \text{with} \quad |V(\Gamma_1)| = j \quad \text{such that} \quad \Gamma = \Gamma_1 *_k \Gamma_2 \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{j} \left(\frac{1}{f(N)}\right)^{j(N-j)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left(\frac{Ne}{jf(N)^{N/2}}\right)^{j} \\
&\leq \frac{Ne}{f(N)^{N/2}} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{Ne}{f(N)^{N/2}}\right)^{N/2+1}}{1 - \frac{Ne}{f(N)^{N/2}}}\right)
\end{aligned}$$

这里我们使用了界 $\binom{N}{j} \leq \left(\frac{Ne}{j}\right)^j$。现在，对于任意非递减发散函数 f，都有 $\lim_{N\to\infty} f(N)^{N/2} = 0$，因此得到

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{J}_k}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{J}_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = 0 \cdot \left(\frac{1-0}{1-0}\right) = 0.$$

这证明了引理的主要结论。第二个结论则直接由注 2.6 得出。

□

我们的下一个结果涉及 FC 型 Artin 群这一类群。

引理 2.8. 令 $A_{\mathcal{FC}}$ 为 *FC* 型 *Artin* 群族。则 $A_{\mathcal{FC}}$ 是一致小的。特别地，无三角形阿廷群族、球面阿廷群族以及 *RAAG* 族也都是一致小的。

证明。令 f 为任意非递减发散函数，并令 $\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}$。我们要计算 Γ 属于 $\mathcal{FC} \cap \mathcal{G}^{N,f(N)}$ 的概率。令 a、b 和 c 为 Γ的三个顶点。对应的三个系数 m_{ab}、m_{ac} 和 m_{bc} 中任意一个既不为 2 也不为 ∞ 的概率恰为 $\frac{f(N)-2}{f(N)}$，并且因此，三个系数既不为 2 也不为 ∞ 的概率为 $\left(\frac{f(N)-2}{f(N)}\right)^3$。注意，发生这种情况时，由 a、b 和 c 张成的子图 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 是完全图，但它生成的阿廷群 $A_{\Gamma'}$ 是非球面的（三个对应系数的倒数之和为 ≤ 1）。特别地，Γ不是 FC 型。我们得到

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \notin A_{\mathcal{FC}}\big] = \lim_{N\to\infty} \frac{\#(\mathcal{G}^{N,f(N)} \backslash \mathcal{FC})}{\#(\mathcal{G}^{N,f(N)})} \geq \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-2}{f(N)}\right)^3 = \lim_{N\to\infty} \left(1-\frac{2}{f(N)}\right)^3 = 1.$$

□

正如引言中所提到的，对于某些有趣的阿廷群类，随机选取的图属于该类的概率在很大程度上取决于函数 f 的选择。以下定理给出了一些例子。

定理 2.9。设 $A_{\mathcal{F}}$ 为任意一个 *Artin* 群族，其图中禁用了有限个系数 k，并考虑函数 $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$。设 A_Γ 为一个随机选取的阿廷群（相对于 f）。那么：

(1) 若 $f(N) \succ N^2$，则 A_Γ 渐近几乎必然属于 $A_{\mathcal{F}}$。(2) 若 $f(N) \prec N^2$，则 A_Γ 渐近几乎必然不属于 $A_{\mathcal{F}}$。(3) 若 $f(N) = N^2$，则渐近地有 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = e^{-k/2}$。

证明。一个图有 N 个顶点，共有 $\frac{N(N-1)}{2}$ 对顶点，每对顶点都可赋予 $f(N)$ 种可能系数之一。因此，对可能图的数量进行直接计算可得

$$\#\mathcal{G}^{N,f(N)} = (f(N))^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

类似地，我们有

$$\#(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^{N,f(N)}) = (f(N)-k)^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

因此我们得到

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = \lim_{N\to\infty} \frac{\#(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^{N,f(N)})}{\#(\mathcal{G}^{N,f(N)})} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-k}{f(N)}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-k}{f(N)}\right)^{N^2\left(\frac{N-1}{2N}\right)}.$$

若 $f(N) \succ N^2$，则存在函数 h，满足 $\lim_{N\to\infty} h(N) = \infty$，使得 $f(N) = h(N)N^2$，因而

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-k}{f(N)}\right)^{f(N)\left(\frac{N-1}{2Nh(N)}\right)} = \lim_{N\to\infty} e^{-k\left(\frac{N-1}{2Nh(N)}\right)} = 1.$$

若 $f(N) \prec N^2$，则存在函数 h，满足 $\lim_{N\to\infty} h(N) = \infty$，使得 $f(N)h(N) = N^2$，并且

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-k}{f(N)}\right)^{f(N)\left(\frac{(N-1)h(N)}{2N}\right)} = \lim_{N\to\infty} e^{-k\left(\frac{(N-1)h(N)}{2N}\right)} = 0.$$

最后，如果 $f(N) = N^2$，那么

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^2-k}{N^2}\right)^{N^2\left(\frac{N-1}{2N}\right)} = \lim_{N\to\infty} e^{-k\left(\frac{N-1}{2N}\right)} = e^{-k/2}.$$

□

前面的定理有许多推论，因为它可以应用于大类型、超大类型、XXL 型或无无穷型 Artin 群等已得到大量研究的群族。在推论 2.11 中给出明确结果之前，我们先证明下面这个小引理：

引理 2.10。设 $A_{\mathcal{F}}$ 和 $A_{\mathcal{H}}$ 是两个 *Artin* 群族，设 $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是一个非递减发散函数，并假设 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{H}}\big]=1$。那么

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big]=\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\cap A_{\mathcal{H}}\big].$$

证明。这显而易见：

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\big]=\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\cap A_{\mathcal{H}}\big]+\underbrace{\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\cup A_{\mathcal{H}}\big]}_{=1}-\underbrace{\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{H}}\big]}_{=1}=\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{F}}\cap A_{\mathcal{H}}\big].$$

□

推论 2.11。设 $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是满足 $f(N)\succ N^2$ 的函数。那么，相对于 f 随机选取的一个阿廷群 A_Γ 渐近几乎必然满足以下任一性质：

(1) A_Γ 无挠；*(2)* A_Γ 的中心平凡；*(3)* A_Γ 的字问题和共轭问题可解；*(4)* A_Γ 满足 *K(π, 1)*-猜想；*(5)* A_Γ 的抛物子群集合在任意交运算下封闭；*(6)* A_Γ 是 *CAT(0)*；*(7)* A_Γ 是圆柱双曲；*(8)* A_Γ 是分层双曲；*(9)* A_Γ 是收缩且双自动；*(10)* A_Γ 满足 *Tits* 二分性；*(11)* $Aut(A_\Gamma)\cong A_\Gamma\rtimes Out(A_\Gamma)$，其中 $Out(A_\Gamma)\cong Aut(\Gamma)\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是有限的。

证明。令 $A_{\mathcal{K}}$ 为 XXL 无无穷型 Artin 群的类，并令 $A_{\mathcal{L}}:=A_{Irr}\cap A_{Con}\cap A_{\mathcal{K}}$。利用引理 2.7 和引理 2.10，我们可以看出 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma\in A_{\mathcal{L}}\big]=\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma\in A_{\mathcal{K}}\big]$。根据定理 2.9，随机选取的阿廷群 A_Γ（相对于 f）渐近几乎必然属于 $A_{\mathcal{L}}$。猜想 2.2 中给出的各种结果涉及的 Artin 群族都包含族 $A_{\mathcal{L}}$。特别是，$A_{\mathcal{L}}$ 中的每个阿廷群都满足推论中的 11 条结论。□

3. 二维 Artin 群。

本节旨在从概率论的角度研究二维 Artin 群这一族。该族在 Artin 群的研究中尤为重要，文献中许多作者已针对这一类取得了重要成果（见猜想 2.2）。

我们的目标是证明，如果 $f(N)\succ N^{3/2}$，那么相对于 f 的随机 Artin 群渐近几乎必然是二维的；而如果 $f(N)\prec N^{3/2}$，那么相对于 f 的随机 Artin 群渐近几乎必然不是二维的。特别地，我们将能够改进推论 2.11 的结果，从而证明定理 1.4。

二维这一条件（见定义 2.1.(1)）相当特殊，因此很难计算这一族的“大小”。事实证明，这一族的大小与另一个 Artin 群族的大小相当，而后者的大小计算起来更容易（见引理 3.2 和定理 3.3）。这个族类似于 [Blu21] 中引入的族。下面我们将介绍它：

定义 3.1。我们称阿廷群 A_Γ 是 (2,2)–无自由的，若 Γ 不含任何两条标签为 2 的相邻边。我们用 $A_{\mathcal{B}}$ 表示 (2,2)-无自由阿廷群的族。

下面的引理是一个关键结果。它将使我们能够将研究范围限定在 (2,2)-无自由阿廷群上，因为从渐近意义上说，这一族与 $A_{\mathcal{D}}$ 二维 Artin 群的族规模相同。

引理 3.2. 对于所有非递减发散函数 $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$，我们有：

- $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma\in A_{\mathcal{D}}\big]\le\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma\in A_{\mathcal{B}}\big]$；

- *Further, if $f(N) \succ N$, then $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in \mathcal{A}_\mathcal{D}\big] = \mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_\mathcal{B}\big]$.*

证明。 随机选取的定义图 Γ 生成二维阿廷群的概率，可以通过对事件“$\Gamma \in \mathcal{B}$”进行条件化来求得：

$$(*) \quad \begin{aligned}\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] &= \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid (\Gamma \in \mathcal{B}) \cap (\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)})\big]\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \\ &\quad + \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid (\Gamma \notin \mathcal{B}) \cap (\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)})\big]\mathbb{P}\big[\Gamma \notin \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big]\end{aligned}$$

注意，一旦有两条标签为 2 的相邻边 e_1, e_2，那么由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的三角形生成球面型 Artin 群的概率，恰好等于最后一条边的标签不是 的概率。该概率为 $\frac{f(N)-1}{f(N)}$，因此我们有

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid (\Gamma \notin \mathcal{B}) \cap (\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)})\big] \le 1 - \frac{f(N)-1}{f(N)} = \frac{1}{f(N)}.$$

由此得到 $(*)$ 的以下上界：

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \le \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] + \mathbb{P}\big[\Gamma \notin \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \cdot \frac{1}{f(N)}.$$

现在我们来处理下界。给定三角形 Δ 不是球面型的概率为以下商

$$\frac{\#\text{ ways that } \Delta \text{ can be spherical}}{\#\text{ possible coefficients on } \Delta}. \quad (**)$$

在我们的情形中，已知 A_Γ 是 (2,2)-自由的，因此，唯一不是球面型的三角形为 $(2,3,3)$；$(2,3,4)$ 或 $(2,3,5)$ 这几种形式。考虑系数顺序的所有可能排列后，共有 15 种可能。这给出了 $(**)$ 的分子。

$(**)$分母的一个明确上界是 $f(N)^3$。然而，它可能不等于 $f(N)^3$，因为图中其他边所要求的无 (2,2) 条件，可能会迫使 Δ 中的某些边不能标记为 2。尽管如此，相邻边可能禁止的 Δ 系数三元组，仅限于至少包含一条标记为 2 的边的三元组。其数量不超过 $3N$，因此$(**)$的分母以下界 $f(N)^3 - 3N$为界。

综合以上结果，我们得到

$$\frac{15}{f(N)^3} \le \frac{\#\text{ ways that } \Delta \text{ can be spherical}}{\#\text{ possible coefficients on } \Delta} \le \frac{15}{f(N)^3 - 3N}. \quad (***)$$

因此，利用并集界可得：

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \notin \mathcal{D} \mid (\Gamma \in \mathcal{B}) \cap (\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)})\big] \le \sum_{\Gamma} \mathbb{P}\big[\Delta \text{ 是球面型} \mid (\Gamma \in \mathcal{B}) \cap (\Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)})\big]_{\Delta \text{ 中的三角形}}$$

$$\le \binom{N}{3} \frac{15}{f(N)^3 - 3N}.$$

因此：

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \ge \left(1 - \binom{N}{3} \frac{15}{f(N)^3 - 3N}\right) \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big]. \quad (***)$$

现在，对于任意非递减发散函数 f，我们有 $\frac{1}{f(N)} \to 0$，因此

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_\mathcal{D}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \overset{(*)}{\le} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_\mathcal{B}\big].$$

若 $f(N) \succ N$，不难看出

$$\lim_{N\to\infty} \left(\binom{N}{3} \frac{15}{f(N)^3 - 3N}\right) = 0.$$

这意味着

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{D}}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \overset{(****)}{\geq} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big].$$

□

现在我们开始确定：对于哪些（非递减且发散的）函数，随机选取的阿廷群渐近几乎必然是二维的，或者不是二维的。根据引理 3.2，只需考察无 (2，2) 的 Artin 群，即可对二维 Artin 群得出结论。我们要证明的结果如下：

定理 3.3. 设 f : 北 → 北，并设 A_Γ 是一个阿廷 $group\ p$机随机抽取 （相对 $y\ to\ f$）。那么：(1) 如果 $f(N) \succ N^{3/2}$，那么渐近几乎必然 A_Γ是2维的。(2) 如果 $f(N) \prec N^{3/2}$，那么渐近几乎必然 A_Γ不是2维的。(3) 如果 $f(N) = N^{3/2}$，那么那么 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in D$ $\big] \leq 2/3$.

证明。 设 f 是任意一个非递减且发散的函数。我们需要计算 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{D}}\big]$。根据引理 3.2，只需计算 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big]$，也就是随机抽取的阿廷群 A_Γ 是 (2,2)-自由群的概率。为此，我们将使用二阶矩方法。

我们考虑一个图 $\Gamma \in \mathcal{G}^{N,\ f(N)}$。对于 Γ 中任意由不同顶点组成的有序三元组（v_1，v_2，v_3），令 $I_{(v_1,v_2,v_3)} : \mathcal{G}^{N,\ f(N)} \to \{0,\ 1\}$ 为一个随机变量：当且仅当（v_1，v_2，v_3）与 $m_{v_1,\ v_2} = m_{v_1,\ v_3} = 2$构成一个三角形时，它在 $\Gamma \in \mathcal{G}^{N,\ f(N)}$ 上取值 1。我们令

$$X = \left(\sum_{(v_1,v_2,v_3)\in V(\Gamma)^3} I_{(v_1,v_2,v_3)}\right) : \mathcal{G}^{N,f(N)} \to \mathbf{N}$$

其中求和遍历所有由不同顶点组成的三元组。变量 X 统计标记为 2 的相邻边对的数量，每对计两次（因为这两条边可以互换顺序）。

我们可以计算期望 $\mathbb{E}\big[I_{(v_1,v_2,v_3)}\big] = f(N)^{-2}$，从而得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X\big] &= \sum_{(v_1,v_2,v_3)} \mathbb{E}\big[I_{(v_1,v_2,v_3)}\big] \\ &= N(N-1)(N-2)f(N)^{-2} \\ &\sim N^3 f(N)^{-2}.\end{aligned}$$

现在，我们像（[CF12], 定理 6）中那样使用二阶矩方法：

$$\mathbb{P}\big[X \neq 0\big] \geq \frac{\mathbb{E}\big[X\big]^2}{\mathbb{E}\big[X^2\big]}.$$

我们已经 计算了 $\mathbb{E}\big[X\big]$，因此现在我们将总和分成几种情况来计算 $\mathbb{E}\big[X^2\big]$

$$X^2 = \sum I_{(v_1,v_2,v_3)} I_{(w_1,w_2,w_3)}.$$

注意，这个和是对顶点的所有有序三元组（v_1，v_2，v_3）和（w_1，w_2，w_3）求和，其中v_i彼此不同，且 w_i彼此不同。在满足$m_{v_1,\ v_2} = m_{v_1,\ v_3} = 2$的三角形（$v_1$，$v_2$，$v_3$）中，我们将 v_1 称为三角形的**中心**顶点。下面讨论不同的情形。它们可见图3。

情形 1： 令 X_1 表示乘积之和$I_{(v_1,v_2,v_3)}\ I_{(w_1,w_2,w_3)}$，其中没有顶点同时出现在两个三元组中。那么

$$\mathbb{E}\big[X_1\big] = \frac{N!}{(N-6)!} f(N)^{-4} \sim N^6 f(N)^{-4}.$$

情形 2： 令 X_2 表示满足以下条件的乘积之和：$I_{(v_1,v_2,v_3)} I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 这两个三角形恰好共享一个顶点，且该顶点在两个三角形中都是中心顶点（即 $v_1 = w_1$）。于是我们有

$$\mathbb{E}\big[X_2\big] = \frac{N!}{(N-5)!} f(N)^{-4} \sim N^5 f(N)^{-4}.$$

情形 3： 令 X_3 表示满足以下条件的乘积之和：$I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 这两个三角形恰好共享一个顶点，其中该顶点是一个三角形的中心顶点，而不是另一个三角形的中心顶点（例如 $v_2 = w_1$）。在这种情况下，我们得到：

$$\mathbb{E}\big[X_3\big] = 4\frac{N!}{(N-5)!}f(N)^{-4} \sim 4N^5 f(N)^{-4}.$$

情形 4： 令 X_4 表示乘积 $I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 的和，其中这两个三角形恰好共享一个顶点，且该顶点对两个三角形都不是中心顶点（例如 $v_2 = w_2$）。那么

$$\mathbb{E}\big[X_4\big] = 4\frac{N!}{(N-5)!}f(N)^{-4} \sim 4N^5 f(N)^{-4}.$$

情形 5： 令 X_5 表示乘积 $I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 的和，其中这两个三角形恰好共享两个顶点，且这两个顶点对两个三角形都不是中心顶点（例如 $v_2 = w_2$ 和$v_3 = w_3$）。在此情形下

$$\mathbb{E}\big[X_5\big] = 2\frac{N!}{(N-4)!}f(N)^{-4} \sim 2N^4 f(N)^{-4}.$$

情形 6： 令 X_6 表示乘积 $I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 的和，其中这两个三角形恰好共享两个顶点，其中一个顶点是两个三角形的中心顶点，另一个则不是（例如 $v_1 = w_1$和 $v_3 = w_2$）。在此情形下

$$\mathbb{E}\big[X_6\big] = 4\frac{N!}{(N-4)!}f(N)^{-3} \sim 4N^4 f(N)^{-3}.$$

情形 7： 令 X_7 表示乘积 $I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 的和，其中这两个三角形恰好共享两个顶点：一个顶点是三角形 (v_1, v_2, v_3) 的中心顶点，但不是三角形 (w_1, w_2, w_3) 的中心顶点；另一个顶点是三角形 (w_1, w_2, w_3) 的中心顶点，但不是三角形 (v_1, v_2, v_3) 的中心顶点（例如 $v_1 = w_3$ 和$w_1 = v_3$）。在此情形下，我们有：

$$\mathbb{E}\big[X_7\big] = 4\frac{N!}{(N-4)!}f(N)^{-3} \sim 4N^4 f(N)^{-3}.$$

情况 8： 令 X_8 表示满足以下条件的乘积之和：$I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 这两个三角形共享全部三个顶点，且两个三角形的中心顶点相同（即 $v_1 = w_1$）。在这种情况下，我们有：

$$\mathbb{E}\big[X_8\big] = 2\frac{N!}{(N-3)!}f(N)^{-2} \sim 2N^3 f(N)^{-2}.$$

情况 9： 令 X_9 表示满足以下条件的乘积之和：$I_{(v_1,v_2,v_3)}I_{(w_1,w_2,w_3)}$ 这两个三角形共享全部三个顶点，且第一个三角形的中心顶点与第二个三角形的中心顶点不同（例如 $v_1 = w_2$）。那么，该三角形的三条边的标签都必须为 2，因此我们得到

$$\mathbb{E}\big[X_9\big] = 4\frac{N!}{(N-3)!}f(N)^{-3} \sim 2N^3 f(N)^{-3}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\big[X^2\big]}{\mathbb{E}\big[X\big]^2} &= \sum_{i=1}^{8}\frac{\mathbb{E}\big[X_i\big]}{\mathbb{E}\big[X\big]^2}\\ &\sim \frac{N^6 f(N)^{-4} + 9N^5 f(N)^{-4} + 2N^4 f(N)^{-4} + 8N^4 f(N)^{-3} + 2N^3 f(N)^{-3} + 2N^3 f(N)^{-2}}{N^6 f(N)^{-4}}\\ &\sim 1 + \frac{9}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{8f(N)}{N^2} + \frac{4f(N)}{N^3} + \frac{2f(N)^2}{N^3}.\end{aligned}$$

因此，若 $f(N) \prec N^{3/2}$，根据定义，存在一个非递减发散函数 h，使得$f(N)h(N) = N^{3/2}$。在这种情况下，我们得到：

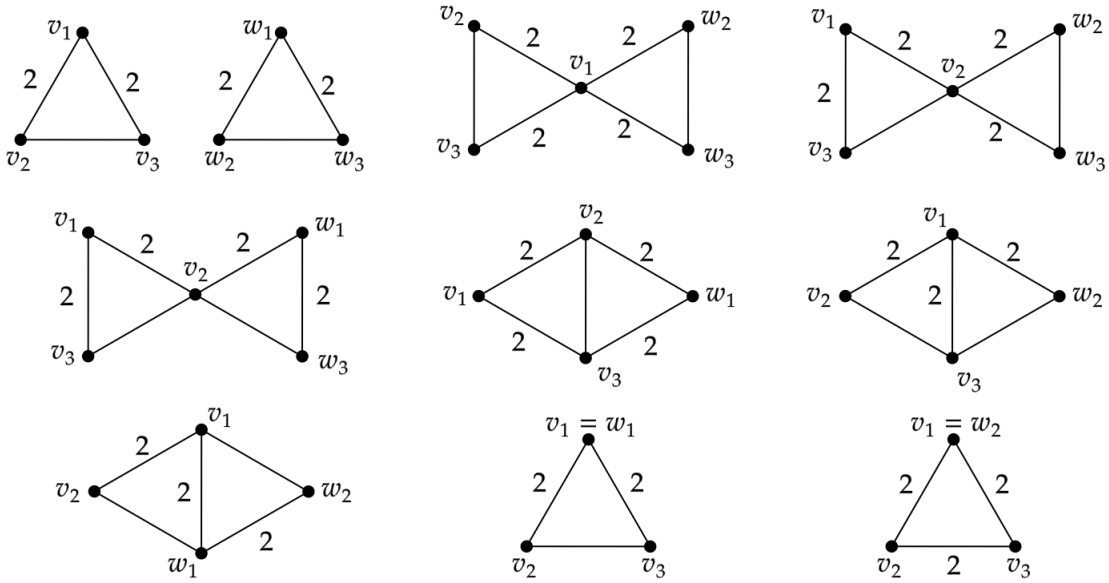

图 2。从左上到右下：定理 3.3 证明中描述的 9 种情形。未明确标记为 2 的边可以标记为任意系数，包括 ∞。

$$\mathbb{P}\big[X \neq 0\big] \geq \left(\frac{\mathbb{E}\big[X^2\big]}{\mathbb{E}\big[X\big]^2}\right)^{-1} \sim \left(1 + \frac{9}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{8}{h(N)N^{1/2}} + \frac{4}{h(N)N^{3/2}} + \frac{2}{h(N)^2}\right)^{-1}.$$

当 $f(N) \prec N^{3/2}$ 时，我们得到

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[X = 0\big] = 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[X \neq 0\big] = 0.$$

因此，渐近几乎必然， A_Γ 不是 (2，2)–自由的。根据引理 3.2，这也意味着渐近几乎必然， A_Γ 的维数不是 2，由此证明了定理 3.3 中的第 2 项。

我们注意到，上述计算使我们能够找到 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big]$ 在 $f(N) = N^{3/2}$ 处的下界。事实上，这等价于说 $h(N) = 1$，因此我们得到 $\mathbb{P}\big[X \neq 0\big] \gtrsim \frac{1}{3}$，于是当 $f(N) = N^{3/2}$ 时，有 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] \leq \frac{2}{3}$。因此，根据引理 3.2，这证明了定理中的第 3 项。

我们注意到 $\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = 1 - \mathbb{P}\big[X \geq 1\big]$ 并且根据马尔可夫不等式

y:

$$\mathbb{P}\big[X \geq 1\big] \leq \mathbb{E}\big[X\big] \leq N^3 f(N)^{-2}.$$

因此，若 $f(N) \succ N^{3/2}$，则我们可以将 $f(N) = N^{3/2}g(N)$ 写成某个非递减发散函数$g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 的形式；在这种情况下

$$\mathbb{P}\big[X \geq 1\big] \leq \frac{1}{g(N)^2}.$$

因此，对于 $f(N) \succ N^{3/2}$，我们有

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[X \geq 1\big] \geq 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{g(N)^2} = 1.$$

特别地，渐近几乎必然 A_Γ是 (2,2)–自由的。应用引理 3.2（因为 $f(N) \succ N$），我们得到渐近几乎必然 A_Γ 是二维的。这证明了第 1 项，进而证明了定理 3.3。□

现在我们可以证明推论 2.11 的一个加强版本：

推论 3.4. 设 $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是一个满足 $f(N) \succ N^{3/2}$ 的函数。那么，随机选取的阿廷群 A_Γ（相对于 f）渐近几乎必然满足以下任一性质：

(1) A_Γ 无挠；(2) A_Γ 具有平凡中心；(3) A_Γ 的字问题和共轭问题可解；

(4) A_Γ 满足 $K(\pi,1)$-猜想；(5) A_Γ 的抛物子群集合在任意交运算下封闭；

(6) A_Γ 是圆柱双曲的；(7) A_Γ 满足蒂茨替代定理。

证明。 根据定理 3.3， A_Γ 渐近几乎必然是二维的。利用引理 3.2， A_Γ 也渐近几乎必然是 (2,2)-自由的。利用引理 2.7，我们还知道 A_Γ 渐近几乎必然不可约。两次应用引理 2.10，可知 A_Γ 渐近几乎必然属于这一类

$$A_{\mathcal{K}} \coloneqq A_{Irr} \cap A_{\mathcal{D}} \cap A_{\mathcal{B}}.$$

请注意，猜想 2.2 中针对 1、2、3、4、5、7 和 10 这些点给出的结果，涉及的都是包含 $A_{\mathcal{K}}$的阿廷群族。特别是， $A_{\mathcal{K}}$ 中的每个 Artin 群都满足本推论的 7 个条件。□

f（N） $= N^{3/2}$ 时会发生什么?

要确定一个阿廷群在 $f(N) = N^{3/2}$ 是二维（或等价地，是 (2，2)–自由群）的精确概率，需要做更多工作。在定理 3.3 中，我们给出了该概率的上界。下面这个引理旨在给出 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big]$ 在 $f(N) = N^{3/2}$ 时取值的显式公式。稍后，我们将对其精确值提出一个猜想。

引理 3.5。 对于所有非递减的发散函数 f： $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$，我们有

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{\binom{N}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \frac{N!(f(N)-1)^{-k}}{(N-2k)!\,k!\,2^k} + 1\right).$$

证明。 设 E_k 为恰有 k 条边标记为 2 的定义图所构成的族，并考虑与之对应的阿廷群族 A_{E_k} 。注意，每条边都连接两个顶点，因此根据鸽巢原理，如果 $k > N/2$，那么 $\mathbb{P}_f\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_k\big] = 0$。于是

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big].$$

照例，$\mathcal{G}^{N,\ f(N)}$中的图总数为 $f(N)\binom{N}{2}$。另一方面，我们必须计算其中恰有 k 条标记为 2 的边且这些边彼此不相邻的图有多少。

首先，当 $k = 0$ 时，我们有 $\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,\ f(N)}\big] = \binom{f(N)-1}{f\ N}\underline{\quad\ \ \big)\big(\quad\ \ }\binom{N}{2}$。

对于 $0 < k \leq \lfloor N/2\rfloor$ 的情况，我们来看看放置 k 条标记为 2 的边有多少种方法。对于第一条这样的边，我们有 $\binom{N}{2}$ 种选择。第一条边的两个顶点不能出现在任何其他标记为 2 的边中，因此对于第二条边，我们只剩下 $\binom{N-2}{2}$ 种选择。依此类推，直到第 k 条标记为 2 的边，此时我们有 $\binom{N-2(k-1)}{2}$ 种选择。由于所选这些边的顺序无关紧要，我们必须将这个乘积除以 $k!$ 现在，对于剩余的 $\binom{N}{2} - k$ 条边，我们可以使用除 2 以外的任何标签。因此，我们将前面的乘积乘以 $(f(N) - 1)\binom{N}{2}{-k}$。因此，对于 $0 < k \leq \lfloor N/2\rfloor$，我们有

$$\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \frac{(f(N)-1)^{\binom{N}{2}-k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \binom{N-2i}{2}}{f(N)^{\binom{N}{2}} \cdot k!}.$$

因此：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_k \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] + \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{B} \cap E_0 \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \frac{(f(N)-1)^{\binom{N}{2}-k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \binom{N-2i}{2}}{f(N)^{\binom{N}{2}} \cdot k!} + \left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{\binom{N}{2}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{\binom{N}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \frac{N!(f(N)-1)^{-k}}{(N-2k)!\,k!\,2^k} + 1\right)\end{aligned}$$

这里从第二行推导到第三行时，我们注意到

$$\prod_{i=0}^{k-1} \binom{N-2i}{2} = \frac{1}{2^k} N(N-1)(N-2)\dots(N-2(k-1))(N-2(k-1)-1) = \frac{N!}{(N-2k)!2^k}.$$

□

现在，根据引理 3.2，在 $f(N) = N^{3/2}$我们有 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{D}}\big] = \mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big]$，因此引理 3.5 对 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{D}}\big]$也成立。我们已在 *Python* 中计算了该表达式， N 最大计算到 190，由此得到以下猜想。

猜想 3.6。对于 $f(N) = N^{3/2}$我们有：

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{B}}\big] = 1 - e^{-1}.$$

特别地，我们还有：

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{D}}\big] = 1 - e^{-1}.$$

4. 拟双曲性与中心。

研究 Artin 群时，有两个尚未解决的问题：所有不可约非球面 Artin 群是否都是圆柱双曲的，并且具有平凡中心（见猜想 2.2）。在本节中，我们将针对另一族 Artin 群研究这两个方面，并将其记为 $A_{\mathcal{C}^C}$。与 N 相比，当 $f(N)$ 增长得足够快时，第 2 节和第 3 节所研究的 Artin 群族规模都非常大。尽管本节的思路与第 2 节和第 3 节相似，但当 $f(N)$ 相对于 N 增长得足够慢时， $A_{\mathcal{C}^C}$ 的规模将会非常大。

定义 4.1。 若图 Γ 可表示为由单个顶点 v_0 和子图 Γ' 构成的子图的连接分解，且满足 $\Gamma = v_0 * \Gamma'$，则称其为锥。令 $\mathcal{C}$ 为由锥构成的定义图类，令 $\mathcal{C}^C$ 为不构成锥的定义图类。

回忆一下， Irr 是不可约图的类。根据 [KO22，定理 1.4], ，我们知道，如果 Γ 至少有 3 个顶点、是不可约的且不是锥，那么 A_Γ 就是圆柱双曲的。因此，只需找出随机 Artin 群不可约且不是锥的概率。

命题 4.2。 对于所有 $\alpha \in (0、1)$ 以及所有非递减函数 $f(N) \prec N^{1-\alpha}$，我们有 at

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{C}^C}\big] = 1.$$

证明。 固定 $\alpha \in (0,1)$，并令 $f(N) \prec N^{1-\alpha}$为一个非递减发散函数。根据定义，存在一个非递减发散函数 h，使得 $f(N)h(N) = N^{1-\alpha}$。

根据锥的定义和并集界，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{C} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] &\leq \sum_{v_0 \in V(\Gamma)} \mathbb{P}\big[\forall u \in V(\Gamma) - v_0 : m_{u,v_0} \neq \infty \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] \\ &= \sum_{v_0 \in V(\Gamma)} \left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{N-1} \\ &= N\left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{N-1} \\ &= N\left(\left(\frac{f(N)-1}{f(N)}\right)^{f(N)}\right)^{h(N)N^{\alpha}} \left(\frac{f(N)}{f(N)-1}\right).\end{aligned}$$

因此：

$$\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{C}}\big] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\Gamma \in \mathcal{C} \mid \Gamma \in \mathcal{G}^{N,f(N)}\big] = \lim_{N\to\infty} Ne^{-N^{\alpha}h(N)} = 0.$$

因此，对于 $f(N) \prec N^{1-\alpha}$，我们有 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{C}^C}\big] = 1$，从而证明了该命题。 □

推论 4.3. 设 $\alpha \in (0、1)$，且 $f(N) \prec N^{1-\alpha}$是一个非递减发散函数。那么，相对于 f 随机选取的阿廷群渐近几乎必然是圆柱双曲的，且具有平凡中心。

证明。 注意，由引理 2.7 和引理 2.10 可得 $\mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{Irr} \cap A_{\mathcal{C}^C}\big] = \mathbb{P}_f\big[A_\Gamma \in A_{\mathcal{C}^C}\big]$。如上所述，根据 [KO22，定理 1.4], ，如果 Γ 不可约且不是一个锥，那么 A_Γ 就是圆柱双曲的。因此，由命题 4.2，对于推论陈述中所述的函数 f，我们得到：相对于 f 随机选取的 Artin 群渐近几乎必然是不可约的且为锥，因而渐近几乎必然是圆柱双曲的。

此外，根据 [CMW19, Theorem 3.3], ，我们知道，如果 Γ 是不可约的且不是锥，那么 A_Γ 的中心是平凡的。因此，随机 Artin 群（相对于 f）渐近几乎必然具有平凡中心。□

令 $\alpha \in (0,1)$，根据推论 4.3 和推论 3.4–6，我们已经证明，对于所有满足以下任一条件的非递减发散函数 f：

- $f(N) \prec N^{1-\alpha}$
- $f(N) \succ N^{3/2}$

随机 Artin 群 A_Γ（相对于 f）渐近几乎必然是圆柱双曲的，且具有平凡中心。这引出了以下问题：

问题： 对于哪些非递减发散函数 f，随机 Artin 群（相对于 f）渐近几乎必然是圆柱双曲的，且具有平凡中心？

参考文献

[BHS17] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。Coxeter 群中的厚度、相对双曲性与随机性。代数几何与拓扑，17(2)：705–740，2017。附录由作者与 Pierre-Emmanuel Caprace 合写。[Blu21] Martin Axel Blufstein。二维阿廷群的抛物子群与按函数渐近的胞腔复形，2021。[CD95a] Ruth Charney 和 Michael W. Davis。与无限反射群相关的超平面补集的 $K(\pi, 1)$-问题。美国数学会杂志，8(3)：597–627，1995。[CD95b] Ruth Charney 和 Michael W. Davis。与无限反射群相关的超平面补集的 $K(\pi, 1)$-问题。美国数学会杂志，8(3)：597–627，1995。[CF12] Ruth Charney 和 Michael Farber。由图积产生的随机群。代数几何与拓扑，12(2)：979–995，2012。[CMV22] Mar´ıa Cumplido、Alexandre Martin 和 Nicolas Vaskou。大类型阿廷群的抛物子群。剑桥哲学学会数学会刊，第 1–22 页，2022。[CMW19] Ruth Charney 和 Rose Morris-Wright。无限型阿廷群：平凡中心与拟双曲性。美国数学会会刊，147(9)：3675–3689，2019。

[Dei20] Angelica Deibel。随机 Coxeter 群。国际代数与计算杂志，30(6)：1305–1321，2020。[Hae22] Thomas Haettel。XXL 型 Artin 群是 CAT(0) 且为圆柱双曲群。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，72(6)：2541–2555，2022。[HMS21] Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。超大类型 Artin 群是分层双曲群，2021。[HO19] Jingyin Huang 和 Damian Osajda。度量收缩性与二维 Artin 群。数学年刊，374(3-4)：1311–1352，2019。[HO20] Jingyin Huang 和 Damian Osajda。大类型阿廷群是收缩群。伦敦数学会会刊 *(3)*，120(1)：95–123，2020。[KO22] Motoko Kato 和 Shin-ichi Oguni。与非锥图相关的阿廷群的拟双曲性，2022。[Mar22] Alexandre Martin。二维 Artin 群的 Tits 二分性与 Wise 幂替代定理，2022。[Vas22a] Nicolas Vaskou。维数 2 的 Artin 群的拟双曲性。专献几何，216(1)：第 7 号论文，28 页，2022。[Vas22b] Nicolas Vaskou。大类型 Artin 群的刚性与自同构，2022。[vdL83] H. van der Lek。复超平面补空间的同伦类型。奈梅亨天主教大学，1983。

赫瑞-瓦特大学数学系，英国爱丁堡电子邮件地址： ag2017@hw.ac.uk

赫瑞-瓦特大学数学系，英国爱丁堡电子邮件地址： ncv1@hw.ac.uk