arXiv:2301.04238v1 [math.DG] 10 Jan 2023

修正共形扩张

MATTHIAS HAMMERL、KATJA SAGERSCHNIG、JOSEF ˇSILHAN 和 VOJTˇECH ˇZ ´ADN´IK

Abstract. 我们提出了一种几何构造，并刻画了带有可积核扭量旋量的 $2n$ 维分裂号差共形结构。该构造被视为针对 n 维射影流形的共形 Patterson–Walker 度量构造的一种修正。我们通过扭量旋量以及共形 Weyl 曲率上的一个可积条件来刻画这类结构。我们还根据适当的射影数据，完整描述了爱因斯坦度量和无穷小共形对称。最后，我们得到了一个通过几何方法显式构造的 Fefferman–Graham 环境度量，并证明 Q 曲率消失。

1. Introduction

Walker 流形是具有平行各向同性分布的伪黎曼流形。在分裂号差的情形下，存在一类有趣的 Walker 度量，它们由带有无挠仿射联络D的流形 M 的余切丛上诱导而来。这些度量是标准 Patterson–Walker 度量，或称仿射结构的（伪）黎曼扩张，首次发表于 [25]。总空间 T^*M 上的 Patterson–Walker 度量（简称 PW 度量）由投影 $T^*M \to M$ 的垂直分布与对应于 D 的水平分布之间的自然配对给出。它的坐标表达式如下

$$\widetilde{g} = 2\, \mathrm{d}x^A \odot \mathrm{d}p_A - 2\, \Gamma_A{}^C{}_B\, p_C\, \mathrm{d}x^A \odot \mathrm{d}x^B\,, \tag{1.1}$$

其中，(x^A) 是 M 上的局部坐标，(p_A) 是典范纤维坐标，而 $\Gamma_A{}^C{}_B$ 是底层仿射联络 D 的克里斯托费尔符号。这里，垂直分布$V \subset TT^*M$ 是相对于 $\widetilde{g}$ 的列维-奇维塔联络平行的各向同性分布。

标准 PW 构造存在多种变体或修改形式，仍可得到沃克度量。这些形式出于各种动机并应用于早期及近期的文献中，例如见 [25], [28], [26], [1], [14], [9], [15], [11]。所有这类构造的一个共同特点是，底层数据与诱导数据之间存在紧密联系。本文重点讨论以下形式的修改：

$$\overline{g} := \widetilde{g} + \pi^*\Phi\,, \tag{1.2}$$

其中，$\widetilde{g}$ 是标准 PW 度量，$\pi^*\Phi$ 是对称二阶张量 Φ 在 M 上相对于投影 $\pi\colon T^*M \to M$ 的拉回。我们将这类度量称为 Φ-修正 PW 度量，或简称修正 PW 度量；值得注意的是，文献中还使用了其他名称。

Date:2023年1月12日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 53A20、53A30、53B30、53C07。
Key words and phrases. 微分几何、Patterson–Walker 度量、射影结构、共形结构、共形 Killing 向量场、爱因斯坦度量、Fefferman–Graham 环境度量。

考虑到 M 上的初始仿射联络与 T^*M 上诱导的 PW 度量之间的关系，分析射影变换的影响是自然而然的。早在 [1] 中就已指出，射影平坦仿射联络对应于共形平坦度量。文献系列 [21], [22], [23] 对标准 PW 构造的射影到共形适配作了精确阐述，并探讨了其各个方面。要使仿射联络的射影变换导致诱导度量的共形变换，还需要满足若干条件。特别是，M 必须是定向的，并且余切丛 T^*M 要替换为适当的加权变体。在这种情况下，我们称之为共形 PW 度量，或射影结构的共形扩张。共形 PW 度量已用共形不变术语加以刻画，并且还得出了相应结构上的无穷小对称与其他对象之间的关系。我们的目标是将这项研究拓展至修正情形。本文研究修正共形 PW 度量，即射影结构的修正共形扩张；它们是可由修正 PW 度量 (1.2) 表示的共形结构。为保持构造的等变性，修正张量 Φ 也需加权。详细内容及初步观察见第 2.1 节。

我们的第一个结果涉及通过初始射影结构的平坦性以及关于修正张量的某个条件来刻画修正共形扩张的平坦性，见定理 2.5。这里我们会遇到不变微分算子的作用，这类算子称为 BGG 算子，在全文中反复出现。为方便读者，附录 A 汇集了简要介绍以及本文所用全部射影算子的详细说明。

射影结构的共形扩张由 [23, 定理 1]刻画。严格来说，该刻画涉及共形自旋结构。由于本文始终讨论局部性质，我们可以略去自旋假设。放宽 [23, 定理 1], 中的部分条件后，我们便得到定理 2.7 中对修正共形扩张的刻画：

定理 A. 局部而言，分裂符号的共形结构是某个射影结构的修正共形扩张，当且仅当满足以下性质：

(a) 存在一个纯扭量自旋子 χ，其核 $\ker \chi$ 可积；(b) 以下可积条件成立

$$W_{ab}{}^{c}{}_{d}\, v^a w^d = 0, \quad \textit{for all } v^a, w^d \in \ker \chi,$$

其中 $W_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 是共形韦尔曲率。

当然，此处 $\ker \chi$ 对应于垂直分布 V。该定理可视为伪黎曼情形下已知结果的共形版本，参见 [1] 和 [14]。证明中以及本文许多其他地方还用到了另一个要素：共形类中存在一种度量，使其列维-奇维塔联络保持 χ 平行，参见 [23, 命题 4.2]。

本文的核心部分讨论了修正共形扩张上的特殊性质与对象，以及它们与底层射影对应物之间的关系。具体而言，对于修正 PW 度量，我们分别在第 3 节和第 5 节完整描述了其共形类中的爱因斯坦度量以及无穷小共形对称。相关描述以底层射影流形上的几何数据为基础，主要结果汇总于定理 3.1 和 5.3。尽管技术细节可能令人望而却步，但整体思路很清晰：无论是爱因斯坦度量还是无穷小共形对称，构造它们所需的基本构件都为数不多，且满足

某些射影不变条件。在标准（未修正）情形下，这些构件彼此界限分明，而这些条件主要由 BGG 方程构成，参见 [23]。一般而言，这些方程会受到包含修正项 Φ 的附加微分算子扭曲。这也是当前的发展在许多方面不同于未修正情形的原因。

在第 4 节和第 6 节分别讨论的某些特殊情形下，刻画爱因斯坦尺度和无穷小共形对称的条件会大大简化。在这些情形中，原本相互交织的条件可以（至少部分地）分离并简化。为作说明，我们选取定理 4.1，该定理描述了底层射影平坦的修正共形扩张的爱因斯坦度量：

定理 B. 设修正 PW 度量与射影平坦的仿射联络 D_A 及修正张量 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$ 相关。局部而言，共形类的近似爱因斯坦尺度与满足以下条件的配对 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 之间存在双射

$$(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau = 0, \tag{1.3}$$

$$(D_A \xi^B)_0 = 0, \quad \xi^R \mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR} = 0. \tag{1.4}$$

近似爱因斯坦尺度空间的维数等于 $d + n + 1$，其中 d 是方程 (1.4) 解空间的维数，n 是底层射影流形的维数。

这里及下文中，P_{AB} 是 D_A 的射影 Schouten 张量，括号中的数字表示射影权重。算子 $\mathcal{B}_2$: $\mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$是以 $\mathcal{E}_A(2)$开头的序列中的射影二阶 BGG 算子。前述计数中的项 $n+1$ 是方程 (1.3) 解空间的维数；该方程是一个对应于所谓近似 Ricci 平坦尺度的（第一）BGG 方程。定理 6.1 给出了关于无穷小对称性的类似结果：

定理 C. 考虑一个与射影平坦仿射联络 D_A 及修正项 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$相关联的修正 PW 度量，其中 $\mathcal{B}_2(\Phi)$是一般的。局部而言，其共形 Killing 场与满足下列条件的三元组 $v^A \in \mathcal{E}^A$、$\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$和 $\psi \in \mathbb{R}$ 之间存在双射

$$\left(D_A D_B v^C + \mathrm{P}_{AB}\, v^C\right)_0 = 0, \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}_v(\mathcal{B}_2(\Phi)) = \mathring{\psi}\mathcal{B}_2(\Phi), \tag{1.6}$$

$$D_{(A}\alpha_{B)} = 0. \tag{1.7}$$

共形 Killing 场的空间维数等于 $d + \frac{1}{2}n(n+1)$，其中 d 是方程 (1.5) 和 (1.6) 的解空间维数，n 是底层射影流形的维数。

这里，$\mathcal{L}_v$ 表示沿向量场 v^A 的李导数，而 $\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的一般性意味着，将该场解释为丛映射 $\mathcal{E}^A \to \mathcal{E}_{[AB]C}$时，它是单射。前述计数中的项 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 是方程 (1.7) 的解空间维数；该方程是对应于所谓射影 Killing 形式的一个（一阶）BGG 方程。

第 4 节和第 6 节还讨论了二维射影结构的另一类特殊情形，即修正共形扩张。特别是，我们分别描述了

近似爱因斯坦尺度空间和共形无穷小对称性空间的所有可能维数，见定理 4.3 和 6.5。在此背景下，第 6.4 节分析了一个具有次极大无穷小共形对称代数的例子。

在最后的第 7 节中，我们证明任何修正 PW 度量都存在全局 Fefferman–Graham 环境度量。特别地，Fefferman–Graham 阻碍张量（在四维中即为 Bach 张量）为零。在这一部分中，修正张量 Φ 的引入相当自然，论证也与 [22] 中研究的未修正情形非常相似。主要结论定理 7.1 重述如下：

定理 D. 设 $\overline{g}$ 为一个修正 PW 度量，其 Schouten 张量为 P，且 t、ρ 为环境流形上的附加坐标。那么

$$\mathbf{g} = 2\rho\,\mathrm{d}t \odot \mathrm{d}t + 2t\,\mathrm{d}t \odot \mathrm{d}\rho + t^2\left(\overline{g} + 2\rho\,\overline{\mathrm{P}}\right) \tag{1.8}$$

是一个全局 Ricci 平坦的 Fefferman–Graham 环境度量，其对应的共形类为 $\overline{g}$.

此外，命题 7.2 证明了任意修正 PW 度量的 Q-曲率均为零。

致谢。作者感谢 Maciej Dunajski、Boris Kruglikov 和 Arman Taghavi-Chabert 提供宝贵的讨论。JS 得到了捷克科学基金会（GA˘CR）项目 GA19-06357S 的资助。KS 感谢其获得的挪威金融机制 2014—2021 年资助，项目注册编号 UMO-2019/34/H/ST1/00636。

2. Construction and characterization

本节将对引言中概述的修正的 PW 构造的射影到共形的类比作进一步阐述。在确定记号及其他约定之后，我们将对各种曲率量进行辅助比较。这分别导向对诱导共形结构的平坦性及其结构本身的刻画，见定理 2.5 和 2.7。

2.1. 预备知识。以下大部分预备知识取自 [23]。我们从一个光滑流形 M 出发，并转向其（加权）余切丛，记作 $\widetilde{M}$。我们采用标准的抽象指标记号，以便通过指标类型区分定义在 M 和 $\widetilde{M}$ 上的张量对象。例如，切丛 TM和 $T\widetilde{M}$及其截面空间分别记作 $\mathcal{E}^A$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}^a$。对称张量和反对称张量，以及相应的运算，分别用指标两侧的圆括号和方括号表示。例如，$\alpha_{(AB)} \in \mathcal{E}_{(AB)}$ 表示 M上的双线性形式 $\alpha_{AB} \in \mathcal{E}_{AB}$ 的对称化，$\beta^{ab} = \beta^{[ab]} \in \widetilde{\mathcal{E}}^{[ab]}$ 表示 $\widetilde{M}$ 上的双向量，等等。

M 上的射影结构由无挠仿射联络的一个等价类给出；若存在一个1-形式$\Upsilon_A \in \mathcal{E}_A$，使得两个联络 D_A 和 $D_A\widehat{\ }$射影等价，则称它们射影等价：

$$\widehat{D}_A\xi^B = D_A\xi^B + \delta^B_A\Upsilon_C\xi^C + \xi^C\Upsilon_A, \tag{2.1}$$

对所有 $\xi^A \in \mathcal{E}^A$均成立。假设流形 M 是定向的，且在 M 上固定了一个体积形式，则射影类中存在唯一一个使该体积形式平行的联络；任何这样的联络都称为特殊联络。特殊联络的特征是其 Ricci（等价地，Schouten）张量对称。为适应 M上的射影结构，我们

采用如下密度丛的适当参数化。对于任意 $w \in \mathbb{R}$，射影权重为 w 的密度丛定义为

$$\mathcal{E}(w) := (\wedge^n TM)^{-\frac{w}{n+1}}, \tag{2.2}$$

其中 dim $M = n$。加权张量丛相应地记作，例如， $\mathcal{E}_A(3)$ 表示$\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}(3)$。

$\widetilde{\ }$在 M 上的共形结构由（伪）黎曼度量$\widetilde{\ }$的一个等价类给出。若存在函数 $f \in \mathcal{E}$使得 g_{ab} 和 $\widehat{g}_{ab}$ 满足以下关系，则称这两个度量共形等价：

$$\widehat{g}_{ab} = e^{2f} g_{ab}.$$

Si $\widetilde{\ }$与（2.2）类似， M 上共形权重为 w 的密度丛定义为

$$\widetilde{\mathcal{E}}[w] := \left(\wedge^{2n} T\widetilde{M}\right)^{-\frac{w}{2n}}, \tag{2.3}$$

$\widetilde{\ }$其中 dim $M = 2n$。共形结构可视为 $\mathcal{E}_{(ab)}[2]$ 的一个截面，而共形类中的各个度量对应于所谓的尺度，即处处$\widetilde{\ }$为正的 $\mathcal{E}[1]$截面。

标准 PW 构造如下。设 D_A 是 M上的一个无挠仿射联络，且 π：$T^*M \to M$是余切丛。设 $TT^*M = V \oplus H$是如下分解： $V \cong T^*M$为投影 π的垂直分布， $H \cong TM$为由 D_A确定的水平分布。与 $D_A$$\widetilde{\ }$相关联的（标准）PW 度量是 $M := T^*M$ 上的分裂符号度量 $\widetilde{g}_{ab}$ ，由 V与H 之间的自然配对给出，并要求 V和 H 均为各向同性。由于分布 V关于相应的列维-奇维塔联络是平行的，PW 度量是沃克度量。

对于 M 上的相平凡对称双线性型 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}$，令 $\Phi_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)}$为其拉回$\widetilde{\ }$到对称双线性型 PW 度量进行修正，使得

$$\overline{g}_{ab} := \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}. \tag{2.4}$$

上述性质仅有如下变化：分布 H 不再相对于 $\overline{g}_{ab}$ 各向同性。度量 (2.4) 称为与 M 上的仿射联络 D_A 和对称张量 Φ_{AB} 相关联的修正 PW 度量。请注意，文献中对 $\overline{g}_{ab}$ 还使用了其他名称，例如，在 [25] 和 [14], 中称其为黎曼扩张度量，在 [7]中称其为变形黎曼扩张度量。

标准 PW 度量和修正 PW 度量都给出了切$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$与余切丛 $\mathcal{E}^a \cong \mathcal{E}_a$之间的一个同一化。默认情况下，指标的升降均相对于标准 PW 度量 $\widetilde{g}_{ab}$进行；使用任何其他度量时，都会明确说明。特别地， $\overline{g}_{ab}$ 的逆度量具有形式 $(\overline{g}^{-1})^{ab} = \widetilde{g}^{ab} - \Phi^{ab}$。

修正 PW 度量的坐标表达式如下。对于 M 上的局部坐标 (x^A)，设 $\Gamma_A{}^C{}_B$ 为 D_A 的克里斯托费尔符号，并设 (p_A) 为 T^*M 上的典范纤维坐标。则度量 (2.4) 表示为

$$\overline{g} = 2\,\mathrm{d}x^A \odot \mathrm{d}p_A - 2\left(\Gamma_A{}^C{}_B\, p_C + \Phi_{AB}\right)\mathrm{d}x^A \odot \mathrm{d}x^B\,. \tag{2.5}$$

只要将标准 PW 构造转移到适当的加权余切丛上，就可以得到其射影到共形变体。为此，我们假设流形 M 是定向的，并且 D_A 上的仿射联络 M 是特殊的，即保持一个体积形式不变。这为 $\mathcal{E}(w)$ 提供了一个平凡化，即对任意 $T^*M(w) \cong T^*M$ 的识别，

w。根据 [23,命题 3.1], , M 上射影等价的无挠特殊联络当且仅当 $w=2$ 时，会在 $T^*M(w)$ 上诱导共形等价的 PW 度量。因此，相应地调整前面的设置，我们得到如下射影不变的定义：

定义 2.1。在 M 上与定向射影结构及对称加权张量$\sim\Phi_{AB}\in\mathcal{E}_{(AB)}$(2)相关联的修正共形扩张，或修正共形 PW 度量，是 M 上的分裂号差共形结构：$=T^*M$(2)由射影类中的某个特殊无挠仿射联络的修正 PW 度量 (2.4) 表示。

为了研究与标准 PW 度量和修正 PW 度量相关的各种量，˜我们主要需要了解相应协变导数之间的关系。记 D_a 和 $\overline{D}_a$ 分别为标准 PW 度量和修正 PW 度量的列维-奇维塔联络。它们之间的关系为

$$\overline{D}_a=\widetilde{D}_a+F_a\bullet, \tag{2.6}$$

˜其中，差张量 $F_a{}^c{}_d\in\mathcal{E}_a{}^c{}_d$ 被视为取值于自同态˜的 1-形式，TM，而 $\bullet$ 表示代数作用。该张量可具体表示如下：

引理 2.2. 设标准 PW 度量与修正 PW 度量由 (2.4) 联系，相应的协变导数由 (2.6) 联系。那么

$$F_a{}^c{}_d=\widetilde{D}_{(a}\Phi_{d)}{}^c-\tfrac{1}{2}\widetilde{D}^c\Phi_{ad}. \tag{2.7}$$

˜特别地，$F_{acd}\in\mathcal{E}_{acd}$ 是严格水平的，也就是说，它是 $V\otimes V\otimes V$ 的一个截面。

证明. 公式 (2.7) 可由 Levi-Civita 联络的刻画性质直接计算得到，即由 $\overline{D}_a\overline{g}_{bc}=0$ 和无挠性得到。其余结论由 (2.7)、Φ_{ab} 的严格水平性以及 V 的平行性推出。□

˜ ˜例如，对于任意 $v^a\in\mathcal{E}^a$ 和 $\alpha_a\in\mathcal{E}_a$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{D}_av^b&=\widetilde{D}_av^b+v^r\widetilde{D}_{(a}\Phi_{r)}{}^b-\tfrac{1}{2}v^r\widetilde{D}^b\Phi_{ar},\\ \overline{D}_a\alpha_b&=\widetilde{D}_a\alpha_b-\alpha_r\widetilde{D}_{(a}\Phi_{b)}{}^r+\tfrac{1}{2}\alpha_r\widetilde{D}^r\Phi_{ab}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

请注意，指标是相对于标准 PW 度量 $\widetilde{g}_{ab}$ 升起的。 .

2.2. 曲率关系。仿射联络 D_A 的曲率张量与诱导 PW 度量 $\widetilde{g}_{ab}$ 的曲率张量之间存在紧密联系。例如，这意味着 $\widetilde{g}_{ab}$ 平坦、Ricci 平坦且共形平坦，当且仅当 D_A 分别平坦、Ricci 平坦且射影平坦。这些结论很容易由初始曲率与诱导曲率之间的显式关系推出。一个特别简单且下文常用的关系是：$\widetilde{g}_{ab}$ 的 Ricci 张量和 Schouten 张量分别是 D_A 的 Ricci 张量和 Schouten 张量的拉回。更多细节请参见 [23, 注 3。5] 及其周围的公式。

我们将建立与标准 PW 度量和修正 PW 度量分别相关的张量之间的关系。其中一些关系式也可见于现有文献，参见 [25, 截面8] 或 [1, 定理 1]。尽管如此，我们仍给出这些结果的自包含推导，并特别对刻画修正共形扩张平坦性的条件作出概念性解释。与 $\widetilde{g}_{ab}$ 和 $\overline{g}_{ab}$ 相关的对象通常分别加上波浪号和横线标记。

命题 2.3。设标准 PW 度量与修正 PW 度量满足关系式 (2.4)。则相应的黎曼张量、里奇张量和 Schouten 张量之间满足

$$\begin{aligned}&\overline{R}_{ab}{}^{r}{}_{d}\bar{g}_{rc}=\widetilde{R}_{abcd}-\widetilde{D}_{c}\widetilde{D}_{[a}\Phi_{b]d}+\widetilde{D}_{d}\widetilde{D}_{[a}\Phi_{b]c}-\widetilde{R}_{ab}{}^{r}{}_{[c}\Phi_{d]r},\\&\overline{\mathrm{Ric}}_{ab}=\widetilde{\mathrm{Ric}}_{ab},\qquad\overline{\mathrm{P}}_{ab}=\widetilde{\mathrm{P}}_{ab}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

特别地，修正 PW 度量是里奇平坦的，当且仅当原仿射联络是里奇平坦的。

证明。由关系式 (2.6) 可得 $\overline{R}_{ab}{}^{c}{}_{d}=R_{ab}{}^{c}{}_{d}+2D_{[a}F_{b]}{}^{c}{}_{d}$，因为 $F_{[a}\bullet F_{b]}\bullet=0$。代入 (2.7) 并与 $\overline{g}_{ab}$ 作缩并，经过一些计算即可得到黎曼张量的关系式。考虑到 $\widetilde{\Phi_{ab}}$ 是严格水平的，里奇张量和 Schouten 张量的关系式很容易得到。最后一个结论由 $\mathrm{Ric}_{ab}=\mathrm{Ric}_{ab}$ 以及 $\widetilde{g}_{ab}$ 里奇平坦性的刻画可得。□

共形几何中的基本曲率量是 Weyl 张量，它是黎曼张量中共形不变的部分。对于度量 $\overline{g}_{ab}$，它可表示为

$$\overline{W}_{ab}{}^{r}{}_{d}\bar{g}_{rc}=\overline{R}_{ab}{}^{r}{}_{d}\overline{g}_{rc}-4\,\mathrm{Proj}_{[ab][cd]}\big(\overline{g}_{ac}\overline{\mathrm{P}}_{bd}\big),\tag{2.10}$$

其中，投影$[\cdot\cdot][\cdot\cdot]$表示对括起的指标进行反对称化。代入 (2.4) 和 (2.9)，即可将 (2.10) 右侧表示为 Φ_{ab} 以及与 $\widetilde{g}_{ab}$ 相关的张量。进一步可利用序列中的第二 BGG 算子将其重新整理为

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{a}[2]\xrightarrow{\widetilde{\mathcal{B}}_{1}}\widetilde{\mathcal{E}}_{(ab)_{0}}[2]\xrightarrow{\widetilde{\mathcal{B}}_{2}}\widetilde{\mathcal{E}}_{[ab][cd]_{0}}[2]\longrightarrow\cdots$$

该序列中的第一个算子是共形 Killing 算子，$\mathcal{B}_{1}(v)_{ab}=D_{(a}v_{b)_{0}}$，它在第 5 节中隐含出现。第二个算子是

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{B}}_{2}(\Phi)_{abcd}&=\mathrm{Proj}_{\boxplus_{0}}\big(\widetilde{D}_{a}\widetilde{D}_{c}\Phi_{bd}+\widetilde{\mathrm{P}}_{ac}\Phi_{bd}\big)=\\&=\mathrm{Proj}_{[ab][cd]_{0}}\big(\widetilde{D}_{a}\widetilde{D}_{c}\Phi_{bd}+\widetilde{\mathrm{P}}_{ac}\Phi_{bd}+\tfrac{1}{4}\widetilde{W}_{ab}{}^{r}{}_{c}\Phi_{dr}-\tfrac{1}{4}\widetilde{W}_{cd}{}^{r}{}_{a}\Phi_{br}\big),\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中，投影$\boxplus_{0}$ 表示与所示杨图对应的“窗口”对称性的无迹部分。附录 A 对 BGG 理论作了简要的一般性介绍，并给出了相关射影 BGG 算子的详细内容。第二 BGG 算子在衡量抛物几何变形（在我们的情形中由Φ_{ab} 表示）下调和曲率（在共形几何中即 Weyl 曲率）的变化方面所起的作用，一般在 [10, 定理 3.6]中有所描述。

命题 2.4. 设标准 PW 度量与修正 PW 度量满足关系式 (2.4)。那么，相应的 Weyl 张量满足关系式

$$\overline{W}_{ab}{}^{r}{}_{d}\overline{g}_{cr}=\widetilde{W}_{abcd}-2\widetilde{\mathcal{B}}_{2}(\Phi)_{abcd}-\tfrac{1}{2}\big(\widetilde{W}_{ab}{}^{r}{}_{[c}\Phi_{d]r}+\widetilde{W}_{cd}{}^{r}{}_{[a}\Phi_{b]r}\big),\tag{2.12}$$

其中，$\mathcal{B}_{2}$ 是第二 BGG 算子 (2.11)。特别地，条件

$$\overline{W}_{ab}{}^{c}{}_{d}\,v^{a}w^{d}=0\tag{2.13}$$

对所有竖直向量 v^{a}、$w^{d}\in V$ 均成立。

证明。将 (2.4) 和 (2.9) 代入 (2.10) 得

$$\overline{W}_{ab}{}^{r}{}_{d}\bar{g}_{rc}=\widetilde{W}_{abcd}-2\,\mathrm{Proj}_{[ab][cd]}\big(\widetilde{D}_{c}\widetilde{D}_{[a}\Phi_{b]d}\big)-\widetilde{R}_{ab}{}^{r}{}_{[c}\Phi_{d]r}-4\,\mathrm{Proj}_{[ab][cd]}\big(\Phi_{ac}\widetilde{\mathrm{P}}_{bd}\big).$$

˜张量 Φ_{ab} 是严格水平的，因此它是无迹的， $\Phi_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)_0}[2]$。利用 (2.11)，经过一些计算可得公式 (2.12)。(2.13) 中的条件可由 (2.12) 和 $\widetilde{W}_{abcd}\, v^a w^d = 0$ 立即推出；这是标准 PW 度量的特征条件之一，参见 [23, 定理 1]。□

共形 BGG 算子 (2.11) 显然与其在 (A.3) 中的射影对应物相关。

˜ ˜由于 Φ_{ab} 和 P_{ab} 分别是 Φ_{AB} 和 P_{AB}的拉回，因此张量 $\mathcal{B}_2(\Phi)_{abcd}$ 也是 $\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCD}$的拉回。综上，我们得到

定理 2.5. 设修正 PW 度量 $\overline{g}_{ab}$ 由特殊仿射联络 D_A和修正张量 Φ_{AB}诱导。那么， $\overline{g}_{ab}$ 共形平坦，当且仅当 D_A 射影平坦且 $\mathcal{B}_2(\Phi) = 0$，其中 $\mathcal{B}_2 : \mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 是第二 BGG 算子 (A.3)。

证明. 对于标准 PW 度量，射影 Weyl 张量与共形 Weyl 张量

˜ ˜和 W之间的关系由 [23, 方程 (32)] 描述。特别地， $W = 0$ 当且仅˜当 $W = 0$。由该关系及 (2.12) 可知，差张量 $\overline{W} - W$ 严格˜ ˜水平。因此， $\overline{W}$ 消失等价于 W 和 $\mathcal{B}_2(\Phi)$ 均消失。由于˜$\mathcal{B}_2(\Phi)$ 正是 $\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的拉回，故结论成立。□

2.3. 刻画。我们的下一个目标是对由射影结构的修正共形扩张所产生的分裂号差共形结构给出局部刻画。我们已经注意到，对于这类共形结构，Weyl 张量上的可积条件 (2.13) 成立。刻画所需的另一个要素是一个如下产生的纯扭量自旋子。

˜ ˜投影 $M \to M$ 的垂直分布 $V \subset TM$ 总可以由一个纯旋量场 χ 表示，使得 $V = \ker \chi$。对于标准共形 PW 度量，可以选择满足扭量自旋子方程的旋量场；这是一个相当严格的条件，见 [23,定理 1]。

事实上，对于核可积的纯扭量自旋子 χ ，共形类中存在一些度量，使得 χ 平行；任意两个这样的度量都相差一个沿 $\ker \chi$ 的叶为常数的共形因子，见 [23, 命题 4.2]。本文将反复用到这一事实。

考察修正所产生的影响，可得如下结果

引理 2.6. 修正共形 PW 度量存在一个纯扭量自旋子 χ，使得 $\ker \chi = V$。

证明. 设 χ 为标准共形 PW 度量的扭量自旋子，使得 $\ker \chi = V$。如引理前所述，存在一种尺度，使得 χ 平行。由引理 2.2 可知，相对于修正 PW 度量， χ 也平行。特别地，它满足相应的扭量自旋子方程。□

现在我们可以对射影结构的修正共形扩张作局部刻画了。证明基于 [1] 和 [14] 关于仿射结构的修正伪黎曼扩张所得到的类似结果。

定理 2.7. 局部而言，分裂符号的共形结构是射影结构的修正共形扩张，当且仅当满足以下性质：

(a) 存在一个纯扭量自旋子 χ ，其可积核为 $\ker \chi$,

(b) 满足以下可积条件

$$W_{ab}{}^{c}{}_{d}\, v^a w^d = 0, \quad for\ all\ v^a, w^d \in \ker \chi, \tag{2.14}$$

其中 $W_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 是共形韦尔曲率。

证明。根据命题 2.4 和引理 2.6，作为修正共形扩张而产生的共形自旋结构满足条件 (a) 和 (b)。

$\widetilde{\ }$反过来，设 M 上的一个分裂号差共形自旋结构满足 (a) 和$\widetilde{\ }$，并设 M 是可积分布 $\ker \chi \subset TM$ 的局部叶空间。此处及下文中，所有讨论均为局部的，并且我们默认邻域可按需缩小。根据[23, 命题 4.2], , 共形类中存在一个度量 g_{ab}，使得 $D_a\chi = 0$，其中 D_a是 g_{ab} 的列维-奇维塔联络。因此，Schouten 张量 P_{ab} （属于 g_{ab} ）是严格水平的。由 Weyl 张量、黎曼张量与 Schouten 张量之间的关系（参见 (2.10)）可知，可积条件 (2.14) 等价于

$$R_{ab}{}^{c}{}_{d}\, v^a w^d = 0, \quad \text{for all } v^a, w^d \in \ker \chi, \tag{2.15}$$

其中， $R_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 是 g_{ab}的黎曼曲率。后一条件是联络 D_a 下降为局部叶空间 M上的仿射联络 D_A 的标准障碍。由 [14, 定理 4.5] 可知，投影 $M \to M$ 的一个截面（视为零截面）给出一个局部微分同胚 $M \cong T^*M$，在该微分同胚下，度量 g_{ab} 对应于仿射联络 D_A的修正 PW 度量。

由 [23, 命题 4.2] 我们还知道，任何使 χ 平行的两个度量之间，都相差一个沿着 $\ker \chi$的叶为常数的共形因子。莱维-奇维塔联络在这种缩放下的变换表明，M 上诱导的仿射联络是射影等价的，参见 [23, 命题 4.5]的证明。任何诱导的联络必然是特殊的，因为里奇张量是对称的。相应的体积形式为任意密度丛提供了一个平凡化，因此特别地给出一个识别 $T^*M \cong \sim T^*M$(2)。总之，满足 (a) 和 (b) 的 M上的共形自旋结构确定了局部叶空间 M上的$\widetilde{\ }$射影结构；在局部识别$M \cong T^*M$(2)下，其修正共形扩张对应于初始共形结构。□

注 2.8. 将当前的刻画与 [23, 定理 1], 中标准共形 PW 度量的刻画进行比较，我们看到，后者的特点是存在一个满足下式的共形 Killing 向量场 $k \in \ker \chi$

$$\mathcal{L}_k \chi = -\tfrac{1}{2}(n+1)\chi, \tag{2.16}$$

其中， n 是底层射影流形的维数。经过修正后，向量场 k 仍满足 (2.16)，但不一定是共形 Killing 向量场；共形 Killing 算子与修正项 Φ 的关系如下：

$$\overline{D}_{(a}k_{b)_0} = -\Phi_{ab}, \tag{2.17}$$

其中，$\overline{D}_a$ 是修正 PW 度量 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 的列维-奇维塔联络，而无迹部分是相对于 $\overline{g}_{ab}$ 取的。这些事实与下文回顾的性质 (2.26) 以及变换公式 (2.8) 有关。

可以改变向量场 $k \in \ker \chi$ ，使条件 (2.16) 和 (2.17) 仍然成立。事实上，令

$$k'_a := k_a + \alpha_a, \quad \Phi'_{AB} := \Phi_{AB} - D_{(A}\alpha_{B)}, \tag{2.18}$$

~ ~其中 $\alpha_a \in \mathcal{E}_a[2]$ 是相对于投影 $M \to M$ 的 $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$ 的拉回，由于 $\widetilde{D}_a\alpha_b$ 严格水平，李导数为 $\mathcal{L}_{k'}\chi = -\frac{1}{2}(n+1)\chi$。此外，容易验证 $\overline{D}_{(a}k'_{b)_0} = -\Phi'_{ab}$，其中 $\Phi'_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)}[2]$ 是 $\Phi'_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$ 的拉回。选择 $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$ 的自由度对应于按照定理 2.7 的证明中所述，选择投影 $M \to M$ 的局部截面 ~ 的自由度。

总之，同一射影结构的两个修正共形 PW 度量，若其修正张量满足关系式 (2.18)，则二者基本上可比较。注意，差值 $\Phi_{AB} - \Phi'_{AB} = D_{(A}\alpha_{B)}$ 是第一 BGG 算子 (A.3) 作用于 $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$ 后的像。特别是，当前的观察与定理 2.5 十分吻合。

2.4. 进一步的约定。本节其余部分将汇集下文反复用到的必要旋量相关概念。这是对 [23, 一节 2], 内容的摘要，其依据是 [27]中发展的一般演算。

设 D_A 是 M 上的一个特殊无挠仿射联络，$\widetilde{g}_{ab}$ 是 M 上由其诱导的 PW 度量 ~ ~ ~，并且 $\mathcal{S}_+$ 和 $\mathcal{S}_-$ 是不可约旋量丛。为作区分，我们在相应截面的指标上加撇号或不加撇号，并使用大写字母。特别地，相关的伽马矩阵记为 $\gamma_a{}^{B'}{}_A \in \widetilde{\mathcal{E}}_a \otimes \widetilde{\mathcal{S}}_+ \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*_-$ 和 $\gamma_a{}^B{}_{A'} \in \widetilde{\mathcal{E}}_a \otimes \widetilde{\mathcal{S}}_- \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*_+$。前文提到的湮灭 $V \subset T\widetilde{M}$ 的纯旋量场记作 $\chi^{A'} \in \widetilde{\mathcal{S}}_+$。类似地，还有一个~ ~纯旋量场 $\check{}\eta_{A'} \in \mathcal{S}^*_+$ 湮灭 $H \subset TM$，其水平分布由 D_A 给出，并满足 $\chi^{A'}\check{}\eta_{A'} \neq 0$。对于旋量 $\chi^{A'}$ 和 $\check{}\eta_{A'}$，我们关联以下截面

$$\chi^A_a := \gamma_a{}^A{}_{B'}\,\chi^{B'} \in \widetilde{\mathcal{E}}_a \otimes \widetilde{\mathcal{S}}_-, \quad \check{}\eta_{aA} := \check{}\eta_{B'}\,\gamma_a{}^{B'}{}_A \in \widetilde{\mathcal{E}}_a \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*_-.$$

除了 $V \cong \ker \chi^A_a$ 和 $H \cong \ker \check{}\eta_{aA}$，我们还可以将 $V \cong \operatorname{im} \check{}\eta_{aA}$ 和 $H \cong \operatorname{im} \chi^A_a$ 对应起来。$\chi^{A'}$ 和 $\check{}\eta_{A'}$ 的选择自由度可以通过以下方式固定:

$$\chi^{aA}\widetilde{D}_a = \frac{\partial}{\partial p_A}, \quad \check{}\eta^a_A\widetilde{D}_a = \frac{\partial}{\partial x^A} + \Gamma_A{}^C{}_B\,p_C\,\frac{\partial}{\partial p_B}, \tag{2.19}$$

~其中，D_a 是 $\widetilde{g}_{ab}$的列维-奇维塔联络。

前述设置还带来以下有用的解释：场 χ^A_a可视为从$\sim M$ 到 M的 1-形式拉回，而 $\check{}\eta^a_A$则可视为向量场的水平提升。特别地，PW 度量可以写成

$$\widetilde{g}_{ab} = 2\chi^A_{(a}\check{}\eta_{b)A} \tag{2.20}$$

其定义性质则体现为

$$\chi^A_a\chi^{aB} = 0, \quad \check{}\eta^a_A\check{}\eta_{aB} = 0, \quad \chi^A_a\check{}\eta^a_B = \delta^B_A. \tag{2.21}$$

此外，为后续使用，注意修正项 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$ 的拉回为

$$\Phi_{ab} = \Phi_{AB}\chi^A_a\chi^B_b \tag{2.22}$$

~而向量场 $v^a \in \mathcal{E}^a$ 的水平–垂直分解形式为

$$v^a = v^A\check{}\eta^a_A + \beta_A\chi^{aA}, \tag{2.23}$$

其中，系数被解释为 $v^A \in \mathcal{E}^A$ 和 $\beta_A \in \mathcal{E}_A(2)$。对于系数 v^A 和 β_A 仅依赖于 x^A 的向量场 (2.23)，协变导数的形式为

$$\widetilde{D}_a v^b = \big(D_A v^B\big)\,\chi^A_a\check{}\eta^b_B + \big(D_A\beta_B - v^C R_{CB}{}^D{}_A p_D\big)\,\chi^A_a\chi^{bB}. \tag{2.24}$$

关于注 2.8 中的特定垂直向量场，其标准坐标表达式为 $k = 2p_A\frac{\partial}{\partial p_A}$。我们还需要以下关系式

$$k^a = 2p_A\chi^{aA}, \quad p_A = \tfrac{1}{2}k^r\check{\eta}_{rA}, \tag{2.25}$$

其中，与 (2.23) 相比， p_A 被视为 $\mathcal{E}_A(2)$ 的截面。事实上， k^a 是一个共形 Killing 向量场，满足

$$\widetilde{D}_a k_b = \mu_{ab} + \widetilde{g}_{ab}. \tag{2.26}$$

~其中 $\mu_{ab} = D_{[a}k_{b]}$。特别地， k^a 是 $\tilde{g}_{ab}$的相似变换。最后，我们注意到，端 omorphism $\mu^a{}_b$ 分别在水平分布和垂直分布上作用为恒等映射和负恒等映射，即，

$$\mu^a{}_r\chi^{rA} = -\chi^{aA}, \quad \mu^a{}_r\check{\eta}^{rA} = \check{\eta}^{aA}.$$

3. Einstein metrics

本节旨在根据底层射影数据刻画修正共形扩张的爱因斯坦代表度量。本节以定理 3.2 收尾。与未修正的情形不同，共形类中的爱因斯坦度量不一定是 Ricci 平坦的。

~共形结构的近似爱因斯坦尺度是指满足以下条件的尺度 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ ： 共形类中与之对应的度量在 σ 的零点集之外为爱因斯坦度量。对于由度量 $\overline{g}_{ab}$ 表示的共形类，当且仅当 $(\overline{D}_a\overline{D}_b + \mathrm{P}_{\overline{ab}})\sigma$ 关于 $\overline{g}_{ab}$ 的无迹部分为零时，尺度 σ 是近似爱因斯坦尺度，其中 $\overline{D}_a$ 和 P_{ab} 分别是 $\overline{g}_{ab}$ 的列维-奇维塔联络和 Schouten 张量。若考虑由 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 表示的修正共形扩张，该条件也可以用未修正的 PW 度量 $\widetilde{g}_{ab}$ 写成

$$\big(\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b + \widetilde{\mathrm{P}}_{ab}\big)\sigma = \psi(\widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}), \tag{3.1}$$

~对于某个目前无需指定的 $\psi \in \mathcal{E}[-1]$ 。

为了用底层的射影术语刻画 (3.1) 的解，我们采用 (A.1) 和 (A.6) 中的第一射影 BGG 算子。前一个 BGG 方程的解是尺度 $\tau \in \mathcal{E}(1)$，它们从射影类中确定里奇平坦仿射联络；后一个 BGG 方程的解是满足下式的加权向量场 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$:

$$D_A\xi^B - \tfrac{1}{n}\delta_A{}^B D_R\xi^R = 0. \tag{3.2}$$

作为相应的条件，我们得到

$$W_{AB}{}^C{}_R\xi^R = 0, \tag{3.3}$$

参见 (A.7)。注意，对 (3.2) 进行延拓得到

$$D_{(A}D_{B)}\xi^R + \delta^R_{(A}\,\mathrm{P}_{B)S}\,\xi^S = 0, \tag{3.4}$$

参见 [23, 方程 (54)]。此外，我们还需要双线性微分算子 $\mathcal{F}$： $\mathcal{E}^A(-1) \times \mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{(AB)}(1)$，其定义为

$$\mathcal{F}(\xi,\Phi)_{AB} = \xi^R\big(D_{(A}\Phi_{B)R} - \tfrac{1}{2}D_R\Phi_{AB}\big) + \tfrac{1}{n}(D_R\xi^R)\Phi_{AB}, \tag{3.5}$$

它实际上也是射影不变的。

˜命题 3.1。截面 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ 是由 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 表示的修正共形扩张的近似爱因斯坦尺度，当且仅当 σ 关于 p_A是线性的，

$$\sigma = \xi^R p_R + \tau \tag{3.6}$$

且底层截面 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 满足可积条件

$$\xi^R W_{RB}{}^C{}_D = 0 \tag{3.7}$$

以及微分条件

$$\big(D_A \xi^B\big)_0 = 0, \tag{3.8}$$

$$(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\,\tau = \mathcal{F}(\xi, \Phi)_{AB}. \tag{3.9}$$

注意，对于 $\Phi_{AB} = 0$，(3.9) 的右端为零，即 τ 和 ξ^A 都是相应 BGG 方程的解。

˜证明。设 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ 是一个近似爱因斯坦尺度，即方程 (3.1) 成立。$\sim\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 和 P_{ab} 与两个竖直向量收缩时均为零，因此先前的假设意味着 $\chi^{aA}\chi^{bB}\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b\sigma = \frac{\partial^2}{\partial p_A \partial p_B}\sigma = 0$。于是，$\sigma$ 是关于 p_A 的一次多项式，对此我们采用 (3.6) 中的记号。

为了用 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 表示爱因斯坦尺度方程，需要将 (3.6) 代入 (3.1)，并根据 (2.24) 展开，同时考虑 (2.25)。将左侧分解为

$$\big(\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b + \widetilde{\mathrm{P}}_{ab}\big)\sigma = \Theta'_A{}^B \chi_{(a}{}^A \check{\eta}_{b)B} + \Theta''_{AB}\chi_{(a}{}^A\chi_{b)}{}^B,$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
\Theta'_A{}^B &= 2D_A\xi^B,\\
\Theta''_{AB} &= \big(D_{(A}D_{B)}\xi^R + \delta^R_{(A}\,\mathrm{P}_{B)S}\,\xi^S - \xi^S W_{S(A}{}^R{}_{B)}\big)\,p_R +\\
&\qquad + (D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau - \xi^R(D_{(A}\Phi_{B)R} - \tfrac{1}{2}D_R\Phi_{AB}).
\end{aligned}$$

根据 (2.20) 和 (2.22) 对 (3.1) 的右侧重新整理，爱因斯坦尺度方程可写为

$$\big(\Theta'_A{}^B - 2\psi\delta_A{}^B\big)\chi_{(a}{}^A\check{\eta}_{b)B} + \big(\Theta''_{AB} - \psi\Phi_{AB}\big)\chi_{(a}{}^A\chi_{b)}{}^B = 0, \tag{3.10}$$

其中 $\psi = \frac{1}{n}D_R\xi^R$。(3.10) 中的两个加项必须分别为零。考虑到所有表达式都是关于 p_A 的多项式，第一个条件 $\Theta'_A{}^B - 2\psi\delta_A{}^B = 0$ 等价于 (3.8)，而第二个条件 $\Theta''_{AB} - \psi\Phi_{AB} = 0$ 等价于以下一对条件

$$D_{(A}D_{B)}\xi^R + \delta^R_{(A}\,\mathrm{P}_{B)S}\,\xi^S - \xi^S W_{S(A}{}^R{}_{B)} = 0, \tag{3.11}$$

$$(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau - \xi^R(D_{(A}\Phi_{B)R} - \tfrac{1}{2}D_R\Phi_{AB}) - \tfrac{1}{n}(D_R\xi^R)\Phi_{AB} = 0. \tag{3.12}$$

由 (3.11) 和条件 (3.4)（它是 (3.8) 的推论）可知$\xi^S W_{S(A}{}^R{}_{B)} = 0$。根据 Weyl 张量的对称性以及条件 (3.3)（它是 (3.8) 的另一推论），可知 $\xi^S W_{S[A}{}^R{}_{B]} = -\frac{1}{2}W_{AB}{}^R{}_S\xi^S = 0$。因此，可积条件 (3.7) 成立。反过来，(3.7) 和 (3.8) 显然推出 (3.11)。采用 (3.5) 中的记号，方程 (3.12) 就是 (3.9)。□

命题 3.1 建立了近似爱因斯坦尺度与满足某些射影不变条件的配对 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 之间的双射。下述定理表明，这些分量也可以用共形术语来识别，并且我们可以全面掌控缩放度量的里奇平坦性。

定理 3.2. 修正共形扩张的近似爱因斯坦尺度与满足条件(3.7)–(3.9)的对 $\tau \in \mathcal{E}(1)$和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$之间存在双射。更确切地说，近似爱因斯坦尺度 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ 可以唯一分解为

$$\sigma = \sigma_+ + \sigma_-,$$

其中 $\mathcal{L}_k\sigma_+ = \sigma_+$ 和 $\mathcal{L}_k\sigma_- = -\sigma_-$。这些分量对应于 (3.6) a s

$$\xi^A = \chi^{aA}\widetilde{D}_a\sigma_+, \quad \tau = \sigma_-. \tag{3.13}$$

此外，与 σ 对应的重标度度量的标量曲率为

$$2n(2n-1)\Phi_{RS}\,\xi^R\xi^S,$$

在其零点集之外，其中 n是底层射影流形的维数， $\Phi_{AB} \in\mathcal{E}_{AB}(2)$是修正张量。

证明. 对于如 (3.6) 所示的近似爱因斯坦尺度分解，令 $\sigma_+ := \xi^R p_R$ 和$\sigma_- := \tau$。性质 $\mathcal{L}_k\sigma_+ = \sigma_+$ 和 $\mathcal{L}_k\sigma_- = -\sigma_-$ 可用与[23, 引理 5 中相同的论证得到2] （相对于 p_A 的齐次次数在其中起关键作用）。回顾 $\chi^{aA}\widetilde{D}_a = \frac{\partial}{\partial p_A}$后，(3.13) 中的表达式显然成立。

剩余部分基于与 [23, 命题 5.3] 中类似的推理，并结合我们当前的情形，如命题 3.1 的证明所述。度量的标量曲率与其 Schouten 张量的迹成正比，比例常数为 $2(2n-1)$。这可由定义得出；相关定义以及反映尺度变化的变换公式，均可参见例如 [4]。令 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 为修正 PW 度量，$\mathrm{P} := (\overline{g}^{-1})^{rs}\mathrm{P}_{rs}$为相应 Schouten 张量的迹。与一个$\widehat{}$爱因斯坦尺度 σ 相对应的类似量分别记为 $\widehat{g}_{ab}$ 和 $\widehat{\mathrm{P}}$。关键关系为

$$\widehat{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{P}} - (\overline{g}^{-1})^{rs}(\overline{D}_r\Upsilon_s + (n-1)\Upsilon_r\Upsilon_s), \tag{3.14}$$

其中 $\Upsilon_a = -\sigma^{-1}\overline{D}_a\sigma$。由于 $\overline{\mathrm{P}_{ab}}$ 是严格水平的，P 为零$\overline{\ }$ 类似地，对于上述分解 $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$ ，分量 σ_- 对迹没有贡献。因此，我们只需考虑 $\sigma = \sigma_+ = \xi^R p_R$。为计算微分，我们使用 (2.25)，根据 (2.24) 展开，并代入 (3.2)，得到

$$\overline{D}_a\sigma_+ = \tfrac{1}{2n}(D_R\xi^R)k_a + \xi^R\check{\eta}_{aR}.$$

Υ_a 的导数的迹可简化为

$$(\overline{g}^{-1})^{rs}\overline{D}_r\Upsilon_s = (\overline{g}^{-1})^{rs}\Upsilon_r\Upsilon_s - 2\sigma_+^{-1}D_R\xi^R.$$

综合以上结果，可验证散度项消失，且（3.14）化为$\widehat{\ }\mathrm{P} = n\,\Phi_{RS}\,\xi^R\xi^S$。因此结论得证。□

我们以一个附加关系结束本节。该关系将在下一节讨论一些特殊情形时发挥作用。它是命题 3.1 中条件的推论：

推论 推论 3.3。若 $\tau \in \mathcal{E}(1)$、 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 和 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$ 满足 (3.7)–(3.9)，则 n

$$\left(W_{AB}{}^{R}{}_{C}D_R - Y_{CAB}\right)\tau = \xi^R\left(\tfrac{3}{4}W_{AB}{}^{S}{}_{C}\Phi_{RS} - 2\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR}\right), \tag{3.15}$$

其中 $\mathcal{B}_2$： $\mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 是第二 BGG 算子（A.3）。

证明。对（3.9）左端应用第二 BGG 算子（A.1），得到

$$-\tfrac{1}{2}\big(W_{AB}{}^{R}{}_{C}D_R - Y_{CAB}\big)\tau,$$

其中 $Y_{CAB} = 2D_{[A}\mathrm{P}^{B]C}$ 是 Cotton 张量，参见（A.2）。对（3.9）右端应用同一算子，经过繁琐的计算可得

$$\xi^R\big(\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR} - \tfrac{3}{8}W_{AB}{}^{S}{}_{C}\Phi_{RS} + \tfrac{1}{4}W_{CR}{}^{S}{}_{[A}\Phi_{B]S}\big),$$

其中 $\mathcal{B}_2$ 是 BGG 算子（A.3），其更明确的描述见（A.4）。这里必须考虑到 ξ^A 满足（3.8），因而满足（3.3）。前面两个公式连同可积条件（3.7）给出所述结果。□

4. Einstein metrics: special cases

在某些特殊情形下，命题 3.1 中的条件会大大简化。我们讨论射影平坦结构的修正共形扩张、修正项 Φ_{AB} 属于第一 BGG 算子的像这一情形，以及最低维情形。在所有这些情形下，我们都能够厘清源截面 τ 和 ξ^A 相对于修正项 Φ_{AB} 的相互关系，并确定近似爱因斯坦尺度空间的维数。

4.1. 射影平坦情形。在这种情形下，许多与曲率相关的对象消失了，从而大大简化了问题。首先，Weyl 张量和 Cotton 张量均为零。特别地，条件 (3.7) 自动满足，而 (3.15) 中只有一项保留下来。此外，在平坦情形下，任意 BGG 序列都是复形，并且在局部范围内实际上是恰当的。这些事实导出了如下特征条件的分解：

定理 4.1. 考虑由射影平坦仿射联络 D_A 和修正张量 $\Phi_{AB} \in \mathcal{E}_{(AB)}(2)$关联的修正 PW 度量。局部而言，共形类的近似爱因斯坦尺度与满足以下条件的对 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 之间存在双射

$$(D_AD_B + \mathrm{P}_{AB})\tau = 0, \tag{4.1}$$

$$(D_A\xi^B)_0 = 0, \quad \xi^R\,\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR} = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{B}_2 : \mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 是第二 BGG 算子 (A.3)。近似爱因斯坦尺度空间的维数等于 $d + n + 1$，其中 d 是方程 (4.2) 的解空间维数，而 n是底层射影流形的维数。

证明. 在我们的情形中，只有命题 3.1 中的条件 (3.8) 和 (3.9) 相关。将第二 BGG 算子作用于 (3.9)，得到 $0 = \xi^R\,\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR}$，参见推论 3.3。

局部而言，由于 BGG 序列恰当，(3.9) 右端属于第一 BGG 算子作用于 $\mathcal{E}(1)$ 的某个截面所得像。这保证了满足 (3.9) 的 $\tau \in \mathcal{E}(1)$ 的存在，而所有此类截面均由方程 (4.1) 的解参数化。然而，在平坦情形下，后一个方程的解允许写成坐标表达式 $\tau = c_Ax^A + c_0$，其中 c_0、c_1、……、c_n 为任意常数，参见 A.1 节。□

如果张量场 $\mathcal{B}_2(\Phi)$ 是一般的，则近似爱因斯坦尺度空间的维数等于 $n+1$。这里的一般性是指，将该场视为丛映射 $\mathcal{E}^A \to \mathcal{E}_{[AB]C}$ 时，它是单射。

4.2. 特殊修改。这里假设，对于某个 $\varphi_A \in \mathcal{E}_A(2)$，$\Phi_{AB} = D_{(A}\varphi_{B)}$，即 Φ_{AB} 属于第一 BGG 算子 (A.3) 的像。关于注 2.8，近似爱因斯坦尺度的刻画应与标准共形扩张的刻画一致，如 [23, 定理 2]所示。为使论述自成一体，我们直接从命题 3.1 推导这一刻画。Φ_{AB} 的作用是使得相应的方程组由标准情形下的齐次方程组变为非齐次方程组，因此需要求一个特解。特别地，当前类型的修正共形扩张的近似爱因斯坦尺度空间，是其未修正对应对象的近似爱因斯坦尺度向量空间上的一个仿射空间。

定理 4.2. 设标准 PW 度量经由形如 $\Phi_{AB} = D_{(A}\varphi_{B)}$的项修正，其中 $\varphi_A \in \mathcal{E}_A(2)$。共形类的近似爱因斯坦尺度与满足以下条件的对 $\tau \in \mathcal{E}(1)$和 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$之间存在双射

$$(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau = 0, \tag{4.3}$$

$$\xi^R W_{RA}{}^C{}_B = 0, \quad (D_A \xi^B)_0 = 0. \tag{4.4}$$

近似爱因斯坦尺度空间的维数等于 $d_1 + d_2$，其中 d_1 和 d_2 分别是方程 (4.3) 和 (4.4) 的解空间维数。

证明。直接计算可得 (3.5) 具有如下形式

$$\mathcal{F}(\xi, \Phi)_{AB} = \tfrac{1}{2}(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})(\xi^R \varphi_R). \tag{4.5}$$

因此，$\tau = \frac{1}{2}\xi^R \varphi_R$ 是 (3.9) 的一个特解，而所有此类解均由方程 (4.3) 的解参数化。方程 (4.4) 正是命题 3.1 中剩余的条件。□

请注意，与标准扩张相比，修正张量在此发挥作用，因此缩放度量未必是 Ricci 平坦的，见定理 3.2。

4.3. 四维。这里我们考察四维修正共形扩张，即二维射影结构的修正共形扩张。在这种情况下，Weyl 张量 $W_{AB}{}^C{}_D$ 自动消失，而关键的曲率不变量是 Cotton 张量 Y_{CAB}。这使条件 (3.15) 得以简化，即

$$Y_{CAB}\,\tau = 2\xi^R\, \mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCR}. \tag{4.6}$$

此外，$\mathcal{B}_2(\Phi)$ 是丛 $\mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 的截面，在此维数下它是一个密度丛。利用射影体积形式 $\boldsymbol{\epsilon}_{AB} \in \mathcal{E}_{[AB]}(3)$，或其逆 $\boldsymbol{\epsilon}^{AB} \in \mathcal{E}^{[AB]}(-3)$，可将其识别为 $\mathcal{E}(-4)$。特别地，方程 (4.6) 可改写为

$$(\star Y)^A\,\tau = 2\xi^A(\star\mathcal{B}_2(\Phi)), \tag{4.7}$$

其中 $(\star Y)^A := Y_{CDE}\boldsymbol{\epsilon}^{AC}\boldsymbol{\epsilon}^{DE} \in \mathcal{E}^A(-6)$ 且 $\star\mathcal{B}_2(\Phi) := \mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCD}\boldsymbol{\epsilon}^{AB}\boldsymbol{\epsilon}^{CD} \in \mathcal{E}(-4)$。

定理 4.3. 对于二维射影结构的修正共形扩张，近似爱因斯坦尺度空间的维数为 0、1、3 或 6。

证明. 将近似爱因斯坦尺度空间的维数记为 d。每当我们考虑不恒为零的截面时，都将讨论限制在其零点集之外。

对于非平坦射影结构，方程 (3.8) 的解空间至多为 1 维；这可由 (A.5) 及其相邻讨论得出。事实上，我们有 $\mathcal{E}^A(-1) \cong \mathcal{E}_A(2)$，因此方程 (3.8) 对应于第一 BGG 方程 (A.3)，而 (A.5) 给出了相关的可积条件。任意解 $\xi^A \in \mathcal{E}^A(-1)$ 都可通过条件 (4.7) 唯一确定 $\tau \in \mathcal{E}(1)$。当且仅当这一对满足 (3.9) 时，它才定义一个近似爱因斯坦尺度。综上，我们得出 $d \leq 1$ 在此类情况下。

对于平坦射影结构以及满足 $\mathcal{B}_2(\Phi) \neq 0$ 的共形扩张，由 (4.7) 可得 $\xi^A = 0$。命题 3.1 中的条件可简化为单个方程 $(D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau = 0$，其解空间为 3 维，参见定理 4.1 的证明。因此，$d = 3$ 在此类情况下。

对于具有 $\mathcal{B}_2(\Phi) = 0$ 的平坦射影结构及共形扩张，诱导的共形结构是平坦的，参见定理 2.5。在这类情形中，维数 d 达到最大可能值，即众所周知的 $d = 6$。□

定理 4.3 中列出的所有取值均可实现：
(0) 对于一般射影结构的共形扩张，不存在近似爱因斯坦尺度。(1) 对于由一般旋转曲面的列维-奇维塔联络给出的射影结构，考虑其标准（未修正）共形扩张。生成旋转的基灵向量场产生了满足 (3.8) 的向量场，见 [23, 第 7 节。1], 这也是近似爱因斯坦尺度的唯一来源。(3) 平坦射影结构的一般修正共形扩张具有 3 维近似爱因斯坦尺度空间；第 6.4 节讨论了一个此类具体例子。(6) 平坦射影结构的标准共形扩张具有 6 维近似爱因斯坦尺度空间。

5. 对称性

本节根据底层射影数据刻画修正 PW 度量的无穷小共形对称。在陈述主要结果定理 5.3 之前，我们需要先作几项准备性观察。

首先，我们用原始（未修正）度量来表示修正 PW 度量的共形 Killing 方程及其延拓。对于修正 PW 度量 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 的共形 Killing 向量场v^a， $\overline{D}_{(a}\overline{v}_{b)}$ 关于$\overline{g}_{ab}$ 的无迹部分为零，其中 $\overline{D}_a$ 是 $\overline{g}_{ab}$ 和 $\overline{v}_b = v_b + v^r \Phi_{rb}$ 的列维-奇维塔联络。简洁地写作，

$$\overline{D}_{(a}\overline{v}_{b)} - \psi \overline{g}_{ab} = 0, \tag{5.1}$$

其中 ψ 是散度，此处暂时无需具体说明。按照引理 2.2 的思路展开这一条件，即可得到所需的表达式。与未修改情形相比，最终公式中多出一项 (ω_{ab}) 及其更高阶导数 (ω'_{abc} 和 ω''_{ab})：

~引理 5.1. 设 $v^a \in \mathcal{E}^a$ 是修正 PW 度量 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 的一个共形 Killing 向量场，并将其分解为

$$\widetilde{D}_a v_b = \mu_{ab} + \psi \widetilde{g}_{ab} + \omega_{ab}, \tag{5.2}$$

其中 $\mu_{ab} = \widetilde{D}_{[a} v_{b]}$、$\psi = \frac{1}{2n} \widetilde{D}_r v^r$ 和 $\omega_{ab} = \widetilde{D}_{(a} v_{b)_0}$。于是：

~(i) $D_a v_b$ 的对称无迹部分为

$$\omega_{ab} = -\tfrac{1}{2} (\mathcal{L}_v \Phi)_{ab}. \tag{5.3}$$

特别地，它是严格水平的，即 $\chi^{aA} \omega_{ab} = \chi^{bB} \omega_{ab} = 0$。(ii) (5.2) 的微分推论为

$$\widetilde{D}_a \psi = \widetilde{\mathrm{P}}_{ar} v^r - \beta_a, \tag{5.4}$$

$$\widetilde{D}_a \mu_{bc} = -2 \widetilde{g}_{a[b} \beta_{c]} - 2 \widetilde{\mathrm{P}}_{a[b} v_{c]} - \widetilde{W}_{bcar} v^r + \omega'_{abc}, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{D}_a \beta_b = -\widetilde{Y}_{abr} v^r - \psi \widetilde{\mathrm{P}}_{ab} + \widetilde{\mathrm{P}}_a{}^r \mu_{rb} + \omega''_{ab}, \tag{5.6}$$

对于某些满足 $\chi^{aA} \omega'_{abc} = 0$ 和 $\chi^{bB} \omega''_{ab} = 0$ 的 $\beta_a \in \widetilde{\mathcal{E}}_a$、$\omega'_{abc} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{a[bc]}[2]$ 和 $\omega''_{ab} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{ab}$，分别有。

证明。(i) 一方面，由 (2.8) 可知，对于 $\overline{v}_b = v_b + v^r \Phi_{rb}$,

$$\begin{aligned} \overline{D}_a \overline{v}_b &= \widetilde{D}_a v_b - v_r \widetilde{D}_{(a} \Phi_{b)}{}^r + \tfrac{1}{2} v^r \widetilde{D}_r \Phi_{ab} + (\widetilde{D}_a v^r) \Phi_{br} + v^r \widetilde{D}_a \Phi_{br} = \\ &= \widetilde{D}_a v_b + \tfrac{1}{2} v^r \widetilde{D}_r \Phi_{ab} + (\widetilde{D}_a v^r) \Phi_{br} + v_r \widetilde{D}_{[a} \Phi_{b]}{}^r. \end{aligned}$$

于是，共形 Killing 方程 (5.1) 可写为

$$\widetilde{D}_{(a} v_{b)} + \tfrac{1}{2} v^r \widetilde{D}_r \Phi_{ab} + (\widetilde{D}_{(a} v^r) \Phi_{b)r} - \psi (\widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}) = 0, \tag{5.7}$$

其中 $\psi = \frac{1}{2n} \widetilde{D}_r v^r$。另一方面，$\Phi_{ab} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{ab}[2]$ 沿 v^a 方向的李导数为

$$(\mathcal{L}_v \Phi)_{ab} = v^r \widetilde{D}_r \Phi_{ab} + 2 (\widetilde{D}_{(a} v^r) \Phi_{b)r} - \tfrac{1}{n} (\widetilde{D}_r v^r) \Phi_{ab} \tag{5.8}$$

（其中最后一个系数反映了 (2.3) 中采用的约定）。因此，方程 (5.7) 可写为

$$\widetilde{D}_{(a} v_{b)} + \tfrac{1}{2} (\mathcal{L}_v \Phi)_{ab} - \psi \widetilde{g}_{ab} = 0,$$

由此得到 (5.3)。由于 Φ_{ab} 是严格水平的，且 v^a 的流保持垂直分布，其余结论便随之成立。

(ii) 为了推导 (5.2) 的微分推论，我们将仿照标准延拓系统的计算，参见 [20]。将方程 (5.4) 视为 β_a的定义。对 (5.2) 施加 $\backsim D_c$，在左端交换协变导数，并对 b 和 c作反对称化，经过一些运算即可得到方程 (5.5)。从计算中还可得出 $\omega'_{abc} = 2 \widetilde{D}_{[b} \omega_{c]a}$。由于 ω_{ab} 是严格水平的，性质 $\chi^{aA} \omega'_{abc} = 0$ 成立。

此外，将 $\widetilde{g}^{ab}$ 应用于 (5.5) 可得

$$\widetilde{D}^r \widetilde{\mu}_{ra} = -(2n-1) \widetilde{\beta}_a + \widetilde{\mathrm{P}}_{ar} v^r + \widetilde{D}^r \omega_{ra}. \tag{5.9}$$

~最后，将 D^c 应用于（5.5），交换协变导数并利用（5.9），经过繁琐但直接的计算即可得到方程（5.6）。进一步从计算中

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\qquad\qquad\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$可知，$\omega''_{ab}$ 是$D_rD^r\omega_{ab}$ 和$D_aD^r\omega_{br}$的线性组合。特别地，性质 $\chi^{bB}\omega''_{ab}=0$ 成立。□

接下来，为了用底层的射影术语来表达无穷小共形对称，我们需要若干射影不变算子。我们主要采用 (A.8) 和 (A.3) 中的第一类 BGG 算子，以及算子 (A.11)。相应的方程及其解如下所述：(A.8) 对应的方程等价于以下系统

$$D_Aw^{BC}-2\delta_A{}^{[B}\nu^{C]}=0,\quad\text{where}\quad\nu^C=\tfrac{1}{n-1}D_Rw^{RC},\tag{5.10}$$

$$D_A\nu^B+\mathrm{P}_{AR}\,w^{RB}+\tfrac{1}{2(n-2)}w^{RS}W_{RS}{}^B{}_A=0.\tag{5.11}$$

(A.11) 和 (A.3) 对应的解分别是无穷小射影对称和所谓的射影 Killing 形式。此外，我们还需要双线性微分算子 $\mathcal{F}\colon\mathcal{E}^{[CD]}(-2)\times\mathcal{E}_{(AB)}(2)\to\mathcal{E}^C{}_{(AB)}$，其定义如下

$$\mathcal{F}(w,\Phi)^C{}_{AB}=w^{RC}\big(D_{(A}\Phi_{B)R}-\tfrac{1}{2}D_R\Phi_{AB}\big)+\nu^C\Phi_{AB},\tag{5.12}$$

其中 ν^C 与上文相同。可以验证它也是射影不变的。与 (5.8) 类似，我们还有作用于 $\mathcal{E}_{(AB)}(2)$ 截面上的李导数，

$$(\mathcal{L}_v\Phi)_{AB}=v^RD_R\Phi_{AB}+2(D_{(A}v^R)\Phi_{B)R}-\tfrac{2}{n+1}(D_Rv^R)\Phi_{AB},\tag{5.13}$$

其中 $v^R\in\mathcal{E}^R$（最后一个系数反映了 (2.2) 中的约定）。

我们现在可以刻画修正 PW 度量的无穷小共形对称。该刻画基于共形向量场的水平–垂直分解，其分量与射影不变对象相对应：

命题 5.2. 设 $v^a=v^A\eta^a_A+\beta_A\chi^{aA}$ 是向量场相对于$\widetilde{g}_{ab}$ 的分解，如 (2.23) 所示。那么，v^a 是修正 PW 度量 $\overline{g}_{ab}=\widetilde{g}_{ab}+\Phi_{ab}$的共形 Killing 向量场，当且仅当 v^A 和 β_A 是关于 p_A的多项式，

$$v^A=w^{AB}p_B+v^A,\quad\beta_A=\psi_A{}^{BC}p_Bp_C+\varphi_A{}^Bp_B+\alpha_A,\tag{5.14}$$

且底层截面 $w^{AB}\in\mathcal{E}^{AB}(-2)$、$v^A\in\mathcal{E}^A$、$\psi_A{}^{BC}\in\mathcal{E}_A{}^{(BC)}(-2)$、$\varphi_A{}^B\in\mathcal{E}_A{}^B$、$\alpha_A\in\mathcal{E}_A(2)$ 满足代数条件

$$w^{(AB)}=0,\tag{5.15}$$

可积条件

$$w^{R(C}W_{R(A}{}^{D)}{}_{B)}=0,\tag{5.16}$$

微分条件

$$\big(D_Aw^{BC}\big)_0=0,\tag{5.17}$$

$$\big(D_AD_Bv^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C+v^RW_{R(A}{}^C{}_{B)}\big)_0=-\big(\mathcal{F}(w,\Phi)^C{}_{AB}\big)_0\,,\tag{5.18}$$

$$D_{(A}\alpha_{B)}=-\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_v\Phi)_{AB}+\tfrac{1}{2}\mathring{\psi}\,\Phi_{AB},\tag{5.19}$$

$\mathring{}$对于某个 $\psi\in\mathcal{E}$，使得

$$D_A\mathring{\psi}=\tfrac{2}{n+1}\,\mathcal{F}(w,\Phi)^R{}_{AR},\tag{5.20}$$

其中 $\nu^C = \frac{1}{n-1} D_R w^{RC}$ 如式 (5.10) 所示，其余系数由 b 给出 y

$$\psi_A{}^{BC} = \delta_A{}^{(B}\nu^{C)}, \tag{5.21}$$

$$\varphi_A{}^B = -\left(D_A v^B + w^{SB}\Phi_{SA}\right)_0 + \left(\tfrac{n-1}{n(n+1)}(D_S v^S) + \mathring{\psi}\right)\delta_A{}^B. \tag{5.22}$$

注意，对于 $\Phi_{AB} = 0$，(5.18)–(5.20) 的右端均为零，即 w^{AB}、v^A、α_A 各自都是相应 BGG 方程的解，而 ψ 为常数。关于上述描述与未修正情形之间关系的进一步评论见本节末尾。

证明. 设 $v^a = v^A \check{\eta}^a_A + \beta_A \chi^{aA}$ 是具有 (5.14) 形式的向量场。我们首先用基础对象 w^{AB}、$\psi_A{}^{BC}$、$\varphi_A{}^B$ 和 α_A 表示 $\overline{g}_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab}$ 的共形 Killing 方程。陈述中给出的适当权重可由 (2.25) 和 (2.23) 附近的讨论得出，下文不再赘述。

由引理 5.1 的证明可知，(5.1) 等价于

$$\overline{D}_{(a}\overline{v}_{b)} = \widetilde{D}_{(a}v_{b)} + \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_v\Phi)_{ab} + \psi\Phi_{ab},$$

其中 $\overline{v}_b = v_b + v^r\Phi_{rb}$ 和 $\psi = \frac{1}{2n}\widetilde{D}_r v^r$。现在，需分别代入 (5.14) 和 (2.22)，并依据 (2.24) 展开，同时考虑 (2.25)。考虑如下形式的分解

$$\overline{D}_{(a}\bar{v}_{b)} = \Theta^{AB}\,\check{\eta}_{(a|A|}\check{\eta}_{b)B} + \Theta'_A{}^B\,\chi_{(a}{}^A\check{\eta}_{b)B} + \Theta''_{AB}\,\chi_{(a}{}^A\chi_{b)}{}^B,$$

直接进行一番虽相当冗长的计算可得

$$\Theta^{AB} = w^{(AB)}, \tag{5.23}$$

$$\Theta'_A{}^B = \left(D_A w^{BR} + 2\psi_A{}^{BR}\right)p_R + \left(D_A v^B + w^{SB}\Phi_{SA} + \varphi_A{}^B\right), \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}\Theta''_{AB} = {} & \left(D_{(A}\psi_{B)}{}^{RS} - w^{T(R}W_{T(A}{}^{S)}{}_{B)} + w^{T(R}\,\mathrm{P}_{T(A}\,\delta^{S)}{}_{B)}\right)p_R p_S + \\ & + \left(D_{(A}\varphi_{B)}{}^R + D_{(A}(w^{SR}\Phi_{B)S}) - v^S W_{S(A}{}^R{}_{B)} - v^R\,\mathrm{P}_{AB} + \right. \\ & \qquad \left. + v^S\,\mathrm{P}_{S(A}\,\delta^R{}_{B)} - w^{SR}D_{(A}\Phi_{B)S} + \tfrac{1}{2}w^{SR}D_S\Phi_{AB}\right)p_R + \\ & + \left(D_{(A}\alpha_{B)} + (D_{(A}v^R)\Phi_{B)R} + \tfrac{1}{2}v^S D_S\Phi_{AB}\right).\end{aligned} \tag{5.25}$$

参照 (2.20) 和 (2.22)，共形 Killing 方程 (5.1) 可写为

$$\Theta^{AB}\,\check{\eta}_{(a|A|}\check{\eta}_{b)B} + \left(\Theta'_A{}^B - 2\psi\delta^B_A\right)\chi_{(a}{}^A\check{\eta}_{b)B} + \left(\Theta''_{AB} - \psi\Phi_{AB}\right)\chi_{(a}{}^A\chi_{b)}{}^B = 0, \tag{5.26}$$

其中

$$\psi = \tfrac{1}{2n}\left(D_S w^{SR} + 2\psi_S{}^{SR}\right)p_R + \tfrac{1}{2n}\left(D_S v^S + \varphi_S{}^S\right). \tag{5.27}$$

(5.26) 中的三个加项必须分别为零。考虑到表达式 (5.23)–(5.25) 和 (5.27) 都是关于 p_A 的多项式，第一个条件 $\Theta^{AB} = 0$ 是

$$w^{(AB)} = 0, \tag{5.28}$$

第二个条件 $\Theta'_A{}^B - 2\psi\delta^B_A = 0$ 等价于这一对

$$D_A w^{BR} + 2\psi_A{}^{BR} - \tfrac{1}{n}\delta^B_A\left(D_S w^{SR} + 2\psi_S{}^{SR}\right) = 0, \tag{5.29}$$

$$\left(D_A v^B + w^{SB}\Phi_{SA} + \varphi_A{}^B\right)_0 = 0, \tag{5.30}$$

第三个条件 $\Theta''_{AB} - \psi\Phi_{AB} = 0$ 等价于这一组三元组

$$D_{(A}\psi_{B)}{}^{RS} - w^{T(R}W_{T(A}{}^{S)}{}_{B)} + w^{T(R}\,\mathrm{P}_{T(A}\,\delta^{S)}{}_{B)} = 0, \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} &D_{(A}\varphi_{B)}{}^{R} + D_{(A}(w^{SR}\Phi_{B)S}) - v^{S}W_{S(A}{}^{R}{}_{B)} - v^{R}\,\mathrm{P}_{AB} + \\ &\quad + v^{S}\,\mathrm{P}_{S(A}\,\delta^{R}{}_{B)} - w^{SR}D_{(A}\Phi_{B)S} + \tfrac{1}{2}w^{SR}D_{S}\Phi_{AB} - \tfrac{1}{2n}\big(D_{S}w^{SR} + 2\psi_{S}{}^{SR}\big) = 0, \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$D_{(A}\alpha_{B)} + (D_{(A}v^{R})\Phi_{B)R} + \tfrac{1}{2}v^{S}D_{S}\Phi_{AB} - \tfrac{1}{2n}\big(D_{S}v^{S} + \varphi_{S}{}^{S}\big)\Phi_{AB} = 0. \tag{5.33}$$

系统 (5.28)–(5.33) 以纯粹的底层项给出了对形如 (5.14) 的共形 Killing 场所需的刻画。现在我们详细分析各个条件:

条件 (5.28) 就是 (5.15)，即 w^{AB} 是一个双向量。

对 (5.29) 关于 B 和 R 进行反对称化，得到 $(D_{A}w^{BR})_{0} = 0$，这正是条件 (5.17)。

对 (5.29) 关于 B 和 R 进行对称化，得到 $(\psi_{A}{}^{BR})_{0} = 0$，这意味着对于某个 ν^{C}，有 $\psi_{A}{}^{BC} = \delta_{A}{}^{(B}\nu^{C)}$。采用此记号并对 (5.29) 取迹，得到

$$D_{R}w^{RA} = (n-1)\nu^{A}, \tag{5.34}$$

也就是说， ν^{C} 如所述，并且我们得到条件 (5.21)。

方程 (5.30) 确定了 $\varphi_{A}{}^{B}$ 的无迹部分，而其迹尚未确定。将其表示为

$$\varphi_{R}{}^{R} = \tfrac{n-1}{n+1}D_{R}v^{R} + n\mathring{\psi}, \tag{5.35}$$

$\mathring{}$，其中 $\psi \in \mathcal{E}$ 是某个函数。因此，我们得到方程 (5.22)。

利用 (5.21)，方程 (5.31) 可改写为

$$\delta_{(A}{}^{(R}D_{B)}\nu^{S)} - w^{T(R}W_{T(A}{}^{S)}{}_{B)} + w^{T(R}\,\mathrm{P}_{T(A}\,\delta^{S)}{}_{B)} = 0. \tag{5.36}$$

特别地， $w^{T(R}W_{T(A}{}^{S)}{}_{B)}$ 的无迹部分为零。对 (5.36) 取完整的迹，并与 (5.17) 的推论 (5.11) 比较，得到

$$w^{TR}W_{TR}{}^{B}{}_{A} = 0. \tag{5.37}$$

因此， $w^{T(R}W_{T(A}{}^{S}{}_{B)=}\,0$，这正是可积条件 (5.16)。

利用 (5.21) 和 (5.34)，方程 (5.32) 可改写为

$$\begin{aligned} &D_{(A}\varphi_{B)}{}^{R} + D_{(A}(w^{SR}\Phi_{B)S}) - v^{S}W_{S(A}{}^{R}{}_{B)} - v^{R}\,\mathrm{P}_{AB} + \\ &\quad + v^{S}\,\mathrm{P}_{S(A}\,\delta^{R}{}_{B)} - w^{SR}D_{(A}\Phi_{B)S} + \tfrac{1}{2}w^{SR}D_{S}\Phi_{AB} - \nu^{R}\Phi_{AB} = 0, \end{aligned} \tag{5.38}$$

正如（5.18）所述，（5.38）的无迹部分由算子（A.11）和（5.12）构成，而（5.38）的迹导出（5.20）。对于后一个断言，需要使用（5.22）或（5.35）的以下推论，

$$D_{(A}\varphi_{R)}{}^{R} = \tfrac{1}{2}(n+1)D_{A}\mathring{\psi} - \tfrac{1}{2}(n-1)\,\mathrm{P}_{AR}\,v^{R} - \tfrac{1}{2}D_{R}(w^{SR}\Phi_{SR}).$$

利用（5.34）和（5.35），方程（5.33）可改写为

$$D_{(A}\alpha_{B)} + (D_{(A}v^{R})\Phi_{B)R} + \tfrac{1}{2}v^{S}D_{S}\Phi_{AB} - \tfrac{1}{n+1}(D_{S}v^{S})\Phi_{AB} - \tfrac{1}{2}\mathring{\psi}\Phi_{AB} = 0. \tag{5.39}$$

参见（5.13），这正是方程（5.19）。

总之，我们已从 (5.28)– (5.33) 推导出陈述中的全部条件 (5.15)–(5.22)。回顾并相应调整前面的论述，很容易反向推导。因此，这两个系统是等价的。

为完成证明，我们必须证明修正 PW 度量的任意共形 Killing 向量场都具有 (5.14) 的形式。我们将仿照命题 6.5], 证明中的部分计算，同时考虑引理 5.1 中归纳的当前修改。令˜尺度 χ 取值使得扭量旋量 χ 相对于 D平行。对 (5.2) 求导，并代入 (5.4) 和 (5.5)，得到

$$\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b v_c = -2\widetilde{g}_{a[b}\beta_{c]} - 2\widetilde{\mathrm{P}}_{a[b}v_{c]} - \widetilde{W}_{bcar}v^r + \omega'_{abc} + \widetilde{\mathrm{P}}_{ar}v^r\widetilde{g}_{bc} - \beta_a\widetilde{g}_{bc} + \widetilde{D}_a\omega_{bc}.$$

经过竖直缩并后，我们得到

$$\chi^{aA}\chi^{bB}\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b v_c = 2\chi^{aA}\chi^{bB}\widetilde{g}_{c[a}\beta_{b]}. \tag{5.40}$$

特别地，再进行一次缩并得到 $\chi^{aA}\chi^{bB}\chi^{cC}\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b v_c = \frac{\partial^2}{\partial p_A\partial p_B}v^C = 0$，即 v^C 是关于 p_A 的一次多项式。对 (5.40) 进一步求导，代入 (5.6)，并进行竖直缩并，得到

$$\chi^{aA}\chi^{bB}\chi^{cC}\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b\widetilde{D}_c v_d = 0.$$

特别地，我们有 $\chi^{aA}\chi^{bB}\chi^{cC}\check{}\eta^d_D\widetilde{D}_a\widetilde{D}_b\widetilde{D}_c v_d = \frac{\partial^3}{\partial p_A\partial p_B\partial p_C}\beta_D = 0$，即 β_D 是关于 p_A 的二次多项式。□

形式为 (5.14) 的向量场 $v^a = v^{A}\check{}\eta^a_A + \beta_A\chi^{aA}$ 也可以写作$v^a = v^a_+ + v^a_0 + v^a_-$，其中

$$v^a_+ = w^{AB}p_B\check{\eta}^a_A + \psi_A{}^{BC}p_Bp_C\chi^{aA}\,, \tag{5.41}$$
$$v^a_0 = v^A\check{\eta}^a_A + \varphi_A{}^Bp_B\chi^{aA}\,, \tag{5.42}$$
$$v^a_- = \alpha_A\chi^{aA}\,. \tag{5.43}$$

关键系数为 w^{AB}、v^A、α_A 和 $\mathring{\psi}$，其余两个系数 $\psi_A{}^{BC}$ 和 $\varphi_A{}^B$ 则由 (5.21) 和 (5.22) 根据其他系数确定。尽管这两种规定并不具有射影不变性，公式 (5.42) 和 (5.41) 却给出了基础对象的良定义提升；也就是说，这些向量场确实与射影类中仿射联络的选取无关（(5.43) 的不变性显而易见）。对于未修改情形，这种无关性分别在 [23, 引理 6.1], 和 [23, 注 6.10] 中得到证明。根据 (5.22)，修正 Φ_{AB} 仅出现在分量 v^a_0 中，显然不会破坏射影不变性。

现在我们可以陈述本节的主要定理了。

定理 5.3. 修改后的 PW 度量的共形 Killing 场与四元组之间存在双射

$$w^{AB} \in \mathcal{E}^{[AB]}(-2), \quad v^A \in \mathcal{E}^A, \quad \alpha_A \in \mathcal{E}_A(2), \quad \mathring{\psi} \in \mathcal{E} \tag{5.44}$$

sa满足条件 (5.16)–(5.20)。局部而言，最后一个条件等价于 to

$$w^{RS}\big(D_{[A}D_{|R}\Phi_{S|B]} + \mathrm{P}_{[A|R}\,\Phi_{S|B]}\big) = 0. \tag{5.45}$$

˜更准确地说，共形 Killing 向量场 $v^a \in \mathcal{E}^a$ 可以唯一分解为

$$v^a = v^a_+ + v^a_0 + v^a_-, \tag{5.46}$$

其中 $\mathcal{L}_k v^a_+ = 2v^a_+$、 $\mathcal{L}_k v^a_- = -2v^a_-$ 和 $\mathcal{L}_k v^a_0 = 0$。这些分量可以表示为提升 (5.41)–(5.43)，其关键系数为

$$\begin{aligned} &w^{AB} = \chi^{aA}\chi^B_b \widetilde{D}_a v^b_+, \quad v^A = \chi^A_b v^b_0, \\ &\alpha_A = \check{\eta}_{aA} v^a_-, \quad \mathring{\psi} = \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{1}{n}\widetilde{D}_b v^b_0 - \mu^a{}_b \widetilde{D}_a v^b_0\right), \end{aligned} \tag{5.47}$$

其余的由 (5.21) 和 (5.22) 给出。

证明。命题的第一部分由命题 5.2 显然可得。

条件 (5.20) 意味着该 1-形式

$$\mathcal{F}(w,\Phi)^R{}_{AR} = \nu^R \Phi_{AR} - w^{RS} D_R \Phi_{SA} \tag{5.48}$$

是恰当的。局部而言，这等价于其闭性。令 (5.48) 的微分为零，并应用 (5.10)、(5.11)、(5.37)，即可得到 (5.45)。

给定向量场 $v^a = v^A \check{\eta}^a_A + \beta_A \chi^{aA}$ 的分解 (5.46)，其中沿着 (5.41)–(5.43)，且其形式为 (5.14)，性质 $\mathcal{L}_k v^a_+ = 2v^a_+$、 $\mathcal{L}_k v^a_- = -2v^a_-$ 和 $\mathcal{L}_k v^a_0 = 0$ 可由 [23,引理 6.4] 得出。（注意，此处起作用的只有相对于 p_A 的齐次次数。）

v^A、 α_A 和 w^{AB} 在 (5.47) 中的表达式显而易见，参见无处不在的关系式 (2.21) 和 $\chi^{aA}\widetilde{D}_a = \frac{\partial}{\partial p_A}$。 $\mathring{\psi}$ 的表达式可利用 (5.42) 中 v^a_0 的形式，通过直接计算加以验证。具体而言，计算可得

$$\widetilde{D}_b v^b_0 = \big(1 + \tfrac{n-1}{n+1}\big) D_R v^R + n\mathring{\psi} \quad \text{and} \quad \mu^a{}_b \widetilde{D}_a v^b_0 = D_R v^R - \varphi_R{}^R.$$

因此，利用 (5.22) 可得 ψ 的公式。 □

对于 $\Phi_{AB} = 0$，函数 ψ 必须为常数，因此我们可以选出 (5.42) 中的特殊向量场 k^a。它与其他各个分量一样，都是共形 Killing 向量场；由此分别得到 [23, 定理 3], 和 [23, 命题 6.5]。特别地，每个分量都仅由 (5.44) 中的一个截面给出。

对于一般的修正，上述分解的各个分量都不一定是共形 Killing 向量场。此外，若分别考察 (5.44) 中的各个来源，相应的提升可能是共形 Killing 向量场，也可能不是。一方面，对于射影 Killing 形式 α_A，或满足 $\mathcal{L}_v \Phi = 0$的无穷小射影对称 v^A，其提升分别具有 $v^a = v^a_-$和 $v^a = v^a_0$的形式，并且是无穷小共形对称，参见条件 (5.18) 和 (5.19)。另一方面，若双向量 w^{AB} 使得 (5.18) 或 (5.20) 的右端不为零，则若没有 v^A或 $\mathring{\psi}$的抵消作用，它就无法提升为无穷小对称。

6. 对称性：特殊情况

命题 5.2 中的条件在一些特殊情形下会大大简化。与第 4 节一样，我们分别关注修正共形扩张对应于射影平坦结构的情形、修正项 Φ_{AB} 属于第一 BGG 算子的像的情形，以及维数最低的情形。在所有这些情形下，我们都尝试确定无穷小对称代数的维数。与第 4 节不同的是，相关细节变得更加技术化，因此我们在第 6.3 节中合并讨论若干种情形。无论如何，我们仍然能够得到一些有趣的部分结果。在此背景下，我们还在第 6.4 节讨论了一个具有共形 Killing 场次极大代数的例子。

6.1. 射影平坦情形。与第 4.1 节一样，我们探讨射影平坦性的一些推论。这些简化是通过将第二 BGG 算子作用于命题 5.2 中的特定条件，并利用 BGG 复形的局部恰当性而得到的。然而，与近似爱因斯坦尺度的情形相比，我们必须处理更复杂的条件，因此需要额外施加一般性假设。

定理 6.1. 考虑一个与射影平坦仿射联络 D_A 及修正项 Φ_{AB} 相关联的修正 PW 度量，并假设 $\mathcal{B}_2(\Phi)$ 具有一般性，其中 $\mathcal{B}_2 : \mathcal{E}_{(AB)}(2) \to \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 是第二 BGG 算子 (A.3)。局部而言，其共形 Killing 向量场与满足下列条件的三元组 $v^A \in \mathcal{E}^A$, $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$ 和 $\mathring{\psi} \in \mathbb{R}$ 之间存在双射

$$\left(D_A D_B v^C + \mathrm{P}_{AB}\, v^C\right)_0 = 0, \tag{6.1}$$

$$\mathcal{L}_v(\mathcal{B}_2(\Phi)) = \mathring{\psi}\mathcal{B}_2(\Phi), \tag{6.2}$$

$$D_{(A}\alpha_{B)} = 0. \tag{6.3}$$

共形 Killing 场空间的维数等于 $d + \frac{1}{2}n(n+1)$，其中 d 是方程 (6.1) 和 (6.2) 的解空间维数，n 是底层射影流形的维数。

$\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的一般性意味着，将该场解释为从映射 $\mathcal{E}^A \to \mathcal{E}_{[AB]C}$ 时，它是单射。回顾一下，条件 (6.1) 表明 v^A 是一个无穷小射影对称。

证明。需要控制的关键条件是 (5.17)–(5.20)。将第二 BGG 算子 (A.10) 作用于 (5.18)，得到 $0 = \left(w^{CR}\,\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABRD}\right)_0$，其中 $\mathcal{B}_2$ 如 (A.3) 所示。这里必须考虑到，w^{AB} 满足 (5.17)，或等价地满足 (5.10)–(5.11)。在平坦情形下，条件 (5.45) 是关键条件的推论，意味着 $w^{RS}\mathcal{B}_2(\Phi)_{ARSD} = 0$。综上，我们有

$$w^{CR}\,\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABRD} = 0.$$

对于一般的 $\mathcal{B}_2(\Phi)$，这意味着 $w^{AB} = 0$，因此条件 (5.18) 和 (5.20) 化简为

$$\left(D_A D_B v^C + \mathrm{P}_{AB}\, v^C\right)_0 = 0, \quad D_A\mathring{\psi} = 0.$$

将第二 BGG 算子 (A.3) 作用于 (5.19)，得到

$$0 = -\mathcal{L}_v(\mathcal{B}_2(\Phi)) + \mathring{\psi}\mathcal{B}_2(\Phi),$$

这里我们用到了 $\mathcal{B}_2$ 与 $\mathcal{L}_v$ 对易，且 ψ 为常数。局部而言，由于 BGG 序列是恰当的，(5.19) 右端是第一 BGG 算子作用于 $\mathcal{E}_A(2)$ 的一个截面所得的像。这保证存在满足 (5.19) 的 $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$，而所有此类截面均由方程 (6.3) 的解参数化。然而，在平坦情形下，解空间的维数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$，见 A.2 节。□

6.2. 特殊修改。这里假设 $\Phi_{AB} = D_{(A}\varphi_{B)}$，对于某个 $\varphi_A \in \mathcal{E}_A(2)$，即 Φ_{AB} 属于第一 BGG 算子 (A.3) 的像。如第 4.2 节开头所述，此情形可归结为标准共形扩展，其无穷小对称性由定理 3] 中的定理 [23，刻画。同样，我们直接从命题 5.2 推导出这一刻画，观察 Φ_{AB} 的影响，并注意到当前类型的修正共形扩张的共形 Killing 场空间，是非修正情形下相应向量空间上的一个仿射空间。

定理 6.2. 将标准 PW 度量修改为加上形如 $\Phi_{AB}=D_{(A}\varphi_{B)}$ 的项，其中 $\varphi_A\in\mathcal{E}_A(2)$。其共形 Killing 场与满足下列条件的三元组 $w^{AB}\in\mathcal{E}^{[AB]}(-2)$、$v^A\in\mathcal{E}^A$ 和 $\alpha_A\in\mathcal{E}_A(2)$ 之间存在双射

$$\big(D_C w^{AB}\big)_0=0,\quad w^{R(C}W_{R(A}{}^{D)}{}_{B)}=0, \tag{6.4}$$
$$\big(D_{(A}D_{B)}v^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C+v^S W_{S(A}{}^C{}_{B)}\big)_0=0, \tag{6.5}$$
$$D_{(A}\alpha_{B)}=0. \tag{6.6}$$

共形 Killing 场的空间维数等于 $d_1+d_2+d_3+1$，其中 d_1、d_2 和 d_3 分别是方程 (6.4)、(6.5) 和 (6.6) 的解空间维数。

证明。直接计算表明，(5.12) 中的双线性算子具有如下形式

$$\mathcal{F}(w,\Phi)^C{}_{AB}=\tfrac12 w^{RC}\big(D_{(A}D_{B)}\varphi_R+\mathrm{P}_{AB}\,\varphi_R-\mathrm{P}_{R(A}\,\varphi_{B)}+W_{R(A}{}^S{}_{B)}\varphi_S\big)+\nu^C D_{(A}\varphi_{B)},$$

其中 $\nu^A=\frac{1}{n-1}D_R w^{RA}$ 如上所述。其无迹部分和迹部分分别出现在 (5.18) 和 (5.20) 的右端，具体为

$$\big(\mathcal{F}(w,\Phi)^C{}_{AB}\big)_0=\tfrac12\big(D_{(A}D_{B)}(w^{RC}\varphi_R)+\mathrm{P}_{AB}(w^{RC}\varphi_R)+(w^{RS}\varphi_R)W_{S(A}{}^C{}_{B)}\big)_0,$$
$$\mathcal{F}(w,\Phi)^R{}_{AR}=2D_A\big(w^{RS}D_R\varphi_S-2\nu^R\varphi_R\big).$$

因此，$v^A=-\frac12 w^{RA}\varphi_R$ 是 (5.18) 的一个特解，所有此类解均由方程 (6.5) 的解参数化。类似地，$\mathring{\psi}=\frac{4}{n+1}(w^{RS}D_R\varphi_S-2\nu^R\varphi_R)$ 是 (5.20) 的一个特解，而所有此类解相差一个加法常数。

利用前面的推导，可以将 (5.19) 的右端整理为

$$-\tfrac12 D_{(A}(\mathcal{L}_v\varphi)_{B)}-\tfrac12\big(\mathcal{F}(w,\Phi)^R{}_{AB}\big)\varphi_R+\tfrac12\varphi_{(A}D_{B)}\mathring{\psi}+\tfrac12\mathring{\psi}D_{(A}\varphi_{B)}.$$

问题项 $\big(\mathcal{F}(w,\Phi)^R{}_{AB}\big)\varphi_R$ 实际上等于 $D_{(A}\gamma_{B)}$，其中 $\gamma_B=\frac12(w^{RS}D_B\varphi_R+\nu^S\varphi_B)\varphi_S$。因此，$\alpha_B=-\frac12(\mathcal{L}_v\varphi)_B-\frac12\gamma_B+\frac12\mathring{\psi}\varphi_B$ 是 (5.19) 的一个特解，而所有此类解均由方程 (6.6) 的解参数化。(6.4) 中的方程正是命题 5.2 中其余的条件。□

6.3. 四维。与第 4.3 节类似，我们考察最低维情形的具体特征。特别是，射影平坦性由 Cotton 张量 Y_{CAB} 的消失所控制。下文计算中的指标分别通过射影体积形式 $\boldsymbol{\epsilon}_{AB}\in\mathcal{E}_{[AB]}(3)$ 及其逆 $\boldsymbol{\epsilon}^{AB}\in\mathcal{E}^{[AB]}(-3)$ 降低和升高。

作为第一个结果，我们证明，对于非平坦扩张，四个构成部分中必有一个消失：

命题 6.3. 对于二维射影结构的非平坦修正共形扩张，其共形 Killing 场与满足以下条件的三元组$v^A\in\mathcal{E}^A$, $\alpha_A\in\mathcal{E}_A(2)$ 和 $\mathring{\psi}\in\mathbb{R}$ 之间存在双射

$$\big(D_A D_B v^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C\big)_0=0, \tag{6.7}$$
$$D_{(A}\alpha_{B)}=-\tfrac12(\mathcal{L}_v\Phi)_{AB}+\tfrac12\mathring{\psi}\,\Phi_{AB}. \tag{6.8}$$

回想一下,条件 (6.7) 表明 v^A 是一个无穷小射影对称 .

证明。满足 (5.17) 的截面 $w^{AB} \in \mathcal{E}^{[AB]}(-2)$ 与满足对应于 (A.1) 的第一 BGG 方程的密度 $w^{AB}\boldsymbol{\epsilon}_{AB} \in \mathcal{E}(1)$ 相对应。其非平凡解必须满足条件 (A.2)，这意味着二维情形下具有射影平坦性。在这种情况下，条件 (5.45) 可写为 $w^{RS}\mathcal{B}_2(\Phi)_{ARSD} = 0$，这意味着 $\mathcal{B}_2(\Phi) = 0$。根据定理 2.5，共形扩张将是平坦的，这与我们的假设矛盾。

因此，w^{AB} 必须恒等为零，命题 5.2 中的关键条件便简化为上文所示的形式。□

如上所述，将适当的关系与相应的 BGG 算子复合，或可得到额外信息。我们继续沿用前一命题的设定，并将第二 BGG 算子 (A.3) 应用于 (6.8)，得到

$$\alpha_{[C}Y_{D]AB} = \mathcal{L}_v(\mathcal{B}_2(\Phi))_{ABCD} - \mathring{\psi}(\mathcal{B}_2(\Phi))_{ABCD},$$

其中我们用到了 (A.5)、$\mathcal{B}_2$ 与 $\mathcal{L}_v$ 可交换这一事实，以及 ψ 为常数这一事实。利用相应的量 $(\star Y)^A = Y_{CDE}\boldsymbol{\epsilon}^{AC}\boldsymbol{\epsilon}^{DE} \in \mathcal{E}^A(-6)$ 和 $\star\mathcal{B}_2(\Phi) = \mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCD}\boldsymbol{\epsilon}^{AB}\boldsymbol{\epsilon}^{CD} \in \mathcal{E}(-4)$，上式可改写为

$$\alpha_R(\star Y)^R = \mathcal{L}_v(\star\mathcal{B}_2(\Phi)) - \mathring{\psi}(\star\mathcal{B}_2(\Phi)). \tag{6.9}$$

在其零点之外，密度 $\star\mathcal{B}_2(\Phi) \in \mathcal{E}(-4)$ 起到射影尺度的作用，因此从该射影类中确定唯一的仿射联络。

与定理 4.3 的情形相比，目前有更多项参与其中，因此完整讨论似乎相当复杂。将范围限制在平坦射影结构的非平坦扩张情形，我们以定理 6.1 的以下具体表述作结：

定理 6.4. 对于二维平坦射影结构的非平坦修正共形扩张，设 D_A 是与尺度 $\star\mathcal{B}_2(\Phi)$ 对应的仿射联络，$R_{AB}{}^C{}_D$ 是其曲率张量。在局部避开 $\star\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的零点集时，共形 Killing 向量场与满足下列条件的对 $v^A \in \mathcal{E}^A$ 和 $\alpha_A \in \mathcal{E}_A(2)$ 之间存在双射

$$D_A D_B v^C + v^S R_{SA}{}^C{}_B = 0, \tag{6.10}$$

$$D_{(A}\alpha_{B)} = 0. \tag{6.11}$$

共形 Killing 场空间的维数等于 $d+3$，其中 d 是 (6.10) 的解空间的维数。

回顾一下，诱导共形结构的平坦性由 $\star\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的消失控制。(6.10) 条件表明，v^A 是 D_A 的无穷小仿射对称性，参见附录 B。

证明。尺度 $\star\mathcal{B}_2(\Phi)$ 相对于 D_A 平行，因此

$$\mathcal{L}_v(\star\mathcal{B}_2(\Phi)) = \tfrac{4}{3}(D_R v^R)(\star\mathcal{B}_2(\Phi)),$$

其中右侧的系数（除此之外并不重要）体现了公式 (2.2) 中的约定。基于这一观察，我们可以轻松比较实际条件与定理 6.1 的条件：

设 $v^A \in \mathcal{E}^A$ 是满足某个 $\mathring{\psi} \in \mathbb{R}$ 的条件 (6.2) 的无穷小射影对称。按照当前的重新表述，该条件意味着 $D_R v^R = \frac{3}{4}\mathring{\psi}$。特别地，$D_R v^R$ 是常数。因此，根据命题 B.1，v^A 是 D_A 的无穷小仿射对称。反过来，设 $v^A \in \mathcal{E}^A$ 是 D_A 的无穷小仿射对称。那么 v^A 是无穷小射影

对称，并且根据命题 B.1，$D_R v^R$ 是常数。因此，对于 $\mathring{\psi} = \frac{4}{3} D_R v^R$，条件 (6.2) 得以满足。其余部分显而易见。□

由平坦情形下 BGG 序列的局部恰当性可知，每个射影尺度在局部都可写成 $\star\mathcal{B}_2(\Phi)$ 的形式，其中 Φ。由此根据定理 6.4 和命题 B.2 可知，平坦射影结构所对应的修正共形扩张的对称代数维数受限如下：

定理 6.5。对于平坦二维射影结构的非平坦修正共形扩张，无穷小共形对称的李代数维数可以是 3 到 9 之间的任意值，但不包括 8。

平坦四维共形结构是平坦射影结构的标准共形扩展，其极大对称代数的维数为 15。事实证明，分裂符号的四维共形结构的对称代数次极大维数为 9，参见 [24, 第 5 节。1]。下文将更详细地讨论这一情形。

6.4. 次极大例子。本节将通过一个非常具体的情形，展示此前得到的一些一般结果。为此，我们选取一个非平坦的修正共形扩张，其无穷小对称代数非平凡，并说明如何将这一（可能相当复杂的）结构归纳为更简单的底层射影术语。有趣的是，具有分裂符号且其共形 Killing 场代数维数为次极大的度量例子，就是修正 PW 度量，参见 [24, 第 5 节1]。最丰富的结构出现在四维情形，本文将在此详细讨论。

考虑度量

$$\overline{g} = \mathrm{d}x^1 \odot \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}x^2 \odot \mathrm{d}p_2 + (x^2)^2\, \mathrm{d}x^1 \odot \mathrm{d}x^1, \tag{6.12}$$

也就是说，这是对平坦 PW 度量作 $\Phi = (x^2)^2\, \mathrm{d}x^1 \odot \mathrm{d}x^1$ 修正。根据命题 2.4，$\overline{g}$ 的 Weyl 曲率为

$$\overline{W} = -2\mathcal{B}_2(\Phi) = -4\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \odot \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,$$

因此，共形扩张并非平坦。根据定理 6.4，$\overline{g}$ 的共形 Killing 向量场由平坦仿射联络的无穷小仿射对称和射影 Killing 形式参数化，它们所成空间的维数分别为 6 和 3。总而言之，共形 Killing 向量场空间的维数为 9。

更准确地说，我们描述其底层来源及相应的提升。无穷小仿射对称和射影 Killing 形式分别具有如下形式，

$$\begin{aligned} v &= (c_1 + c_3 x^1 + c_5 x^2)\partial_{x^1} + (c_2 + c_4 x^1 + c_6 x^2)\partial_{x^2}, \\ \alpha_k &= (c_7 + c_9 x^2)\, \mathrm{d}x^1 + (c_8 - c_9 x^1)\, \mathrm{d}x^2. \end{aligned}$$

其中 $c_1, \ldots, c_9$ 为任意常数。关键方程 (5.19) 的一个特解为

$$\alpha_p = \left(-c_2 x^1 x^2 - \tfrac{1}{2} c_4 (x^1)^2 x^2 - \tfrac{1}{3} c_5 (x^2)^3\right) \mathrm{d}x^1 + \left(\tfrac{1}{2} c_2 (x^1)^2 + \tfrac{1}{6} c_4 (x^1)^3\right) \mathrm{d}x^2,$$

对于常数 $\mathring{\psi} = \frac{4}{3}(c_3 + c_6)$。因此，$\overline{g}$的共形 Killing 场由四元组 w、v、α 和 ψ唯一确定，其中 $w = 0$ 和 $\alpha = \alpha_p + \alpha_k$。根据定理 5.3，它们

可由以下提升描述：

$$\begin{aligned}\overline{v}_0 &= \left(c_1 + c_3x^1 + c_5x^2\right)\partial_{x^1} + \left(c_2 + c_4x^1 + c_6x^2\right)\partial_{x^2} + \\ &\quad + \left((c_3 + 2c_6)p_1 - c_4p_2\right)\partial_{p_1} + \left(-c_5p_1 + (2c_3 + c_6)p_2\right)\partial_{p_2},\\ \overline{v}_- &= \left(c_7 + c_9x^2 - c_2x^1x^2 - \tfrac{1}{2}c_4(x^1)^2x^2 - \tfrac{1}{3}c_5(x^2)^3\right)\partial_{p_1} + \\ &\quad + \left(c_8 - c_9x^1 + \tfrac{1}{2}c_2(x^1)^2 + \tfrac{1}{6}c_4(x^1)^3\right)\partial_{p_2}.\end{aligned}$$

总而言之，修正 PW 度量 (6.12) 的共形 Killing 向量场具有以下形式：$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{v}_-$，其中各项如上所述。

此外，共形 Killing 场的李代数结构由底层数据决定，通常相当复杂。为了阐明当前的例子，我们分别用 $\mathfrak{g}$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}$ 表示无穷小仿射对称与共形对称的代数。进一步用 e_i 和 $\overline{e}_i$ 表示分别对应系数 c_i 的 $\mathfrak{g}$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}$ 的生成元，其中 i 分别取 1 到 6 以及 9。当然，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$，其中约化子代数和幂零子代数分别为

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 &= \langle e_4, e_3 - e_6, e_5\rangle \oplus \langle e_3 + e_6\rangle,\\ \mathfrak{g}_1 &= \langle e_1, e_2\rangle.\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_0$ 的上述分解揭示了其单部分，即 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$，以及中心。事实证明，$\overline{\mathfrak{g}}$ 是一个分次李代数，$\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_0 \oplus \overline{\mathfrak{g}}_1 \oplus \overline{\mathfrak{g}}_2 \oplus \overline{\mathfrak{g}}_3$，其中

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{g}}_0 &= \langle \overline{e}_4, \overline{e}_3 - \overline{e}_6, \overline{e}_5\rangle \oplus \langle \overline{e}_3 + \overline{e}_6\rangle,\\ \overline{\mathfrak{g}}_1 &= \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2\rangle, \quad \overline{\mathfrak{g}}_2 = \langle \overline{e}_9\rangle, \quad \overline{\mathfrak{g}}_3 = \langle \overline{e}_7, \overline{e}_8\rangle.\end{aligned}$$

子代数 $\overline{\mathfrak{g}}_0$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 同构，而修改的效果体现在 $\overline{\mathfrak{g}}$ 的幂零部分中。尽管如此，$\overline{\mathfrak{g}}_0$ 对 $\overline{\mathfrak{g}}_1$ 的作用，以及对 $\overline{\mathfrak{g}}_2 \oplus \overline{\mathfrak{g}}_3$ 的作用，分别对应于 $\mathfrak{g}_0$ 对 $\mathfrak{g}_1$ 的作用，以及对射影 Killing 形式的作用。共形侧由此得到的精细结构先验上并不显而易见，而是作为这一非常具体的修改所带来的结果出现。此外，注意到 $\overline{\mathfrak{g}}$ 与 14 维例外单李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的分裂实形式中的一个抛物子代数同构，具体而言，是与短根相对应的那个抛物子代数。

注 6.6。$\mathfrak{g}_2$ 的一个抛物子代数作为度量 (6.12) 的共形无穷小对称性的李代数出现，这一现象有如下几何解释。四维分裂号差共形流形的自对偶零平面丛上有一个自然的秩为 2 的（扭量）分布。当且仅当 Weyl 张量的自对偶部分非平凡时，该分布局部上是一个 (2, 3, 5) 分布，参见 [2]。在这一对应关系下，共形结构的无穷小对称性提升为扭量分布的无穷小对称性，因此，前一种结构的对称代数可识别为后一种结构的对称代数的一个子代数。Cartan 的经典结果表明，(2, 3, 5) 分布的极大对称代数是例外单李代数 $\mathfrak{g}_2$，而次极大对称代数的维数为 7。现在，(6.12) 的 Weyl 张量自对偶部分非平凡，其共形对称代数的维数为 9。因此，(6.12) 的无穷小共形对称性的李代数必为 $\mathfrak{g}_2$ 的一个子代数。最后，注意到 $\mathfrak{g}_2$ 中恰有两个 9 维子代数，即两个极大抛物子代数。

修正 PW 度量 (6.12) 也是一种 pp 波、对称且爱因斯坦的度量。(6.12) 的共形类中的所有爱因斯坦度量都对应于以下形式的尺度：$\sigma =$

$c_1x_1+c_2x_2+c_3$，其中 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$。它们构成一个 3 维空间，并实现了定理 4.3 中列出的可能性之一。

7. Ambient metric and Q-curvature

对于修正共形 PW 度量，存在一种自然的几何构造来构造 Fefferman–Graham 环境度量。与 [22], 中研究的未修正情形相比，修正张量不会造成严重的复杂性。在这一背景下，我们也对更一般的修正作了一些初步观察，并将在本节末尾对此进行评论。

Fefferman–Graham 环境构造的一般设定如下，参见 [18]。$\widetilde{\ }$设光滑流形 M 上的一个共形类由度量 g表示。环境流形 M 在局部由另外两个坐标描述，记为 $t\in\mathbb{R}_+$ 和 $\rho\in\mathbb{R}$；前者参数化共形类中的度量，后者表示本质上新增的维度。M 上环境度量的标准形式为

$$\mathbf{g}=2\rho\,\mathrm{d}t\odot\mathrm{d}t+2t\,\mathrm{d}t\odot\mathrm{d}\rho+t^2g(\rho),\tag{7.1}$$

$\widetilde{\ }$其中 $g(\rho)$ 是定义在 M 上的光滑单参数度量族，且 $g(0)=g$ 是共形类中的一个代表度量。这类度量的一个关键特征是，它们相对于 t具有 2 次齐次性。Fefferman–Graham 环境度量是形如 (7.1) 的 Ricci 平坦度量。这类度量是否存在是一个微妙的问题。对于给定的 g，通常通过对 $g(\rho)$ 关于 ρ 进行泰勒展开，迭代构造度量 (7.1)，从而使 Ricci 平坦条件在 $\rho=0$时渐近地成立。在偶数维中，这一构造在有限阶处受到所谓 Fefferman–Graham 张量的阻碍；该张量是一个共形不变张量，在 4 维时即为 Bach 张量。

对于射影结构的修正共形扩张，环境度量存在，且具有可以想象到的最简单形式。具体而言，项 $g(\rho)$ 关于 ρ 呈线性，且 g 在全局上是 Ricci 平坦的，而不仅仅是渐近 Ricci 平坦：

定理 7.1. 设 $\overline{g}$ 是一个修正 PW 度量，其 Schouten 张量为 P，并设 t、ρ 是$\widetilde{\ }$环境流形上的附加坐标。那么

$$\mathbf{g}=2\rho\,\mathrm{d}t\odot\mathrm{d}t+2t\,\mathrm{d}t\odot\mathrm{d}\rho+t^2\left(\overline{g}+2\rho\,\overline{\mathrm{P}}\right)\tag{7.2}$$

是 $\overline{g}$的共形类的全局 Ricci 平坦 Fefferman–Graham 环境度量。

修正 PW 度量的里奇张量（或 Schouten 张量）是底层仿射联络的里奇张量（或 Schouten 张量）的拉回，与修正张量 Φ无关，见第 2.2 节。因此，在上述局部坐标（x^A、p_A）中，$\overline{g}$的 Schouten 张量具有如下形式：$\mathrm{P}=\frac{1}{n-1}\mathrm{Ric}_{AB}\,\mathrm{d}x^A\odot\mathrm{d}x^B$，其中 Ric_{AB}是底层仿射联络的里奇张量，n 是相应流形的维数。

证明。度量 (7.2) 的标准形式显而易见，因此只需检验其 Ricci 平坦性。利用 [18, 公式 (3.17)] 以及刚才提到的 $\overline{g}$ 的里奇张量性质，即可直接完成检验。或者，度量 g 可以构造为与初始射影结构相对应的托马斯环境联络的修正 PW 度量。于是，g 的 Ricci 平坦性可由托马斯环境联络的 Ricci 平坦性推出。具体细节如下：

令 $\mathcal{C}$ 和 ∇ 分别为与底层射影结构相关联的托马斯环境锥和联络。修正张量 $\Phi\in\mathcal{E}_{(AB)}$(2) 提升为一个对称的

二阶张量 Φ，其定义在 $\mathcal{C}$ 上，并且相对于 $\mathcal{C}$ 上的标准 $\mathbb{R}_+$-作用是 2 次齐次的。最后，∇ 的 $\hat{\Phi}$-修正 PW 度量通过与 [22, 定理 2] 的证明中相同的坐标变换，被识别为 (7.2)。□

另一个相关概念是 Q-曲率。虽然它与某个特定度量相关，而非与共形类相关，但它是共形几何中的一个重要量，参见 [6], [13], [19]。Fefferman–Graham 环境度量的显式而简洁的形式使得可以计算 Q-曲率，而这通常是一项相当困难的工作。

为此，需要分析 $\mathbf{\Delta}^n \log(t)$，其中 $\mathbf{\Delta}$ 是与上述 (7.2) 相关联的环境拉普拉斯算子，而 t 如上所述。在未修改情形下，很容易得出 $\mathbf{\Delta}\log(t) = 0$，因此任意 PW 度量的 Q-曲率均为零，参见 [22, 定理 3]。查阅该参考文献中的细节可知，修正张量 Φ 并不起任何作用。因此我们得到以下推广：

定理 7.2。任意修正 PW 度量的 Q-曲率均为零。

注 7.3. 修正 PW 度量属于所谓的零 Ricci Walker 度量这一类，文献 [3], 讨论了这类度量，并在一些有趣的情形下证明了显式环境度量的存在性。修正 PW 度量也构成了文献 [9], 研究的更一般修正的一类特例，其中尤其包括 4 维自对偶 Walker 度量。自对偶共形度量的 Bach 张量，即 Fefferman–Graham 阻碍张量，恒等于零。尽管目前尚无适用于这一类度量的一般性关联环境度量的几何构造，但可以针对特定情形给出显式公式。

为便于说明，我们允许在底层射影流形上引入由光滑函数$\alpha \in \mathcal{E}$ 参数化的额外修正，并由注 2.8 中的特定竖直场 $k^a \in \mathcal{E}^a$ 决定，即标准 PW 度量 $\widetilde{g}_{ab}$的相似变换。因此，我们将 (2.4) 推广为

$$\overline{\overline{g}}_{ab} := \widetilde{g}_{ab} + \Phi_{ab} + \alpha\, k_{(a}k_{b)}. \tag{7.3}$$

形如 (7.3) 的特定修正也出现在 [15] 中。当 $\widetilde{g}$ 是平坦 PW 度量时，$\Phi = 0$ 和 $\alpha = 1$ 给出超双曲 Fubini–Study 度量，参见 [5], [16]。

命题 7.4. 设 $\overline{g}$ 是某个 $\overline{\alpha} \in \mathcal{E}$ 下的额外修正 PW 度量 (7.3)，定义在一个带有 Schouten 张量 P 的 4 维流形上，并设 t、ρ 是环境流形上的附加坐标。那么

$$\mathbf{g} = 2\rho\, \mathrm{d}t \odot \mathrm{d}t + 2t\, \mathrm{d}t \odot \mathrm{d}\rho + t^2 \left(\overline{\overline{g}} + 2\rho \overline{\overline{\mathrm{P}}} + \rho^2 \big(\alpha^2 \overline{\overline{g}} + 2\alpha\, (\mathrm{d}\alpha) \odot k \big) \right) \tag{7.4}$$

它是共形类 $\overline{g}$ 的全局 Ricci 平坦的 Fefferman–Graham 环境度量。此外，度量 $\overline{g}$ 的 Q-曲率为 $Q = -56\alpha^2$。

同样，度量 (7.4) 处于标准形式，因此只需验证其里奇平坦性。这是直接借助计算系统 MATHEMATICA 完成的。由此可知，表达式 (7.4) 并非唯一：在内层括号中加入 $(\Delta\alpha)\, \overline{\overline{g}} - 2\alpha\, (\mathrm{d}\alpha) \odot k$, 的任意常数倍，其中 Δ 是 $\widetilde{g}$ 的拉普拉斯算子，也能得到一个 Ricci 平坦解。

Appendix A. Projective BGG operators

BGG 理论是一个概念框架，用于理解抛物几何中有关不变算子及相应方程的诸多问题。关于一般性介绍，请参阅开创性论文 [12] 和 [8]。BGG 算子以序列的形式出现，其中

第一个算子在应用中最为常见。相应方程的解往往具有重要的几何意义。共形几何中的典型例子与近似爱因斯坦尺度和无穷小对称性有关。第 3–6 节研究了这些问题，并将相应的超定方程化为一组射影不变方程，其中射影一阶 BGG 算子发挥着关键作用。

每个 BGG 序列都由一个具体的拖拉子丛及相关的外协变微分确定，据此可以推导出这些算子的显式描述。在底层，序列的类型由第一个算子的源丛编码。在局部平坦情形下，BGG 序列构成复形，并且局部恰当。此外，第一 BGG 方程的解构成一个向量空间，其维数等于背景拖拉子丛的秩。

本文需要用到若干射影 BGG 序列的前两个算子。我们将这些算子记为 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$，并注意它们始终与序列的实际类型相关。每个序列都对应于标准拖拉子丛 $\mathcal{T}$ 及其对偶 $\mathcal{T}^*$的某个张量积。标准拖拉子丛与群 $SL(n+1,\mathbb{R})$ 的标准作用相关联；该群是维数为 n 的（定向）射影球面的射影对称性李群。特别地， $\mathcal{T}$ 的秩为 $n+1$。

以下各小节遵循相同的模式。首先，我们说明序列的类型，并给出前两个算子的显式公式。其次，将这两个算子复合，可得第一 BGG 方程存在解的可积条件。第三，我们计算局部平坦情形下该方程解空间的维数。有些算子取决于射影流形的维数 n 。这是由于低维情形下存在自然同构；在底层层面上，这些同构分别由射影体积形式 $\boldsymbol{\epsilon}_{A_1\dots A_n} \in \mathcal{E}_{[A_1\dots A_n]}(n+1)$ 及其对偶 $\boldsymbol{\epsilon}^{A_1\dots A_n} \in \mathcal{E}^{[A_1\dots A_n]}(-n-1)$ 给出。

A.1. $\mathcal{T}^*$的序列。相应的 BGG 序列起始如下：

$$\mathcal{E}(1) \xrightarrow{\mathcal{B}_1} \mathcal{E}_{(AB)}(1) \xrightarrow{\mathcal{B}_2} \mathcal{E}_{[CA]B}(1) \longrightarrow \cdots$$

其中

$$\mathcal{B}_1(\tau)_{AB} = (D_A D_B + \mathrm{P}_{AB})\tau, \qquad \mathcal{B}_2(T)_{CAB} = D_{[C}T_{A]B}. \tag{A.1}$$

复合得到

$$(\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{B}_1)(\tau)_{CAB} = -\tfrac{1}{2}\big(W_{AB}{}^R{}_C D_R\tau - Y_{CAB}\tau\big). \tag{A.2}$$

对于 $n=2$，(A.2) 的消失意味着 $Y_{CAB}=0$，即局部平坦性。在局部平坦情形下， $\mathcal{B}_1$ 的解空间维数等于

$$\operatorname{rank}\mathcal{T}^* = n+1.$$

A.2. $\wedge^2\mathcal{T}^*$的序列。相应的 BGG 序列开头如下：

$$\mathcal{E}_B(2) \xrightarrow{\mathcal{B}_1} \mathcal{E}_{(AB)}(2) \xrightarrow{\mathcal{B}_2} \mathcal{E}_{[AB][CD]}(2) \longrightarrow \cdots$$

其中

$$\mathcal{B}_1(\varphi)_{AB} = D_{(A}\varphi_{B)}, \qquad \mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCD} = \mathrm{Proj}_{\boxplus}\big(D_A D_C \Phi_{BD} + \mathrm{P}_{AC}\,\Phi_{BD}\big). \tag{A.3}$$

这里，$\mathrm{Proj}_{\boxplus}$ 表示投影到与所示杨图相对应的“窗口”对称子空间，即 $\mathcal{E}_{[AB][CD]}(2)$ 中任意三个指标上的斜对称化均为零的子空间。换言之，经过简短计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2(\Phi)_{ABCD} = \mathrm{Proj}_{[AB][CD]}\big(&D_A D_C \Phi_{BD} + \mathrm{P}_{AC}\,\Phi_{BD} + \\ &+ \tfrac{1}{4} W_{AB}{}^{R}{}_{C} \Phi_{DR} - \tfrac{1}{4} W_{CD}{}^{R}{}_{A} \Phi_{BR}\big),\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $\mathrm{Proj}_{[\cdots][\cdots]}$ 表示对括号内的指标进行反对称化。该复合给出

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{B}_1)(\varphi)_{ABCD} = \mathrm{Proj}_{[AB][CD]}\big(&-\tfrac{1}{2} W_{AB}{}^{R}{}_{C} D_{[R}\varphi_{D]} - \tfrac{1}{2} W_{CD}{}^{R}{}_{A} D_{[R}\varphi_{B]} + \\ &+ \tfrac{1}{4} W_{AB}{}^{R}{}_{C} D_{(D}\varphi_{R)} - \tfrac{1}{4} W_{CD}{}^{R}{}_{A} D_{(B}\varphi_{R)} - \\ &- \tfrac{1}{2}(D_A W_{CD}{}^{R}{}_{B})\varphi_R - \tfrac{1}{2}\varphi_C Y_{DAB}\big).\end{aligned} \tag{A.5}$$

对于 $n = 2$，(A.5) 的消失意味着 $\varphi_{[C} Y_{D]AB} = 0$。此条件可表示为 $\varphi_A = f(\star Y)_A$，其中 $(\star Y)_A := Y_{ABC}\boldsymbol{\epsilon}^{BC}$，对某个 $f \in \mathcal{E}(5)$ 而言。在局部平坦情形下，$\mathcal{B}_1$ 的解空间维数等于

$$\operatorname{rank} \wedge^2 \mathcal{T}^* = \frac{1}{2} n(n+1).$$

A.3. $\mathcal{T}$的序列。相应的 BGG 序列始于 $\mathcal{E}^A(-1)$。对于 $n = 2$，我们有如下识别 $\mathcal{E}^A(-1) \cong \mathcal{E}_A(2)$，因此该序列与 A.2 节中的序列一致。对于 $n \geq 3$，该序列如下：

$$\mathcal{E}^B(-1) \xrightarrow{\mathcal{B}_1} \big(\mathcal{E}_A{}^B(-1)\big)_0 \xrightarrow{\mathcal{B}_2} \big(\mathcal{E}_{[CA]}{}^B(-1))\big)_0 \longrightarrow \cdots$$

其中

$$\mathcal{B}_1(\xi)_A{}^B = \big(D_A \xi^B\big)_0, \qquad \mathcal{B}_2(\Xi)_{CA}{}^B = \big(D_{[C}\Xi_{A]}{}^B\big)_0. \tag{A.6}$$

该复合给出

$$(\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{B}_1)(\xi)_{CA}{}^B = \tfrac{1}{2} W_{CA}{}^B{}_R \xi^R. \tag{A.7}$$

在局部平坦情形下，$\mathcal{B}_1$ 的解空间维数等于

$$\operatorname{rank} \mathcal{T} = n + 1.$$

A.4. $\wedge^2\mathcal{T}$ 的序列。相应的 BGG 序列以 $\mathcal{E}^{[AB]}(-2)$ 开始。对于 n =2，我们有如下对应关系：$\mathcal{E}^{[AB]}(-2) \cong \mathcal{E}(1)$，因此该序列与 A.1 节中的序列一致。对于 $n = 3$，我们有如下对应关系：$\mathcal{E}^{[AB]}(-2) \cong \mathcal{E}_A(2)$，因此该序列与 A.2 节中的序列一致。对于 $n \geq 4$，序列如下：

$$\mathcal{E}^{[AB]}(-2) \xrightarrow{\mathcal{B}_1} \big(\mathcal{E}_D{}^{[AB]}(-2)\big)_0 \xrightarrow{\mathcal{B}_2} \big(\mathcal{E}_{[CD]}{}^{[AB]}(-2)\big)_0 \longrightarrow \cdots$$

其中

$$\mathcal{B}_1(w)_D{}^{AB} = \big(D_D w^{AB}\big)_0, \qquad \mathcal{B}_2(V)_{CD}{}^{AB} = \big(D_{[C} V_{D]}{}^{AB}\big)_0. \tag{A.8}$$

组合得到

$$(\mathcal{B}_2 \circ \mathcal{B}_1)(w)_{CD}{}^{AB} = -\big(W_{CD}{}^{[A}{}_R w^{B]R}\big)_0. \tag{A.9}$$

请注意，对于 $n=3$，第一个算子实际上与 (A.8) 中的算子相同（而第二个不同），且对于任意 w^{AB}，表达式 (A.9) 恒为零。在局部平坦情形下， $\mathcal{B}_1$ 的解空间维数等于

$$\operatorname{rank}\wedge^2\mathcal{T}=\frac{1}{2}n(n+1).$$

A.5. （$\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{T}$）$_0$的序列。相应的 BGG 序列起始如下 s:

$$\mathcal{E}^C\xrightarrow{\mathcal{B}_1}\big(\mathcal{E}_{(AB)}{}^C\big)_0\xrightarrow{\mathcal{B}_2}\big(\mathcal{E}_{[DA]B}{}^C\big)_0\longrightarrow\cdots$$

其中

$$\mathcal{B}_1(v)_{(AB)}{}^C=\big(D_AD_Bv^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C\big)_0,\qquad \mathcal{B}_2(V)_{DAB}{}^C=\big(D_{[D}V_{A]B}{}^C\big)_0. \tag{A.10}$$

在射影无穷小对称的语境下，我们还将使用第一算子的如下修改形式：

$$\mathcal{B}_1^{\#}(v)_{AB}{}^C=\big(D_AD_Bv^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C+v^RW_{R(A}{}^C{}_{B)}\big)_0, \tag{A.11}$$

可以验证， $\mathcal{B}_1$（v）$_{AB}{}^C$和 $\mathcal{B}_1^{\#}$（v）$_{AB}{}^C$确实在下指标上是对称的。事实上， $\mathcal{B}_2$ 的目标空间是 $\big(\mathcal{E}_{[DA]B}{}^C\big)_0$ 的子空间，由这类张量场组成，并且它们在下指标上进行反对称化后为零。复合得到

$$(\mathcal{B}_2\circ\mathcal{B}_1^{\#})(v)_{DAB}{}^C=\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_vW)_{DA}{}^C{}_B, \tag{A.12}$$

其中， $\mathcal{L}_v$ 表示沿向量场 v^A方向的李导数。在局部平坦情形下， $\mathcal{B}_1$ 的解空间维数等于

$$\operatorname{rank}(\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{T})_0=n(n+2).$$

AppendixB. Projective and affine infinitesimal symmetries

本节的两部分分别讨论仿射联络的仿射无穷小对称和射影无穷小对称。以下结果主要与第 6.3 节相关。

B.1. 射影对称中的仿射对称。设 D_A 是一个特殊无挠仿射联络， $R_{AB}{}^C{}_D$ 是其曲率张量。设 P $_{AB}$ 和 $W_{AB}{}^C{}_D$ 分别是 D_A 的射影 Schouten 张量和 Weyl 张量。这些张量之间的关系为

$$W_{AB}{}^C{}_D=R_{AB}{}^C{}_D+\mathrm{P}_{AD}\,\delta^C_B-\mathrm{P}_{BD}\,\delta^C_A. \tag{B.1}$$

众所周知，向量场 $v^A\in\mathcal{E}^A$ 是仿射联络 D_A 的仿射无穷小对称，当且仅当它满足

$$D_AD_Bv^C+v^SR_{SA}{}^C{}_B=0 \tag{B.2}$$

向量场 $[D_A]$ 是射影结构 $[D_A]$ 的射影无穷小对称，当且仅当它满足

$$\big(D_AD_Bv^C+\mathrm{P}_{AB}\,v^C+v^RW_{R(A}{}^C{}_{B)}\big)_0=0. \tag{B.3}$$

显然，任何仿射无穷小对称也是射影无穷小对称。反过来的情形如下所述：

命题 B.1. 设 $v^A\in\mathcal{E}^A$ 是射影结构 $[D_A]$的射影无穷小对称。那么， v^A 是代表特殊仿射联络 D_A 的仿射无穷小对称，当且仅当散度 D_Rv^R 是常数，即 $D_AD_Rv^R=0$。

证明. 等价关系的“仅当”方向可直接由 (B.2) 得出。对于“当”方向，我们假设 v^A 满足 (B.3)，且 $\psi \coloneqq \frac{1}{n} D_R v^R$ 是常函数，并要证明 (B.2) 成立。我们分别将 (B.2) 左侧分解为反对称部分、对称无迹部分和迹部分。反对称部分显然为零。条件 (B.3) 表明，对称无迹部分也为零。剩下只需证明迹也为零。简单计算可知，任意一个迹都是 $\mathrm{P}_{AR}\, v^R$ 的非零常数倍。也就是说，(B.2) 成立当且仅当 $\mathrm{P}_{AR}\, v^R = 0$。

方程（B.3）是超定的，其延拓已在 [23, 节6]中计算。除了 v^A 和 ψ之外，还需要两个额外变量才能构成封闭系统，即，

$$\phi_A^B := D_A v^B - \delta_A^B \psi, \qquad \beta_A := -\tfrac{1}{n+1} D_A D_R v^R - \mathrm{P}_{AR}\, v^R. \tag{B.4}$$

现在，（B.3）的解恰好就是延拓系统的解，该系统见[23, 公式（71）]，此处不再重述。根据 ψ 为常数这一假设，（B.4）中的第二个量为 $\beta_A = -\mathrm{P}_{AR}\, v^R$。将所有结果代入延拓系统的第三个方程，经过一些计算可得 $\mathrm{P}_{AR}\, v^R = 0$ 。□

B.2. 二维中的仿射对称。仿射无穷小对称性代数的维数刻画是一个经典课题。已知对于二维流形上的仿射联络，所有不超过 6 的维数（除 5 以外）都可能出现，见[17] 及其中的参考文献。事实上，这些维数都可以如下实现：

命题 B.2. 二维流形上的仿射联络的仿射无穷小对称性所构成的李代数，其维数可以是小于或等于 6 的任意数，但不能是 5。这些情况均可由特殊的射影平坦仿射联络实现。

证明. 设 (x^1, x^2) 为一组局部坐标，并考虑通过射影变换 (2.1) 从平坦仿射联络得到的仿射联络族，其中

$$\Upsilon = (a_2 (x^1)^2 + a_1 x^1 + a_0)\, \mathrm{d}x^1 + (b_1 x^2 + b_0)\, \mathrm{d}x^2,$$

其中 a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 为实参数。也就是说，我们考虑克里斯托费尔符号如下的联络族：

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\Gamma_1{}^1{}_1 = \Gamma_1{}^2{}_2 = \Gamma_2{}^2{}_1 = a_2 (x^1)^2 + a_1 x^1 + a_0, \\ \tfrac{1}{2}\Gamma_2{}^2{}_2 = \Gamma_1{}^1{}_2 = \Gamma_2{}^1{}_1 = b_1 x^2 + b_0, \qquad \Gamma_2{}^1{}_2 = \Gamma_1{}^2{}_1 = 0. \end{gathered}$$

取参数的特定值，可得到以下所有可能情况：
(0) 参数取一般值时，不存在仿射对称性。(1) 对于 $a_2 = 0$，对称代数的维数为 1。(2) 对于 $a_2 = b_1 = 0$，对称代数的维数为 2。(3) 对于 $a_2 = b_1 = b_0 = 0$，对称代数的维数为 3。(4) 对于 $a_2 = b_1 = b_0 = a_1 = 0$，对称代数的维数为 4。(6) 所有参数均为零时，即对于平坦联络，对称代数的维数为 6。

利用计算系统 Maple 检验了里奇张量的对称性，并生成了仿射对称代数。□

References

[1] Z. Afifi. 仿射连通空间的黎曼扩张。 *Q. J. Math.*, 5:312–320, 1954. [2] D. An 和 P. Nurowski. 滚动物体的扭量空间。第 1–22 页，2012. [3] I. M. Anderson、T. Leistner、A. Lischewski 和 P. Nurowski. 共形沃克度量与线性费弗曼–格雷厄姆方程。 *arXiv:1609.02371*, 第 1–37 页，2016. [4] T. Bailey、M. Eastwood 和 A. Gover. 共形、射影及相关结构的托马斯结构丛。 *Rocky Mt. J. Math.*, 24(4):1191–1217, 1994. [5] G. Bor、L. H. Lamoneda 和 P. Nurowski. 舞蹈度量、G_2-对称性与射影滚动。*arXiv:1506.00104*, 第 1–49 页，2015. [6] T. P. Branson. *The functional determinant*, 第 4 卷，收录于 *Lecture Notes Series*。首尔国立大学数学研究所全球分析研究中心，首尔，1993. [7] M. Brozos-V´azquez、E. Garc´ıa-R´ıo、P. Gilkey、S. Nikˇcevi´c 和 R. V´azquez-Lorenzo. 沃克流形的几何。 *Synth. Lect. Math. Stat.*, 2(1):1–179, 2009. [8] D. M. J. Calderbank 和 T. Diemer. 微分不变量与弯曲的伯恩斯坦–盖尔范德–盖尔范德序列。 *J. für die reine und Angew. Math.*, 2001(537):67–103, 2001. [9] E. Calvi˜no-Louzao、E. Garc´ıa-R´ıo、P. Gilkey 和 R. V´azquez-Lorenzo. 修正黎曼扩张的几何。 *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2107):2023–2040, 2009. [10] A. ˇCap. 抛物几何的无穷小自同构与变形。 *J. Eur. Math. Soc.*, 10 2 415 437, 2008 ( ): – .

[11] ¨ *arXiv:2301.03217* A. ˇ

[12] ´ *Ann. Math.* 154 1 97

Cap、T. Mettler. 余切丛上诱导的超伪凯勒爱因斯坦度量。A. ˇCap、J. Slovak 和 V. Souˇcek. 伯恩斯坦–盖尔范德–盖尔范德序列。 , ( ): –113, 2001.[13] S.-Y. A. Chang、M. Eastwood、B. Orsted 和 P. C. Yang. 什么是 Q-曲率？ *Acta Appl. Math.*, 102 2 3 119 125, 2008 (-): – . [14] A. Derdzinski. III 型里奇平坦自对偶中性沃克四维流形的非紧性与最大可动性。 *Q. J. Math.*, 62(2):363–395, 2009. [15] M. Dunajski 和 T. Mettler. 四维射影曲面上的规范理论与反自对偶爱因斯坦度量。 *J. Geom. Anal.*, 28(3):2780–2811, 2018. [16] M. Dunajski 和 A. Waterhouse. 爱因斯坦度量、射影结构与 $SU(\infty)$ Toda 方程。*J. Geom. Phys.*, 147(April):103523, 2019. [17] I. P. Egorov. 广义微分几何空间中的运动（俄文）。Itogi Nauki Tekh., Ser. Algebra, Topologiya, Geom. 1965, 375-428, 1967. [18] C. Fefferman 和 C. R. Graham. 环境度量。 *Ann. Math. Stud.*, 第 v + 113 页，2012 年 10 月。[19] C. Fefferman 和 K. Hirachi. 在共形几何与 CR几何中构造 Q-曲率的环境度量。 *Math. Res. Lett.*, 10(5-6):819–831, 2003. [20] A. R. Gover 和 J. ˇSilhan. 微分形式上的共形 Killing 方程——延拓及应用。*Differ. Geom. its Appl.*, 26(3):244–266, 2008. [21] M. Hammerl、K. Sagerschnig、J. ˇSilhan、A. Taghavi-Chabert 和 V. ˇZ´adn´ık. 从射影到共形的费弗曼型构造。 *Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl.*, 13(081):1–33, 2017. [22] M. Hammerl、K. Sagerschnig、J. ˇSilhan、A. Taghavi-Chabert 和 V. ˇZ´adn´ık. Patterson–Walker 度量的 Fefferman–Graham 环境度量。 *Bull. London Math. Soc.*, 50(2):316–320, 2018. [23] M. Hammerl、K. Sagerschnig、J. ˇSilhan、A. Taghavi-Chabert 和 V. ˇZ´adn´ık. 共形帕特森–沃克度量。 *Asian J. Math.*, 23(5):703–734, 2019. [24] B. Kruglikov 和 D. The. 抛物几何中的间隙现象。

J. fur die Reine und Angew. , ( ): –

Math. 2017 723 153 215, 2017

. [25] E. Patterson 和 A. Walker. 黎曼扩张。 *Q. J. Math.*, 3(1):19–28, 1952. [26] E. M. Patterson. 具有凯勒度量的黎曼扩张。 , ( ): – . [27] A. Taghavi-Chabert. 偶数维中的纯旋量、内禀挠率与曲率。

Differ. Geom. its , : – .

Appl. 46 164 203, 2016

[28] A. G. Walker. 非黎曼空间的黎曼扩张。意大利差分几何国际会议，1953 年 9 月 20–26 日，第 64–70 页，1954。

M. H.: University of Applied Sciences Wiener Neustadt, Austria
K. S.: Center for Theoretical Physics PAS Al. Lotników 32/46 ,,

02-668 Warszawa Poland ,,,,,
J. Š.: Masaryk University Faculty of Science Kotlářská 2 61137 Brno Czech Republic
V. Z: Masaryk University Faculty of Education Poříčí 31 60300 Brno Czech Republic ,,,,*Email address*:

matthiasrh@gmail.com, kat.sagerschnig@gmail.com, silhan@math.muni.cz, zadnik@mail.muni.cz