arXiv:2301.04247v1 [math.OA] 10 Jan 2023

投射希尔伯特模与序列逼近

Lawrence G. Brown 和 Huaxin Lin

2023年1月12日

摘要

我们证明，当 A 是一个可分 C^*-代数时，每个可数生成的希尔伯特A-模都是投射的（以有界模映射作为态射）。我们还研究了有界模映射的近似延拓。在 A 是一个具有严格比较的 σ含幺简单C^*-代数，且拟迹上的每个严格正下半连续仿射函数都可以实现为 Cuntz 半群中某个元素的秩的情况下，我们证明：当且仅当 A 具有稳定秩一时，Cuntz 半群才与可数生成希尔伯特 A-模的酉等价类相同。

1 引言

我们研究 C^*-代数 A. 上的希尔伯特模。若希尔伯特 A -模 H 满足如下条件，则称其为投射的（以有界模映射作为态射）：对于任意希尔伯特 A-模 H_1 和 H_2，任意有界模映射 $\varphi\colon H \to H_1$ 以及任意有界满模映射 $s\colon H_2 \to H_1$，总存在有界模映射 $\psi\colon H \to H_2$，使得 $\varphi = s \circ \psi$. 。容易看出，当A 是含幺 C^*-代数时，由 n 个 A 的直和 $A^{(n)}$ 是投射希尔伯特 A-模。然而，对于非含幺 C^*-代数，这一结论是否成立尚不清楚。可以观察到，对于非含幺 C^*-代数 A，它自身并非代数有限生成的 A-模。数十年来，C^*-代数 A 上投射希尔伯特模的刻画似乎一直未能解决。另一方面，已有证据表明，大多数可数生成希尔伯特模都是投射的。本文将证明，对于任意可分 C^*-代数 A，每个可数生成希尔伯特 A-模都是投射的。

本文旨在对可数生成的希尔伯特 A-模进行分类。文献 [11] 证明，当 A 具有稳定秩一时，希尔伯特 A-模的酉等价类由 A. 的 Cuntz 半群决定。人们或许更倾向于借助某种维数函数，对希尔伯特 A-模作出更具量化性的描述。事实上，若 A 是一个可分的简单C^*-代数，且其 Cuntz 半群中的纯非紧元素由其拟迹上的严格正下半连续仿射函数决定，那么人们希望用这些函数来描述那些非代数有限生成的希尔伯特 A-模。我们证明，在这种情况下，可数生成希尔伯特 A-模的 Cuntz 等价类与酉等价类相同，当且仅当 A 的迹近似振荡为零；等价地，在这种情况下，A 具有稳定秩一。这是对上文提及的文献 [11] 中定理的一个部分逆命题。

在 [33] 中研究了内射希尔伯特 A-模。如果 A 不是 AW^*-代数，那么 A 本身就不是内射希尔伯特 A-模（以有界模映射作为态射）（见 [33] 中的定理 3.14）。即使我们只考虑具有伴随的有界模映射，内射希尔伯特模也寥寥无几。[33] 中证明，可数生成希尔伯特 A-模是 *-内射的，当且仅当它是正交补。设 H 是一个可数生成希尔伯特A-模。假设 $H_0 \subset H_1$ 是希尔伯特 A-模，且 $\varphi\colon H_0 \to H$ 是一个有界模

映射。正如我们提到的，φ 可能无法延拓为从 H_1 到 $H.$ 的有界模映射。不过，我们证明可以找到一列有界模映射 $\varphi_n : H_1 \to H$，满足 $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$，使得对所有 $x \in H_0$，$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| = 0$（注意，我们并未假设 H_0 可分）。这一结果可以表述为：每个定义在 σ-含幺 C^*-代数 A 上的可数生成希尔伯特模都是“序列近似内射”的。秉持同样的思路，我们证明每个定义在 σ-含幺 C^*-代数上的可数生成希尔伯特模都是“序列近似投射”的。

本文组织如下：第 2 节汇集了关于 C^*-代数上的投射希尔伯特模和代数有限生成希尔伯特模的一些简单事实。第 3 节讨论了关于可数生成希尔伯特 A-模的一些基本结果。在第 4 节中，我们证明：在假设 A 是一个具有严格比较性质的 σ-含幺简单 C^*-代数，且从 Cuntz 半群到拟迹上的下半连续仿射 $\widetilde{\ }$ 函数的典范（维数函数）映射 Γ $QT(A)$ 为满射的条件下，当且仅当 A 具有稳定秩一时，可由这些下半连续仿射函数对可数生成（但非代数有限生成）的希尔伯特 A- 模进行分类。这是 [11] 中一个定理的部分逆命题。我们还证明，若假设 A 是一个具有有限比较半径的 σ-含幺简单 C^*-代数，那么具有无限拟迹的可数生成希尔伯特 A-模酉等价于 $l^2(A)$。在第5节中，我们证明，每个可分 C^*-代数 A 上的可数生成希尔伯特模总是投射的。第6节表明，每个希尔伯特 A-模都是“近似内射”的，而每个 σ-含幺 C^*-代数 A 上的可数生成希尔伯特模都是“近似投射”的。

致谢：本文基于一篇 2010 年的预印本 [35] 。本文初稿于 2014 年完成。第二位署名作者获得了美国国家科学基金会资助（DMS-1954600）。两位作者谨此感谢他们访问华东师范大学算子代数研究中心期间所获的支持。该中心部分由上海市偏微分方程与数学物理重点实验室、上海市科学技术委员会（#13dz2260400 和 #22DZ2229014）提供支持。

2 关于投射希尔伯特模的两个简单事实

定义 2.1. 设 A 是一个 C^*-代数。对于整数 $n \geq 1$，用 $A^{(n)}$ 表示由 n 个 $A.$ 的正交直和构成的（右）希尔伯特A-模。如果 $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ $y = (b_1, b_2, ..., b_n)$，那么

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_n^* b_n.$$

用 H_A 或 $l^2(A)$ 表示标准的可数生成希尔伯特 A-模 e

$$H_A = \{\{a_n\} : \sum_{n=1}^{k} a_n^* a_n \text{ converges in norm as } k \to \infty\},$$

其中内积定义为

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n.$$

设 H 是一个 Hilbert A-模。用 $H^\sharp$ 表示从 H 到 $A.$ 的所有有界 A-模映射的集合。对于每个 $y \in H$，定义 $\hat{}y(x) = \langle y, x\rangle$，对所有 $x \in H.$ 均成立。于是 $\hat{}y \in H^\sharp.$。若每个 $f \in H^\sharp$ 都可写成某个 $y \in H.$ 对应的 $\hat{}y$，则称 H 为自对偶的。

若 H_1、H_2 是 Hilbert A-模，则用 $B(H_1,H_2)$ 表示从 H_1 到 H_2. 的所有有界模映射构成的空间。若 $T\in B(H_1,H_2)$，则用 $T^*\colon H_2\to H_1^\sharp$ 表示由下式定义的有界模映射

$$T^*(y)(x)=\langle y,Tx\rangle \text{ for all } x\in H_1 \text{ and } y\in H_2.$$

若 $T^*\in B(H_2,H_1)$，则称 T有伴随 T^*.。用 $L(H_1,H_2)$ 表示 $B(H_1,H_2)$ 中所有有伴随的有界 A-模映射的集合。设 H 为希尔伯特 A-模。下文中，记 $B(H)$ 为 $=B(H,H)$，记 $L(H)$ 为 $=L(H,H)$。. $B(H)$ 是巴拿赫代数，而 $L(H)$ 是一个 C^*-代数。

对于 $x,y\in H$，定义 $\theta_{x,y}\in L(H)$ 为 $\theta_{x,y}(z)=x\langle y,z\rangle$，对所有 $z\in H$. 均成立。用 $F(H)$ 表示形如 $\theta_{x,y}$ 的这些模映射的线性张成，其中 $x,y\in H$.。用 $K(H)$ 表示 $F(H)$. $K(H)$ 的闭包。. $K(H)$ 是一个 C^*-代数。由 Kasparov 的一个结果（[26]）可知，$L(H)=M(K(H))$，即 $K(H)$ 的乘子代数；并且根据 [31]，$B(H)=LM(K(H))$，即 $K(H)$ 的左乘子代数。

设 H_1 和 H_2 是希尔伯特 A-模 H. 的希尔伯特 A-子模。那么 $K(H_i)$ 是 $K(H)$ $i=1$, 2 的遗传 C^*-子代数（见引理 2.13 [33]）。记 $K(H_1,H_2)$ 为 $K(H)$ 的子空间，它由形如 STL 的模映射组成，其中 $S\in K(H_2)$ $T\in B(H)$，且 $L\in K(H_1)$，其中 $K(H_2)$ 和 $K(H_1)$ 被视为 $K(H)$ 的遗传 C^*-子代数。注意，$K(H_1,H_2)$ 是由形如 $\theta_{x,\ y}$ 的模映射所构成的线性张成空间的闭包，其中 $x\in H_2$ 和 $y\in H_1$.

举个例子来说明 $H\neq H^\sharp$. 会很方便。设 A 是一个 C^*-代数，带有一个由两两正交的正元构成的序列 $\{d_n\}$，且满足 $\|d_n\|=1$.。定义 $f(\{a_n\})=\sum_{n=1}^\infty d_na_n$，对所有 $\{a_n\}\in H_A$. 均成立。那么 f 是一个有界模映射，但 $f\notin H$.

如果存在一个可逆映射 $U\in B(H_1,H_2)$，使得.....则称两个希尔伯特 A-模酉等价或同构

$$\langle U(x_1),U(x_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle \text{ for all } x_1,x_2\in H_1.$$

（进一步的基本信息请参见 [41] ）。

定义 2.2。设 A 是一个 C^*-代数，H 是一个希尔伯特 A-模，H_1 是在 [41], 的第 4 节中构造的 A^{**}-希尔伯特模扩张，记 $H^\sim$ 为自对偶希尔伯特 A^{**}-模 $H_1^\sharp$（参见 [41] 的第 4 节）。$B(H,H^\sharp)$ 中的每个有界模映射都可以唯一延拓为 $B(H^\sim)$ 中的一个有界模映射。（这可由 $H^\sim$ 的构造和 [41] 的 3.6 轻易得到。另见 [31] 的 1.3。）如果 H 是自对偶的，则 $B(H)=L(E)$（参见 [41] 的 3.5）。因此 $M(K(H))=LM(K(H))=QM(K(H))$。此外，如果 A 是一个 W^*-代数，则 $B(H)$ 也是一个 W^*-代数。特别地，$B(H^\sim)$ 是一个 W^*-代数。由于 $B(H,H^\sharp)$ 中的所有映射都可以唯一延拓为 $B(H^\sim)$ 中的映射，我们得出 $B(H^\sim)$ 是一个包含 $K(H)$、$M(K(H))$ $LM(K(H)$ 和 $QM(K(H))$ 的 W^* -代数。

定义 2.3. 设 H 是一个希尔伯特 A-模，且 $\mathcal{F}\subset H$ 是一个子集。若由形如 $\{za$ 的元素 $z\in\mathcal{F}$、$a\in A\}$ 所构成的线性组合在 H. 中稠密，则称 H 由 $\mathcal{F}$（作为希尔伯特 A-模）生成

若每个元素 $x\in H$ 都是形如 $\{za$ 的 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 个元素 $z\in\mathcal{F}$、$a\in A\}$. 的线性组合，则称 H 由 $\mathcal{F}$ 代数生成。请注意，我们写作 $a\in A$ 而不是 $a\in A$，以包含元素 $z.H$。若 H 由有限子集 $\mathcal{F}$. 代数生成，则称 $z.H$ 代数有限生成。关于此处的说明，参见推论 2.13。

现在我们来讨论希尔伯特模的投射性。

定义 2.4. 设 A 是一个 C^*-代数，且 H 是一个希尔伯特 A-模。我们称 H 为 $*$-投射的，即对于任意 Hilbert A-模 H_1 和 H_2、任意模映射 $\varphi\in L(H,H_2)$ 以及任意

满射　　模映射 $s \in L(H_1, H_2)$，存在一个模映射 $\psi \in L(H, H_1)$，使得

$$s \circ \psi = \varphi. \tag{e 2.1}$$

注意，这里我们假设 s、φ 和 ψ 具有伴随模映射。

定理 2.5. 设 A 是一个 C^*-代数。

(1) 假设 H 和 H_1 是 Hilbert A-模，且 $s \in L(H_1, H)$ 是满射的。那么存在 $\psi_1 \in L(H, H_1)$，使得

$$s \circ \psi_1 = \mathrm{id}_H. \tag{e 2.2}$$

此外，$\psi_1(H)$ 是 H_1 的正交直和项，且 $\psi_1(H)$ 与 H. 酉等价

(2) 每个 Hilbert A-模都是 $*$-投射的。

证明。对于 (1)，设 s 如上所述。注意到 s 有闭值域。定义 $T\colon H_1 \oplus H \to H_1 \oplus H$，使得对 $h_1 \in H_1$和 $h \in H.$，有 $T(h_1 \oplus h) = 0 \oplus s(h_1)$。于是 $T \in L(H_1 \oplus H) = M(K(H_1 \oplus H))$（参见 [31]中的定理 1.5）。由 [33] 中的引理 2.4可得

$$H_1 \oplus H = \ker T \oplus |T|(H_1 \oplus H). \tag{e 2.3}$$

设 $T = V|T|$ 是 $(K(H_1 \oplus H))^{**}$. 中的极分解。注意，[33] 中的引理 2.4的证明表明，0 是 $|T|$ 的孤立点，或者 $|T|$ 可逆。因此 (T^*T)也满足同样的性质，进而 (TT^*)也满足同样的性质。令 $S = (TT^*)^{-1}$，其中逆元是在遗传 C^*-子代数 $L(H) \subset L(H_1 \oplus H)$中取的。由于 s 是满射，

$$|TT^*|(H) = H. \tag{e 2.4}$$

注意，$T^* = |T|V^*$、$V|T|V^* = |TT^*|^{1/2}$和 $V^*|TT^*|^{1/2} = T^*$. 因此

$$L_1 := V^*(TT^*)^{-1/2} = V^*(TT^*)^{1/2}S = T^*S \in L(H_1 \oplus H). \tag{e 2.5}$$

这也意味着 $L_1(H) = V^*((TT^*)^{-1/2}(H)) = V^*(H)$ 是闭的。此外，V^*给出了 H 与 $L_1(H)$之间的酉等价。接下来可以验证

$$TL_1 = V|T|V^*(TT^*)^{-1/2} = P, \tag{e 2.6}$$

其中 P是 $(TT^*)^{1/2}$的值域投影，它在 H. 上给出恒等映射。由于 T和 L_1都属于 $L(H_1 \oplus H)$，所以 P. 也属于其中。接下来定义 $\psi_1 = L_1 P|_H\colon H \to H_1.$。因此 $s \circ \psi_1 = \mathrm{id}_H$.

接下来注意，$H \subset \ker T$，且 $|T|(H_1 \oplus H) = |T|(H_1) \subset H_1.$。由此可得 $\ker T = H_0 \oplus H$。再次由 (e 2.3)，$H_1 \oplus H = H_0 \oplus H \oplus |T|(H_1)$。由此可得，$|T|(H)$ 是 H_1.的一个正交直和项

另一方面，由于 $\psi_1(H) = L_1(H) = V^*(H)$ $\psi_1(H)$ 是闭的。但我们还有$\psi_1(H) = T^*S(H) = T^*T(H_1) = |T|(H_1)$。由于我们已证明 $L_1(H)$ 与 H 酉等价，这就证明了 (1) 中的“此外”部分。

为了证明每个希尔伯特 A-模 H 都是 $*$-投射的，设 H_1 和 H_2 是希尔伯特 A-模，$\varphi\colon H \to H_1$ 和 $s\colon H_2 \to H_1$ 是有伴随的有界模映射，其中 s 是满射。现在应用 (1) 的陈述。

注意，(1) 对任意希尔伯特 A-模都成立，特别是对 H_1（代替 H）也成立。由于 s 是满射，我们得到 $\psi_1 \in L(H_1, H_2)$，使得

$$s \circ \psi_1 = \mathrm{id}_{H_1}. \tag{e 2.7}$$

定义 $\psi = \psi_1 \circ \varphi\colon H \to H_2$. 那么 $s \circ \psi = s \circ \psi_1 \circ \varphi = \varphi$.

□

注 2.6. (i) 或许值得注意的是，在定理 2.5 的第 (1) 部分中， $\|\psi\| = \||ss^*|^{-1/2}\|$（逆元取自 $L(H)$），而对于第二部分， $\|\psi\| = \||ss^*|^{-1/2} \circ \varphi\|$. 这或许已经无法改进。

接下来的三个命题是一些简单的事实，但或许并非完全显然。为使后续讨论更清晰，我们在此列出这些命题。本札记的早期版本（[35]）于 2010 年首次发布后，Leonel Robert 告诉我们，利用上面的命题 2.5，他已证明下述命题的逆命题也成立，即若 H 是代数有限生成的，则 $K(H)$ 有单位元（见命题 2.11）。

命题 2.7. 设 A 是一个 C^*-代数， H 是一个 Hilbert A-模。假设 $1_H \in K(H)$。则 H 是代数有限生成的。

证明. 令 $F(H)$ 为以下形式的秩一模映射的线性张成：$\theta_{\xi,\,\zeta}$，其中 $\xi,\zeta \in H.$。由于 $F(H)$ 在 $K(H)$ 中稠密，存在 $T \in F(H)$ 使得

$$\|1_H - T\| < 1/4. \tag{e 2.8}$$

由此可知 T 可逆。存在 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n \in H$ 使得

$$T(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j < \zeta_j, \xi > \ \text{ for all } \ \xi \in H. \tag{e 2.9}$$

但是 $TH = H.$ 这意味着 $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A = H.$

□

定义 2.8. 设 A 是一个 C^*-代数，且 H 是一个希尔伯特 A-模。如果对于任意希尔伯特模 H_1 和 H_2 、任意有界满射模映射 $s:\ H_2 \to H_1$ 以及任意有界模映射 $\varphi:\ H \to H_1$，都存在有界模映射 $\psi:\ H \to H_2$ 使得 $s \circ \psi = \varphi.$，则称 H 是投射的（以有界模映射为态射）。因此，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \overset{\psi}{\searrow} & \\ H_1 & \xleftarrow[s]{} & H_2 \end{array} \tag{e 2.10}$$

命题 2.9. 设 A 是一个 C^*-代数，且 H 是一个希尔伯特 A-模，并且 $K(H)$ 有单位元。那么 H 是一个投射的希尔伯特 A-模。

证明. 记 A 为 $A.$ 的最小单位化。注意， H 是一个希尔伯特 A-模。我们可以写成 $\tilde{A}^{(N)} = e_1\tilde{A} \oplus e_2\tilde{A} \oplus \cdots \oplus e_N\tilde{A}$，其中 $\langle e_i, e_i\rangle = 1_{\tilde{A}}.$。首先证明 $\tilde{A}^{(N)}$ 是一个 $\tilde{}$ 投射的希尔伯特 A-模。

设 H_1 和 H_2 是希尔伯特 A-模， $s:\ H_2 \to H_1$ 是有界满模映射， $\varphi:\ \tilde{A}^{(N)} \to H_1$ 是有界模映射。令 $x_i = \varphi(e_i)$ $1 \le i \le N.$ 由于 s是满射，取 $y_i \in H_2$ 使得

$$s(y_i) = x_i,\ 1 \le i \le N. \tag{e 2.11}$$

定义模映射 $\psi:\ \tilde{A}^{(N)} \to H_1$

$$\psi(h) = \sum_{i=1}^{N} y_i \langle e_i, h\rangle \ \text{ for all } \ h = \oplus_{i=1}^{N} a_i,$$

其中 $a_i \in A, 1 \le i \le N.$，则 $\varphi \in K(H, H_2)$。此外

$$s \circ \psi(e_i) = x_i \langle e_i, e_i \rangle = x_i = \varphi(e_i),\ 1 \le i \le N. \tag{e 2.12}$$

由此可得 $s \circ \psi = \varphi.$

现在考虑一般情形。由 2.7， H 是代数有限生成的。因此，Kasparov 的一个定理（[26]）表明，对于某个投影 $P \in L(H_{\tilde{A}})$，有 $H = PH_{\tilde{A}}$。事实 $1_H \in K(H)$ 意味着 $P \in K(H_{\tilde{A}})$。因此，存在一个整数 $N \ge 1$ 和一个投影 $P_1 \in M_N(A)$，使得 PH 与 $P_1 H_{\tilde{A}}.$ 酉等价。换言之，可以假设 H 是 $\tilde{A}^{(N)}.$ 的一个直和项。

记 $\tilde{A}^{(N)} = H \oplus H'$ 为某个 Hilbert $\tilde{A}$-模 $H'.$。设 H_0 和 H_1 为 Hilbert A-模，$s\colon H_0 \to H_1$ 为有界满模映射，$\varphi\colon H \to H_1$ 为另一个有界模~~~

证明。记 $H=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\tilde{A}$（其中 $\xi_i\in H$）。令 $H_1=\tilde{A}^{(n)}$。我们将 H 和 H_1 均视为 Hilbert $\tilde{A}$-模。记 $H_1=\bigoplus_{i=1}^{n}e_iA$，其中 $e_i=1_{\tilde{A}}$，$1\leq i\leq n$。定义模映射 $s\colon H_1\to H$，使得 $s(e_i)=\xi_i$，$1\leq i\leq n$。于是

$$s(h)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle e_i,h\rangle \text{ for all } h\in H_1. \tag{e 2.13}$$

换言之 $s=\sum_{i=1}^{n}\theta_{\xi_i,\ e_i}\in K(H_1,H)$。特别地，$s\in L(H_1,H)$。由于 H 由 $\{\xi_1,\xi_2,..,\xi_n\}$代数生成，s 是满射。接下来沿用定理 2.5 的证明，得到有界模映射 $L_1=T^*S$。注意，在这种情况下，$T\in K(H_1\oplus H)$，因此$L_1\in K(H_1\oplus H)$。由此可得 $s\circ\psi_1\in K(H)$（采用定理 2.5 证明中的记号）。由于$s\circ\psi_1=\mathrm{id}_H$，我们得出 $K(H)$ 是含幺的。

根据定理 2.5，$H_{\psi_1(H)}(H)$ 为一个实现这两等价的有界模映射。注意，$U\in L(H,\psi_1(H))$。令 $Q\colon H_1\to\psi_1(H)$ 为将 H_1 投影到正交直和项 $\psi_1(H)$ 上的投影。

假设 $f\in H^\sharp$，即 $f\colon H\to A$ 是有界模映射。定义 $\tilde{f}\colon H_1\to A$，使得对所有 $h\in H_1$，$\tilde{f}(h)=f\circ U^{-1}\circ Q(h))$。注意，对所有 $x\in H$，$f(x)=\tilde{f}(U(x))$。由于 $H_1=\tilde{A}^{(n)}$ 是自对偶的，存在 $g\in H_1$，使得对所有 $h\in H_1$，$\tilde{f}(h)=\langle g,h\rangle$。若 $x\in H$，则 $f(x)=f(U(x))=\langle g,Q(U(x))\rangle$。因此，对所有 $x\in H$，$f(x)=\langle (QU)^*(g)\ x\rangle$。由于 $(QU)^*(g)\in H$，这表明 $H=H^\sharp$，且 H 是自对偶的。□

引理 2.12（参见 [42] 中的命题 1.4.5）。设 A 是一个 C^*-代数，H 是一个希尔伯特 A-模，且 $x\in H$。那么，对于任意 $0<\alpha<1/2$，存在 $y\in\overline{xA}\subset H$，使得 $\langle y,\ y\rangle^{1/2}=\langle x,\ x\rangle^{1/2-\alpha}$，满足 $x=y\cdot\langle x,\ x\rangle^{\alpha}$.

证明。我们首先考虑希尔伯特 A 模 xA。令 $a=\langle x,\ x\rangle$，$a_n=(1/n+a)^{-\alpha}$，以及 $x_n=x\cdot(1/n+a)^{-\alpha}$，$n\in\mathbb{N}$。我们将证明 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列。

令 $\beta_{n,\ m}=(1/n+a)^{-\alpha}-(1/m+a)^{-\alpha}$，$n$，$m\in\mathbb{N}$。于是

$$\|x\beta_{n,m}\|=\|(\beta_{n,m}\langle x,x\rangle\beta_{n,m})^{1/2}\|=\|a^{1/2}\beta_{n,m}\|.$$

由于 $a^{1/2}(1/n+a)^{-\alpha}$ 在范数意义下收敛到 $a^{1/2-\alpha}$，我们得到$\|x\beta_{n,\ m}\|\to 0$，当 n，$m\to\infty$. 时。因此，对于某个 $y_\alpha\in H$.，有 $x_n\to y_\alpha$。于是 $x_n\langle x,\ x\rangle^{\alpha}\to y_\alpha\langle x,\ x\rangle^{\alpha}$.。此外，$\langle y_\alpha,\ y_\alpha\rangle^{1/2}=\lim_{n\to\infty}a^{1/2}a_n=a^{1/2-\alpha}$（在范数意义下收敛）。

类似地，$\lim_{n\to\infty}\|x-xa_na^\alpha\|=\lim_{n\to\infty}\|a^{1/2}(1-a_na^\alpha)\|=0$. 由于 $x_na^\alpha=xa_na^\alpha$，我们得到 $\lim_{n\to\infty}x_na^\alpha=x$. 由此可知 $x=y_\alpha\langle x,x\rangle^\alpha$. 取 $\alpha<\alpha'<1/2$. 则 $(1/n+a)^{-\alpha'}a^{\alpha'-\alpha}\in A$. 由于 $\lim_{n\to\infty}x(1/n+a)^{-\alpha'}a^{\alpha'-\alpha}=\lim_{n\to\infty}x(1/n+a)^{-\alpha'}(1/n+a)^{\alpha'-\alpha}=\lim_{n\to\infty}x(1/n+a)^{-\alpha}=y_\alpha$, $y_\alpha\in\overline{xA}$.

□

我们以如下对定义 2.3 的说明结束本节。

推论 2.13. 设 H 是一个 Hilbert A-模，且 $\mathcal{F}\subset H$ 是一个子集。

(1) 那么 $\mathcal{F}\subset\overline{\{za\colon z\in\mathcal{F},\ a\in A\}}$.(2) 如果 H 是代数有限生成的，那么存在 x_1、x_2、...、$x_n\in H$，使得 $H=\{\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\colon\ a_i\in A\}$（见定义 2.3）。

证明。对于 (1)，令 $z\in\mathcal{F}$. 根据引理 2.12，我们可以将 $z=y\langle z,\ z\rangle^\alpha$ 写成某个 $0<\alpha<1/2$ 和$y\in H$. 的形式。令 $\{e_\lambda\}\subset A$ 为一个近似单位。则 $ze_\lambda=y\langle z,\ z\rangle^\alpha e_\lambda\to y\langle z,\ z\rangle=z$. 因此$z\in\overline{\{z\cdot a\colon\ z\in\mathcal{F},\ a\in A\}}$（所以在定义 2.3 中，$\mathcal{F}$ 属于 $\{za\}$ 的闭包：$z\in\mathcal{F}$ 和 $a\in A\}$.）

对于 (2)，假设 $H=\sum_{i=1}^{n}x_iA$. 根据引理 2.12，我们可以写成 $x_i=y_i\langle x_i,x_i\rangle^\alpha$，其中 $0<\alpha<1/2$ 且 $y_i\in H$, $1\leq i\leq n$.。令 $H_0=\sum_{i=1}^{n}y_iA\subset H$.。由于 $x_i=y_i\langle x_i,x_i\rangle^\alpha\in H_0$,$H\subset H_0$.，因此可得 $H=\sum_{i=1}^{n}y_iA$.。

□

3 可数生成的希尔伯特模

设 A 是一个 C^*-代数，且 H_1 和 H_2 是一对 Hilbert A-模。本节讨论何时 H_1 与 H_2. 的一个 Hilbert A-子模酉等价。本节的主要结果是定理 3.6，它对这一问题给出了一些解答。关于其与 Cuntz 半群的联系，参见推论 3.9。

引理 3.1. 设 A 是一个 C^*-代数， H 是一个希尔伯特 A-模。设 $\{E_\lambda\}$ 是 $K(H)$的一个近似单位。那么，对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意有限子集 $\mathcal{F} \subset H$，存在 λ_0 使得对所有 $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\|E_\lambda(x) - x\| < \epsilon. \tag{e 3.14}$$

证明. 设 $\mathcal{F} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ 和 $\epsilon > 0.$ 。不失一般性，我们可以假设$0 \neq \|\xi_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq k.$ 。存在 $1/3 < \alpha < 1/2$ 使得

$$\|\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{1-\alpha} - \langle \xi_i, \xi_i\rangle^{\alpha}\| = \|\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{\alpha}(\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{1-2\alpha} - 1)\| < \epsilon/3, \ 1 \leq i \leq k. \tag{e 3.15}$$

由引理 2.12，可写成 $\xi_i = \zeta_i\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{\alpha}$，其中 $\langle \zeta_i, \zeta_i\rangle = \langle \xi_i, \xi_i\rangle^{1-2\alpha}$, $1 \leq i \leq k.$ 。令 $S_i = \theta_{\zeta_i,\ \zeta_i}$, $1 \leq i \leq k.$ 。那么，对于 $1 \leq i \leq k$,

$$\|S_i(\xi_i) - \xi_i\| = \|\zeta_i\langle \zeta_i, \xi_i\rangle - \xi_i\| = \|\zeta_i\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{1-\alpha} - \zeta_i\langle \xi_i, \xi_i\rangle^{\alpha}\| < \epsilon/3.$$

存在 λ_0 ，使得对于所有 $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\|E_\lambda S_i - S_i\| < \epsilon/3, \ 1 \leq i \leq k. \tag{e 3.16}$$

由此可知，对于所有 $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \|E_\lambda(\xi_i) - \xi_i\| &\leq \|E_\lambda(\xi_i) - E_\lambda S_i(\xi_i)\| + \|E_\lambda S_i(\xi_i) - S_i(\xi_i)\| + \|S_i(\xi_i) - \xi_i\| \\ &< \|E_\lambda\|\|\xi_i - S_i(\xi_i)\| + \epsilon/3 + \epsilon/3 < \epsilon, \qquad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

□

事实上，以下内容至少有一部分是已知的：(1) $\Leftrightarrow$ (2) 被称为 [39] 的推论 1.5。我们还认为其余部分也是已知的。注意，即使 H 是可数生成的，当 A 不可分时，它也未必是可分的。

命题 3.2（参见 [39] 的推论 1.5）。设 A 是一个 C^*-代数， H 是一个 Hilbert A-模。则以下各条件等价。

(1) H 是可数生成的；(2) K (H) 是 σ-含幺的，并且

(3) 存在一个模映射 $E_n \in K(H)_+$ 的递增序列，使得 $\|E_n\| \leq 1$ ，且

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n x - x\| = 0 \ \textit{for all} \ x \in H. \tag{e 3.17}$$

证明。如上所述，由 [39], (1) 的推论 1.5 $\Leftrightarrow$(2)。

(1) $\Rightarrow$ (3)：设 $\{x_n\}$是 H 单位球中的一个元素序列，使得 H 作为希尔伯特 A-模由 $\{x_n\}$ 生成。设 $\mathcal{F}_n$ 为由以下形式的元素组成的集合： $x_i a$、 $1 \leq i \leq n$和 $a \in A$ ，其中 $\|a\| \leq n.$ 。注意， $\cup_{n=1}^{\infty}$span($\mathcal{F}_n$) 在 $H.$ 中稠密。警告： $\mathcal{F}_n$ 不是有限子集。

Fo对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在 $0<1/3<\alpha_n<1/2$，使得对于其中任意一个 $0\le b\le 1\quad A$,

$$\|b^{1/2-\alpha_n}(1-b^{1-2\alpha_n})b^{\alpha_n}\|\le 1/n^2. \tag{e 3.18}$$

由引理 2.12，取 $\xi_{i,\ n}\in\overline{x_iA}$ 使得 $x_i=\xi_{i,\ n}\langle x_i,x_i\rangle^{\alpha_n}$ 满足 $\langle\xi_{i,\ n},\xi_{i,\ n}\rangle=\langle x_i,x_i\rangle^{1-2\alpha_n}$.令 $b_i=\langle x_i,x_i\rangle$, $n\in\mathbb{N}$. 则

$$\theta_{\xi_{i,n},\xi_{i,n}}(x_ia)=\xi_{i,n}\langle\xi_{i,n},\xi_{i,n}b_i^{\alpha_n}\rangle a=\xi_{i,n}\langle\xi_{i,n},\xi_{i,n}\rangle b_i^{\alpha_n}a=\xi_{i,n}b_i^{1-\alpha_n}a.$$

于是，对于任意的 $\|a\|\le n$和 $i,n\in\mathbb{N}$，由 (e 3.18) 得,

$$\begin{aligned}\|\theta_{\xi_{i,n},\xi_{i,n}}(x_ia)-x_ia\|^2 &= \|\xi_{i,n}(b_i^{1-\alpha_n}-b_i^{\alpha_n})a\|^2=\|\xi_{i,n}(b_i^{1-2\alpha_n}-1)b_i^{\alpha_n}a\|^2 &\text{(e 3.19)}\\ &= \|a^*b_i^{\alpha_n}(b_i^{1-2\alpha_n}-1)\langle\xi_{i,n},\xi_{i,n}\rangle(b_i^{1-2\alpha_n}-1)b_i^{\alpha_n}a\| &\text{(e 3.20)}\\ &= \|b_i^{1/2-\alpha_n}(1-b_i^{1-2\alpha_n})b_i^{\alpha_n}a\|^2\le(1/n)^4\|a\|^2<1/n^2. &\text{(e 3.21)}\end{aligned}$$

利用 $K(H)$ 的一个近似单位，我们得到一个递增的 $\{E_n\}\in A_+$序列，使得 $\|E_n\|\le 1$ 并满足

$$\|E_n\theta_{\xi_{i,n}\xi_{i,n}}-\theta_{\xi_{i,n},\xi_{i,n}}\|<1/n^2,\ 1\le i\le n. \tag{e 3.22}$$

I由此可知，对于任意的 $m\ge n$和满足 $\|a\|\le n$ 的 $a\in A$，由 (e 3.21) 和 (e 3.22) 得 ,

$$\begin{aligned}\|E_m(x_ia)-x_ia\| &\le \|E_m(x_ia-\theta_{\xi_{i,m},\xi_{i,m}}(x_ia))\|+\|E_m\circ\theta_{\xi_{i,m},\xi_{i,m}}(x_ia)-\theta_{\xi_{i,m},\xi_{i,m}}(x_ia)\|\\ &\quad+\|\theta_{\xi_{i,m}\xi_{i,m}}(x_ia)-x_ia\|\\ &< 1/m+\|xa\|/m^2+1/m^2<2/m+1/m^2. &\text{(e 3.23)}\end{aligned}$$

由于 $\cup_{i=1}^{\infty}$张成空间$(\mathcal{F}_i)$ 在 H 中稠密，这就证明了 (3)。

(3) $\Rightarrow$ (2): 设 $\{E_n\}$ 是 $K(H)_+$ 中的一个递增序列，满足 $\|E_n\|\le 1$ 并且

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n(x)-x\|=0\ \text{ for all }\ x\in H. \tag{e 3.24}$$

取定 $x_1,x_2,...,x_N,y_1,y_2,...,y_N\in H$. 令 $S=\sum_{j=1}^N\theta_{x_j,\ y_j}$ 且

$$M=N\cdot\max\|\{\|y_j\|;1\le j\le N\}.$$

对于任意 $\epsilon>0$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\|E_m(x_j)-x_j\|<\frac{\epsilon}{(M+1)},\ 1\le j\le N. \tag{e 3.25}$$

只要 $m\ge n_0$. 那么，对于任意 $m\ge n_0$ 以及任意 $z\in H$,

$$\|E_mS(z)-S(z)\|=\|\sum_{j=1}^N(E_mx_j-x_j)\langle y_j,z\rangle\|\le(\frac{\epsilon}{(M+1)})\sum_{j=1}^m\|y_j\|\|z\|<\|z\|\epsilon. \tag{e 3.26}$$

由此可得 $\lim_{n\to\infty}\|E_mS-S\|=0.$。由于 $F(H)$ 在 $K(H)$ 中稠密，这意味着 $K(H)$ 是 σ-含幺的。 □

定义 3.3. 设 H 是一个 Hilbert A-模， $G\subset H$ 是一个子集。若对于任意有限子集 $\mathcal{F}\subset H$、 $\epsilon>0$ 以及任意 $x\in H$，都存在 $g\in G$ 使得，则称 G 在 H 中 A-弱稠密，

$$\|\langle(x-g),z\rangle\|<\epsilon\ \text{ for all }\ z\in\mathcal{F}. \tag{e 3.27}$$

（参见注 6.2）。

可以将下一个命题与 [39] 中的引理 1.3 进行比较。

命题 3.4. 设 A 是一个 σ-含幺 C^*-代数，且 H 是一个 Hilbert A-模。

(1) 设 $s \in K(H)_{+\cdot}$，则当 $s(H)$ 在 H 中 A-弱稠密时， s 是 $K(H)$ 的严格正元素；并且，如果 s 是 $K(H)$ 的严格正元素，那么 $s(H)$ 在 H. 中稠密

(2) 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert A-模，且 $T \in K(H_1, H_2)$，如果 $T(H_1)$ 在 H_2 中 A-弱稠密，则 $TT^* \in K(H_2)$ 是 $K(H_2)$ 的严格正元素。

证明. 对于 (1)，根据 [39] 的引理 1.3， s 是严格正元素，当且仅当 $s(H)$ 在 H. 中稠密

现在假设 $s(H)$ 在 H. 中 A-弱稠密。不失一般性，可以假设 $\|s\| \leq 1$. 。设 p 是与 s 关联的开投影，即 $s^{1/n} \nearrow p$. 。置 $\eta_n = \|s^{1/n}s - s\|$， $n \in \mathbb{N}$. 。则 $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

固定 $\epsilon > 0$. 令 $x, y \in H$ 使得 $\|x\|, \|y\| \leq 1$. 。选取 $\xi_1, \xi_2 \in H$ 使得 $\|\xi_1\|, \|\xi_2\| \leq 1$. 。于是，存在 $\xi \in H$ 使得

$$\|\langle s(\xi) - \xi_1, y\rangle\| < \epsilon/2. \tag{e 3.28}$$

Then

$$\begin{aligned} \|\langle \theta_{\xi_1,\xi_2}(x) - \theta_{s(\xi),\xi_2}(x), y\rangle\| &= \|\langle \xi_1\langle \xi_2, x\rangle, y\rangle - \langle s(\xi)\langle \xi_2, x\rangle, y\rangle\| && \text{(e 3.29)} \\ &= \|\langle \xi_2, x\rangle^*\langle \xi_1 - s(\xi), y\rangle\| < \epsilon/2. && \text{(e 3.30)} \end{aligned}$$

我们估计得

$$\begin{aligned} \|\langle s^{1/n}\theta_{\xi_1,\xi_2}(x) - \theta_{\xi_1,\xi_2}(x), y\rangle\| &= \|\langle s^{1/n}(\theta_{\xi_1,\xi_2} - \theta_{s(\xi),\xi_2})(x), y\rangle\| \\ &\quad + \|\langle(\theta_{s^{1/n}s(\xi),\xi_2}(x) - \theta_{s(\xi_1),\xi_2}(x)), y\rangle\| + \|\langle(\theta_{s(\xi),\xi_2}(x) - \theta_{\xi_1,\xi_2}(x)), y\rangle\| \\ &< \|s^{1/n}\|\|(\theta_{\xi_1,\xi_2} - \theta_{s(\xi),\xi_2})(x), y\rangle\| + \eta_n + \epsilon/2 \\ &< \epsilon + \eta_n. \end{aligned} \tag{e 3.31}$$

固定 $n \in \mathbb{N}$，令 $\epsilon \to 0$. 。我们得到

$$\|\langle s^{1/n}\theta_{\xi_1,\xi_2}(x) - \theta_{\xi_1,\xi_2}(x), y\rangle\| \leq \eta_n.$$

这对所有满足 $\|y\| \leq 1$. 的 $y \in H$ 都成立。由此可得

$$\|s^{1/n}\theta_{\xi_1,\xi_2}(x) - \theta_{\xi_1,\xi_2}(x)\| < \eta_n, \ n \in \mathbb{N}. \tag{e 3.32}$$

由于 (e 3.32) 对每个满足 $\|x\| \leq 1$ 的 $x \in H$ 都成立，我们得到

$$\|s^{1/n}\theta_{\xi_1,\xi_2} - \theta_{\xi_1,\xi_2}\| < \eta_n, \ n \in \mathbb{N}. \tag{e 3.33}$$

由于形如 $\theta_{\xi_1,\ \xi_2}$ 的模映射的线性组合在 $K(H)$ 中稠密，因此对任意 $k \in K(H)$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \|s^{1/n}k - k\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|k^{1/2}(1 - s^{1/n})k^{1/2}\|. \tag{e 3.34}$$

由此可得 $\|k^{1/2}(1-p)k^{1/2}\| = 0$，或者对于所有 $k \in K(H)$都有 $pk = k$。因此， p 是与遗传 C^*-子代数 $K(H)$ 相关联的开投影（参见 [33]中的引理 2.13）。于是可得， s 是 $K(H)$ 的严格正元素。

~ ~对于 (2)，令 $H = H_1 \oplus H_2$. 定义 $T \in K(H)$ 为 $T(h_1 \oplus h_2) = 0 \oplus T(h_1)$，其中 $h_1 \in H_1$和$h_2 \in H_2$. 令 $\tilde{T} = V(\tilde{T}^*\tilde{T})^{1/2}$ 为 $\tilde{T}$在 $K(H)^{**}$. 中的极分解。于是可写为$T = \tilde{T}|_{H_1} = V(T^*T)^{1/2}$. 由于 $T \in K(H_1, H_2)$ $T^* \in K(H_2, H_1)$。

回顾一下， $T^*=|T|V^*$, $V|T|V^*=|TT^*|^{1/2}$和 $V^*|TT^*|^{1/2}=T^*$.因此 $T=(TT^*)^{1/2}V$.接着记作 $T=(TT^*)^{1/4}(TT^*)^{1/4}V$.注意，$(TT^*)^{1/4}V\in K(H)$ 且 $(TT^*)^{1/4}V(H)\subset H_2$.由此可得，$(TT^*)^{1/4}(H_2)$ 在 H_2 中关于 A- 弱拓扑稠密，因为 $T(H)=(TT^*)^{1/4}((TT^*)^{1/4}V(H))$ 在 H_2. 中关于 A- 弱拓扑稠密。由 (1)，这意味着 $(TT^*)^{1/4}$是 $K(H_2)$ 的严格正元素。因此 TT^*是 $K(H_2)$ 的严格正元素。 □

3.5. 设 A 是一个 C^*-代数， H_1、H_2 是希尔伯特 A-模，且 $T\in B(H_1,H_2)$。注意 $T^*\in B(H_2,H_1^\sharp)$，并且对于任意 $y\in H_1, T^*(y)(x)=\langle y,Tx\rangle$ 对所有 $x\in H_1$.。我们可以将 $H_1\subset H_1^\sharp$. 视为 $T^*(H_2)$ 在 H_1 中稠密，如果 $T^*(H_2)\supset H_1$（尽管 $T^*(H_2)$ 可能不属于 H_1）。回忆一下，$TK_0^*\in K(H_1,H_2)$，对于任意具有伴随 $(TK_0^*)^*=K_0T^*\in K(H_2,H_1)$ 的 $K_0\in K(H_1)$。若记 $T\in LM(K(H_1,H_2))$，则一般而言， $T^*\in RM(K(H_2,H_1))$。特别地，对于所有 $K_0\in K(H_1)$，有 $K_0T^*\in K(H_2,H_1)$。这些结果将在下一个定理中使用。

下一个定理第 (2) 部分中 (a) 与 (d) 的等价性是已知的（见 [19] 的定理 4.1）。

定理 3.6. 设 A 是一个 C^*-代数，且 H_1 和 H_2 是 Hilbert A-模。假设 H_2 是可数生成的。

(1) 那么， H_2 酉等价于 H_1 的一个 Hilbert A-子模，当且仅当存在有界模映射 $T:H_1\to H_2$，使得 $T(H_1)$ 在 H_2. 中 A-弱稠密。

(2) 假设 H_1 也是可数生成的。那么以下条件等价：(a) H_1 和 H_2 作为 Hilbert A-模酉等价；(b) 存在有界模映射 $T\in B(H_1,H_2)$，使得 $T(H_1)$ 在 H_2 中 A-弱稠密，并且对于任意严格正元素 $K_0\in K(H_1)$，$(K_0T^*)(H_2)$ 在 H_1 中 A-弱稠密；(c) 存在有界模映射 $T\in B(H_1,H_2)$，使得 $T(H_1)$ 在 H_2 中稠密，且 $T^*(H_2)$ 在 H_1 中稠密（见 3.5）；(d) 存在可逆的有界模映射 $T\in B(H_1,H_2)$。

证明。对于 (1)，「仅当」部分显然。假设存在一个 $T\in B(H_1,H_2)$，其值域在 H_2. 中 A-弱稠密

假设 H_2 由 $\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$. 生成。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在一个序列$\{y_{n,k}\}$ 属于 H_2，使得，

$$\|\langle T(y_{n,k})-x_n,x_i\rangle\|<(\frac{1}{k+n})\max\{\|x_i\|:1\le i\le n+k\},\ 1\le i\le n+k.$$

因此，对于任意固定的 n 以及任意 $y\in H$，$\lim_{k\to\infty}\|\langle T(y_{n,\ k})-x_n,y\rangle\|=0$. 由此可知， $\{T(y_{n,\ k})a$ 中元素的线性组合构成的集合： $n,k\in\mathbb{N},a\in A\}$ 在 H_2. 中是 A-弱稠密的。令$H_3\subset H_1$ 为由 $\{y_{n,k}$ 生成的 A-子模的闭包： $k,n\in\mathbb{N}\}$. 则 H_3 是 H_1 的一个可数生成 Hilbert A-子模，且 $T(H_3)$ 在 H_2. 中是 A-弱稠密的

令$T(H_3\oplus H_3^\perp)\subset H_2$在下文视为同一要映射，其中就可以将 和 与映射$H_2$均成立。我们也可以将 $K(H_2)$ 和 $K(H_3)$ 视为 $K(H)$ 的遗传 C^*-子代数（参见 [33] 中的引理 2.13）。

应用 [39] 中的推论 1.5（为方便起见，参见上文的引理 3.2），我们分别得到严格正元素 $K_0\in K(H_3)\subset K(H)$ 和 $L\in K(H_2)\subset K(H)$。由命题 3.4 的 (1) 可知， $K_0(H_3)$ 在 H_3. 中稠密。因此， $TK_0(H_3)$ 在 H_2. 中是 A-弱稠密的。应用命题 3.4 的第 (2) 部分，我们得出 $S=(TK_0)(TK_0)^*$ 是 $K(H_2)$ 的严格正元素。

因此， P_s 中 S 的值域投影与 $K(H_3)^{**}$ 的值域投影相同。记$TK_0(^*=US^{1/2})$为 $K(H)^{**}$. 中$(TK_0)^*$的极分解。注意，$(TK_0)^*=K_0^{1/2}(TK_0^{1/2})^*=US^{1/2}$.。由此可得 $U(S^{1/2}(H))\subset H_3$.。由于 $S^{1/2}$是严格正

$K(H_2)$ $H_2 = \overline{S^{1/2}H_2}$.中的元素，因此 $U(H_2) \subset H_3$.。注意，对任意 $Y \in K(H)$，都有 $U\overline{Y \in K_0 \cdot K}(H)$。特别地，对所有 $S' \in K(H_2)$，都有$US'U^* \in \overline{K_0 \cdot K(H) \cdot K_0} = K(H_3)$。我们还有 $UH_2 \subset H_3$.。此外

$$US^{1/n}U^* \nearrow UP_sU^* = Q, \tag{e 3.35}$$

其中 P_s 是 S 的值域投影（在 $K(H)^{**}$中），而 Q 是 $K(H)^{**}$的开投影，并且$QUP_s = U$.。由此可得 $U^*U = P_s$，且 $UH_2 \subset H_3$与 H_2.酉等价。这就证明了 (1)

对于 (2)，我们先证明 (b) $\Rightarrow$ (a)。沿用第 (1) 部分证明中的记号。但由于现在假设 H_1 是可数生成的，我们取 $H_3 = H_1$. 。特别地， K_0是 $K(H_1)$中的严格正元素。采用 (1) 中的记号，只需证明 $U(H_2)$在 H_1.中稠密。由于 $K_0T^*(H)$在 H_1中 A-弱稠密，根据命题 3.4， $K_0T^*TK_0$是 $K(H_1)$中的严格正元素。根据命题 3.4 的 (1)， $K_0T^*TK_0(H_1)$在 H_1.中稠密。由于$TK_0(H_1) \subset H_2$，这意味着 $K_0T^*(H_2)$实际上在 H_2.中稠密

由于 $K_0T^* = US^{1/2}$，且 $K_0T^*(H_2)$ 在 H_1 中稠密， $U(S^{1/2}(H_2))$ 在 H_1. 中稠密。如上文 (1) 的证明所示， $S^{1/2}(H_2) \subset H_2$. 。因此，确实有 $U(H_2)$ 在 H_1.中稠密。

现在考虑 (c) $\Rightarrow$ (b)。只需证明 $K_0T^*(H_2)$ 在 H_1.中稠密。

固定 $z \in H_1$. 。由于 K_0 是一个严格正元素，根据命题 3.4， $K_0(H_1)$ 在 H_1. 中稠密。存在一个序列 $z_n \in H_1$ ，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|K_0(z_n) - z\| = 0 \tag{e 3.36}$$

根据 (c) 的假设，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个元素序列 $y_{n,\ k} \in H_2$ ，使得（我们不假设 $T^*(y_{n,\ k}) \in H_1$）

$$\lim_{k\to\infty} \|T^*(y_{n,k}) - z_n\| = 0. \tag{e 3.37}$$

因此，可以取一个子序列 $\{y_{m(n)}\} \subset \{y_{n,k} :\ k, n \in \mathbb{N}\}$ ，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|K_0T^*(y_{m(n)}) - z\| = 0. \tag{e 3.38}$$

这表明 $K_0T^*(H_2)$ 在 H_1 中稠密，正如所需。

显然， (a) $\Rightarrow$ (b)、(a) $\Rightarrow$ (c) 和 (a) $\Rightarrow$(d)。

剩下要证明 (d) $\Rightarrow$ (b)。我们首先应用 (1) 的证明。但由于 H_1 是可数生成的，取 $H_3 = H_1$. 。令 K_0 为 $K(H_1)$ 的一个严格正元素。由于 T 可逆， $T(H_1)$ 在 H_2. 中稠密。因此，只需证明 $K_0T^*(H_2)$ 在 H_1. 中关于 A-弱拓扑稠密。令 $H = H_1 \oplus H_2$. 。我们将 $K(H_1)$ 和 $K(H_2)$ 视为 $K(H)$ 的遗传 C^*-子代数。因此， T 被识别为有界模映射 $(h_1 \oplus h_2) \mapsto 0 \oplus T(h_1)$，而 T^{-1} 被识别为有界模映射 $(h_1 \oplus h_2) \mapsto T^{-1}(h_2) \oplus 0$. 。在下文中，我们使用如下事实：$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$；必要时，我们也将在 $H^\sim$ 中进行论证（见定义 2.2）。这样，我们可以写成 T^*，$(T^{-1})^* \in RM(K(H))$。因此，若 $E \in K(H_2) \subset K(H)$，则 $E(T^*)^{-1} = E(T^{-1})^* \in K(H)$。

设 $\{E_n\}$ 是 $K(H_2)$ 的近似单位。对于 H_2 的单位球中的任意有限子集 $\mathcal{F} \subset H_2$ ，以及 $\epsilon > 0$，根据引理 3.1，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ ，使得对所有 $n \geq n_0$,

$$\|T^{-1}E_n(x) - T^{-1}(x)\| < \epsilon/(\|T^*\| + 1)(\|K_0\| + 1) \text{ for all } x \in \mathcal{F}. \tag{e 3.39}$$

因此，对于任意满足 $\|y\| \leq 1$的 $y \in H_1$ ，

$$\begin{aligned} \|\langle (E_n(T^*)^{-1} - (T^*)^{-1})(y), x\rangle\| &= \|\langle y, (T^{-1}E_n - T^{-1})(x)\rangle\| && \text{(e 3.40)} \\ &\leq \|y\|\|T^{-1}E_n(x) - T^{-1}(x)\| && \text{(e 3.41)} \\ &< \epsilon/(\|T^*\| + 1)(\|K_0\| + 1) && \text{(e 3.42)} \end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathcal{F}$. 均成立。因
此

$$\begin{aligned} \|\langle T^* E_n (T^*)^{-1}(y) - y, x\rangle\| &= \|\langle T^* E_n (T^*)^{-1}(y) - T^*(T^*)^{-1}(y), x\rangle\| && \text{(e 3.43)} \\ &< \epsilon/(\|K_0\| + 1). && \text{(e 3.44)} \end{aligned}$$

因此

$$\|\langle K_0 T^* E_n (T^*)^{-1}(y) - K_0(y), x\rangle\| < \epsilon. \tag{e 3.45}$$

由于 $E_n(T^*)^{-1} = E_n(T^{-1})^* \in K(H)$，我们有 $E_n(T^*)^{-1}(H_1) \subset H_2$. 此外，根据引理 3.4 的 (1)，$K_0(H_1)$ 在 H_1. 中稠密。由 (e 3.45) 可知，$K_0 T^*(H_2)$ 在 H_1. 中是 A-弱稠密的。 □

注 3.7。定理 3.6 可能纠正了 [33] 的 2.2（该结果在其中并未被使用）。正如读者所预期的，定理 3.6 将引发关于 Cuntz 半群的一些讨论。事实上，我们将在下一节讨论这一点。不过，让我们以如下推论结束本节。

定义 3.8。设 A 是一个 C^*-代数，且 $b \in A_+$. 。用 $\mathrm{Her}(b) = \overline{bAb}$ 表示 A. 的 $\sim C^*$-遗传子代数。另设 $a \in A_+$. 。如果存在 $x \in A$ 使得 $x^*x = a$ 且 $xx^* \in \mathrm{Her}(b)$，则记作 $a < b$ （见 [15] 以及 [32] 中的这一记号）。

推论 3.9. 设 A 是一个 C^*-代数，且令 $a, b \in A_+$. 。假设 $H_1 = \overline{aA}$ 且 $H_2 = \overline{bA}$.
~ ~
。那么 $a < b$；若存在一个值域在 A中弱稠密的 $T \in B(H_2, H_1)$，且若 $a < b$，则存在一个具有稠密值域的 $T \in B(H_2, H_1)$。

~证明。假设 $a < b$，即存在 $x \in A$ 使得

$$x^*x = a \text{ and } xx^* \in \mathrm{Her}(b) = \overline{bAb}. \tag{e 3.46}$$

那么，对于任意 $c \in A$，$(x^*bc)(x^*bc)^* = x^*bcc^*bx \in \overline{aAa}$. 。由此可得，对于所有$c \in A.$， $x^*bc \in \overline{aA} = H_2$ 。定义 $T\colon H_2 \to H_1$，使得 $T(bc) = x^*bc$ 对所有 $c \in A.$ 成立。那么 $T \in B(H_2, H_1)$。由于 $x^*x = a$，根据 Dini 定理，$x^*b^{1/n}x$ 在范数下收敛到 a 。由于 T 是一个有界模映射，我们得出 $T(H_2)$在 H_1.中稠密。

现在假设存在 $T \in B(H_2, H_1)$，其值域在 H_1. 中是 A-弱稠密的。注意，a 分别是 $K(H_1)$ 的严格正元素，而 b 是 $K(H_2)$ 的严格正元素。由命题 3.4，$b(H_2)$ 在 H_2. 中稠密。因此，$Tb(H_2)$ 在 H_1. 中是 A- 弱稠密的。由命题 3.4 的 (2)，$c = (Tb)(Tb)^*$ 是 $\mathrm{Her}(a)$ 的严格正元素。将 $(Tb)^* = uc^{1/2}$ 在 A^{**}. 中作极分解。于是，对所有 $y \in \overline{aA}$. ，都有 $uy \in A$ 。令 $x = ua^{1/2}$. 。那么

$$x^*x = a \text{ and } xx^* \in K(H_2) = \mathrm{Her}(b). \tag{e 3.47}$$

□

4 希尔伯特模的等价类与稳定秩一

现在我们来讨论使用拟迹度量希尔伯特 A-模的可能性。我们将考虑 4.5 中提出的问题。此外，我们还将讨论这样一种情形：希尔伯特 A-子模的酉等价类可以由 Cuntz 半群确定。

定义 4.1. 设 A 是一个 σ-含幺 C^*-代数。于是可将 $A \otimes \mathcal{K}$ 与 $K(H_A)$ 等同。用 $\mathrm{CH}(A)$ 表示 $[H]$ 个可数生成希尔伯特 A-模的酉等价类（其中 H 是一个可数生成希尔伯特 A-模）。

可将 $[H_1]+[H_2]$ 定义为酉等价类 $[H_1\oplus H_2]$. 。此时 CH(A) 成为一个半群。

设 $a,b\in(A\otimes\mathcal{K})_{+}\cdot$ 若存在 $x\in A\otimes\mathcal{K}$ 使得 $x^*x=a$，且 xx^* 是 Her(b) 中的严格正元素，我们记作 $a\overset{\approx}{\sim}b$。按照 [40] 的术语，$a\overset{\approx}{\sim}b$ 与 [40] 中的 $a\sim b'\cong b$ 相同。

下面的命题说明“$\overset{\approx}{\sim}$”是一种等价关系。

设 $a\in(A\otimes\mathcal{K})_{+}\cdot$。定义 $H_a=\overline{a(H_A)}$。设 H 是一个可数生成的 Hilbert A-模。于是根据 [39]（为方便起见，参见命题 3.2），$K(H)$ 是 σ-含幺的。我们可以将 H 视为 $H_A=l^2(A)$ 的 Hilbert A-子模。设 $b\in K(H)$ 是 $K(H)$ 中的严格正元素。那么，根据命题 3.4，$H_b:=\overline{bH_A}=\overline{bH}=H$. 若 $c\in K(H)$ 是另一个严格正元素，那么 $H_c=H_b$.

设 p_a,p_b 分别为对应于 a 和 b（在 $(A\otimes\mathcal{K})^{**}$ 中）的开投影。若存在 $v\in(A\otimes\mathcal{K})^{**}$ 使得 $v^*v=p_a$ 且 $vv^*=p_b$，并且对于任意 $c\in$ Her(a) 和 $d\in$ Her(b) vc，则定义 $p_a\approx^{cu}p_b$ $v^*d\in A\otimes\mathcal{K}$. 另见 [15] 和 [16]。

我们想提醒读者注意以下陈述。

命题 4.2（[40] 的命题 4.3 和 4.2）。设 A 是一个 σ-含幺 C^*-代数，且 $a,b\in(A\otimes\mathcal{K})_{+}\cdot$。那么以下条件等价。

(1) $a\overset{\approx}{\sim}b$；(2) $p_a\approx^{cu}p_b$；以及 (3) $[H_a]=[H_b]$ 属于 CH(A)。此外，“$\overset{\approx}{\sim}$”是一个等价关系。

4.3. 根据 [9], 第 4 小节，有一些稳定有限且可分的 C^*-代数 A，其中包含正元 $a\sim b$，它们属于 Cu(A)，但 $a\overset{\approx}{\not\sim}b$.

4.4. (1) 设 A 是一个稳定秩一的 σ-含幺 C^*-代数。根据 [11]定理 3，$a\sim b$ 属于 Cu(A) 当且仅当 H_a 和 H_b 酉等价。我们可以问，反过来是否成立。定理 4.9 对这个问题给出了部分答案。

(2) 设 A 是一个 σ-含幺简单 C^*-代数，Ped(A) 是它的 Pedersen 理想。设 $a\in$Ped(A) $\cap A_+$. 那么，根据 Brown 稳定同构定理（[4]），Her(a) $\otimes\mathcal{K}\cong A\otimes\mathcal{K}$。注意，Her($a$) 是代数简单的。为了研究 A 的 Cuntz 半群，或半群 CH(A)，可以考虑 Her(a)，而不是 A.

(3) 现在假设 A 是代数简单的。令 $QT(A)$ 表示定义在 $A\otimes\mathcal{K}$. 的 Pedersen 理想上的所有 2-拟迹的集合。令 $QT(A)$ 表示满足 $\|\tau|_A\|=1$. 的 2-拟迹 $\tau\in QT(A)$ 的集合。假设 $QT(A)\neq\emptyset$. 。由 [20] 的命题 2.9 可知，$0\notin QT(A)^w$. 。回忆一下，$QT(A)^w$ 是一个紧集（见 [20] 的命题 2.9）。

用 Aff$_+$($QT(A)^w$) 表示紧凸集 $QT(A)^w$ 上所有满足 $f=0$ 的连续仿射函数 f 的集合，或者说，满足 $f(\tau)>0$ 的函数集合，其中对所有 $\tau\in QT(A)^w$. 均成立。令 LAff$_+$($QT(A)^w$) 表示 $QT(A)^w$ 上所有下半连续仿射函数 f 的集合，其中存在 $f_n\in$Aff$_+$($QT(A)^w$) 使得 $f_n\nearrow f$（逐点成立）。我们允许 f 取值 ∞.

(4) 下文中，对任意 $0<\delta<1$，记 f_δ 为 $C([0,\infty))$ 中的一个函数，满足 $0\le f_\delta(t)\le 1$对所有 $t\in[0,\infty)$ $f_\delta(t)=0$当 $t\in[0,\delta/2]$, $f_\delta(t)=1$当 $t\in[\delta,\infty)$，且 $f_\delta(t)$ 在 $(\delta/2,\delta)$ 上是线性的。

令 $a,b\in(A\otimes\mathcal{K})_{+}\cdot$ 定义

$$d_\tau(a)=\lim_{n\to\infty}\tau(f_{1/n}(a))\ \text{ for all }\ \tau\in\widetilde{QT}(A).$$

注 $f_{1/n}(a)\in$ Ped(A)$_+$ 对于每个 $n\in\mathbb{N}$.

(5) 设 A 是一个代数简单的 C^*-代数，且具有 $QT(A) \neq \emptyset$.。如果对任意 $a, b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$, $d_\tau(a) < d_\tau(b)$, 对所有 $\tau \in QT(A)^w$都成立时，可推出 $a \lesssim b$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，则称 A 具有严格比较性质（Blackdar 意义下，参见 [3]）。

(6) 如果存在 $0 < r < \infty$，使得对于任意 a、$b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$、$a \lesssim b$，只要对所有 $\tau \in QT(A)^w$ 都有 $d_\tau(a) + r < d_\tau(b)$（见 [50]），就称 A 具有有限比较半径。

若 A 是一个 σ-含幺简单但非代数简单的代数，我们可以选取一个非零元素 $e \in \mathrm{Ped}(A)_+$，并考虑 $\mathrm{Her}(a) \otimes \mathcal{K} \cong A \otimes \mathcal{K}$.。若 $\mathrm{Her}(e)$ 具有严格比较（或具有有限比较半径），则称 A 具有严格比较（或具有有限比较半径）。需要注意的是，这一定义不取决于 e. 的选择。注意，在上述两种情形中，我们总是假设 $QT(A) \neq \{0\}$。

4.5. 本节将讨论以下问题：假设对于所有 $\tau \in QT(A)^w$.， $d_\tau(b)$ 都远大于 $d_\tau(a)$。是否可以推出 $a \precsim b$? 或者等价地， H_a 是否酉等价于 H_b 的一个 Hilbert A-子模?

4.6. (7) 定义映射 $\Gamma: \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{LAff}_+(QT(A)^w)$, 使得对所有 $\tau \in QT(A)^w$., 都有 $\Gamma([a])(\tau) = \widehat{[a]}(\tau) = d_\tau(a)$。

(8) M. Rordam [46] 证明了：对于含幺有限单的 C^*-代数 A，若 A是 $\mathcal{Z}$-稳定的，则 A 具有稳定秩一。Robert [44] 证明了，任意 σ-含幺、单、稳定无投影且 $\mathcal{Z}$-稳定的 C^*-代数 A 都具有几乎稳定秩一。最近有结果表明，任意 σ-含幺有限单的 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数都具有稳定秩一（见 [21]）。

Toms-Winter 猜想的一部分指出，对于可分可和的单 C^*-代数 A， A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，当且仅当 A具有严格比较。由 [46] 和 [18]可知，若 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，则 A 具有严格比较，且 Γ 是满射。尚未解决的问题是：具有严格比较的可分可和单 C^*- 代数 A 是否总是 $\mathcal{Z}$- 稳定的。人们正稳步推进这一遗留问题的解决（例如 [28], [47], [52], [55],[48], [14], [36] 和 [37], ）。

由于严格比较是 $\mathrm{Cu}(A)$ 的一个性质，我们可以提出这样的问题：一个可分、可和、简单的 C^*-代数 A，如果其 $\mathrm{Cu}(A)$ 的行为类似于一个可分、简单的 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数，那么它实际上是否是 $\mathcal{Z}$-稳定的? 更准确地说，假设 A 是一个可分、简单的 C^*-代数，满足 $\mathrm{Cu}(A) = V(A) \sqcup (\mathrm{LAff}_+(QT(A)) \setminus \{0\}) = \mathrm{CH}(A)$，其中 $V(A)$ 是 $\mathrm{Cu}(A)$ 中由投影表示的元素构成的子半群，也就是说， A 具有严格比较， Γ是满射，且 $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{CH}(A)$。问题是，如果我们还假设 A可和，这样的 A 是否是 $\mathcal{Z}$-稳定的。定理 4.9 表明，这类 C^*-代数总是具有稳定秩一；证明方法是指出这些 C^*-代数具有迹近似振荡为零的性质（见 4.7）。还应提及的是，若 A 是一个可分、含幺、简单且稳定秩一的 C^*-代数，那么 Γ 是满射（见 [48]和 [2]）。

为了陈述下一个引理，我们先回顾一下迹近似振荡为零的定义。

定义 4.7. 设 A是一个带有 $QT(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.的 C^*-代数。设 $S \subset QT(A)$ 是一个紧子集。对每个 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，定义

$$\omega(a)|_S = \lim_{n\to\infty} \sup\{d_\tau(a) - \tau(f_{1/n}(a)) : \tau \in S\} \tag{e 4.48}$$

（见 [17]中的 A1 和 [20]中的定义 4.1）。我们假设 A是代数简单的，并且只考虑 $S = QT(A)^w$ 的情形；在这种情况下，本文中我们将用 $\omega(a)$ 代替 $\omega(a)|_{QT(A)^w}$。需要指出的是， $\omega(a) = 0$ 当且仅当 $d_\tau(a)$ 在 $QT(A)^w$. 上连续（且有限）。

在这种情况下（例如，当 $\|a\|_{2,\overline{QT(A)}^w} < \infty$， $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K})$ 时），如果存在一个序列 $b_n \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K}) \cap \mathrm{Her}(a)_+$ 使得 $\|b_n\| \le \|a\|$, 我们记作 $\Omega^T(a) = \Omega^T(a)|_S = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \omega(b_n) = 0 \text{ and } \lim_{n\to\infty} \|a - b_n\|_{2,\overline{QT(A)}^w} = 0, \tag{e 4.49}$$

其中 $\|x\|_{2,\overline{QT(A)}^w} = \sup\{\tau(x^*x)^{1/2}\colon\ \tau \in \overline{QT(A)}^w\}$（参见 [20] 的命题 4.8）。如果 $\omega(a) = 0$, 那么 $\Omega^T(a) = 0$（参见 [20] 的定义 4.7 后的段落）。

即使 A 不是代数简单的（但 σ 含幺且简单），我们仍可固定一个非零元素 $e \in \mathrm{Ped}(A) \cap A_+$（使得 $\mathrm{Her}(e) \otimes \mathcal{K} \cong A \otimes \mathcal{K}$），并选取 $S = QT(\mathrm{Her}(e))^w$.。于是，对任意 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，若有 $\|a\|_{2,\,S} < \infty$, 则当 $\Omega^T(a) = 0$ 时，我们记作 $\Omega^T(a)|_S = 0$（这不依赖于 e 的选取，见 [20] 的命题 4.9）。

若一个 σ 含幺简单 C^*-代数 A 满足：对每个正元 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K})$, 都有 $\Omega^T(a) = 0$, 则称其具有迹近似振荡为零。

引理 4.8. 设 A 是一个 σ 含幺、代数简单的 C^*-代数，满足 $QT(A) \neq \emptyset$、严格比较，且 Γ. 满射。对于任意 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，存在 $b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，使得 $\Gamma([a]) = \Gamma([b])$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，且 $\Omega^T(b) = 0$.

证明。回顾一下，我们假设 $QT(A) \neq \emptyset$. 令 $g \in \mathrm{LAff}_+(\overline{QT(A)}^w)$ 满足 $\widehat{[a]} = g$.存在一个递增的 $g_n \in \mathrm{Aff}_+(QTA)$ 序列，使得 $g_n \nearrow g$（逐点成立）。

令 $f_1 = g_1 - 1/4\ g_1 \in \overline{QT\ A}^w$. $\alpha_1 = 1/4.$ $g_2\ \tau > f_1\ \tau$ $\tau \in \overline{QT\ A}^w$. $0 < \alpha_2 < 1/2^{2+1}$ $1 - \alpha_2\ g_2\ \tau > f_1\ \tau$ $\tau \in \overline{QT\ A}^w$.
并且 对所有 ( )，都有 ( ) ( )。选取 使得对所有 ( )，都有 ( ) ( ) ( )。令

$f_2 = 1 - \alpha_2\ g_2.$ $0 < \alpha_i < 1/2^{2+i}$ $i = 1\ 2\ \ldots\ n$ $1 -$ ( )。假设已选取 , , , ,, $\alpha_{i+1}\ g_{i+1}\ \tau > 1 - \alpha_i\ g_i\ \tau$ $\tau \in \overline{QT\ A}^w$ $i = 1\ 2\ \ldots\ n-1.$ $g_{n+1}\ \tau > 1 - \alpha_n\ g_n\ \tau$
使得对所有 ( )，都有 ( ) ( ) ( ) ( )。于是对所有 $\tau \in QT(A)^w$.，都有 ( ) ( ) ( )。选取 $0 < \alpha_{n+1} < 1/2^{2+n}$ 使得对于所有 $1 - \alpha_{n+1}$, $g_{n+1}(\tau) > (1 - \alpha_n) g_n(\tau)$。定义 $f_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1}) g_{n+1} \in \mathrm{Aff}_+(\overline{QT(A)}^w)$。通过归纳法，我们得到一个严格递增的 $f_n \in \mathrm{Aff}_+(QT(A)^w)$ 序列，使得 $f_n \nearrow g$.

定义 $h_1 = f_1$ 和 $h_n = f_n - f_{n-1}$，对于 $n \geq 2.$，则 $h_n \in \mathrm{Aff}_+(\overline{QT(A)}^w)$ 且 $g = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$（逐点收敛）。由于 Γ 是满射，存在 $a_n \in (A \otimes \mathcal{K})_+$ 使得 $[a_n](\tau) = d_\tau(a_n) = h_n,\ \ n \in \mathbb{N}.$。我们可以假设，当 $i \neq j.$ 时，$a_i a_j = 0$。定义 $b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$ 为 $b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n.$

Then $\widehat{[b]} = g.$ 换句话说，$\Gamma([a]) = \Gamma([b])$。

对于每个 $m \in \mathbb{N}$, 由于 $[a_n]$ 在 $QT(A)^w$ 上连续（根据 [20] 的引理 4.5），选取 $e_{n,\,m} \in \mathrm{Her}(a_n)$，使得 $0 \leq e_{n,\,m} \leq 1$ 满足 $\{e_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 构成一个近似单位（对于 $\mathrm{Her}(a_n)$），

$$d_\tau(a_n) - \tau(e_{n,m}) < 1/2^{n+m} \text{ for all } \tau \in \overline{QT(A)}^w, \text{ and } \omega(e_{n,m}) < 1/2^{n+m}. \tag{e 4.50}$$

定义 $e_n = \sum_{j=1}^{n} e_{j,\,n}$. 由于 $a_i a_j = 0$，若 $i \neq j$，则有 $0 \leq e_n \leq 1$，且 $\{e_n\}$ 构成 $\mathrm{Her}(b)$ 的近似单位。根据 [20], 的命题 4.4 的 (2)，我们计算得

$$\omega(e_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \omega(e_{j,n}) < \sum_{j=1}^{n} 1/2^{j+n} = 1/2^n. \tag{e 4.51}$$

因此 $\lim_{n\to\infty} \omega(e_n) = 0$，并且根据 [20], 的命题 5.7，$\Omega^T(b) = 0.$ □

定理 4.9. 设 A 是一个 σ-含幺单 C^*-代数，具有严格比较性质，且 Γ 满射（但不是纯无穷的）。则下列条件等价:

(1) 对任意 a, $b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$, $[a] = [b]$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，当且仅当 $a \approx b$；(2) A 具有稳定秩一；(3) $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{CH}(A)$；(4) 对任意 a, $b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$, $[a] = [b]$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，当且仅当 Hilbert A-模 H_a 和 H_b 酉等价。

证明。(2) ⇒ (3) 由 [11] 的定理 3 得出。(3) ⇔ (4) 根据定义得出。

(1) $\Leftrightarrow$(4) 由命题 4.2 得出。

(3) $\Rightarrow$ (2)：我们将证明 A 具有迹近似振荡为零（参见 [20]的定义 5.1）。

设 $a \in (\mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K}))_+$ 且 $0 \le a \le 1$. 假设 $\Gamma([a])$ 连续。那么 $\omega([a]) = 0$.因此 $\Omega^T(a) = 0$. 现在假设 $\Gamma([a])$ 不连续。特别地， $[a]$ 不能表示为投影。根据引理 4.8，存在 $b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$ 使得 $\Omega^T(b) = 0$ 且$\Gamma([a]) = \Gamma([b])$。由于我们现在假设 $\Gamma([a])$ 不连续， $\Gamma([b])$ 也不连续。因此，$[a]$ 和 $[b]$ 都不能表示为投影。由于我们假设 A 具有严格比较，这意味着 $[a] = [b]$.

由于 (3) 成立， $\overline{a(H_A)}$ 与 $\overline{b(H_A)}$ 酉等价。我们已证明 (3) $\Leftrightarrow$(4) 以及 (1) $\Leftrightarrow$(4)。根据命题 4.2，存在部分等距 $v \in (A \otimes \mathcal{K})^{**}$ 使得对所有 $c \in \overline{b(A \otimes \mathcal{K})b}$，都有 $v^*cv \in a(A \otimes \mathcal{K})a$ ，且 v^*bv 是 $\overline{a(A \otimes \mathcal{K})a}$. 的严格正元素。因此 $\Omega^T(a) = 0$.由于这对每个 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K})$ A 都成立，故其具有迹近似振荡为零。根据 [20]的定理 9.4， A 具有稳定秩一，即 (2) 成立。 □

我们以对 4.5 中问题的以下部分回答来结束本节。注意，$d_\tau(b)$ 已经尽可能大。

定理 4.10. 设 A 是一个具有有限比较半径的 σ-含幺简单 C^*-代数。假设 $\widetilde{\ }$，存在 a、$b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，使得对所有 $\tau \in \widetilde{QT}(A) \setminus \{0\}.$，均有 $d_\tau(b) = \infty$。那么

(1) $a < b$ ，且 H_a 与 H_b 的一个正交直和项酉等价；(2) 作为 Hilbert A-模，$H_b \cong H_A$ ；以及 (3) $\mathrm{Her}(b) \cong A \otimes \mathcal{K}$.

证明. 令 $B = \overline{b(A \otimes \mathcal{K})b}.$。我们来证明 B 是稳定的。我们将使用 [25] 对稳定 C^*-代数的刻画。此外，我们还要用到以下事实：若 A 的比较半径有限，且存在 c、$b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，使得对所有 $\tau \in \widetilde{QT}(A) \setminus \{0\}$，均有 $d_\tau(d) < \infty$ 且 $d_\tau(b) = \infty$，那么 $d \lesssim b$.

取 $c \in B_+$ ，使得存在 $e \in B_+$ ，满足 $ec = c.$。在由 c 和 e 生成的交换 C^*-子代数中进行讨论，我们得出：若 $0 < \delta < 1/2$，则 $f_\delta(e)c = c.$

取 $b_1 := (1 - f_{1/8}(e))^{1/2} b (1 - f_{1/8}(e))^{1/2}.$。于是

$$b_1 c = c b_1 = 0. \tag{e 4.52}$$

注意到 $f_{1/16}(e) \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathcal{K})_+ \cdot$。因此

$$d_\tau(f_{1/8}(e)) \le \tau(f_{1/16}(e)) < \infty \text{ for all } \tau \in \widetilde{QT}(A).$$

我们还有

$$b \lesssim b^{1/2}(1 - f_{1/8}(e))b^{1/2} \oplus b^{1/2} f_{1/8}(e) b^{1/2}. \tag{e 4.53}$$

由于 $b^{1/2} f_{1/8}(e) b^{1/2} \lesssim f_{1/8}(e)$，于是对所有 $\tau \in \widetilde{QT}(A)$，都有 $d_\tau(b^{1/2} f_{1/8}(e) b^{1/2}) < \infty$。因此

$$d_\tau(b_1) = d_\tau(b^{1/2}(1 - f_{1/8}(e))b^{1/2}) = \infty \text{ for all } \tau \in \widetilde{QT}(A) \setminus \{0\}. \tag{e 4.54}$$

由于 A 具有有限比较半径，如上所述，我们有

$$f_{1/8}(e) \lesssim b_1. \tag{e 4.55}$$

根据 [45]的引理 2.2，存在 $x \in A \otimes \mathcal{K}$ 使得

$$x^* x = f_{1/16}(f_{1/8}(e)) \text{ and } x x^* \in \mathrm{Her}(b_1). \tag{e 4.56}$$

设 $x = v|x|$ 是 x 在 A^{**}. 中的极分解。则 φ： 由 $\varphi(d) = vdv^*$ 定义的 Her($f_{1/6}(f_{1/8}(e))$) $\to$ Her(b_1)，对所有 $d \in$Her($f_{1/6}(f_{1/8}(e))$)，都是同态。注意到 $f_{1/6}(f_{1/8}(e)) \le f_{1/4}(e)$，且 $f_{1/4}(e)$ $c = c.$ 置 $y = vc^{1/2}.$。于是 $y \in A \otimes \mathcal{K}$ 且 $y^*y = c$，以及 $yy^* \in$ Her(b_1)。因此

$$c = yy^* \text{ and } c \perp yy^*. \tag{e 4.57}$$

由于 c 是在 B_+ 中任意选取的，且具有存在 $e \in B_+$ 使得 $ec = c$ 的性质，由 [25] 的定理 2.1 可知 B 是稳定的。根据 Brown 稳定同构定理（[4]），$B \cong A \otimes \mathcal{K}.$。这就证明了 (3)。

由于 B 是稳定的，存在一列两两正交的非零元素 $b_{0,\ n} \in B_+(n \in \mathbb{N})$，使得 $b_{0,\ 1} \overset{\approx}{\sim} b_{0,\ n}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，并且 $b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,\ n}/n \in B$ 是一个严格正元素。我们有 $H_{b_{0,\ n}} \cong H_{b_{0,\ m}}$ 对所有 n 都成立，$m \in \mathbb{N}.$。因此，作为 Hilbert A-模，$H_b = H_{b_0} \cong l^2$ 与 H_{b_0} 等价。由 [29] 的命题 7.4，$l^2(H_{b_0}) \cong l^2(A)$ 与 $= H_A$ 作为 Hilbert A-模同构。这就证明了 (2)。

对于 (1)，由于我们已经证明了 $H_b \cong H_A$，因此可以应用 Kasparov 吸收定理（[26]）。

□

5 投射 Hilbert 模

本节的主要结果是定理 5.6，它指出，对于可分的 C^*-代数 A，每个可数生成的 Hilbert A-模都是投射的。

注意，在下述陈述中，我们使用了 $B(H) = LM(H)$ 这一事实（参见 [33] 的定理 1.5）。

引理 5.1. 设 A 是一个 C^*-代数，且 H 是 Hilbert A-模。假设 $T \in B(H)$ 是一个有界模映射，满足 $T(H)$ 是 H 的 Hilbert A-子模，并且 $L \in LM(K(H))$ 是相应的左乘子。那么 $LK(H) = K(T(H))$。

证明. 令 $H_1 = T(H)$ 和 $F(H)$ 为形如 $\theta_{x,\ y}$ 的有界模映射的线性张成，其中 $x, y \in H.$。注意，对所有 $b \in K(H)$ 和 $x \in H.$，都有 $Lb(x) = Tb(x)$

令 $\xi, \zeta \in H_1 \subset H.$。由于 T: $H \to H_1$ 是满射，存在 $x \in H$ 使得 $T(x) = \xi.$。于是$T \circ \theta_x$, $\zeta = \theta_{\xi,\zeta} \cdot$。这意味着 $LF(H) = F(H_1)$。令 $H_0 =$ker$T$ 为 $H.$ 的 Hilbert 子模。于是 $K(H_0) \subset K(H)$ 是 $K(H)$ 的一个遗传 C^*- 子代数（参见 [33] 中的引理 2.13 ）。令 p 为 $K(H)^{**}$ 中对应于 $K(H_0)$ 的开投影。于是（必要时在 $H^\sim$ 中进行）$Lp = 0$，且对所有 $b \in K(H)$，$Lb = L(1-p)b$。我们将 H/H_0 与 $(1-p)H$ ($\subset H^\sim$) 等同。令$\mathcal{T}$: $(1-p)H \to H_1$ 为由 T 诱导的有界模映射；由于 T 是满射，该映射存在有界逆$\tilde{T}^{-1}$。注意，对所有 $z \in H.$，$\tilde{T}^{-1}(T(z)) = (1-p)z$。

为了证明 $T(K(H)) = K(H_1)$，固定 $S \in K(H_1)$。设 $S_n \in F(H_1)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0.$由于 $LF(H) = F(H_1)$，我们可以选取 $F_n \in F(H)$ 使得 $LF_n = S_n n \in \mathbb{N}.$ 于是，对于任意 $x \in H$, $\tilde{T}^{-1}(LF_n(x)) = (1-p)F_n(x)$。

我们断言 $\{(1-p)F_n\}$ 在范数意义下收敛到形如 $(1-p)b$ 的元素，其中某个$b \in K(H)$。注意，对于任意 $n, m \in \mathbb{N}$，以及任意 $x \in H$,

$$\|(1-p)F_n(x) - (1-p)F_m(x)\| = \|\tilde{T}^{-1}(LF_n(x) - LF_m(x))\| \le \|\tilde{T}^{-1}\|\|S_n - S_m\|\|x\|$$

这意味着 $\{(1-p)F_n\}$ 在范数意义下是柯西列，因此必定收敛到形如 $(1-p)b$ 的元素，其中某个 $b \in K(H)$，因为 $(1-p)K(H)$ 是闭集。由此可知，对于任意 $b \in K(H)$,

$$Lb = L(1-p)b = \lim_{n\to\infty} L(1-p)F_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

这表明 $LK(H) = K(H_1)$。

□

定义 5.2。设 H 和 H_1 是 Hilbert A-模，且 $T: H_1 \to H$ 是一个满射有界˜模映射。那么 T 诱导出一个可逆有界映射 $T: H_1/\ker T \to H$，它从 Banach A-模 $H_1/\ker T$ 映到 $H.$。记 $\tilde{T}^{-1}: H \to H_1/\ker T$ 为其逆映射（它也是有界的）。

定理 5.3. 设 A 是一个 σ-含幺 C^*-代数。

对于任意可数生成的 Hilbert A-模 H_1、H_2、H_3，以及任意有界模映射 $T_1: H_1 \to H_3$ 和 $T_2: H_2 \to H_3.$。假设 T_1 是满射，则存在一个有界模映射 $T_3: H_2 \to H_1$，使得

$$T_1 \circ T_3 = T_2.$$

此外，$\|T_3\| = \|\tilde{T}_1^{-1} \circ T_2\|.$

证明. 不失一般性，我们可以假设 $\|T_2\| = 1.$。设 $H_4 = H_1 \oplus H_A$、$H_5 = H_2 \oplus H_A$ 和 $H_6 = H_3 \oplus H_A.$。令 $T_4 = T_1 \oplus \mathrm{id}_{H_A}: H_4 \to H_6$ 和 $T_5 = T_2 \oplus \mathrm{id}_{H_A}: H_5 \to H_6$。假设 T_1 是满射，则 T_4 是满射。假设存在一个有界模映射 $T': H_5 \to H_4$，使得

$$T_4 \circ T' = T_5 \text{ and } \|T'\| = \|\tilde{T}_4^{-1} \circ T_5\|$$

计算可得

$$\|\tilde{T}_4^{-1} \circ T_5\| = \|\tilde{T}_1^{-1} \circ T_2\|.$$

此外还有

$$T_4 \circ T'|_{H_2} = T_5|_{H_2} = T_2.$$

由于值域$(T_2) \subset H_3$, $T_4(T'(H_2)) = T_5(H_2) \subset H_3$. 令 $P_1: H_4 \to H_1$, $P_{H_A}: H_4 \to H_A$和 $P_3: H_6 \to H_3$为正交投影。于是 $P_3 \circ T_4 \circ T'|_{H_2} = T_2$. 记作 $T' = P_1T' + (1_{H_4} - P_1)T'$. 注意到 $1_{H_4} - P_1 = P_{H_A}$和 $P_3T_4(1_{H_4} - P_1) = 0$. 于是

$$\begin{aligned} P_3 \circ T_4 \circ T'|_{H_2} &= P_3 \circ T_4 \circ P_1 \circ T'|_{H_2} + P_3 \circ T_4 \circ (1_{H_4} - P_1) \circ T'|_{H_2} && (\text{e } 5.58) \\ &= P_3 \circ T_4 \circ P_1 \circ T'|_{H_2} + 0 && (\text{e } 5.59) \\ &= T_1 \circ P_1 \circ T'|_{H_2}. && (\text{e } 5.60) \end{aligned}$$

定义 $T = P_1 \circ T'|_{H_2}$. 于是，由 (e 5.60),

$$T_1 \circ T = T_2 \text{ and } \|T\| = \|P_1 \circ T'|_{H_2}\| = \|\tilde{T}_1^{-1} \circ T_2\|. \quad (\text{e } 5.61)$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $H_1 \cong H_2 \cong H_3 = H_A$. 令 $B = A \otimes \mathcal{K}$. B是一个 σ-含幺 C^*-代数。我们将 T_1视为从 H_A到 H_A.的有界模映射。令$H_0 = \ker T_1$. 于是 H_0是 H_A的希尔伯特 A-子模，并且 $K(H_0) \subset K(H_A) = B$是一个遗传$C^*$-子代数（参见 [33]中的引理 2.13）。令 $p \in B^{**}$ 为与遗传 C^*-子代数 $K(H_0)$ 对应的开投影。令 $L_1 \in LM(B)$由有界模映射T_1 给出（参见 [31]中的定理 1.5）。注意，对所有 $z \in H_A$ 和 $b \in B.$，$L_1b(z) = T_1(b(z))$。对于任意$a \in \overline{K(H_0)} \subset B$, $L_1a = 0$. 因此 $L_1p = 0$ 且 $L_1(1-p) = L_1$.

令 $J = \overline{K(H_0)B}$ 为 $K(H_A) = B.$ 的右理想。考虑商 Banach B-˜模 $B/J.$。注意，模映射 $b \mapsto (1-p)b$ 是等距映射。因此，我们可以将˜B/J 与 $(1-p)B.$ 视为相同。定义 $L_1: B/J \to B$，使得 $L_1((1-p)b) = L_1b$，其中 $b \in B.$。将 B 视为 Hilbert B-模，可得 $K(B) = B.$。由引理 5.1，将 B 视为 Hilbert B-模，可得˜$L_1B = L_1K(B) = K(B) = B.$。由此可知，$L_1$ 也是满射，因此作为有界线性映射具有有界逆。记其逆为 $\tilde{L}_1^{-1}.$。注意，对于 $b \in B$，有 $\tilde{L}_1^{-1}L_1b = (1-p)b$（回忆一下，$L_1$ 是满射）。特别地，$\tilde{L}_1^{-1}$是从 $K(H_A) = B$ 到 $(1-p)B.$的有界模映射。

我们也可以使用这一识别 $H_A/H_0 = (1-p)H_A.$。现在，T_1诱导出一个有界模映射 $\tilde{T}_1$，从 $(1-p)H_A$映到 H_A，且该映射有有界逆 $\tilde{T}_1^{-1}.$。设 $L_2 \in LM(B)$ 由.....给出

有界模映射 T_2. 。那么，映射 $L_2\colon B\to B$ 定义为 $L_2(b)=L_2b$，对所有 $b\in B$ 都成立，是一个从 B 到 $B=K(H_A)$ 的有界 B-模映射。

考虑有界的 B-模映射 $\tilde{L}_1^{-1}\circ L_2\colon B\to B/J$. 于是，根据 [6], 的 3.11，存在有界模映射 $L:B\to B$，使得

$$(1-p)L=\tilde{L}_1^{-1}\circ L_2 \text{ and } \|L\|=\|\tilde{L}_1^{-1}\circ L_2\|. \tag{e 5.62}$$

˜由此可得 $L_1(1-p)L=L_2$. 回顾一下， $L_1(1-p)=L_1$. 因此

$$L_1\circ L=L_2. \tag{e 5.63}$$

我们将 L 视为 $LM(B)$ 中的左乘子（参见 [31] 的定理 1.5）。令 $T\colon H_1=H_A\to H_A=H_3$ 为由 L 给出的有界模映射（再次参见 [31] 的定理 1.5）。于是我们得到

$$T_1\circ T=T_2 \text{ and } \|T\|=\|\tilde{T}_1^{-1}\circ T_2\|. \tag{e 5.64}$$

B 层面的交换图可示意如下（其中 $\pi:B\to B/J$ 是由（$1-p$）给出的商映射）

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow_{L_2} \quad \searrow^{L} \\ & & B \quad \twoheadleftarrow^{L_1} \quad B \\ & \tilde{L}_1^{-1} & \updownarrow_{\tilde{L}_1} \quad \swarrow_{\pi} \\ & & B/J \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow^{L} & B \\ {\scriptstyle \tilde{L}_1^{-1}L_2}\downarrow & \swarrow_{\pi} & \\ B/J & & \end{array}.$$

□

推论 5.4. 设 A是一个 σ-含幺 C^*-代数，并设

$$0\to H_1\to^{\iota} H_2\to^{s} H_3\to 0$$

是 Hilbert A-模的短正合列，且这些模均为可数生成。则该列分裂。此外，分裂映射 $j\colon H_3\to H_2$ 具有 $\|j\|=\|\tilde{s}^{-1}\|$.

证明。考虑如下图:

$$\begin{array}{ccc} & & H_2 \\ & & \downarrow_{s} \\ H_3 & \overset{\mathrm{id}_{H_3}}{\twoheadrightarrow} & H_3 \end{array}$$

根据定理 5.3，存在一个有界模映射 $T\colon H_3\to H_2$ 使得

$$s\circ T=\mathrm{id}_{H_3} \text{ and } \|T\|=\|\tilde{s}^{-1}\|.$$

□

我们需要下面这个引理，但作者未能找到相关参考文献。

引理 5.5. 设 X 是一个巴拿赫空间， H 是一个可分巴拿赫空间。假设 $T\colon X\to H$ 是满有界线性映射。那么存在一个可分子空间 $Y\subset X$，使得 $TX=H$.

证明. 注意，开映射定理适用于此处。由开映射定理（或其证明）可知，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $a > 0$， $T(B(0,a))$ 在 $O(0,a\delta)$ 中稠密，其中 $B(0,a) = \{x \in X : \|x\| \le a\}$，且 $O(0,b) = \{h \in H : \|h\| < b\}$. 。对于每个有理数 $r > 0$，由于 H 可分，可取一个可数集 $E_r \subset B(0,r)$，使得 $T(E_r)$ 在 $O(0,r\delta)$ 中稠密。令 Y 为由 $\cup_{r\in\mathbb{Q}_+} E_r$. 生成的闭子空间

设 $d = \delta/2$ 且令 $y_0 \in O(0,d)$。则 $T(Y \cap B(0,1/2))$ 在 $O(0,d)$ 中稠密。选取 $\xi_1 \in Y \cap B(0,1/2)$ 使得

$$\|y_0 - T\xi_1\| < \delta/2^2. \tag{e 5.65}$$

特别地,

$$y_1 = y_0 - T\xi_1 \in O(0,\delta/2^2). \tag{e 5.66}$$

由于 $T(Y \cap B(0,1/2^2))$ 在 $O(0,\delta/2^2)$ 中稠密，因此可得到 $\xi_2 \in Y \cap B(0,1/2^2)$ 使得

$$\|y_1 - T\xi_2\| < \delta/2^3. \tag{e 5.67}$$

换句话说,

$$y_2 = y_1 - T\xi_2 = y_0 - (T\xi_1 + T\xi_2) \in O(0,\delta/2^3). \tag{e 5.68}$$

继续这一过程，可得到一个元素序列 $\{\xi_n\} \subset Y$，使得 $\xi_n \in B(0,1/2^n)$ 且

$$\|y_0 - (T\xi_1 + T\xi_2 + \cdots + T\xi_n)\| < \delta/2^{n+1},\ \ n = 1,2,.... \tag{e 5.69}$$

定义 $\xi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$. 注意到该和在范数意义下收敛，因此 $\xi_0 \in Y$. 根据 T的连续性,

$$T\xi_0 = y_0. \tag{e 5.70}$$

这意味着 $T(Y) \supset O(0,d)$。由此可得 $T(Y) = H$. □

定理 5.6. 设 A 是一个可分的 C^*代数。那么，每个可数生成的 Hilbert A-模在以下意义下都是投射的:

对于任意 Hilbert A-模 H_1、H_2、H_3，以及任意有界模映射 $T_1 : H_1 \to H_3$和 $T_2 : H_2 \to H_3$. ，假设 T_1 是满射且 H_2 是可数生成的，则存在一个有界模映射 $T_3 : H_2 \to H_1$，使得

$$T_1 \circ T_3 = T_2.$$

此外， $\|T_3\| = \|\tilde{T}_1^{-1} \circ T_2\|$.

上述陈述可以说明如下:

$$\begin{array}{ccc} H_2 & & \\ {\scriptstyle T_2}\downarrow & \searrow^{T_3} & \\ H_3 & \xleftarrow[T_1]{} & H_1 \end{array} \tag{e 5.71}$$

证明。设 H_3' 是由 $T_2(H_2)$ 生成的希尔伯特 A-模。由于 H_2 可数生成，因此 H_3'. 也可数生成。由于 A 可分， H_3' 也可分。令 $H_1' = T^{-1}(H_3')$ 为 H_3' 在 T_1. 下的原像。因此， $T_1|_{H_1'}$: $H_1' \to H_3'$ 是满射。于是，根据引理 5.5，存在 $S \subset H_1'$ 的一个可分巴拿赫子空间，使得 $T_1(S) = H_3'$. 。令 $\{x_n\}$ 为 S. 的一个稠密子集。定义 H_1'' 为 span$\{x_n a$: $a \in A, n = 1, 2, ...\}$. 的闭包。于是 H_1'' 是一个可数生成的希尔伯特 A-模。此外，$S \subset H_1'' \subset H_1' \subset H_1$. 。但是 $T_1(S) = H_3'$. 。因此， $T_1(H_1'') = H_3'$. 。我们有如下图:

$$\begin{array}{ccc} & & H_2 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_2} \\ H_3'' & \xleftarrow[T_1]{} & H_1'' \end{array} \tag{e 5.72}$$

现在， H_1'、 H_2 和 H_3'' 都是可数生成的。由 5.3，存在 T_3: $H_2 \to H_1'' \subset H_1$ ，使得

$$T_1 \circ T_3 = T_2 \text{ and } \|T_3\| = \|\tilde{T}_1^{-1} \circ T_2\|. \tag{e 5.73}$$

□

推论 5.7。设 A是一个可分的 C^*-代数，并设

$$0 \to H_1 \to^{\iota} H_2 \to^{s} H_3 \to 0$$

是 Hilbert A-模的短正合列。假设 H_3 是可数生成的。那么该短正合列分裂。此外，分裂映射 j: $H_3 \to H_2$ 具有 $\|j\| = \|\tilde{s}^{-1}\|$.

推论 5.8。设 A是一个可分的 C^*-代数。

(1) 假设 H 是一个可数生成的 Hilbert A-模。那么，对于任意 Hilbert A-模的短正合列

$$0 \to H_0 \xrightarrow{j} H_1 \xrightarrow{s} H_2 \to 0,$$

都有如下短正合列:

$$0 \to B(H, H_0) \xrightarrow{j_*} B(H, H_1) \xrightarrow{s_*} B(H, H_2) \to 0,$$

其中 $j_*(\varphi) = j \circ \varphi$ 适用于 $\varphi \in B(H, H_0)$，而 $s_*(\psi) = s \circ \psi$ 适用于 $\psi \in B(H, H_1)$。

(2) 假设 H_2 是可数生成的。那么，对于任意希尔伯特 A-模 H，以及任意希尔伯特 A-模的短正合列:

$$0 \to H_0 \xrightarrow{j} H_1 \xrightarrow{s} H_2 \to 0,$$

有如下分裂短正合列

$$0 \to B(H, H_0) \xrightarrow{j_*} B(H, H_1) \xrightarrow{s_*} B(H, H_2) \to 0, \tag{e 5.74}$$

证明。对于 (1)，我们只需证明 s_* 是满射的。设 $\psi \in B(H, H_2)$。由于 s: $H_1 \to H_2$ 是 ˜ ˜满射的，根据定理 5.6， H 是投射的。因此存在 $\psi \in B(H, H_1)$，使得 $s \circ \psi = \psi$. 这意味着 s_* 是满射的。

对于 (2)，由推论 5.7，存在 ψ: $H_2 \to H_1$ 使得 $s \circ \psi = \mathrm{id}_{H_2}$· 对于每个$T \in B(H, H_2)$，定义 $\psi \circ T$: $H \to H_1$. 于是 $s \circ (\psi \circ T) = T$. 因此 s_* 是满射。这表明 (e 5.74) 是一个短正合列。此外，上述映射 ψ 还给出了一个分裂映射 ψ_* :$B(H, H_2) \to B(H, H_1)$。

□

定义 5.9. 有限生成自由 Hilbert A-模是一个形式为$H = e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA$的 Hilbert A-模，其中 $\langle e_i, e_i\rangle = p_i$是 A, $i = 1, 2, ..., n.$ 中的一个投影。这样的模总是自对偶的（例如参见命题 2.11）。

无挠模有一个定义。每个 Hilbert A-模在以下意义下都是无挠的。设 $x \in H$ 是一个非零元素，且 $xa = 0$ 对于某个 $a \in A.$ 成立。那么 a 必定是左零因子。事实上，如果 $xa = 0$，那么 $a\langle x, x\rangle a = 0$，或者 $\langle x, x\rangle^{1/2}a = 0.$。那么 a 必定是左零因子。

可以将 Hilbert A-模 H 定义为平坦的：若对于任意有界模映射 T：$F \to H$，其中 F 是有限生成自由 Hilbert A-模，则存在一个自由 Hilbert A-模 G、一个有界模映射 φ：$F \to G$ 以及一个有界模映射 ψ：$G \to H$，使得$\varphi(\ker T) = 0$ 且 $\psi \circ \varphi = T$，如以下交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} & & & & G & & \\ & & & \nearrow^{\varphi} & & \searrow^{\psi} & \\ \ker T \hookrightarrow & & F & & \xrightarrow{T} & & H \end{array} \qquad \varphi(\ker T) = 0$$

这等价于以下说法：对于任意 $x_1, x_2, ..., x_m \in H$，如果存在 $a_i \in A, 1 \le i \le m$使得 $\sum_{i=1}^m x_i a_i = 0$，那么必定存在某个整数 n, $y_j \in H$, $1 \le j \le m$ 和 $b_{i,\ j} \in A$,$1 \le j \le m, 1 \le i \le n$，使得 $\sum_{i=1}^m a_i b_{i,\ j} = 0$ 且 $x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,\ j} y_j, 1 \le i \le m.$

命题 5.10. 设 A 是一个 σ 含幺 C^*-代数，且 H 是任意希尔伯特 A-模。假设 F 是一个自对偶希尔伯特 A-模，且 $T \in B(F, H)$。那么存在有界模映射 φ：$F \to F$ 和 ψ：$F \to H$，使得 $\psi \circ \varphi = T$ 且 $\varphi|_{\ker T} = 0.$。特别地，每个希尔伯特 A-模都是平坦的。

证明. 由于 F 是自对偶的，因此 T^* 将 H 映入 F（而不是映入 $F^\sharp$），或者 $T^* \in B(H, F)$。换言之，$T \in L(F, H)$。令 $H_1 = F \oplus H.$。定义 $S \in B(H_1)$ 如下：

$$S(f \oplus h) = 0 \oplus T(f) \text{ for all } \in F \text{ and } h \in H.$$

于是 $S^* \in B(H_1)$。设 $S = V|S|$ 是 S 在 $L(H)^{**}.$ 中的极分解。于是 $V|S|^{1/2}, |S|^{1/2} \in L(H_1)$。换言之，$|T|^{1/2} \in L(F)$ 且 $V|T|^{1/2} \in L(F, H)$。

现在定义 φ：$F \to F$，使得 $\varphi = |T|^{1/2}$；并定义 ψ：$F \to H$，使得 $\psi = V|T|^{1/2}.$。于是 $\varphi|_{\ker T} = 0$，且 $\psi \circ \varphi = V|T| = T.$

如果 F 是有限生成自由希尔伯特 A-模，那么 F 是自对偶的。因此上述结论适用。由此可知，H 是平坦的。

□

6 序列逼近

设 A 是一个 C^*-代数，$H_0 \subset H$ 是希尔伯特 A-模。假设 φ：$H_0 \to A$ 是一个有界模映射。考虑 Hahn-Banach 型扩张问题：是否存在有界模映射 ψ：$H \to A$，使得 $\psi|_{H_0} = \varphi$（且 $\|\psi\| = \|\varphi\|$）。若 $H_0 \subset H$ 是一对任意的希尔伯特 A-模，这个问题就是要问 A 是否是一个以有界模映射为态射的内射希尔伯特 A-模。根据 [33], 的定理 3.8，如果 A 是单调完备的 C^*-代数，那么 A 是内射希尔伯特 A-模。反过来，如果 A 是内射希尔伯特 A-模，那么 A 必定是一个 AW^*- 代数（见 [33] 的定理 3.14）。事实上，内射希尔伯特 A- 模并不常见。当 A 是可分但无限维的 C^*-代数时，这种情况可能永远不会发生（进一步讨论见 [33]）。

在下文中，当 x、$y \in H$ 和 $\epsilon > 0$ 时，如果 $\|x - y\| < \epsilon$，我们可以写作 $x \approx_\epsilon y$.

设 H 是一个 Hilbert A-模， $H^\sharp = B(H, A)$ 是从 H 到 A. 的所有有界 A-模映射所构成的 Banach A-模。回顾一下，一般而言 $H^\sharp \neq H$ （见 2.1 末尾）。不过，我们还是给出以下逼近结果。

定理 6.1. 设 H 是一个 Hilbert A-模，且 φ: $H \to A$ 是一个有界模映射。那么，对于任意有限子集 $\mathcal{F} \subset H$ 和任意 $\epsilon > 0$，存在 $x \in H$ 使得

$$\|\varphi(\xi) - \langle x, \xi\rangle\| < \epsilon \text{ for all } \xi \in \mathcal{F} \text{ and } \|x\| \le \|\varphi\|. \tag{e 6.75}$$

证明. 我们不妨设 $\|\varphi\| \neq 0.$。令 $H_1 = H \oplus A$ 和 $P_1, P_A \in L(H_1)$ 分别为从 H_1 到 H 和到 A 的投影。定义 $T \in B(H_1)$ 为 $T = \varphi \circ P_1.$。注意，对于 $x \in H$, $T(x) = \varphi(x)$ 且 $\|T\| = \|\varphi\|$.

令 $\mathcal{F} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\} \subset H$ 和 $\epsilon > 0.$。不失一般性，我们不妨设 $0 \neq \|\xi_i\| \le 1$, $1 \le i \le k.$。令 $\{E_\lambda\}$ 为 $K(H)$ 的一个近似单位。由引理 3.1，存在 λ_0 使得对所有 $\lambda \ge \lambda_0$,

$$\|E_\lambda(x) - x\| < \epsilon/4(\|\varphi\| + 1) \text{ for all } x \in \mathcal{F} \tag{e 6.76}$$

固定 $\lambda \ge \lambda_0.$ 应用 [31] 的定理 1.5， $B(H_1) = LM(K(H_1))$。由此可得 $TE_\lambda P_1 \in K(H_1)$。另注意 $\|TE_\lambda P_1\| \neq 0.$ 因此，存在 $y_1', y_2', ..., y_m', z_1, z_2, ..., z_m \in H_1$，使得

$$\|TE_\lambda P_1 - \sum_{j=1}^m \theta_{y_j', z_j}\| < \epsilon/8, \ 1 \le j \le m.$$

Then

$$\|\sum_{j=1}^m \theta_{y_j', z_j}\| \le \|TE_\lambda P_1\| + \epsilon/8. \tag{e 6.77}$$

令 $\beta = \frac{\|TE_\lambda P_1\|}{\|TE_\lambda P_1\| + \epsilon/8}$ 和 $y_j = \beta y_j'$, $1 \le j \le m.$ 则

$$\sum_{j=1}^m \theta_{y_j, z_j} = \beta \sum_{j=1}^m \theta_{y_j', z_j} \text{ and } \|\sum_{j=1}^m \theta_{y_j, z_j}\| \le \|TE_\lambda P_1\| \le \|\varphi\|. \tag{e 6.78}$$

此外,

$$\|TE_\lambda P_1 - \sum_{j=1}^m \theta_{y_j, z_j}\| \le \|TE_\lambda P_1 - \sum_{j=1}^m \theta_{y_j', z_j'}\| + (1 - \beta)\|\sum_{j=1}^m \theta_{y_j', z_j'}\| \tag{e 6.79}$$

$$< \epsilon/8 + (1 - \beta)(\|TE_\lambda P_1\| + \epsilon/8) = \epsilon/8 + \epsilon/8 = \epsilon/4. \tag{e 6.80}$$

记 $L = \sum_{j=1}^m \theta_{y_j, \ z_j}$. 那么，根据 (e 6.78)， $\|L\| \le \|\varphi\|.$ 注意 $P_1 \in L(H_1)$。因此，对所有 $z \in H$, $\theta_{y_j, \ z_j} P_1(z) = y_j \langle z_j, P_1 z\rangle = y_j \langle P_1 z_j, z\rangle = \theta_{y_j, \ P_1 z_j}(z)$ $1 \le j \le m.$ 将 z_j 替换为 $P_1 z_j$ 后，我们可以假设 $z_j \in H.$ 回顾 $P_A T E_\lambda P_1 = T E_\lambda P_1.$ 因此 $P_A y_j \in A$, $1 \le j \le m.$ 令 $a_j = (P_1 y_j)^*$, $1 \le j \le m.$ 那么，根据 (e6.76)、(e6.80),

$$\varphi(\xi_i) = T(\xi_i) \approx_{\epsilon/4} TE_\lambda P_1(\xi_i) \approx_{\epsilon/4} L(\xi_i) = \sum_{j=1}^m a_j^* \langle z_j, \xi_i\rangle. \tag{e 6.81}$$

取 $x = \sum_{j=1}^m z_j a_j.$ 于是 $L(\xi_i) = \langle x, \xi_i\rangle$, $i \in \mathbb{N}.$ 因此

$$\|\varphi(\xi_i) - \langle x, \xi_i\rangle\| < \epsilon, \quad i = 1, 2, ..., k. \tag{e 6.82}$$

还需证明 $\|x\| \le \|\varphi\|$. 然而，我们有

$$\|x\| = \|\langle x, x/\|x\|\rangle\| = \|L(x/\|x\|)\| \le \|L\| \le \|\varphi\|. \tag{e 6.83}$$

□

注 6.2. 定理 6.1 还表明，在 $H \neq H^\sharp$ 的情况下（见 3.3），H 可能不是 A-弱闭的。

在下面的陈述中，请注意，当 A 不可分时，H 可能不是可分巴拿赫空间。

定理 6.3. 设 H 是一个可数生成的希尔伯特 A-模，且 $\varphi\colon H \to A$ 是一个有界模映射。那么，存在 $x_n \in H$、$n \in \mathbb{N}$，使得 $\|x_n\| \le \|\varphi\|$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(\xi) - \langle x_n, \xi\rangle\| = 0 \ \textit{for all}\ \xi \in H. \tag{e 6.84}$$

证明. 我们需要修改定理 6.1 的证明。设 $\{E_n\}$ 是 $K(H)$ 的一个近似单位（由定理 3.2 得出）。设 $H_1 = H \oplus A$、P_1、P_A 和 T 如定理 6.1 的证明中所述。考虑 $TE_nP_1 \in K(H)$。如定理 6.1 的证明中一样，我们得到 $L_n \in K(H)$，其中 $\|L_n\| \le \|TE_nP_1\| \le \|\varphi\|$ 满足

$$\|TE_nP_1 - L_n\| < 1/2^n, \tag{e 6.85}$$

其中 $L_n = \sum_{j=1}^{m(n)} \theta_{x_{n,\,j},\ y_{n,\,j}}$. 取 $P_A(x_{n,\,j}) = a^*_{n,\,j}$, $1 \le j \le m(n)$ $n \in \mathbb{N}$. 对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $z \in H$，我们可以选取 $n(x)$，使得对所有 $n \ge n(x)$，

$$\|E_nP_1(z) - z\| < \epsilon/2(\|\varphi\| + 1). \tag{e 6.86}$$

那么，若 $n \ge n(x)$，

$$\varphi(z) \approx_{\epsilon/2} TE_nP_1(y) \approx_{\|z\|/2^n} L_n(z) = \sum_{j=1}^{m(n)} a^*_{n,j}\langle y_{n,j}, z\rangle. \tag{e 6.87}$$

选取 $x_n = \sum_{j=1}^{m(n)} y_{n,\,j}a_{n,\,j}$, $n \in \mathbb{N}$. 与定理 6.1 证明结尾相同的证明表明，对所有 $n \ge n(x)$，

$$\varphi(z) \approx_{\epsilon/2+\|z\|/2^n} L(z) = \langle x_n, z\rangle \ \text{ and } \ \|x_n\| \le \|\varphi\|. \tag{e 6.88}$$

于是定理得证。 □

如本节开头所述，单射希尔伯特 A-模很少见。不过，有界模映射可能存在某种近似延拓。设 B_0, B_1 和 C 是 C^*-代数，且 $\varphi\colon B_0 \to C$ 是一个压缩完全正线性映射。若 C 可和（或 B_0 可和），那么对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意有限子集 $\mathcal{F} \subset B_0$，存在一个压缩完全正线性映射 $\psi\colon B \to C$，使得

$$\|\varphi(b) - \psi(b)\| < \epsilon \ \text{ for all } \ b \in \mathcal{F}.$$

这是可和 C^*-代数的一个非常有用的性质。本着同样的精神，我们给出以下近似延拓结果：

定理 6.4. 设 A 为一个 C^*-代数， H_0、H_1、H 为 Hilbert A-模，满足 $H_0 \subset H_1$，且$\varphi : H_0 \to H$ 为有界模映射。

那么，对于任意 $\epsilon > 0$ 以及任意有限子集 $\mathcal{F} \subset H_0$，存在一个有界模映射$\psi : H_1 \to H$，使得 $\|\psi\| \le \|\varphi\|$ 并且

$$\|\psi(x) - \varphi(x)\| < \epsilon \ \textit{for all}\ x \in \mathcal{F}. \tag{e 6.89}$$

以上可以示意如下:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & & \\ \uparrow & \circlearrowleft_{\varepsilon} \ \searrow^{\psi} & \\ H_0 & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array} \qquad \textit{on } \mathcal{F}. \tag{e 6.90}$$

此外，若 H_0 是可数生成的，则存在 $\psi_n : H_1 \to H$, $n \in \mathbb{N}$，使得$\|\psi_n\| \le \|\varphi\|$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(x) - \varphi(x)\| = 0 \ \text{ for all } \ x \in H_0. \tag{e 6.91}$$

证明。我们不妨假设 $\|\varphi\| \neq 0$.。令 $H_2 = H_0 \oplus H$ 并且 $H_3 = H_1 \oplus H$.。我们将 H_2视为 H_3. 的希尔伯特 A-子模。令 $P_0 \in L(H_2)$为从 H_2 到 H_0上的投影，并令$P_1, P_H \in L(H_3)$分别为从 H_3 到 H_1 以及到 H上的投影。定义 $T \in B(H_2)$为 $T = \varphi \circ P_0$.。令 $\mathcal{F} \subset H_0$ 为有限子集，并令 $\epsilon > 0$.

令 $\{E_\lambda\}$ 为 $K(H_0)$ 的近似单位。由引理 3.1，存在 λ_0，使得对所有 $\lambda \ge \lambda_0$,

$$\|E_\lambda(x) - x\| < \epsilon/(\|\varphi\| + 1) \ \text{ for all } \ x \in \mathcal{F}. \tag{e 6.92}$$

应用 [31], 的定理 1.5，我们有 $B(H_2) = LM(K(H_2))$。因此（对固定的 $\lambda \ge \lambda_0$） $TE_\lambda P_0 \in K(H_2)$。应用 [33], 的引理 2.13，可得 $T_\lambda \in K(H_3)$，使得

$$\|T_\lambda\| = \|TE_\lambda P_0\| \ \text{ and } \ T_\lambda|_{H_2} = TE_\lambda P_0. \tag{e 6.93}$$

令 $\psi = P_H T_\lambda$.。注意（回忆一下， $T(H_2) \subset H$）

$$\|\psi\| = \|TE_\lambda P_0\| \ \text{ and } \ \psi|_{H_2} = TE_\lambda P_0. \tag{e 6.94}$$

我们可以将 ψ 视为从 H_1 到 H 的有界模映射，其中 $\|\psi\| \le \|T\| = \|\varphi\|$.。由 (e 6.92) 和 (e 6.94)，我们估计，对于 $x \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \varphi(x)\| &= \|\psi(x) - T(x)\| = \|\psi(x) - TE_\lambda P_0(x)\| + \|TE_\lambda P_0(x) - T(x)\| \\ &< 0 + \|T\|\|E_\lambda(x) - x\| < \epsilon. \end{aligned} \tag{e 6.95}$$

这就证明了定理的第一部分。

对于定理的第二部分，由定理 3.2，令 $\{E_n\}$ 为 $K(H_0)$ 的近似单位，其中 $E_{n+1}E_n = E_n$、$n \in \mathbb{N}$.。将 E_λ 替换为 E_n，可得 $T_n \in K(H_3)$，使得

$$\|T_n\| = \|TE_n P_0\| \ \text{ and } \ T_n|_{H_2} = TE_n P_0. \tag{e 6.96}$$

令 $\psi_n = P_H T_n$, $n \in \mathbb{N}$.，那么

$$\|\psi_n\| \le \|\varphi\| \ \text{ and } \ \psi_n|_{H_2} = TE_n P_0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{e 6.97}$$

接着我们使 由于对所有 $x \in H_0$ 都有 $\lim_{n\to\infty} \|E_n(x) - x\| = 0$ （再次参见定理 3.2 ）.

□

推论 6.5. 设 A 是一个 C^*-代数，且 $H_0 \subset H$ 是希尔伯特 A-模。假设存在一个有界模映射 $\varphi: H_0 \to A.$。那么，对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意有限子集 $\mathcal{F} \subset H_0$，存在一个有界模映射 $\psi: H \to A$，使得

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| < \epsilon \ \textit{for all}\ x \in \mathcal{F} \ \textit{and}\ \|\psi\| \leq \|\varphi\|. \tag{e 6.98}$$

此外，若 H_0 是可数生成的 Hilbert A-模，则存在一列有界模映射 $\psi_n: H \to A$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(x) - \varphi(x)\| = 0 \ \textit{for all}\ x \in H \ \textit{and}\ \|\psi_n\| \leq \|\varphi\| \ \textit{for all}\ n \in \mathbb{N}. \tag{e 6.99}$$

注记 6.6. 鉴于定理 6.4，我们或许会认为每个 Hilbert A-模都是“近似内射”的。接下来，我们来讨论“近似投射性”。

引理 6.7. 设 A 是一个 σ-含幺 C^*-代数，且 $H = A^{(k)}$（其中 $k \in \mathbb{N}$）。假设H_1、H_2 是 Hilbert A-模，$\varphi: H \to H_1$ 是有界模映射，且 $s: H_2 \to H_1$ 是有界满模映射。那么存在一列有界模映射 $\psi_n: H \to H_2$，以及一列递增的 Hilbert A-子模 $X_n \subset H$，使得 $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} X_n} = H$，

$$s \circ \psi_m|_{H_n} = \varphi|_{H_n} \quad \textit{for all}\ m \geq n. \tag{e 6.100}$$

此外，还存在一列模映射 $T_n: H \to X_n$，使得 $\|T_n\| \leq 1$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(h) - h\| = 0,\ T_{2n+j}|_{H_n} = \mathrm{id}_{H_n},\ n, j \in \mathbb{N}, \tag{e 6.101}$$

$$\text{and}\ \ s \circ \varphi_n(h) = \varphi(T_n(h)) \ \textit{for all}\ h \in H. \tag{e 6.102}$$

特别是，

$$\lim_{n\to\infty} \|s \circ \psi_n(x) - \varphi(x)\| = 0 \ \textit{for all}\ x \in H. \tag{e 6.103}$$

证明。固定一个严格正元素 $e \in A.$。写作 $A^{(n)} = \overline{e_1 A} \oplus \overline{e_2 A} \oplus \cdots \oplus \overline{e_n A}$，其中 $e_i = e^{1/2}($ $1 \leq i \leq n)$。令 $f_{1/n} \in C([0,\infty))$ 按 4.4 中的 (4) 定义，$n \in \mathbb{N}$.

对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $X_n = \bigoplus_{i=1}^{k} f_{1/n}(e_i)A.$。注意，$X_n \subset X_{n+1}$，$n \in \mathbb{N}$，且 $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} X_n} = A^{(k)} = H$.

令 $x_{n,\ i} = \varphi(f_{1/2n}(e_i))$ $1 \leq i \leq k$，并令 $n \in \mathbb{N}.$。选取 $y_{m,\ i} \in H_2$，使得 $s(y_{m.i}) = x_{m,\ i}$，$1 \leq i \leq m$ 且 $m \in \mathbb{N}.$。定义 $\psi_n: H \to H_2$ 为

$$\psi_n(h) = \sum_{i=1}^{k} y_{n,i} \langle f_{1/2n}(e_i), h\rangle \ \text{ for all }\ h \in H. \tag{e 6.104}$$

由此可得 $\psi_n \in K(H, H_2)$。若 $h = \bigoplus_{i=1}^{k} f_{1/n}(e)a_i$，其中 $a_i \in A$，则

$$\psi_n(h) = \sum_{i=1}^{k} y_{n,i} f_{1/n}(e) a_i. \tag{e 6.105}$$

因此，对于 $h=\bigoplus_{i=1}^k f_{1/n}(e_i)a_i$，其中 $a_i\in A\,(1\le i\le k)$，以及任意 $j\ge 0$,

$$\begin{aligned} s(\psi_{n+j}(\sum_{i=1}^k f_{1/n}(e_i)a_i)) &= s(\sum_{i=1}^k y_{n+j,i}f_{1/n}(e)a_i) && \text{(e 6.106)}\\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(f_{1/2(n+j)}(e_i))f_{1/n}(e)a_i && \text{(e 6.107)}\\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(f_{1/2(n+j)}(e_i)f_{1/n}(e))a_i && \text{(e 6.108)}\\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(f_{1/n}(e_i))a_i=\varphi(\sum_{i=1}^k f_{1/n}(e_i)a_i). && \text{(e 6.109)} \end{aligned}$$

由此可得，对于任意 $m\ge n$,

$$s\circ\psi_m|_{H_n}=\varphi|_{H_n}. \tag{e 6.110}$$

接下来考虑由 $T_n(h)=\sum_{i=1}^k f_{1/n}(e_i)\langle f_{1/n}(e_i)\ h\rangle$定义的模映射 $T_n\colon H\to X_n$，其中对所有 $h\in H.$ 均成立。换言之，$T_n\in K(H,H_2)$，且 $T_n(\bigoplus_{i=1}^k a_i)=\bigoplus_{i=1}^k f_{1/n}(e)^2a_i$ 对任意 $\bigoplus_{i=1}^k a_i\in A^{(k)}.$ 均成立。因此 $\|T_n\|=1.$。此外（对任意 $a_i\in A$），

$$\begin{aligned} T_{2n+j}(\bigoplus_{i=1}^k f_{1/n}(e)a_i) &= \bigoplus_{i=1}^k f_{1/(2n+j)}(e)^2f_{1/n}(e)a_i && \text{(e 6.111)}\\ &= \bigoplus_{i=1}^k f_{1/n}(e)a_i. && \text{(e 6.112)} \end{aligned}$$

因此

$$T_{2n+j}|_{X_n}=\mathrm{id}_{X_n},\ n,j\in\mathbb{N}. \tag{e 6.113}$$

由此可得，对任意 $h=\bigoplus_{i=1}^k a_i$，同样由（e 6.104）可知,

$$\begin{aligned} s\circ\psi_{n+j}(h) &= \sum_{i=1}^k x_{n+j,i}\langle f_{1/2(n+j)}(e_i),a_i\rangle && \text{(e 6.114)}\\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(f_{1/2(n+j)}(e_j))f_{1/2(n+j)}(e)a_i)=\varphi(T_{n+j}(h)). && \text{(e 6.115)} \end{aligned}$$

为证明引理的最后一部分，固定 $h=\bigoplus_{i=1}^k a_i\in A^{(k)}.$。令 $\epsilon>0.$。取 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\|f_{1/n}(e)^2a_i-a_i\|<\epsilon/k(\|\varphi\|+1),\ 1\le i\le k. \tag{e 6.116}$$

因此，对任意 $j\in\mathbb{N}$,

$$\|\varphi(T_{n+j}(h))-\varphi(h)\|<\epsilon \tag{e 6.117}$$

由此可知，对于这个 h 以及任意的 $j\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|s\circ\psi_{n+j}(h)-\varphi(h)\| &\le \|s\circ\psi_{n+j}(h)-\varphi(T_{n+j}(h))\|+\|\varphi(T_{n+j}(h))-\varphi(h)\|\\ &= 0+\epsilon. \end{aligned}$$

由（e 6.116），我们还可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(h)-h\|=0 \text{ for all } h\in H. \tag{e 6.118}$$

□

定理 6.8. 设 A 是一个 σ含幺 C^*代数，且 H 是一个可数生成的 Hilbert A-模。假设 H_1 和 H_2 是 Hilbert A-模，且 $\varphi: H\to H_1$ 是一个有界模映射，$s: H_2\to H_1$ 是一个有界满模映射。那么存在一个有界模映射序列 $\psi_n: H\to H_2$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|s\circ\psi_n(x)-\varphi(x)\|=0 \text{ for all } x\in H. \tag{e 6.119}$$

下面的近似交换图可以说明定理 6.8 的陈述（其中 $\epsilon_n\to 0$）：

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \searrow^{\psi_n} & \\ H_1 & \xleftarrow[s]{} & H_2 \end{array} \quad . \tag{e 6.120}$$

证明. 我们先证明定理对 $H=H_A=l^2(A)$成立。

因此，现在我们假设 $H=l^2(A)$。令 $Y_n=A^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$. 我们将 $Y_n\subset Y_{n+1}$ 视为 $H=l^2(A)$的 Hilbert A-子模递增序列，其并集的闭包为 H.

应用引理 6.7，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们得到一个 Hilbert A-子模的递增序列$X_{n,\,j}\subset X_{n,\,j+1}$，使得$\cup_{j=1}^{\infty}X_{n,\,j}=Y_n$，并且存在一个有界模映射序列$\psi_{n,\,j}: Y_n\to H_2$ 以及模映射$T_{n,\,j}: Y_n\to X_{n,\,j}$，满足$\|T_{n,\,j}\|\le 1$，使得

$$s\circ\psi_{n,j+i}|_{X_{n,j}}=\varphi|_{X_{n,j}},\ \ j,i\in\mathbb{N}, \tag{e 6.121}$$

$$T_{n,2j+i}|_{X_{n,j}}=\mathrm{id}|_{X_{n,j}},\ \ j,i\in\mathbb{N}, \text{ and} \tag{e 6.122}$$

$$\lim_{j\to\infty}\|T_{n,j}(h)-h\|=0 \text{ for all } h\in Y_n \text{ and} \tag{e 6.123}$$

$$s\circ\psi_{n,j}(h)=\varphi(T_{n,j}(h)) \text{ for all } h\in Y_n \text{ and } j\in\mathbb{N}. \tag{e 6.124}$$

注意到 $Y_n=A^{(n)}\subset A^{(n+1)}=Y_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, 因此我们可以作如下安排

$$X_{n,j}\subset X_{n+1,j} \text{ for all } j\in\mathbb{N} \text{ and } n\in\mathbb{N}. \tag{e 6.125}$$

定义 P_n $H\to Y_n$ $P_n\bigoplus_{n=1}^{\infty}a_n=\bigoplus_{i=1}^{n}a_i$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*a_n$ $\bigoplus_{n=1}^{\infty}a_n\in$: 由 ( ) 给出，其中该序列 l^2 A $=H.$ P_n $H=H_A$ $A^{(n)}.$ 收敛，即 ( )。于是，它是从 onto 的一个投影

现在定义

$$\psi_n=\psi_{n,2n}\circ P_n: H\to H_2,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{e 6.126}$$

我们将验证 ψ_n 满足这些要求。

固定 $h=\bigoplus_{n=1}^{\infty}a_n\in l^2(A)=H.$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\ge m\ge n_0$,

$$\|P_m(h)-h\|<\epsilon/6(\|\varphi\|+1) \text{ and } \|P_n(h)-P_m(h)\|<\epsilon/6(\|\varphi\|+1). \tag{e 6.127}$$

对于 $P_{n_0}(h)\in A^{(n_0)}$, 存在 $n_1\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\ge n_1$

$$\|T_{n_0,n}(P_{n_0}(h))-P_{n_0}(h)\|<\epsilon/6(\|\varphi\|+1). \tag{e 6.128}$$

由于 $T_{n_0,n}(P_{n_0}(h))\in X_{n_0,n}\subset X_{n,n}$（参见 (e 6.125)），根据 (e 6.122),

$$T_{n,2n}(T_{n_0,n}(P_{n_0}(h)))=T_{n_0,n}(P_{n_0}(h)). \tag{e 6.129}$$

因此，若 $n \geq n_1 + n_0$，根据 (e 6.129) 和 (e 6.128),

$$\begin{aligned}
\|T_{n,2n}(P_{n_0}(h)) - P_{n_0}(h)\| &= \|T_{n,2n}(P_{n_0}(h)) - T_{n,2n}(T_{n_0,n}(P_{n_0}(h)))\| && \text{(e 6.130)}\\
&\quad + \|T_{n,2n}((T_{n_0,n}(P_{n_0}(h)))) - P_{n_0}(h)\| && \text{(e 6.131)}\\
&\leq \|T_{n,2n}\|\|P_{n_0}(h) - T_{n_0,n}(P_{n_0}(h))\| + \|T_{n_0,n}(P_{n_0}(h)) - P_{n_0}(h)\| && \text{(e 6.132)}\\
&< \epsilon/6(\|\varphi\| + 1) + \epsilon/6(\|\varphi\| + 1) && \text{(e 6.133)}\\
&= \epsilon/3(\|\varphi\| + 1)。 && \text{(e 6.134)}
\end{aligned}$$

我们还估计，若 $n \geq n_1 + n_0$，由 (e 6.127) 的两部分以及紧邻上方的不等式可得,

$$\begin{aligned}
\|T_{n,2n}(P_n(h)) - h\| &\leq \|T_{n,2n}(P_n(h)) - P_{n_0}(h)\| + \|P_{n_0}(h) - h\|\\
&< \|T_{n,2n}(P_n(h) - P_{n_0}(h))\| + \|T_{n,2n}(P_{n_0}(h)) - P_{n_0}(h)\| + \epsilon/6(\|\varphi\| + 1)\\
&< \|T_{n,2n}\|(\epsilon/3(\|\varphi\| + 1)) + \epsilon/3(\|\varphi\| + 1)) + \epsilon/3(\|\varphi\| + 1)\\
&= \epsilon/(\|\varphi\| + 1). && \text{(e 6.135)}
\end{aligned}$$

由 (e 6.126)、(e 6.124) 和 (e 6.135)，我们得到,

$$\begin{aligned}
\|s \circ \psi_n(h) - \varphi(h)\| &\leq \|s \circ \psi_{n,2n}(P_n^2(h)) - \varphi(T_{n,2n}(P_n(h)))\| + \|\varphi(T_{n,2n}(P_n(h))) - \varphi(h)\|\\
&< 0 + \epsilon.
\end{aligned}$$

接下来考虑一般情形： H 是任意可数生成的希尔伯特 A-模。根据 Kasparov 吸收定理（[26]），存在一个希尔伯特模同构 $U : H \oplus l^2(A) \to l^2(A)$。定义 $j\colon H \to H \oplus l^2(A)$ 为显然的嵌入，并令 $p\colon H \oplus l^2(A) \to H$ 为投影。因此 $p \circ j = \mathrm{id}_H$. 定义 $\Phi = \varphi \circ p \circ U^{-1}\colon l^2(A) \to H_1$. 于是我们得到以下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 & & l^2(A)\\
 & {\scriptstyle U}\updownarrow{\scriptstyle U^{-1}} & \searrow^{\Phi}\\
H \oplus l^2(A) & \xrightarrow{\varphi \circ p} & H_1.
\end{array}$$

特别地，对于所有 $x \in H.$，有 $\Phi \circ U(x) = \varphi(x)$。根据上文已经证明的结果，存在一列模映射 $\Psi_n : l^2(A) \to H_2$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|s \circ \Psi_n(z) - \Phi(z)\| = 0 \text{ for all } z \in l^2(A). \qquad \text{(e 6.136)}$$

定义 $\psi_n\colon H \to H_2$，令 $\psi_n(x) = \Psi_n \circ U(x)$，对所有 $x \in H.$ 均成立。由此可得

$$, \lim_{n\to\infty} \|s \circ \psi_n(x) - \varphi(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|s \circ \Psi_n(U(x)) - \Phi(U(x))\| = 0. \qquad \text{(e 6.137)}$$

□

注 6.9。注意，在引理 6.7 中，对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以选择 $\|y_n\| \leq \|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\| + \epsilon.$。因此我们可以估计 $\|\psi_n\| \leq \sqrt{k}(\|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\| + \epsilon)$，但遗憾的是，这取决于 $k.$。所以，我们无法估计定理 6.8 中 ψ_n 的范数。这也是证明看起来比预期稍微复杂一些的原因（因为我们需要在引理 6.7 中使用一个复杂的陈述）。如果 $\{\|\psi_n\|\}$ 至少是一致有界的，那么证明将会简短得多。

然而，在假设 A 具有实秩零的情况下，下面的结论给出了关于 ψ_n.上范数的更好估计

定理 6.10. 设 A 是实秩零的 σ-含幺 C^*-代数，且 H 是可数生成的 Hilbert A-模。假设 $\varphi: H \to H_1$ 是有界模映射，且 $s: H_2 \to H_1$ 是有界满模映射。那么存在一个模映射序列 $\psi_n: H \to H_2$，使得

$$\|\psi_n\| \le \|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\| \text{ and } \lim_{n\to\infty} \|s \circ \psi_n(x) - \varphi(x)\| = 0 \text{ for all } x \in H. \tag{e 6.138}$$

证明。由于 H 是可数生成的，根据 [39] 的推论 1.5（为方便起见，参见引理 3.2），$K(H)$ 是 σ-含幺遗传 C^*-子代数 $A \otimes \mathcal{K}$（另见 [33] 的引理 2.13）。令 $\{P_m\}$ 为 $K(H)$ 的一个由投影组成的近似单位。设 $H_{0,m} = P_m(H)$。那么$K(H_{0,m}) = P_m K(H) P_m$ 是含幺的。由命题 2.7 可知，$H_{0,m}$ 是代数有限生成的，生成元可取为 $\{\xi_{m,i}: 1 \le i \le d(m)\}$，其中$\|\xi_{m,i}\| = 1.$。需要注意的是，$H_{0,m} \subset H_{0,m'}$ 如果 $m < m'$.

固定 $m \in \mathbb{N}.$。令 $H_{1,m}$ 为由 $\{x_{m,i} = \varphi(\xi_{m,i})$ 生成的 H_1 的 Hilbert A-子模: $1 \le i \le d(m)\}.$。由于 $H_{0,m} \subset H_{0,m'}$, $H_{1,m} \subset H_{1,m'}$, 如果 $m < m'$.

于是 $K(H_{1,m})$ 是 σ-含幺遗传 C^*-子代数 $A \otimes \mathcal{K}$（见引理 3.2），$m \in \mathbb{N}$.由于 A 具有实秩零，$K(H_{1,m})$ 也具有实秩零。$m \in \mathbb{N}.$ 令 $\{p_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $K(H_{1,m})$ 的一个近似单位。令 $H_{1,m,k} = p_{m,k}(H_{1,m})$ k, $m \in \mathbb{N}.$ 由于 $H_{1,m} \subset H_{1,m'}$, 若 $m \le m'$, $K(H_{1,m}) \subset K(H_{1,m'})$（见 [33] 的引理 2.13）。因此不妨假设

$$\|p_{m+1,k} p_{m,k} - p_{m,k}\| < \frac{1}{2^{k+m+1}(\|\varphi\| + 1)}, \ k, m \in \mathbb{N}. \tag{e 6.139}$$

注意，$K(H_{1,m,k}) = p_{m,k} K(H_{1,m}) p_{m,k}$，它是含幺的。由命题 3.2 可知，$H_{1,m,k}$ 是代数有限生成的，即作为 A-模可由 $z_{m,k,1}, z_{m,k,2}, ..., z_{m,k,r(m,k)}$ 生成。取 $y_{m,k,j} \in H_2$ 使得 $s(y_{m,k,j}) = z_{m,k,j}$, $1 \le j \le r(m,k)$ k, $m \in \mathbb{N}.$ 令 $H_{2,m,k}$ 为由 $\{y_{m,k,j}$ 生成的 H_2 的 Hilbert A-子模: $1 \le k = j \le r(m,k)\}$，作为 Hilbert A-模。

那么，由于 $H_{1,m,k}$ 是由 $z_{m,k,1}, z_{m,k,2}, ..., z_{m,k,r(i,k)}$ 作为 A-模代数生成的，$s(H_{2,m,k}) = H_{1,m,k}.$。换言之，$s|_{H_{2,m,k}}$ 是满射（映到 $H_{1,m,k}$）。

固定一个整数 $m \in \mathbb{N}.$。定义 $\varphi_{m,k}: H \to H_{1,m,k}$ 为

$$\varphi_{m,k}(x) = p_{m,k} \circ \varphi(P_m(x)) \tag{e 6.140}$$

对所有 $x \in H.$。注意，$\|\varphi_{m,k}\| \le \|\varphi\|$, $m, k \in \mathbb{N}$.

现在 $H_{2,m,k}$ 是可数生成的，由定理 5.3 可知，存在一个模映射 $\psi_{m,k}: H \to H_{2,m,k}$，使得

$$s \circ \psi_{m,k} = \varphi_{m,k} \text{ for all } k, m \in \mathbb{N}, \text{ and} \tag{e 6.141}$$

$$\|\psi_{m,k}\| \le \|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi_{m,k}\| \le \|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\|. \tag{e 6.142}$$

De很好 $\psi_n = \psi_{n,n}$, $n \in \mathbb{N}.$。那么 $\|\psi_n\| \le \|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\|$ 对所有 $n \in \mathbb{N}.$。我们将验证

$$\lim_{n\to\infty} \|s \circ \psi_n(x) - \varphi(x)\| = 0 \text{ for all } x \in H. \tag{e 6.143}$$

为验证这一点，取 $\epsilon > 0$ 和 $x \in H$，其中 $\|x\| \le 1.$。令 $M = (\|s\| + 1)(\|\tilde{s}^{-1} \circ \varphi\| + 1)$。根据引理 3.1，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|x - P_m(x)\| < \epsilon/8M \text{ and } \|P_m(x) - P_{m'}(x)\| < \epsilon/8M \text{ for all } m', m \ge n_0. \tag{e 6.144}$$

还存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，满足 $1/k_0 < \epsilon/4$，使得对于任意 $k \ge k_0$,

$$\|p_{n_0,k}(\varphi(P_{n_0}(x))) - \varphi(P_{n_0}(x))\| < \epsilon/4. \tag{e 6.145}$$

如果 $n \geq n_0$，并且对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有：若 $k \geq k_0 + n_0$，根据 (e 6.145) 和 (e 6.139),

$$p_{k,k}(\varphi(P_{n_0}(x))) \approx_{\epsilon/4} p_{k,k}p_{n_0,k_0}(\varphi(P_{n_0}(x))) \quad (\mathrm{e}\,6.146)$$

$$\approx_{1/2^{k_0}} p_{n_0,k_0}(P_{n_0}(x)) \approx_{\epsilon/4} P_{n_0}(x). \quad (\mathrm{e}\,6.147)$$

于是（回想一下，$H_{0,\ n_0} \subset H_{0,\ n}$，如果 $n_0 < n$），由 (e 6.144)、(e 6.140)、(e 6.141) 和 (e 6.146)，当$n \geq n_0 + k_0 + (4/\epsilon)$时，

$$\begin{aligned}
\|s \circ \psi_n(x) - \varphi(x)\| &\leq \|s \circ \psi_n(x) - s \circ \psi_{n,n}(P_{n_0}(x))\| + \|s \circ \psi_{n,n}(P_{n_0}(x)) - \varphi(x)\| \\
&< \|s \circ \psi_n\|\|x - P_{n_0}(x)\| + \|s \circ \psi_{n,n}(P_{n_0}(x)) - \varphi(P_{n_0}(x))\| + \\
&\quad + \|\varphi(P_{n_0}(x)) - \varphi(x)\| \quad (\mathrm{e}\,6.148) \\
&< \epsilon/8 + \|s \circ \psi_{n,n}(P_{n_0}(x)) - \varphi_{n,n}(P_{n_0}(x))\| \\
&\quad + \|p_{n,n}(\varphi(P_{n_0}(x))) - \varphi(P_{n_0}(x))\| + \epsilon/4 \quad (\mathrm{e}\,6.149) \\
&< \epsilon/8 + 0 + (1/2^{k_0} + \epsilon/2) + \epsilon/8 < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

注 6.11。本文基于一份 2010 年的预印本 [35] 。然而， [35] 中的部分原有内容已经过时。当前版本的草稿于 2014年完成，其中第5节的结果有所改进。第 4 节和第6节的部分内容是近期补充的。

参考文献

[1] C. Akemann 和 F. Shultz，《完美 C^*代数》，美国数学学会回忆录 55（1985），第 326 号，xiii+117 页 [2] R. Antoine 、 F. Perera 、 L. Robert 和 H. Thiel，《稳定秩一的 C^*代数及其 Cuntz 半群》，《杜克数学杂志》，即将刊出。arXiv:1809.03984。[3] B. Blackadar，《简单 C^*代数的比较理论》。《算子代数及其应用》，第 1 卷，21–54，伦敦数学会讲义丛书，135，剑桥大学出版社，剑桥，1988。[4] L. G. Brown，《 C^*代数遗传子代数的稳定同构》，《太平洋数学杂志》71（1977年），335–348。[5] L. G. Brown，《相近的遗传 C^*子代数与拟乘子的结构》，《爱丁堡皇家学会会刊》147A（2017），263–292，DOI:10.1017/S0308210516000172。[6] L. G. Brown，《 C^*代数的半连续性与乘子》，《加拿大数学杂志》40（1988），865–988。[7] L. G. Brown，《稳定秩一的 C^*代数中投影的同伦》，《算子代数新进展》（奥尔良，1992）。《阿斯特里斯克》第 232 期（1995年），115–120。[8] L. G. Brown 和 G. K. Pedersen，《 C^*代数单位球的几何》，《纯粹与应用数学杂志》469（1995），113–147。[9] N. Brown 和 A. Ciuperca，《稳定有限 C^*代数上的希尔伯特模同构》，《泛函分析杂志》257（2009），332–339。[10] N. Brown、F. Perera 和 A. Toms，《Cuntz 半群、Elliott 猜想与 C^*代数上的维数函数》，《纯粹与应用数学杂志》621（2008），191–211。

[11] K. Coward、G. Elliott 和 C. Ivanescu，《作为 C^*代数不变量的 Cuntz 半群》，《纯粹与应用数学杂志》623（2008），161–193。[12] J. Castillejos、S. Evington、A. Tikuisis、S. White、W. Winter，《简单C^*代数的核维数》，《数学发明》224（2021年），245–290。[13]J. Castillejos 和 S. Evington，《简单稳定无投影 C^*代数的核维数》，《分析与偏微分方程》13（2020年），2205–2240。[14] J. Castillejos、S. Evington、A. Tikuisis 和 S. White，《一致性质 Γ》，《国际数学研究通知》，即将刊出。[15] J. Cuntz，《简单 C^*代数中乘法与加法的结构》，《斯堪的纳维亚数学杂志》40（1977年），215–233。[16] J. Cuntz，《简单 C^*代数上的维数函数》，《数学年刊》233（1978年），145–153。[17] G. A. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《有限核维数的简单可分 KK-可缩 C^*代数的分类》，《几何与物理杂志》158（2020年），103861，51页。[18] G. A. Elliott、L. Robert 和 L. Santiago，《C*-代数上的下半连续迹锥》，《美国数学杂志》133（2011），969–1005。[19] M. Frank，《Hilbert C^*模的几何方面》，《正性》3（1999），215–243。[20]X. Fu 和 H. Lin，《迹近似振荡为零与稳定秩一》，arXiv:2112.14007。[21] X. Fu、K. Li 和 H. Lin，《迹近似可除性与稳定秩一》，《伦敦数学会杂志》106（2022年），3008–3042，https://doi.org/10.1112/jlms.12654。[22] G. Gong、C. Jiang、L. Li，《豪斯多夫化代数 K_1 群及具有理想性质的 C^*代数的不变量》，《K 理论年刊》5（2020年），43–78。[23] G. Gong 和 H. Lin，《近似乘性态射与 K 理论》，《国际数学杂志》11（2000年），983–1000。[24] G. Gong 和 H. Lin，《简单非幺正可核 C*-代数的分类，III：值域与约化》，《K 理论年刊》7（2022年），279–384。[25] J. v. B. Hjelmborg 和 M. Rørdam，《C^*代数的稳定性》，《泛函分析杂志》155（1998），153–170。[26] G. Kasparov，《Hilbert C^*模：Stinespring 和 Voiculescu 定理》，《算子理论杂志》4（1980年），133–150。[27] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，《非简单纯无穷 C^*代数》，《美国数学杂志》122（2000），637–666。[28] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，《中心序列 C^*代数与 Jiang-Su 代数的张量吸收》，《纯粹与应用数学杂志》695（2014），175–214。[29] E. C. Lance，《Hilbert C^*模：算子代数学家的工具箱》，伦敦数学会讲义丛书，第 210 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995。

[30] H. Lin，等价开投影及其对应的遗传 C^*-子代数，《伦敦数学学会杂志》41 (1990), 295–301。[31] H. Lin，有界模映射与纯完全正映射，《算子理论杂志》26 (1991), 121–138。[32] H. Lin，具有连续尺度的单 C^*-代数与单冠代数，《美国数学会会刊》112 (1991), 871–880。[33] H. Lin，单射 Hilbert C^*-模，《太平洋数学杂志》154 (1992), 131–164。[34] H. Lin，《可和 C^*-代数分类导论》，World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001. xii+320 页。ISBN: 981-02-4680-3。[35] H. Lin，稳定秩一的 C^*-代数的 Cuntz 半群与投射希尔伯特模，arXiv:1001.4558, 2010。[36] H. Lin，遗传一致性质 Γ，《中国科学：数学》，即将出版，https://doi.org/10.1007/s11425-022-2005-x。[37] H. Lin，迹逼近与 $\mathcal{Z}$-稳定性，预印本，arXiv:2205.04013[38] H. Lin 和 P. Ng，小理想对 C^*-代数的扩张，《国际数学研究通知》，第 1–89 页，rnac115，https://doi.org/10.1093/imrn/rnac115，2022年5月。[39] J. Mingo 和 W . Phillips，Hilbert C^*-模的等变平凡性定理，《美国数学会会刊》91 (1984), 225–236。[40] E. Ortega, M. Rørdam, Mikael 和 H. Thiel，Cuntz 半群与开投影的比较，《泛函分析杂志》260 (2011), 3474–3493。[41] W. Paschke，B^*-代数上的内积模，《美国数学会汇刊》182 (1973), 443–468。[42] G. K. Pedersen，C^*-代数及其自同构群，伦敦数学学会专著，Academic Press，伦敦、纽约、旧金山，1979。[43] G. K. Pedersen，C^*-代数中的酉扩张与极分解，《算子理论杂志》17 (1987), 357–364。[44] L. Robert，关于 $\mathcal{Z}$-稳定无投影 C^*-代数的注记。《格拉斯哥数学杂志》58 (2016), no. 2, 273–277。[45] M. Rørdam，与超齐次型代数张量积的单 C^*-代数的结构。II，《泛函分析杂志》107 (1992), 255–269。[46] M. Rørdam，$\mathcal{Z}$-吸收 C^*-代数的稳定秩与实秩。《国际数学杂志》15 (2004), no. 10, 1065–1084。[47] Y. Sato，具有有限维极端边界的单核 C^*-代数的迹空间，预印本 2012, http://arxiv.org/abs/1209.3000。[48] H. Thiel，稳定秩一的单 C^*-代数中算子秩，《数学物理通讯》377 (2020), 37–76。[49] A. Tikuisis，对于稳定无投影 C*-代数，核维数、$\mathcal{Z}$-稳定性与代数单性，《数学年刊》358 (2014), nos. 3-4, 729–778。

[50] A. S. Toms. C^*-代数的平坦维数增长，《泛函分析杂志》238 (2006), 678–708。[51] A. Toms，核 C^*-代数的分类问题。《数学年刊》167 (2008), 1029–1044。[52] A. Toms, S. White 和 W. Winter， $\mathcal{Z}$-稳定性与有限维迹边界，《国际数学研究通知》IMRN 2015, no. 10, 2702–2727。[53] W. Winter，纯 C*-代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性，《数学发明》187 (2012), no. 2, 259–342。[54] S.Zhang，某些实秩零的 C^*-代数及其冠代数和乘子代数。I，《太平洋数学杂志》155 (1992), 169–197[55] W. Zhang，具有非紧极端边界的迹态空间，《泛函分析杂志》267 (2014) 2884–2906。

电子邮箱：brownl@purdue.edu

电子邮箱：hlin@uoregon.edu