arXiv:2301.04217v2 [math.CO] 5 Aug 2023

N有界双宽度图的邻域复杂度 *

´Édouard Bonnet† Florent Foucaud‡ § Tuomo Lehtil¨a¶ ‖ Aline Parreau**

2023年8月8日

摘要

我们给出了 $\nu(d,k)$ 的基本紧确界，即在双宽度至多为 d 的图中，一个包含 k 个顶点的集合 X 上不同邻域的最大数量。借助著名的 Marcus-Tardos 定理，两个独立研究成果 [Bonnet 等人, Algorithmica '22；Przybyszewski '22] 已证明上界为 $\nu(d,k) \leq \exp(\exp(O(d)))k$，其对双宽度呈双指数依赖。 [Gajarsky 等人利用局部类型框架的工作（ICALP '22], ）意味着存在单指数上界（但未明确给出该上界）。我们给出了这样的显式上界，并证明它基本上是紧的。事实上，我们给出了一个简短的自包含证明，证明对于每个 d 和 k

$$\nu(d,k) \leqslant (d+2)2^{d+1}k = 2^{d+\log d+\Theta(1)}k,$$

并构造一个二部图，从而推出 $\nu(d,k) \geqslant 2^{d+\log d+\Theta(1)}k$；当 k 相较于 d 足够大时。

1 引言

本文旨在深化我们对有界双宽度图的邻域复杂程度的理解。我们给出了这类图的邻域复杂度的改进界，并通过一个构造说明该界基本上是紧的。在某些情形下，邻域复杂度界的改进可直接转化为更好的结构上界和算法，具体情形将在下文说明。

孪生宽度。孪生宽度是一种近期引入的图不变量 [10]；定义见第 2 节。它可以自然地推广到有限字母表上的矩阵以及二元结构 [10, 7, 12]。尽管有界孪生宽度类广泛多样，但与一般图或二元结构所能实现的情况相比，它们通常允许使用改进的算法（前提是输入中给出了一个见证）。

最重要的是，研究表明 [10] ，对于给定了一个 d-序列（证明其孪生宽度至多为 d）的 n顶点图，判断一阶语句 φ 是否成立，可以在时间 $f(d,\varphi)n$内完成，其中 f是某个可计算函数。在一些特殊情形下，例如对于 k-Independent Set 或 k-DominatingSet[1]，可以采用单指数时间的参数化算法，运行时间为 $2^{O_{d(k)}n}$ [5]。在相同设定下，可以在时间 $O(d^2n+m)$ [21]内统计一个有 n个顶点、 m条边的图中的三角形。更多关于孪生宽度的算法应用，请参见 [8, 19, 26]。

*Florent Foucaud的研究经费来自法国政府IDEX-ISITE计划16-IDEX-0001（CAP 20-25）以及ANR项目GRALMECO（ANR-21-CE48-0004）。Tuomo Lehtil¨a的研究得到了芬兰文化基金会和芬兰科学院338797号资助的支持。

†里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂高等师范学院、里昂第一大学，LIP UMR5668，法国。

‡克莱蒙奥弗涅大学、法国国家科学研究中心、Clermont Auvergne INP、圣埃蒂安矿业学院、LIMOS，63000 克莱蒙费朗，法国。§奥尔良大学、卢瓦尔河谷国立应用科学学院、LIFO EA 4022，F-45067 奥尔良 Cedex 2，法国。

¶里昂大学、里昂第一大学、法国国家科学研究中心、LIRIS - UMR 5205，F69622，法国。

‖图尔库大学，数学与统计系，图尔库，芬兰。

**里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂国立应用科学学院、里昂第一大学、里昂中央理工学院、里昂第二大学、LIRIS、UMR5205，法国维勒班 F-69622。[1]也就是说，分别判断给定图中是否存在 k 个两两不相邻的顶点，或者是否存在闭邻域为整个顶点集的顶点。

孪生宽度有界的二元结构类包括树宽有界的图类，更一般地，还包括团宽有界的图类、真小闭类、宽度有界的偏序集（即反链大小有界的偏序集）、排列的遗传子类，以及n顶点图的$\Omega(\log n)$-细分 [10], 和某些（度数有界的）扩张图类 [6]。许多几何图类的孪生宽度有界，例如映射图、度数有界的弦图 [10], 、队列数或栈数有界的图类 [6], 、不含$K_{t,t}$ 子图的线段图，以及不含大型独立集的简单多边形的可见性图 [4], ，这里只举几个例子。

尽管在一般情况下，高效近似孪生宽度仍是一个具有挑战性的开放问题，但对于上述图类（几何图类可能需要提供表示）以及有序图 [7], 已知这是可行的。具体而言，存在两个可计算函数 f, g ，以及一种算法：对于输入的来自该图类的 n 顶点图 G 和一个整数 k，算法在时间 $g(k)n^{O(1)}$ 内，要么输出一个 $f(k)$-序列（再次表明孪生宽度至多为 $f(k)$），要么正确报告 G 的孪生宽度大于 k。

孪生宽度有界的图类的结构性质包括 χ-有界性 [5], （其绑定函数为多项式） [13], 小性（即在同构意义下至多包含 $2^{O(n)}$ n 个顶点的图） [6, 12],，以及至多为 1 [9, 19, 27] 的 Vapnik-Chervonenkis（VC）密度。后一性质是本文的主题。

VC 密度与邻域复杂度。VC 密度与著名的 VC 维数 [30] 相关。给定定义域 X 上的一个集合系统（或超图） $\mathcal{S}$ ，其打散函数 $\pi_{\mathcal{S}}\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$\pi_{\mathcal{S}}(n) = \max_{A \in \binom{X}{n}} |\{Y \subseteq A \mid \exists S \in \mathcal{S}, Y = A \cap S\}|.$$

Perles-Sauer-Shelah 引理指出，若 $\mathcal{S}$ 的 VC 维数（即 $\{n \mid \pi_{\mathcal{S}}(n) = 2^n\}$ 的上确界）是有限整数 d，则 $\pi_{\mathcal{S}}(n) = O(n^d)$。于是， $\mathcal{S}$ 的 VC 密度定义为 $\inf\{c \in \mathbb{R} \mid \pi_{\mathcal{S}}(n) = O(n^c)\}$ ；若 VC 维数无界，则定义为 $+\infty$ 。

我们将有限图的无限类 $\mathcal{C}$ 的 VC 密度定义为由该类中各图的不交并的邻域超图所构成的无限集合系统的 VC 密度，即 $\{N_G(v) \mid v \in V(\uplus_{G \in \mathcal{C}} G)\}$，其中 $N_G(v)$ 表示 G 中 v 的邻点集合。VC 密度是有限模型论中的一项重要度量，通常比 VC 维数更易处理（例如参见 [1, 2]）。对于团宽有界 [25] （采用单子二阶逻辑）以及近期对于孪生宽度有界 [19] （采用一阶逻辑）的图类，其可定义超图的 VC 密度已获得紧界。

在结构图论和核化领域 [17] （参数化复杂性的一个子领域 [15]）中，函数 $\pi_{\mathcal{N}(G)}$（其中 $\mathcal{N}(G)$ 是 G 的邻域超图）通常被[1] 称为邻域复杂度。（参见 [3] ，其中给出了对该概念计算的算法研究。）在这些背景下，求得 $\pi_{\mathcal{N}(G)}$ 的最佳上界 [9, 11, 16, 29]（而不仅仅是与 VC 密度相匹配的指数）会带来质量更高的结构上界和算法；例如参见 [9, 11, 16, 29]。

r-邻域复杂度是指 G 的邻域复杂度，其中 G^r 与 G 具有相同的顶点集，并且当两个顶点在 G 中的距离至多为 r 时，它们之间存在一条边。Reidl 等人 [29] 证明，在子图封闭类中，有界扩张[2] 等价于线性的 r-邻域复杂度。事实上，更一般的处处稀疏类 [23][3] 具有近似线性的 r-邻域复杂度 [16]：存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$， $\pi_{\mathcal{N}(G^r)}(n) \leqslant f(r, \varepsilon) n^{1+\varepsilon}$ 对所有 n 成立。在遗传类中，即对取诱导子图封闭的类，目前尚无线性邻域复杂度的刻画。

正如我们已经用另一种语言提到的，已有证明表明，孪生宽度有界的类具有线性邻域复杂度。参见 [9, 引理 3] 或 [27, 第 3] 节，其中给出了两个独立的证明，二者都使用了 Marcus-Tardos 定理 [22]。然而，这两篇论文中，对孪生宽度的依赖都是双重指数级的。令 $\nu(d, k)$ 表示孪生宽度至多为 d 的图中，大小为 k 的集合上的不同邻域的最大数量，即 $\max\{\pi_{\mathcal{N}(G)}(k) \mid G$ 的孪生宽度至多为 $d\}$；他们证明了 $\nu(d, k) \leq \exp(\exp(O(d)))k$。最近还有第三个证明没有使用 Marcus-Tardos 定理 [19]。

[1]一些作者将邻域复杂度定义为 $n \mapsto \pi_{\mathcal{N}_{(G)}(n)}$ 。[2]这是 Ne˘set˘ril 和 Ossona de Mendez 稀疏性理论中的一个概念，旨在推广有界度类和无禁 minor 类。[3]这是稀疏性计划的又一项创新 [24]。

作者处理的是一个更一般的问题：如何界定一个固定集合内不同的一阶可定义子集的数量。在邻域这一特例中，尽管 [19], 没有明确说明这一点，他们的证明给出的上界 $\nu(d,k)$ 与我们的类似。

我们的结果。本文在第 3 节给出一个简短且自成一体的证明（同样不使用 Marcus-Tardos 定理），证明 $\nu(d,k) \leqslant 2^{d+\log d+\Theta(1)}k$。在第 4 节，我们通过构造一个二部图来补充该证明，该图表明 $\nu(d,k) \geqslant 2^{d+\log d+\Theta(1)}k$，从而使我们关于孪生宽度的单指数上界基本上是紧的。

2 预备知识

我们采用标准的图论记法： $V(G)$、 $E(G)$、 $G[S]$、 $G-S$ 分别表示图 G 中由 S 诱导的顶点集、边集、子图，以及图 G 中由 $V(G)\setminus S$ 诱导的子图。若 $v \in V(G)$，则顶点 v 在图 G 中的开邻域记为 $N_G(v)$（若 G 可由上下文明确，则记为 $N(v)$），它是由 v 在图 G 中的邻点构成的集合。若 $X \subseteq V(G)$，则一个 X-邻域是形如 $N(v)\cap X$ 的集合，其中 $v \in V(G)$。现在我们按照 [10] 的定义来定义图的孪生宽度。

三元图是一个三元组 $G=(V(G)\ E(G)\ R(G))$，其中 $E(G)$ 和 $R(G)$ 是 $V(G)$ 上两个互不相交的边集合：通常的边（也称为黑边）和红边。直观地说，两个顶点 u 和 v 之间的一条红边表示 u 和 v之间发生了一些错误。三元图的红度是图 $(V(G)\ R(G))$ 的最大度。任何图 G 都可以解释为三元图$G=(V(G)\ E(G)\ \emptyset)$。给定一个三元图和两个顶点 $u,v \in V(G)$（不一定相邻），通过将 u 和 v 收缩为一个新顶点 w，可得到三元图 $G/u,v=G'$，其中：

- $V(G')=\{w\}\cup V(G)\setminus\{u,v\}$;
- $V(G)\setminus\{u,v\}$ 中顶点之间的边在 G'中保持不变;
- 我们按以下方式设置与 w 关联的边:

  – 若 $xu \in E(G)$ 且 $xv \in E(G)$，则为 $wx \in E(G')$; – 若 $xu \notin E(G)$、$\cup R(G)$ 且 $xv \notin E(G)$、$\cup R(G)$，则为 $wx \notin E(G')\cup R(G')$; – 其他情况则为 $wx \in R(G')$。

换言之， u 和 v 的公共黑邻点是 w 的黑邻点。 u 或 v 的所有其他邻点都是 w 的红邻点。红边仍为红边，黑边仍为黑边，红边和黑边合并后成为红边。此外，非边仍为非边，非边与红边合并后成为红边，非边与黑边合并后也成为红边。我们称 $G/u,v$ 是 G 的一次收缩。一个 n 顶点图 G 的 d-序列，是由 n 个三元图 $G=G_n,G_{n-1},....,G_1$ 构成的序列，其中每个三元图 G_i 都由 G_{i+1} 经过一次收缩得到，且红度至多为 d。 G 的孪生宽度记为 tww(G)，定义为使 G 存在一个 d-序列的最小整数 d。注意， G 的诱导子图的孪生宽度小于或等于 G [10] 的孪生宽度。

若 $u \in G_i$，则 $u(G)$ 表示在 G_i 中最终收缩到 u 的 G 顶点集合。与其考虑三元图 G_i，我们或许更愿意处理由集合 $u(G)$（其中 u 属于 G_i）所诱导的 $V(G)$ 的划分： $\mathcal{P}_i=\{u(G)\mid u\in V(G_i)\}$。在这种情况下，我们称 $u(G)$ 是 $\mathcal{P}_i$ 的一个部分。若 uv 在 G_i 中是一条红边、黑边或非边，则称 $\mathcal{P}_i$ 的两个部分 $u(G)$ 与 $v(G)$ 之间存在红边、黑边或非边。

3 不同邻域数量的上界

我们陈述并证明有界孪生宽度图中不同 X-邻域最大数量的上界。

定理 1. 设 G 是一个具有 n 个顶点、孪生宽度为 d 的图，且 $X\subseteq V(G)$，其中 $X\neq\emptyset$。那么， G 中不同的 X- 邻域数量至多为 $(d+2)2^{d+1}|X|=2^{d+\log d+\Theta(1)}|X|$。

证明. 固定一个非空的 $X \subseteq V(G)$。首先，对于 $V(G)\setminus X$ 中具有相同 X-邻域的所有顶点，我们只保留一个代表。注意，新图 G'' 是 G 的诱导子图，因此其孪生宽度至多为 d。我们进一步修改图 G''：对于每个 $v \in X$，向 G'' 中添加一个新顶点 u，使得如果 $V(G'') \setminus X$ 中不存在这样的顶点，则 $N(u) = N(v)$。我们每次处理一个顶点。新图称为 G'，其孪生宽度与 G'' 相同。

令 $M = (d+2)2^{d+1}+1$。我们对 n 进行归纳法，证明一个孪生宽度至多为 d 的 n-顶点图，若其有一个包含 $k \geq 1$ 个顶点的集合 X，且所有不在 X 中的顶点都具有不同的 X-邻域，则满足 $n \leqslant kM$。这将证明 G' 至多有 kM 个顶点，因此在 G 中，不同的 X-邻域至多有 $(M-1)k$ 个。

当 $n \leqslant 5$ 时，该命题显然成立，因为对所有 $d \geqslant 0$，都有 $M \geqslant 5$。

因此，假设 $n \geqslant 6$。特别地，我们有 $k > 1$。令 $x \in X$。令 $X' = X \setminus \{x\}$，并令 T_x 为 X 外部的顶点对集合，其中每对顶点相对于 X' 都是孪生顶点，即

$$T_x = \left\{ \{u,v\} \in \binom{V(G') \setminus X}{2} \mid N(u) \cap X' = N(v) \cap X' \right\}.$$

由于 $V(G') \setminus X$ 中的每个顶点在 X 中都有不同的邻域，因此 $V(G') \setminus X$ 中至多有两个顶点具有相同的（可能为空的）X' 中的邻域 N；具体而言，这些顶点是 $u, v \in V(G') \setminus X$，其中 $N(u) \cap X = N$ 且 $N(v) \cap X = N \cup \{x\}$（如果它们存在）。因此，$T_x$ 由两两不相交的顶点对构成。

我们证明以下结论。

C结论 A. 存在一个顶点 x，使得 X 中的 T_x 至多包含 $M-1$ 对，位于 G'中。

结论的证明。考虑 d的收缩序列 $G'_n, \ldots, G'_1$，其中 G'。考虑序列中最后一个步骤 G'_i，在此步骤中，$\mathcal{P}_i$ 的所有部分都至多包含 X 的一个顶点（也就是说，与 $\mathcal{P}_i$相反，$\mathcal{P}_{i-1}$ 的某个部分包含 X的两个顶点）。

令 P为 $\mathcal{P}_i$的一个部分。令 x 为 $P \cap X$的唯一元素（如果存在）。那么我们断言$|P \setminus X| \leqslant 2^{d+1}$。事实上，$P \setminus X$ 中的任意两个顶点，其X-邻域的对称差中都含有某个顶点；该顶点要么是 x，要么是 X 中位于 P之外的某个顶点 x'。如果这个用于区分的顶点是某个不属于 P的x'，那么 P 与包含 x'的部分之间必定有一条红边。以 P 为端点的红边至多有 d 条。由于 X 的所有元素在 G'_i中都属于不同的部分，这意味着只需 $d+1$ 个 X 中的顶点，就足以区分 $P \setminus X$中各顶点的所有 X-邻域，因此 $|P \setminus X| \leqslant 2^{d+1}$。

现在我们考虑序列中的下一次收缩，它会得到 G'_{i-1}。根据 G'_i的定义，它必须收缩两个顶点，这两个顶点分别对应于 $\mathcal{P}_i$ 的两个部分，且这两个部分都包含 X的一个元素。令x_1 和 x_2 为 X的这两个元素。令 Q 为 $\mathcal{P}_{i-1}$ 中同时包含 x_1 和 x_2的部分。令$\{u,v\}$ 为一对 T_{x_1}，并令 T_{x_1} 包含 M' 对。由于 u 和 v 在$X \setminus \{x_1\}$ 中具有相同的邻域，这意味着它们要么都与 x_2相邻，要么都与 x_2不相邻，而其中恰有一个与 x_1相邻。因此，这一对 $\{u,v\}$ 中必有一个顶点恰好与 $\{x_1,x_2\}$中的一个顶点相邻。特别地，如果这个顶点不在 Q中，那么包含该顶点的部分与 G'_{i-1}中的部分 Q 之间必定有一条红边。由于 T_{x_1} 包含 M' 对（它们两两不相交），且 Q至多有 2^{d+2} 个顶点不在 X中，因此至少有 $M' - 2^{d+2}$ 个顶点不在 X 中，且它们在 G'_{i-1}中对应的部分与 Q之间有红边。由于其他每个部分中不属于 X 的顶点至多有 2^{d+1} 个，因此至少有 $\frac{M'-2^{d+2}}{2^{d+1}}$ 条红边与 Q关联。因此，我们必须有 $\frac{M'-2^{d+2}}{2^{d+1}} \leqslant d$，从而得到 $M' \leqslant 2^{d+1}(d+2) = M-1$，这就证明了该断言。（□）

根据命题 A，存在一个顶点 $x \in X$ 使得 $|T_x| \leqslant M-1$。令 Y为一个由 $|T_x|$ 个顶点组成的集合，它与每一对 T_x 恰好相交一次。令 $G_Y = G' - (Y \cup \{x\})$。于是，$X' = X \setminus \{x\}$ 是一个大小为 $k-1$ 的顶点集，使得其外部顶点的所有 X'-邻域均不相同。图 G_Y 至少有 $n-M$ 个顶点，且孪生宽度至多为 d。根据归纳法，我们有 $n - M \leqslant |V(G_Y)| \leqslant (k-1)M$，因此 $n \leqslant kM$。因此，回想一下 X 中没有顶点具有唯一的 X-邻域，可知不同的 X-邻域至多有 $(M-1)k$ 个，由此证明完毕。 □

4 不同邻域数量的下界

注意，当 $|X|$ 和 tww(G) 大致相同时，定理 1 给出的界不可能是紧的，因为 G' 至多有 $2^{|X|} + |X|$ 个顶点。然而，当 $|X|$ 相较于 tww(G) 足够大时，我们

接下来证明，该界在常数因子范围内是紧的。

命题 2。存在一个正常数 c，使得对于任意整数 d，都存在一个孪生宽度至多为 d 的二部图 G，以及一个足够大的集合 $X \subseteq V(G)$，其中至少有 $c \cdot d2^d|X| = 2^{d+\log d+\Theta(1)}|X|$ 个不同的 X-邻域属于 G。

证明。注意到，对于任意较小的 d，该断言显然成立。因此，我们无需单独考虑孪生宽度较小且上界为某个常数的图。于是，从现在起我们假设 $d \geq d'$，其中 d' 是某个正常数（至少为 3）。

我们按如下方式构造图 G。令 A、B、$C \in \mathbb{Z}$ 为稍后给定的三个常数（A 和 B 将大致等于 $\sqrt{d}$，而 C 将大致等于 d）。令 $X = \{x_1, ..., x_k\}$ 为一个包含 $k \geq d+2\sqrt{d-2}+1$ 个顶点的独立集。我们的目标是构造 G，使得 $V(G) \setminus X$ 中的每个顶点都有唯一的 X-邻域。对于满足 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant i+A-1$、$j+2 \leqslant t \leqslant j+1+B$ 和 $t \leqslant k-C$ 的任意整数 i、j、t，我们按如下方式创建由顶点组成的集合 $V_{i,\ j,\ t}$。考虑集合 $X_t = \{x_{t+1}, ..., x_{t+C}\}$。对于 X_t 的每个子集 Y，令 $Y' = \{x_i, ..., x_j, x_t\} \cup Y$，并将一个顶点 $v_{Y'}$ 添加到 $V_{i,\ j,\ t}$ 中，使其与 Y' 中的顶点相邻。每个集合 $V_{i,\ j,\ t}$ 的大小均为 2^C，并且存在 $\Theta(kAB)$ 个这样的集合（对于固定的 A、B 和 C，且 k 增长时）。因此，图中共有 $\Theta(kAB2^C)$ 个顶点。

任意两个不属于 X 的顶点都有不同的 X 邻域。事实上，考虑由索引诱导的 X 的自然顺序，任意不属于 X 的顶点首先与从 x_i 到 x_j 的一段连续顶点相邻，接着与从 x_{j+1} 到 x_{t-1} 的顶点不相邻（该部分非空，因为 $t \geqslant j+2$），然后再与 x_t 相邻。因此，如果两个顶点具有相同的 X 邻域，那么它们必定属于同一个集合 $V_{i,\ j,\ t}$。但这样一来，它们在 $\{x_{t+1}, ..., x_{t+C}\}$ 中的邻域就不同。

现在我们证明 G 的孪生宽度至多为 $M = \max\{AB, C\}+2$。为此，我们给出一个红度至多为 M 的收缩序列。

该收缩序列分为 $k-C$ 个步骤。在这些步骤中，我们先逐个处理 X 的顶点，然后在最后一步处理 X 中剩余的顶点。令 $0 \leq \ell \leq k-C-1$。步骤 0 对应于初始状态，此时每个顶点各自独立。令 $\ell \geqslant 1$。步骤 ℓ 之后，相应划分中将包含以下部分（不属于所提及部分的顶点各自位于相应的单元素部分中）：

- 令 $i = \ell$。对于每个满足 $i \leqslant j \leqslant i+A-1$ 和 $j+2 \leqslant t \leqslant j+1+B$ 的 j、t，存在一个部分 $B_{j,\ t}$。部分 $B_{i,\ t}$（具有 $j = i$ 的部分）包含集合 $V_{i',\ j',\ t}$ 中满足 $j' \leq i$ 的所有顶点。具有 $j > i$ 的部分 $B_{j,\ t}$ 包含集合 $V_{i',\ j',\ t}$ 中满足 $i' \leqslant i$ 和 $j' = j$ 的所有顶点。注意，总共有 AB 个非空 $B_{j,\ t}$ 部分。
- 存在一个部分 X_0，其中包含 X 从 x_1 到 x_ℓ 的顶点。
- 存在一个部分 T（“垃圾”），其中包含集合 $V_{i',\ j,\ t}$ 中满足 $t \leqslant \ell+1$ 的所有顶点。

所有其他顶点尚未被收缩。这对应于 X 中从 $x_{\ell+1}$ 到 x_k 的顶点，以及满足 $i' > i = \ell$ 的集合 $V_{i',\ j,\ t}$ 中的顶点。实际上，如果 $i' \leqslant i$ 且 $t \leqslant i+1$，那么 $V_{i',\ j,\ t}$ 的顶点属于 T。如果 $t \geqslant i+2$ 但 $j \leqslant i$，那么它们属于部分 $B_{i,\ t}$。如果 $j > i$，那么它们属于部分 $B_{j,\ t}$。

我们首先证明，步骤 ℓ 之后的红度至多为 M。然后，我们说明如何在保持红度至多为 M的前提下，从步骤ℓ到步骤 $\ell+1$。

考虑步骤 ℓ结束时的部分 $B_{j,\ t}$。该部分中的一个顶点属于某个集合 $V_{i',\ j',\ t}$，其中$i' \leqslant i = \ell$ 且当 $j > i$ 时为 $j' = j$，否则为 $j' \leqslant i$。特别地，$B_{j,\ t}$ 中的两个顶点与 x_{i+1} 和 x_j之间的所有顶点相邻，与 x_{j+1} 和 x_{t-1}之间的所有顶点均不相邻，与 x_t相邻，并且与 x_{t+C}之后的所有顶点均不相邻。因此，部分$B_{j,\ t}$ 与 X_0之间有一条红边，而部分 $B_{j,\ t}$ 与顶点 $\{x_{t+1}, ..., x_{t+C}\}$之间有 C 条红边。因此，与 $B_{j,\ t}$关联的红边数至多为 $C+1$。

现在考虑部分 T。T中的顶点仅与 X 至 $x_{\ell+C+1}$的顶点相邻。由于从 x_1 到 x_ℓ 的顶点都属于部分 X_0，因此 T的红度至多为 $C+2$。

不属于 X 的单个顶点没有关联的红边：事实上，它们都属于某些集合 $V_{i',\ j,\ t}$，对于 $i' > i = \ell$ 而言，因此与 X_0 的任何顶点都不相邻。出于同样的原因，与 X_0 关联的红边仅通向 T 和部分 $B_{j,\ t}$。因此，X_0 的红度至多为 $AB+1$。类似地，$x_{i'}$、$i' > i+1$ 的红度至多为 $AB+1$。此外，x_{i+1} 的红度至多为 1。事实上，唯一的红边连接 x_{i+1} 和 T。

最后，步骤 ℓ 之后的红度至多为 $\max\{AB+1, C+2\} \leqslant M$。

L以及 $\ell \geq 0$。现在我们说明如何进行收缩，从步骤 ℓ 到步骤 $\ell+1$。

1.（仅当 $\ell \geq 1$ 时）令 $i = \ell$。对于任意 $i+3 \leqslant t \leqslant i+2+B$，将部分 $B_{i,t}$ 与部分 $B_{i+1,t}$合并，得到部分$B_{i+1,t}$。当 $B_{i,t}$ 非空时，此次合并可能产生的唯一新红边，是连接 $B_{i+1,t}$ 与 x_{i+1}的红边。因此，我们只在 x_{i+1} 与 $B_{i+1,t}$之间添加一条红边。因此，$B_{i+1,t}$ 的红度至多为 $C+2$，而 x_{i+1} 的红度至多为 2。2. 将 $V_{i+1,j,t}$ 的所有顶点（对于某个 j,t）添加到部分 $B_{j,t}$中（此时该部分可能为空）。$B_{j,t}$ 的红度至多为 $C+2$，因为 $B_{j,t}$ 与 x_{i+1}之间可能有一条红边。此时非空部分 $B_{j,t}$ 的数量至多为 $AB+1$（仍有部分 $B_{i,i+2}$）。添加 T后，这就给出了与 X 中的顶点相 incident 的 $AB+2$ 条红边（或来自部分 X_0）。3. 将 $x_{\ell+1}$ 添加到 X_0。部分 X_0 只能与非空部分 $B_{j,t}$ 以及 T之间有红边，但与单个顶点之间没有红边。因此，它的红度至多为 $AB+2$。4. 将部分 $B_{i,i+2}$ 放入 T。该部分只与至多 $x_{\ell+2+C}$的顶点相邻，因此至多有 $C+2$ 条红边。

因此，在每个时刻，红度始终至多为 $M = \max\{AB, C\} + 2$。

该过程在步骤 $\ell = k - C - 1$结束。此时，所有不在 X 中的顶点都属于某些部分，并且这样的部分至多有 $AB+1$ 个。在二分划分的另一侧，我们有部分 X_0 和 $C+1$ 个单独顶点。因此，该图是二分图，且两侧的大小都至多为 M。可以分别收缩每个部分，以完成收缩序列。

最后，取 $C = d-2$ 和 $A = B = \lfloor\sqrt{d-2}\rfloor$，我们得到 $M \leqslant d$ 和 $kAB2^C = \Theta(kd2^d)$。注意，由于 $d \geq d'$，其中 d' 是某个选取得当的正常数，我们可以假设 A、B 和 C 为正常数。由此证明完毕。 □

5 结论

我们为有界双宽度图的邻域复杂度给出了一个本质上紧的上界，并构造了一个几乎达到该上界的图。此外，我们的方法简单且自洽。 [19] 中的技术也隐含给出了一个类似的上界（尽管其中未明确表述）。

已知，G^r 的孪生宽度可以用 G和 r [10]的孪生宽度的某个函数作为上界。因此，孪生宽度至多为 d 的图具有线性的 r-邻域复杂度。最近， [20] 针对平面图和真小闭图类给出了改进的界（此类图的孪生宽度也有界）。我们将获得 r-邻域复杂度关于孪生宽度的本质紧确依赖关系留作一个有趣的开放问题。

我们指出，邻域复杂度也与图上的识别问题有关，例如识别码或定位支配集问题。在这些问题中，我们要寻找图的一个（较小）顶点集合 A，使得 A [18]中的所有其他顶点都具有不同的邻域。关于特定图类的这方面研究，有些等价于研究这些图类的邻域复杂度：例如参见 [14, 18, 28]。此外，我们注意到，对于 VC 密度为 1 的图类，由于任何解的规模都是线性的，上述识别问题的自然最小化版本都有多项式时间常数因子近似算法（只需平凡地选取整个顶点集）；而在一般情况下，这类算法不太可能存在 [14]。因此，本文给出的界意味着，当输入图类限于孪生宽度有界的图类时，这些问题可以获得更好的近似比。

致谢。感谢一位匿名审稿人指出引言中提到的 [19] 的隐含上界。

参考文献

[1] Matthias Aschenbrenner、Alf Dolich、Deirdre Haskell、Dugald Macpherson 和 Sergei Starchenko。《若干不具有独立性性质的理论中的 Vapnik–Chervonenkis 密度，II》。Notre Dame 形式逻辑杂志，54(3-4):311–363，2013。[2] Matthias Aschenbrenner、Alf Dolich、Deirdre Haskell、Dugald Macpherson 和 Sergei Starchenko。《若干不具有独立性性质的理论中的 Vapnik–Chervonenkis 密度，I》。美国数学会汇刊，368(8):5889–5949，2016。

[3] Cristina Bazgan、Florent Foucaud 和 Florian Sikora。《部分 VC 维数的参数化与近似复杂性》。理论计算机科学，766:1–15，2019。[4] ´Édouard Bonnet、Dibyayan Chakraborty、Eun Jung Kim、Noleen K¨ohler、Raul Lopes 和 St´ephan Thomass´e。《孪生宽度 VIII：界定与双赢》。载于 Holger Dell 和 Jesper Nederlof（编），第17届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2022），2022年9月7日至9日，德国波茨坦，LIPIcs 第249卷，页码 9:1–9:18。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022。[5] ´Édouard Bonnet、Colin Geniet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。《孪生宽度 III：最大独立集、最小支配集与着色》。载于 Nikhil Bansal 、 Emanuela Merelli 和 James Worrell （编），第 48 届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2021），2021年7月12日至16日，苏格兰格拉斯哥（线上会议），LIPIcs 第198卷，页码 35:1–35:20。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021。[6] ´Édouard Bonnet 、Colin Geniet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。《孪生宽度 II：小类》。组合理论，2 (2)，2022。[7] ´Édouard Bonnet、Ugo Giocanti、Patrice Ossona de Mendez、Pierre Simon、St´ephan Thomass´e 和 Szymon Toru´nczyk。《孪生宽度 IV：有序图与矩阵》。载于 Stefano Leonardi 和 Anupam Gupta（编），STOC ’22：第54届 ACM SIGACT 计算理论年度研讨会，意大利罗马，2022年6月20日至24日，页码 924–937。ACM，2022。[8] ´Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Amadeus Reinald 和 St´ephan Thomass´e。《孪生宽度 VI：收缩序列的视角》。载于《2022年 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集》（SODA），页码 1036–1056。SIAM，2022。[9] ´Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Amadeus Reinald、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。《孪生宽度与多项式核》。Algorithmica，84:3300–3337，2022。[10] ´Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。《孪生宽度 I：可处理的 FO 模型检测》。ACM 汇刊，69(1):3:1–3:46，2022。[11] ´Édouard Bonnet、O-joung Kwon 和 David R. Wood。《约化带宽：小闭类（及更广范围）中孪生宽度的定性强化》。CoRR，abs/2202.11858，2022。[12] ´Édouard Bonnet、Jaroslav Ne˘set˘ril、Patrice Ossona de Mendez、Sebastian Siebertz 和 St´ephan Thomass´e。《孪生宽度与排列》。CoRR，abs/2102.06880，2021。[13] Romain Bourneuf 和 St´ephan Thomass´e。《有界孪生宽度图是多项式 χ-有界的》。arXiv 预印本 arXiv:2303.11231，2023。[14] Nicolas Bousquet、Aur´elie Lagoutte、Zhentao Li、Aline Parreau 和 St´ephan Thomass´e。《图的遗传类中的识别码与 VC 维数》。SIAM 离散数学杂志，29(4):2047–2064，2015。[15] Marek Cygan、Fedor V Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Micha l Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》，第4卷。施普林格，2015。[16] Kord Eickmeyer、Archontia C. Giannopoulou、Stephan Kreutzer、O-joung Kwon、Micha l Pilipczuk、Roman Rabinovich 和 Sebastian Siebertz。《无处稠密图类的邻域复杂度与核化》。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl（编），第44届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2017），2017年7月10日至14日，波兰华沙，LIPIcs 第80卷，页码 63:1–63:14。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2017。[17] Fedor V Fomin、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。《核化：参数化预处理理论》。剑桥大学出版社，2019。[18] Florent Foucaud、George B. Mertzios、Reza Naserasr、Aline Parreau 和 Petru Valicov。《区间图与排列图上的识别、定位支配和度量维数。I. 界》。理论计算机科学，668:43–58，2017。

[19] Jakub Gajarsk´y、Micha l Pilipczuk、Wojciech Przybyszewski 和 Szymon Toru´nczyk。孪生宽度与类型。载于 Mikolaj Bojanczyk、Emanuela Merelli 和 David P. Woodruff 编，《第49届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2022）》，2022年7月4日至8日，法国巴黎，LIPIcs 第229卷，页码 123:1–123:21。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。[20] Gwena¨el Joret 和 Cl´ement Rambaud。平面图的邻域复杂度。arXiv 预印本 arXiv:2302.12633，2023年。[21] Stefan Kratsch、Florian Nelles 和 Alexandre Simon。以孪生宽度为参数的三角形计数。CoRR，abs/2202.06708，2022年。[22] Adam Marcus 和 G´abor Tardos。排除的置换矩阵与 Stanley–Wilf猜想。《组合理论杂志 A 辑》，107(1):153–160，2004年。[23]Jaroslav Ne˘set˘ril 和 Patrice Ossona de Mendez。论处处稀疏图。《欧洲组合学杂志》，32(4):600–617，2011年。[24] Jaroslav Ne˘set˘ril 和 Patrice Ossona de Mendez。《稀疏性——图、结构与算法》，《算法与组合学》第28卷。施普林格，2012年。[25] Adam Paszke 和 Micha l Pilipczuk。类树图中可定义集合系统的 VC 密度。载于 Javier Esparza 和 Daniel Kr´al’ 编，《第45届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2020）》，2020年8月24日至28日，捷克共和国布拉格，LIPIcs 第170卷，页码 78:1–78:13。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020年。[26] Micha l Pilipczuk、Marek Soko lowski 和 Anna Zych-Pawlewicz。有界孪生宽度矩阵的紧凑表示。载于 Petra Berenbrink 和 Benjamin Monmege 编，《第39届计算机科学理论方面国际研讨会（STACS 2022）》，2022年3月15日至18日，法国马赛（线上会议），LIPIcs 第219卷，页码 52:1–52:14。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。[27] Wojciech Przybyszewski。有界孪生宽度图中边关系的 VC 密度与抽象单元分解。CoRR，abs/2202.04006，2022年。[28] Douglas Rall 和 Peter J. Slater。论某些图类的定位支配数。Congressus Numerantium，45:97–106，1984年。[29] Felix Reidl、Fernando S´anchez Villaamil 和 Konstantinos S. Stavropoulos。用邻域复杂度刻画有界扩张。《欧洲组合学杂志》，75:152–168，2019年。[30] Vladimir N. Vapnik 和 Alexey Y. Chervonenkis。论事件相对频率一致收敛至其概率。载于《复杂性度量》，页码 11–30。施普林格，2015年。