arXiv:2301.04287v1 [math.NT] 11 Jan 2023

有限域上的反 Kloosterman 和

XIN LIN 和 DAQING WAN

摘要。经典的 n元有限域上的克洛斯特曼和，从复数角度看可由 Deligne 定理充分理解，而从 p进角度看则可由 Sperber 定理充分理解。本文研究反 n元克洛斯特曼和的复数估计和 p进估计，旨在回答 N. Katz（1995）提出的一个问题。我们将给出两个复数估计。第一个基于高斯和，是初等的。第二个估计更为深入，依赖于 Adolphson-Sperber、Denef-Loeser 和 Fu 关于扭曲环面指数和的上同调结果。该深入结果假设特征 p 不整除 $n+1$。结合 Dwork 的 p进理论，我们还确定了与反 n元克洛斯特曼和相关的 L 函数的零点和极点的精确 p进赋值，条件为 $p \equiv 1$ 模 $(n+1)$。正如我们将看到的，在各个方面，反 n元克洛斯特曼和都比经典的 n元克洛斯特曼和更为复杂；也就是说，我们对它的理解并不完整，部分原因在于霍奇数现在大多为 2，而不是 1。

1. 引言

设 $\mathbb{F}_q$ 是具有特征 p 的 q 元有限域。设 $\psi\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ 是一个非平凡加性特征，并设 χ_1, ..., $\chi_m\colon \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$ 是乘性特征。数论中的一个经典问题是对混合特征和给出良好的估计

$$\sum_{x_i\in\mathbb{F}_q^*} \chi_1(f_1)\cdots\chi_m(f_m)\psi(f), \tag{1.1}$$

其中 $f, f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{F}_q\left[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\right]$ 是劳朗多项式。如有必要对 m 作约化，我们可以假设所有 χ_i 都是非平凡的。利用高斯和

$$G(\chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} \chi(x)\psi(x),$$

可以得到众所周知的关系式

$$\begin{aligned}&\sum_{x_i,y_j\in\mathbb{F}_q^*} \overline{\chi_1}(y_1)\cdots\overline{\chi_m}(y_m)\psi\left(f+y_1f_1+\cdots+y_mf_m\right)\\ &= G(\overline{\chi_1})\cdots G(\overline{\chi_m})\sum_{x_i\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(f_1)\cdots\chi_m(f_m)\psi(f).\end{aligned}$$

由于高斯和已得到充分研究，对（1.1）的研究便归结为研究以下类型的扭曲环面指数和

$$\sum_{x_i\in\mathbb{F}_q^*} \overline{\chi_1}(x_1)\cdots\overline{\chi_n}(x_n)\psi\left(f(x_1,\cdots,x_n)\right), \tag{1.2}$$

其中一些 χ_i 可能是平凡的。这类扭曲环面指数和在文献中已得到广泛研究，最著名的工作包括 Adolphson-Sperber [AS87a, AS89, AS90, AS93] 通过 Dwork 的 p-进上同调进行研究，以及 Denef-Loeser [DL91] 和 Fu [Fu09,Fu16] 通过 Grothendieck 的ℓ-进上同调进行研究。对于复数估计，这两种方法都依赖于 Deligne 关于韦伊猜想的定理。当 f 关于其牛顿多面体 $\Delta(f)$ 非退化时，可以得到一个尖锐估计。对于任意 f，我们对该和的理解仍远远不够。

2020年数学主题分类。11T23，11L05，11L07，11S40。关键词和短语。反 Kloosterman 和、指数和、L 函数、有限域。

环面指数和的一个重要例子是经典的 n 变量克洛斯特曼和，其中 $\chi_1 = \cdots = \chi_n = 1$ 且

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n},\ b \in \mathbb{F}_q^*.$$

在这种情况下，复权由 Deligne 著名的定理确定，而 p-进斜率则由 Sperber 定理 [Spe 80]确定。值得注意的是，对于扭曲的 n 变量克洛斯特曼和（当某些 χ_i 非平凡时），一般而言， p-进斜率尚未完全确定，只有在 $n = 1$ 这一情形下例外，此时 Adolphson-Sperber [AS87b] 得到了泛型的 p-进斜率。若将上述劳朗多项式取倒数，并考虑如下有理函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n}},\ b \in \mathbb{F}_q^*,$$

它已不再是劳朗多项式，由此便引出了所谓的反演克洛斯特曼和。这类和的研究可追溯至 N. Katz [Kat95]。

更确切地说，本文研究如下由下式定义的扭曲反演 n 变量克洛斯特曼和

$$\begin{aligned} S_n(\chi, b) &= \sum_{\substack{x_1 \cdots x_{n+1} = b,\ x_i \in \mathbb{F}_q^* \\ x_1 + \cdots + x_{n+1} \neq 0}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \psi\left(\frac{1}{x_1 + \cdots + x_{n+1}}\right) \\ &= \sum_{\substack{x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n} \neq 0 \\ x_i \in \mathbb{F}_q^*}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \chi_{n+1}\left(\frac{b}{x_1 \cdots x_n}\right) \psi\left(\frac{1}{x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n}}\right), \end{aligned}$$

其中 $b \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $n \geq 1$。当 $n = 1$ 时，Katz [Kat95] 为 $S_1(\chi, b)$ 得到了一个紧的上界。这一结果与 Angel [Ang96] 和 Evans [Eva95] 的论文共同证明了有限上半平面图在特征 2 下是拉马努金图。在 [Kat95], 中，Katz 提出了如下问题：当 $n \geq 1$ 时，关于 $S_n(\chi, b)$ 能得出什么结论？本文旨在从复数和 p-进两个角度研究这些反演 n 变量克洛斯特曼和。正如我们将看到的，这类和十分有趣，因为其中出现了各种新特性和额外困难。

注。 [Kat95] 中引入的精确和是以下相关的和，

$$T_n(\chi, b) = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_{n+1} = 1 \\ x_1 + \cdots + x_{n+1} \neq 0}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \psi\left(\frac{b}{x_1 + \cdots + x_{n+1}}\right).$$

通过变量代换 $x_i \to b x_i$，可知

$$T_n(\chi, b) = S_n(\chi, \frac{1}{b^{n+1}}) \chi_1 \cdots \chi_{n+1}(b).$$

因此，两族和 $S_n(\chi, b)$ 和 $T_n(\chi, b)$ 本质上是等价的。我们采用$S_n(\chi, b)$，因为它是经典克洛斯特曼和更直接的反演类比。

对于 $S_n(\chi, b)$ 的复数估计，所能期待的最好结果是和 $S_n(\chi, b)$ 中出现平方根抵消，即

$$S_n(\chi, b) = O_n(q^{\frac{n}{2}}).$$

正如我们将看到的，当 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$ 时， $n > 2$ 并非如此；在这种情况下， $S_n(\chi, b)$ 含有主项 $-q^{n-1}\chi_1(b)$，其指数 $n - 1$ 大于指数 $n/2$。

我们将给出关于 $S_n(\chi, b)$ 的两种不同估计。第一种估计基于一种利用高斯和的初等方法，该方法已经显示出一个新特点：当$\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$时，存在非平凡的主项。由此，我们得到关于 $S_n(\chi, b)$ 的如下简单估计。

定理 1.1. 记号同上。若 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$，则有

$$\left| S_n(\chi, b) + \frac{(q-1)^n}{q}\chi_1(b) \right| \leq q^{\frac{n+1}{2}}.$$

若 $\chi_i \neq \chi_j$ 对某个 $i \neq j$ 成立，则有

$$|S_n(\chi, b)| \leq q^{\frac{n+1}{2}}.$$

当 q 较大时，误差项 $q^{(n+1)/2}$ 尚未达到最优的平方根抵消。为获得更强的平方根抵消及误差项 $O_n(q^{n/2})$，我们将 $S_n(\chi, b)$ 化为某个扭曲环面指数和 $S_k^*(\chi, f)$，并可利用 Adolphson-Sperber、Denef-Loeser 和 Fu 的结果处理。我们验证了相关的劳朗多项式 f 在 p 不整除 $n+1$ 时是非退化的。这给出了我们的第二个估计。

定理 1.2. 记号同上。设 $p \nmid (n+1)$。若 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$，则有

$$|S_n(\chi, b) + \frac{(q-1)^n - (-1)^n}{q}\chi_1(b)| \leq (2n+1)q^{\frac{n}{2}}.$$

若 $\chi_i \neq \chi_j$ 对某个 $i \neq j$ 成立，则有

$$|S_n(\chi, b)| \leq 2(n+1)q^{\frac{n}{2}}.$$

显然，当 $q > 4(n+1)^2$ 时，定理 1.2 中的估计优于定理 1.1 中的估计。我们预期，当 p 整除 $n+1$ 时，定理 1.2 （常数可能更优）仍然成立。但在这一奇异情形下，上述关于环面和的结果并不适用，因此需要采用不同的方法。

对于 p-进斜率，我们着重研究较简单的未扭曲情形。当 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$ 时，我们研究倒置 n 变量克洛斯特曼和的生成 L 函数的倒数根和极点的 p-进赋值。我们证明，牛顿多边形与霍奇多边形一致，当且仅当 $p \equiv 1 \bmod n+1$。由此，当 $p \equiv 1 \bmod n+1$ 时，我们便完全确定了 p-进斜率序列。下文将对此作更精确的说明。

我们的方法是将生成 L 函数约化为某个非扭环面 L 函数。为了构造这两个 L 函数之间的关系，我们需要考虑定义在每个有限扩张 $\mathbb{F}_{q^k}$ 上的反演克洛斯特曼和。设 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$，定义在 $\mathbb{F}_{q^k}$ 上的反演 n 变量克洛斯特曼和为

$$S_{k,n}(b) = \sum_{\substack{x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\neq 0 \\ x_i \in \mathbb{F}_{q^k}^*}} \psi\left(\mathrm{Tr}_k\left(\frac{1}{x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}}\right)\right),$$

其中 $b \in \mathbb{F}_q^*$，且 $\mathrm{Tr}_k\colon \mathbb{F}_{q^k} \to \mathbb{F}_q$ 是迹映射。$S_{k,\ n}(b)$ 的生成 L 函数定义为

$$\mathrm{L}_n(b, T) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_{k,n}(b)\frac{T^k}{k}\right).$$

运用关于相关环面 L 函数的一些系统性结果，在对 p 给定限制的条件下，我们得到了 $\mathrm{L}_n(b, T)$ 的所有倒数根和极点的复绝对值及 p-进绝对值。

定理 1.3. 设 $p \nmid (n+1)$。该 L 函数是如下形式的有理函数：

$$\mathrm{L}_n(b, T)^{(-1)^{n+1}} = (1-T)^{(n+1)} \prod_{j=2}^{n} \left(1 - q^{j-1}T\right)^{\binom{n}{j}(-1)^{j-1}} \prod_{i=1}^{2n}(1-\alpha_i T).$$

作为复数，倒数根 α_i 满足 $|\alpha_i| = q^{\frac{n}{2}}$ 对所有 $1 \leq i \leq 2n$ 均成立。

若 $p \equiv 1$ 模 $(n+1)$，将 α_i视为 p-进数，则按递增顺序排列的斜率序列 $\{v_q(\alpha_i)\}_{i=1}^{2n}$ 为

$$\{0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1, n\}.$$

我们的结果表明，对于反演的 n 变量克洛斯特曼和，若 p 不整除 $n+1$，则本原中间上同调的维数为 $2n$，是纯权 n，且霍奇数为$\{1, 2, 2, \cdots, 2, 1\}$。这与经典的 n 变量克洛斯特曼和形成对比：其中间上同调的维数为 $n+1$，是纯权 n，且霍奇数为 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, 1\}$。较大的霍奇数表明，在研究反演的 n 变量克洛斯特曼和时，可能会出现新的特征和额外的困难。

作为定理 1.3 第一部分的推论，我们得到一个稍好的界：$S_{k,\ n}(b)$。

推论 1.4。若 $p \nmid (n+1)$，则对所有整数 $k \geq 1$，有

$$|S_{k,n}(b) + \frac{(q^k-1)^n - (-1)^n(q^k+1)}{q^k}| \leq 2nq^{\frac{nk}{2}}.$$

当 $k = 1$ 时，指数和 $S_{k,\ n}(b)$ 化简为 $S_n(\chi, b)$，其中 $\chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}$。具体而言，推论 1.4 中的估计优于定理 1.2 第一种情形中的估计。我们指出，定理 1.3 第二部分中的条件 $p \equiv 1 \bmod (n+1)$ 是同一结论成立的充要条件。因此，若 $p \not\equiv 1 \bmod (n+1)$，斜率序列将严格不同，但我们不知道这种情况下的确切斜率序列。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾一些技术方法，包括 Adolphson-Sperber 定理以及 Dwork 关于环面指数和的理论。第 3 节运用这些方法证明主要结果。

我们在引言末尾提及若干近期文献 [FW21] [Li21] [YZ22] [CL22][LC22]，这些文献运用了一些相关的环面技术，处理了解析数论中出现的不同类别的非环面n变量指数和。

2. 环面指数和预备知识

2.1. 环面 L 函数的有理性。设 $f \in \mathbb{F}_q\left[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\right]$ 是一个劳朗多项式，其对应的扭曲环面指数和定义为

$$S_k^*(\chi, f) = \sum_{x_i \in \mathbb{F}_{q^k}^*} \chi_1(\mathrm{N}_k(x_1)) \cdots \chi_n(\mathrm{N}_k(x_n)) \psi(\mathrm{Tr}_k(f)), \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{Tr}_k\colon \mathbb{F}_{q^k} \to \mathbb{F}_q$是迹映射，$\mathrm{N}_k\colon \mathbb{F}_{q^k} \to \mathbb{F}_q$是范数映射，$\chi_1, \ldots, \chi_n\colon \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$ 是乘性特征，而 $\psi\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ 是非平凡加性特征。数论中的一个经典问题是估计 $S_k^*(\chi, f)$ 的绝对值。

Dwork-Bombieri-Grothendieck 的一个著名定理 [Dwo60, Bom66, Gro68]指出，$S_k^*(\chi, f)$ 的生成 L 函数是一个有理函数：

$$\mathrm{L}^*(\chi, f, T) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_k^*(\chi, f)\frac{T^k}{k}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{d_1}(1-\alpha_i T)}{\prod_{j=1}^{d_2}(1-\beta_j T)},$$

其中所有倒数零点和极点都是非零代数整数。特别地，当所有 χ_i 都是平凡特征时，非扭曲环面指数和及其对应的 L 函数分别记为 $S_k^*(f)$ 和 $\mathrm{L}^*(f, T)$。

通过对数导数，我们有

$$S_k^*(\chi, f) = \sum_{j=1}^{d_2} \beta_j^k - \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i^k, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}. \tag{2.2}$$

因此，对 $S_k^*(\chi, f)$ 的估计归结为了解所有倒数零点 α_i 和极点 β_j的绝对值。Deligne 关于黎曼猜想的定理 [Del80] 给出了

一般情况下，所有 α_i 和 β_j 的绝对值。倒数零点和极点的复绝对值满足

$$|\alpha_i| = q^{u_i/2}, |\beta_j| = q^{v_j/2}, u_i \in \mathbb{Z} \cap [0, 2n], v_j \in \mathbb{Z} \cap [0, 2n].$$

对于非阿基米德绝对值，Deligne 证明了：当 ℓ 为素数且$\ell \neq p$时， $|\alpha_i|_\ell = |\beta_j|_\ell = 1$。对于 p-进绝对值，有

$$|\alpha_i|_p = q^{-r_i}, |\beta_j|_p = q^{-s_j}, r_i \in \mathbb{Q} \cap [0, n], s_j \in \mathbb{Q} \cap [0, n].$$

整数 u_i（分别为 v_j）称为 α_i（分别为 β_j）的权，而有理数 r_i（分别为 s_j）称为 α_i（分别为 β_j）的斜率。

过去几十年来，确定生成 L 函数的权和斜率一直备受关注。若不对劳朗多项式 f施加任何额外条件，甚至很难确定倒数根和极点的数量。现有关于权和斜率的大部分研究都依赖于适当的光滑性条件。对于环面指数和，这通常指非退化条件，精确定义见下文。

Let

$$f(x_1, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{J} a_j x^{V_j} \tag{2.3}$$

设其为一个劳朗多项式，满足 $a_j \in \mathbb{F}_q^*$且 $V_j = (v_{1j}, \dots..., v_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$ $(1 \leq j \leq J)$。f 的牛顿多面体 $\Delta(f)$ 定义为由原点和格点 V_j $(1 \leq j \leq J)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中生成的凸包。对于 $\delta \subset \Delta(f)$，令劳朗多项式

$$f^\delta = \sum_{V_j \in \delta} a_j x^{V_j}$$

是 f 到 δ的限制。

定义 2.1（非退化）。若对任意维数的、不包含原点的 $\Delta(f)$ 的闭面 δ，其偏导数 f 均

$$\left\{ \frac{\partial f^\delta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^\delta}{\partial x_n} \right\}$$

在 $\mathbb{F}_q$的代数闭包上没有公共零点。

当 f 非退化时，Adolphson-Sperber [AS89] 证明了非扭环面 L 函数 $L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}$ 是一个多项式，并改进了权的界。

定理2.2（ [AS89]）。对于任意非退化的 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$，相应的 L 函数 $L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}$ 是一个次数为 $n!\,\mathrm{Vol}(\Delta(f))$ 的多项式。也就是说，

$$L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}} = \prod_{i=1}^{n!\,\mathrm{Vol}(\Delta(f))} (1 - \alpha_i T),\ \alpha_i \neq 0.$$

对于任意乘性特征 χ_i（非平凡或平凡），在非退化假设下，Adolphson-Sperber [AS91,AS93], [DL91] 和 Fu[Fu09] 研究并完成了扭环面L函数的次数和权的研究。这些结果导出了以下扭曲环面指数和的界。

定理 2.3（ [DL91] [AS93] [Fu09]）。设 $f \in \mathbb{F}_q\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\right]$ 是一个满足$\Delta = \Delta(f)$ 的劳朗多项式。若 f 是非退化的，则有

$$|S_k^*(\chi_1, \dots, \chi_n, f)| \leq n!\,\mathrm{Vol}(\Delta) q^{\frac{nk}{2}}.$$

对于 L 函数的斜率，未扭曲情形下的情况要简单一些；否则，甚至连 Adolphson-Sperber 的“霍奇下界”都描述得颇为繁琐。因此，以下各小节讨论的定义和理论都聚焦于未扭曲 L 函数。

2.2. 牛顿多边形与霍奇多边形。为确定其倒根的 q-进斜率，我们引入 q-进牛顿多边形。

定义2.4（牛顿多边形）。设 $L(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in 1+T\overline{\mathbb{Q}}_p[T]$，其中 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包。$L(T)$ 的 q-进牛顿多边形定义为点集 $\{(k, \mathrm{ord}_q(a_k)) \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ in $\mathbb{R}^2$ 的下凸包。

引理2.5（ [Kob84]）。记号同上。设 $L(T) = (1-\alpha_1 T)\ldots(1-\alpha_n T)$ 是 $L(T)$ 按倒根 $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ 分解所得的因式分解。令 $\lambda_i = \mathrm{ord}_q \alpha_i$。若 λ 是 $L(T)$ 的 q-进牛顿多边形的斜率，且水平长度为 l，则恰有 l 个 λ_i 等于 λ。

$L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}$的 q-进牛顿多边形记为 NP(f)。引理2.5将 NP(f) 与环面 L 函数倒数根的 q-进赋值联系起来。NP(f) 的定义依赖于 L 函数的系数，因此难以直接计算。当 f 非退化时，Adolphson和Sperber 证明了 $L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}$是一个多项式，且 NP(f) 有一个称为霍奇多边形的拓扑下界，它更容易确定。因此，我们将计算霍奇多边形，并考察牛顿多边形何时与这一下界重合。

设 Δ 是一个包含原点的 n 维整多面体，位于 $\mathbb{R}^n$ 中。对于 $u \in \mathbb{R}^n$，权函数 $w(u)$ 表示满足 $u \in c\Delta$的最小非负实数 c。若不存在这样的 c，则记$w(u) = \infty$。设 δ 是 Δ 的一个不包含原点的余维1面。令 $D(\delta)$ 为定义 δ 的线性方程中各系数分母的最小公倍数，其中该方程已归一化为常数项为 1。我们将 Δ 的分母定义为所有此类 $D(\delta)$ 的最小公倍数，具体如下:

$$D = D(\Delta) = \mathrm{lcm}_{\delta} D(\delta),$$

where δ 遍历 Δ 中所有不包含原点的余维 1 面。容易看出 eck

$$w(\mathbb{Z}^n) \subseteq \frac{1}{D(\Delta)}\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}.$$

对于非负整数 k，令

$$W_\Delta(k) = \#\left\{u \in \mathbb{Z}^n | w(u) = \frac{k}{D}\right\} \tag{2.4}$$

表示 $\mathbb{Z}^n$ 中权为 k/D的格点数。已知其生成函数是如下形式的有理函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_\Delta(k) t^{k/D} = \frac{\sum_{k=0}^{nD} H_\Delta(k) t^{k/D}}{(1-t)^n}.$$

由此得到

定义2.6（霍奇数）。设 Δ是一个 n维整多面体，且原点位于 $\mathbb{R}^n$中。对于非负整数 k， Δ的第 k 个霍奇数定义为

$$H_\Delta(k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} W_\Delta(k - iD). \tag{2.5}$$

已知

$$H_\Delta(k) = 0, \quad \text{if} \quad k > nD.$$

根据霍奇数，我们定义给定多面体 $\Delta \in \mathbb{R}^n$ 的霍奇多边形如下。

定义 2.7（霍奇多边形）。 Δ 的霍奇多边形 HP(Δ) 是$\mathbb{R}^2$ 中的下凸多边形，其顶点为 (0,0) 和

$$\mathbb{Q}_k = \left(\sum_{m=0}^{k} H_\Delta(m), \frac{1}{D}\sum_{m=0}^{k} m H_\Delta(m)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, nD,$$

其中 $H_\Delta(k)$ 是 Δ的第 k 个霍奇数， $k = 0, 1, \ldots, nD$.

也就是说，HP(Δ) 是一个从原点 (0,0) 出发的多边形，其斜率为 k/D，水平长度为$H_\Delta(k)$，其中 $k = 0$、1、.....、nD。顶点 $\mathbb{Q}_k$称为折点，如果 $H_\Delta(k+1) \neq 0$，其中$k = 1$、2、.....、$nD-1$。

注意，水平长度 $H_\Delta(k)$ 是某个基本区域中权为 k/D 的格点数量，该基本区域对应于用于计算 L 函数的 p-进上同调空间的一组基。根据 Adolphson-Sperber 定理，霍奇多边形是相应牛顿多边形的下界。

定理 2.8（ [AS89]）。对于每个素数 p 以及满足 $\Delta(f) = \Delta \subset \mathbb{R}^n$ 的非退化劳朗多项式 f，我们有

$$NP(f) \geq HP(\Delta),$$

其中，NP(f) 是 $L^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}$. 的 q-进牛顿多边形。此外，NP(f) 和 NP(Δ) 的端点重合。

定义 2.9（普通）。若 NP(f) = HP(Δ)，则称劳朗多项式 f 为普通多项式。

显然，劳朗多项式的普通性取决于其牛顿多面体Δ 以及 $f(x)$ 的系数。应用 Wan93], 的面分解定理 [，我们将 f 的普通性归结为其较小的部分，这些部分更易处理。

定理 2.10（Wan93] 的面分解定理 [）。设 f 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的非退化劳朗多项式。假设 $\Delta = \Delta(f)$ 是 n 维的，且 $\delta_1, \ldots, \delta_h$ 是 Δ 中所有不包含原点的余维 1 面。令 f^{δ_i} 表示 f 在 δ_i 上的限制。那么，对于 $1 \leq i \leq h$， f 是普通的，当且仅当 f^{δ_i} 是普通的。

2.3. 边界分解定理。在描述边界分解之前，我们先通过 Dwork 迹公式，将 L 函数表示为无限弗罗贝尼乌斯矩阵的弗雷德霍姆行列式。

2.3.1. Dwork 迹公式。设 $\mathbb{Q}_p$ 为 p-进数域，Ω 为$\overline{\mathbb{Q}}_p$的完备化。Ω 中一个固定的 p次本原单位根记作 ζ_p。设 π 为 $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$中满足下式的元素

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi^{p^m}}{p^m} = 0, \ \pi \equiv \zeta_p - 1 \mod (\zeta_p - 1)^2, \quad \text{and} \quad \operatorname{ord}_p \pi = \frac{1}{p-1}.$$

于是， π 是 $\mathbb{Q}_p(\pi)$的赋值参数，因此 $\mathbb{Q}_p(\pi) = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$。设 $E_p(t)$为 Artin-Hasse 指数级数,

$$E_p(t) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{p^m}}{p^m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m t^m \in \mathbb{Z}_p[[x]].$$

按 Dwork 的术语，分裂函数 $\theta(t)$定义为

$$\theta(t) = E_p(\pi t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \pi^m t^m.$$

劳朗多项式 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 写作

$$f = \sum_{j=1}^{J} \bar{a}_j x^{V_j},$$

where $V_j \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\bar{a}_j \in \mathbb{F}_q^*$。设 a_j 为 Ω 中满足 $a_j^q = a_j$ 的 $\bar{a}_j$ 的 Teichmüller提升。令

$$F(f,x) = \prod_{j=1}^{J} \theta(a_j x^{V_j}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} F_r(f) x^r.$$

系数由下式给出

$$F_r(f)=\sum_u(\prod_{j=1}^J\lambda_{u_j}a_j^{u_j})\pi^{u_1+\cdots+u_J},\quad r\in\mathbb{Z}^n,$$

其中，求和遍历下列线性方程组的所有解

$$\sum_{j=1}^J u_jV_j=r\quad\text{with}\quad u_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

且 λ_m 是 Artin-Hasse 指数级数 $E_p(t)$ 的第 m 项系数。

假设 $\Delta=\Delta(f)$。令 $L(\Delta)=\mathbb{Z}^n\cap C(\Delta)$ 表示由原点和 Δ 生成的闭锥中的格点集合。给定点 $r\in\mathbb{R}^n$，将权函数定义为

$$w(r):=\inf_{\vec{u}}\left\{\sum_{j=1}^J u_j|\sum_{j=1}^J u_jV_j=r,\quad u_j\in\mathbb{R}_{\geq 0}\right\}.$$

无限半线性 Frobenius 矩阵 $A_1(f)$ 是如下矩阵，其行和列以 $L(\Delta)$ 中按权排列的格点为指标:

$$A_1(f)=(a_{r,s}(f))=(F_{ps-r}(f)\pi^{w(r)-w(s)}),$$

其中 $r,s\in L(\Delta)$。无限线性 Frobenius 矩阵 $A_a(f)$ 定义为

$$A_a(f)=A_1(f)A_1^{\tau}(f)\cdots A_1^{\tau^{a-1}}(f),$$

其中 τ 是绝对 Frobenius 自同构。

D文中的迹公式可用矩阵 $A_a(f)$ 表示如下，参见 [Wan04]

定理 2.11. 我们有

$$\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n-1}}=\prod_{i=0}^n\det(I-Tq^iA_a(f))^{(-1)^i\binom{n}{i}}.\tag{2.6}$$

等价地,

$$\det(I-TA_a(f))=\prod_{i=0}^{\infty}\left(\mathrm{L}^*(f,q^iT)^{(-1)^{n-1}}\right)^{\binom{n+i-1}{i}}.\tag{2.7}$$

现在只需理解行列式 $\det(I-TA_a(f))$。根据 $\mathrm{ord}_p F_r(f)\geq w(r)\overline{p-1}$这一事实，我们有如下估计

$$\mathrm{ord}_p(a_{r,s}(f))\geq\frac{w(ps-r)+w(r)-w(s)}{p-1}\geq w(s).$$

设 ξ 是 Ω 中满足 $\xi^D=\pi^{p-1}$的一个元素。那么 $A_1(f)$ 可以写成分块形式,

$$A_1(f)=\begin{pmatrix}A_{00}&\xi A_{01}&\cdots&\xi^iA_{0i}&\cdots\\A_{10}&\xi A_{11}&\cdots&\xi^iA_{1i}&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\A_{i0}&\xi A_{i1}&\cdots&\xi^iA_{ii}&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\end{pmatrix},$$

其中，块 A_{ii} 是一个 p-进整系数 $W_\Delta(i)\times W_\Delta(i)$ 矩阵。这意味着 $\det(I-TA_1(f))$ 的 q-进牛顿多边形具有一个自然的下界，该下界可视为霍奇多边形的链级版本。

定义 2.12. 设 $P(\Delta)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中顶点为 (0, 0) 和

$$P_k = \left(\sum_{m=0}^{k} W_\Delta(m), \frac{1}{D} \sum_{m=0}^{k} mW_\Delta(m) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Adolphson-Sperber 下界的链级版本和普通性如下。

命题 2.13（ [AS87a]）。$\det(I - TA_a(f))$ 的 q-进牛顿多边形位于 $P(\Delta)$ 之上。

命题 2.14（ [Wan04]）。记号同上。假设 f 关于 $\Delta = \Delta(f)$ 非退化。那么，$\mathrm{NP}(f) = \mathrm{HP}(\Delta)$，当且仅当 $\det(I - TA_a(f))$ 的 q-进牛顿多边形与其下界 $P(\Delta)$ 重合。

2.3.2. 边界分解。设 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 满足 $\Delta = \Delta(f)$，其中 Δ 是包含原点的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 n 维整凸多面体。令 $C(\Delta)$ 为由 Δ 在 $\mathbb{R}^n$. 中生成的锥

定义 2.15. 边界分解

$$B(\Delta) = \{ \textit{the interior of a closed face in } C(\Delta) \textit{ containing the origin} \}$$

是将 $C(\Delta)$ 剖分为若干两两不交的相对开锥的唯一内部剖分 .

如果原点是 Δ 的一个顶点，那么它就是 $B(\Delta)$ 中唯一的 0 维开锥。回顾一下，$A_1(f) = (a_{r,\ s}(f))$ 是无限半线性 Frobenius 矩阵，其行和列由 $L(\Delta)$ 中的格点索引。对于 $\Sigma \in B(\Delta)$，我们将 $A_1(\Sigma, f)$ 定义为 $A_1(f)$ 中对应于 $r, s \in \Sigma$ 的子矩阵。令 $f^{\overline{\Sigma}}$ 为 f 在 Σ 的闭包上的限制。则 $A_1(\Sigma, f^{\overline{\Sigma}})$ 表示 $A_1(f^{\overline{\Sigma}})$ 中对应于 $r, s \in \Sigma$ 的子矩阵。

令 $B(\Delta) = \{\Sigma_0, \dots, \Sigma_h\}$，使得 $\dim(\Sigma_i) \le \dim(\Sigma_{i+1})$，$i = 0, \dots, h-1$.。定义 $B_{ij} = (a_{r,\ s}(f))$，其中 $r \in \Sigma_i$ 且 $s \in \Sigma_j (0 \le i, j \le h)$。对基向量作一次置换后，无限半线性 Frobenius 矩阵可写为

$$A_1(f) = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & \cdots & B_{0h} \\ B_{10} & B_{11} & \cdots & B_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{h0} & B_{h1} & \cdots & B_{hh} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

其中 $B_{ij} = 0$ 对 $i > j$成立。于是 $\det(I - TA_1(f)) = \prod_{i=0}^{h} \det(I - TB_{ii})$，并且我们得到边界分解定理。

定理 2.16（边界分解定理 [Wan93]）。设 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 满足 $\Delta = \Delta(f)$。则有如下因式分解

$$\det(I - TA_1(f)) = \prod_{\Sigma \in B(\Delta)} \det\left(I - TA_1(\Sigma, f^{\overline{\Sigma}})\right).$$

2.4. 对角局部理论。本小节中，我们介绍劳朗多项式为对角的情形下的一些非退化和普通判据。

定义 2.17. 若劳朗多项式 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 满足 f 恰有 n个非恒定项，且 $\Delta(f)$是 $\mathbb{R}^n$.中的一个 n维单纯形，则称其为对角劳朗多项式

设 f 是定义在 $\mathbb{F}_q$上的对角劳朗多项式。记

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{V_j},$$

其中 $a_j \in \mathbb{F}_q^*$和 $V_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$对于 $1 \le j \le n$。设 $\Delta = \Delta(f)$。Δ 的顶点矩阵定义为

$$M(\Delta) = (V_1, \dots, V_n),$$

其中第 i 列是 f 的第 i 个指数。由于 f 是对角的， $M(\Delta)$ 可逆。

命题 2.18. 假设 $f \in \mathbb{F}_q[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 是对角的，且 $\Delta = \Delta(f)$。那么 f 非退化，当且仅当 p 与 $\det(M(\Delta))$ 互素。

设 $S(\Delta)$ 是下列线性方程组的解集

$$M(\Delta)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 1), \quad r_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1).$$

容易证明， $S(\Delta)$ 是一个阿贝尔群，其阶为

$$|\det M(\Delta)| = n! \operatorname{Vol}(\Delta). \tag{2.9}$$

设 $S_p(\Delta)$ 表示 $S(\Delta)$ 中与 p 互素的部分。它是一个阿贝尔子群，其阶等于 $\det M(\Delta)$ 中与 p 互素的因子。特别地，若 p 与 $\det M(\Delta)$ 互素，则 $S_p(\Delta) = S(\Delta)$。根据高斯和的 Stickelberger 定理，我们得到非退化劳朗多项式 [Wan04]的下列普通判据。

命题 2.19. 对角劳朗多项式 f 在 p 处为普通，当且仅当范数函数$|r| = r_1 + \cdots + r_n$ 在 $S_p(\Delta)$ 上关于 p- 作用保持稳定：也就是说，对每个 $r \in S_p(\Delta)$，都有$|r| = |\{pr\}|$，其中 $\{pr\}$ 是 pr 在 $S_p(\Delta)$ 中的等价类。

3. 主要定理的证明

本节证明主要定理。

3.1. 定理 1.1 的证明。回想一下，对于整数 $n \geq 1$，扭曲的反演 n 变量 Kloosterman 和定义为

$$S_n(\chi, b) = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_{n+1} = b \\ x_1 + \cdots + x_{n+1} \neq 0}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \psi\left(\frac{1}{x_1 + \cdots + x_{n+1}}\right),$$

其中， $b \in \mathbb{F}_q^*$、 ψ： $\mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ 是一个非平凡加性特征，而 χ_1、……、 χ_{n+1}： $\mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$ 是乘性特征。令 χ： $\mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$ 表示一个乘性特征。由特征的正交性可得

$$\begin{aligned} S_n(\chi, b) =& \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda, x_i \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{u \in \mathbb{F}_q} \psi\left(u\left(x_1 + \cdots + x_{n+1} - \lambda\right)\right) \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \\ & \times \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{\chi} \chi\left(\frac{x_1 \cdots \chi_{n+1}}{b}\right) \\ =& \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_i \in \mathbb{F}_q^*} \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{\chi} \chi\left(\frac{x_1 \cdots \chi_{n+1}}{b}\right) \\ & + \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{x_i \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{u \in \mathbb{F}_q^*} \psi\left(u\left(x_1 + \cdots + x_{n+1} - \lambda\right)\right) \\ & \times \chi_1(x_1) \cdots \chi_{n+1}(x_{n+1}) \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{\chi} \chi\left(\frac{x_1 \cdots \chi_{n+1}}{b}\right) \\ =& S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Then

$$S_1 = \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{\chi} \chi^{-1}(b) \sum_{x_i \in \mathbb{F}_q^*} \left(\chi\chi_1\right)(x_1) \cdots \left(\chi\chi_{n+1}\right)(x_{n+1})$$

$$= \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{\chi} \chi^{-1}(b) \prod_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{x_i \in \mathbb{F}_q^*} (\chi\chi_i)(x_i) \right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(q-1)^n}{q} \chi_1(b), & \text{if } \chi_1 = \cdots = \chi_{n+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

如果 χ 是平凡的，则高斯和 $G(\chi) = -1$。如果 χ 是非平凡的，则 $|G(\chi)| = \sqrt{q}$。于是

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda, u \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{\chi} \chi^{-1}(b) \sum_{x_i \in \mathbb{F}_q^*} (\chi\chi_1)(x_1)\psi(ux_1) \cdots (\chi\chi_{n+1})(x_{n+1})\psi(ux_{n+1}) \\ &\quad \times \psi(-u\lambda)\psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\lambda, u \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{\chi} \chi^{-1}(b)\overline{\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}}(u)\psi(-u\lambda)\psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) G(\chi\chi_1) \cdots G(\chi\chi_{n+1}) \\ &= \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\chi} \chi^{-1}(b) \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \overline{\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) G(\overline{\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}}) \\ &\quad \times G(\chi\chi_1) \cdots G(\chi\chi_{n+1}) \\ &= \frac{1}{q(q-1)} \sum_{\chi} \chi^{-1}(b)\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}(-1) G(\overline{\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}}) G(\overline{\chi^{n+1}\chi_1 \cdots \chi_{n+1}}) \\ &\quad \times G(\chi\chi_1) \cdots G(\chi\chi_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

由于 $|G(\chi)| \le \sqrt{q}$，可得 $|S_2| \le q^{\frac{n+1}{2}}$。结合 (3.1) 和 (3.2)，我们可以推出以下界。

$$\left| S_n(\chi, b) + \frac{(q-1)^n}{q} \chi_1(b) \right| \le q^{\frac{n+1}{2}}, \quad \text{if } \chi_1 = \cdots = \chi_{n+1},$$

and

$$|S_n(\chi, b)| \le q^{\frac{n+1}{2}}, \quad \text{if } \chi_i \ne \chi_j \text{ for some } i \ne j.$$

这就证明了定理 1.1。

3.2. 定理 1.2 的证明。扭曲反向克洛斯特曼和 $S_n(\chi, b)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} S_n(\chi, b) &= \sum_{\substack{x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n} \ne 0 \\ x_i \in \mathbb{F}_q^*}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n)\chi_{n+1}\left(\frac{b}{x_1 \cdots x_n}\right) \\ &\quad \times \psi\left(\frac{1}{x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n}}\right) \\ &= \sum_{\substack{z\left(x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n}\right) = 1 \\ z,\, x_i \in \mathbb{F}_q^*}} \chi_{n+1}(b)\,(\chi_1\overline{\chi_{n+1}})(x_1) \cdots (\chi_n\overline{\chi_{n+1}})(x_n)\psi(z) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{\substack{z,\, x_i \in \mathbb{F}_q^* \\ y \in \mathbb{F}_q}} \chi_{n+1}(b)\,(\chi_1\overline{\chi_{n+1}})(x_1) \cdots (\chi_n\overline{\chi_{n+1}})(x_n) \\ &\quad \times \psi\left(z + y\left(1 - z\left(x_1 + \cdots + x_n + \frac{b}{x_1 \cdots x_n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\chi_{n+1}(b)}{q}\left(\sum_{z,\, x_i\in\mathbb{F}_q^*}(\chi_1\overline{\chi_{n+1}})(x_1)\cdots(\chi_n\overline{\chi_{n+1}})(x_n)\psi(z)+E_n(\chi,b)\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(q-1)^n}{q}\chi_1(b)+\dfrac{1}{q}\chi_1(b)E_n(\chi,b), & \text{if } \chi_1=\cdots=\chi_{n+1},\\ \dfrac{1}{q}\chi_{n+1}(b)E_n(\chi,b), & \text{if } \chi_i\neq\chi_j \text{ for some } i\neq j, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中

$$E_n(\chi,b)=\sum_{y,z,x_i\in\mathbb{F}_q^*}(\chi_1\overline{\chi_{n+1}})(x_1)\cdots(\chi_n\overline{\chi_{n+1}})(x_n)$$
$$\times\psi\left(z+y\left(1-z\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)\right).$$

为了证明定理 1.2，只需估计 $E_n(\chi,b)$。

令 $f\in\mathbb{F}_q[x_1^{\pm1},\ldots,x_{n+2}^{\pm1}]$ 为由下式定义的劳朗多项式

$$f(x_1,\cdots,x_{n+2})=x_{n+1}\left(1-x_{n+2}\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)+x_{n+2}.$$

如 (2.1) 中所定义，$E_n(\chi,b)$ 是与 f 相关联的扭曲环面指数和。令 $\Delta=\Delta(f)$ 表示对应于 f 的牛顿多面体。显然，$\dim\Delta=n+2$，且 Δ 在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中有 $n+4$ 个顶点：$V_0=(0,\cdots,0)$（原点）、$V_1=(1,0,\cdots,0,1,1)$、$V_2=(0,1,\cdots,0,1,1)$、...、$V_n=(0,0,\cdots,1,1,1)$、$V_{n+1}=(-1,\cdots,-1,1,1)$、$V_{n+2}=(0,\cdots,0,1,0)$ 和 $V_{n+3}=(0,\cdots,0,0,1)$。此外，Δ 恰有 2 个不包含原点的余维 1 面。具体而言，它们是

$$\delta_1: x_{n+1}=1 \quad\text{and}\quad \delta_2: x_{n+2}=1.$$

顶点 $V_1,\ldots,V_{n+2}$ 确定面 δ_1，而顶点 $V_1,\ldots,V_{n+1},V_{n+3}$ 确定面 δ_2。设 $M(\delta_i)$ 为 δ_i 的顶点矩阵，则有

$$M(\delta_1)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1&0\\0&1&\cdots&0&-1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1&0\\1&1&\cdots&1&1&1\\1&1&\cdots&1&1&0\end{pmatrix},\qquad M(\delta_2)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1&0\\0&1&\cdots&0&-1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1&0\\1&1&\cdots&1&1&0\\1&1&\cdots&1&1&1\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

具体而言，对于 $i=1$，每个 f^{δ_i} 都是对角的，2。f 在 δ_i 上的限制定义为

$$f^{\delta_i}=\sum_{V_j\in\delta_i}a_jx^{V_j}.$$

命题 3.1。(i). 分母 $D=1$。

(ii). f 非退化，当且仅当 $p\nmid(n+1)$。

(iii). $\mathrm{Vol}(\Delta)=\dfrac{2n+2}{(n+2)!}$。

证明。分母 $D=1$ 可由 δ_i 的方程立即推出。由于 δ_1 和 δ_2 是 $\Delta(f)$ 中不包含原点的余维 1 面，只需证明 f^{δ_1} 和 f^{δ_2} 非退化。根据命题 2.18，f^{δ_i} 非退化，当且仅当 p 与 $\det(M(\delta_i))$ 互素。根据公式 (3.5),

$$\det(M(\delta_1))=-(n+1) \quad\text{and}\quad \det(M(\delta_2))=n+1. \tag{3.6}$$

这就证明了（ii）。

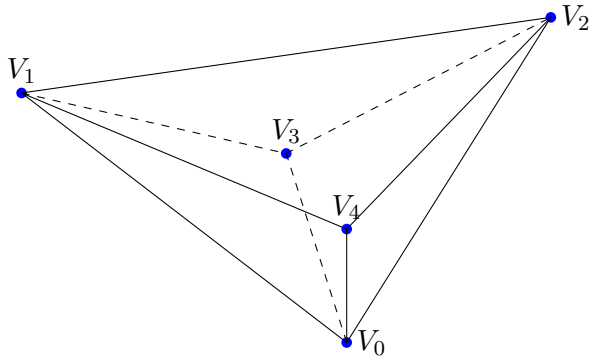


图 1. Δ对于 $n=1$

设 Δ_i 为由 δ_i 和原点生成的多胞体。Δ 的面分解意味着

$$\mathrm{Vol}(\Delta)=\mathrm{Vol}(\Delta_1)+\mathrm{Vol}(\Delta_2).$$

由公式 (2.9) 和 (3.6)，我们得到 (iii)。 □

结合定理 2.3 和命题 3.1，若 $p\nmid(n+1)$，则有

$$|E_n(\chi,b)|\le(n+2)!\,\mathrm{Vol}(\Delta)\cdot q^{\frac{n+2}{2}}=2(n+1)q^{\frac{n+2}{2}}, \tag{3.7}$$

其中 p 是 $\mathbb{F}_q$的特征。将 (3.4) 和 (3.7) 合并，当 $p\nmid(n+1)$ 时，我们便得到以下界。

$$|S_n(\chi,b)+\frac{(q-1)^n}{q}\chi_1(b)|\le 2(n+1)q^{\frac{n}{2}},\quad \text{if } \chi_1=\cdots=\chi_{n+1},$$

and

$$|S_n(\chi,b)|\le 2(n+1)q^{\frac{n}{2}},\quad \text{if } \chi_i\neq\chi_j \text{ for some } i\neq j.$$

在 $\chi_1=\cdots=\chi_{n+1}$ 的情形下，扭曲和 $E_n(\chi,b)$ 变为以下非扭曲环面指数和

$$E_n(\chi,b)=\sum_{y,z,x_i\in\mathbb{F}_q^*}\psi\left(z+y\left(1-z\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)\right).$$

由于原点是 Δ 的一个顶点，且加法特征中的多项式没有常数项，因此 1 是中间维上同调的一个平凡特征值。从误差项中去掉这个平凡特征值后，得到

$$|E_n(\chi,b)-(-1)^{n+2}|\le(2n+1)q^{\frac{n}{2}},\quad \text{if } \chi_1=\cdots=\chi_{n+1},$$

从而得到稍强一些的估计

$$|S_n(\chi,b)+\frac{(q-1)^n+(-1)^{n+1}}{q}\chi_1(b)|\le(2n+1)q^{\frac{n}{2}},\quad \text{if } \chi_1=\cdots=\chi_{n+1}.$$

这就证明了定理 1.2。

3.3. 定理 1.3 的证明。与公式 (3.4) 类似，我们将非扭曲反向克洛斯特曼和 $S_{k,n}(b)$ 与环面指数和 $S_k^*(f)$ 联系起来。

$$S_{k,n}(b)=\sum_{\substack{x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\neq 0\\ x_i\in\mathbb{F}_{q^k}^*}}\psi\left(\mathrm{Tr}_k\left(\frac{1}{x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{z\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)=1 \\ z,\ x_i\in\mathbb{F}_{q^k}^*}} \psi\left(\mathrm{Tr}_k\left(z\right)\right) \\
&= \frac{1}{q^k}\sum_{\substack{z,\ x_i\in\mathbb{F}_{q^k}^* \\ y\in\mathbb{F}_{q^k}}} \psi\left(\mathrm{Tr}_k\left(z+y\left(1-z\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)\right)\right) \\
&= -\frac{(q^k-1)^n}{q^k}+\frac{1}{q^k}S_k^*(f). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

其中 f 是如下给出的劳朗多项式

$$f(x_1,\cdots,x_{n+2}) = x_{n+1}\left(1-x_{n+2}\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)+x_{n+2}$$

and

$$S_k^*(f) = \sum_{x_i\in\mathbb{F}_{q^k}^*} \psi\left(\mathrm{Tr}_k\left(x_{n+2}+x_{n+1}\left(1-x_{n+2}\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{b}{x_1\cdots x_n}\right)\right)\right)\right).$$

与 $S_{k,n}(b)$ 和 $S_k^*(f)$ 相关的 L 函数定义为

$$\mathrm{L}_n(b,T) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_{k,n}(b)\frac{T^k}{k}\right) \quad \text{and} \quad \mathrm{L}^*(f,T) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_k^*(f)\frac{T^k}{k}\right).$$

由公式 (3.8) 可知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_n(b,T) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\left(q^k-1\right)^n\cdot T^k}{q^k\cdot k}\right)\mathrm{L}^*\left(f,T/q\right) \\
&= \prod_{i=0}^{n}\exp\left((-1)^{n-i+1}\binom{n}{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(q^{i-1}T\right)^k}{k}\right)\mathrm{L}^*\left(f,T/q\right) \\
&= \mathrm{L}^*\left(f,T/q\right)\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{1-q^{i-1}T}\right)^{(-1)^{n-i+1}\binom{n}{i}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

本小节的主要目的是确定 $\mathrm{L}_n(b,T)$ 的斜率和权。根据公式 (3.9)，只需考察 $\mathrm{L}^*(f,T)$。令 $\Delta = \Delta(f)$ 表示对应于 f 的牛顿多面体。关于 Δ 的一些几何性质已在第 3.2 小节中讨论。在命题 3.1 中，我们证明了：f 是非退化的，当且仅当 $p\nmid(n+1)$。在此情形下，L 函数 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 是一个次数为 $2n+2$ 的多项式。为确定 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 的倒数根的斜率，我们将计算霍奇多边形，并考察其何时与牛顿多边形重合。

命题 3.2。劳朗多项式 f 是普通的，当且仅当 $p\equiv 1$ 模（$n+1$）。

证明。根据面分解定理，只需考虑 f^{δ_i} 对于 $i=1,\ 2$。令 $S(\delta_i)$ 为以下线性方程组的解集

$$M(\delta_i)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n+2}\end{pmatrix} = u\in\mathbb{Z}^{n+2}, \quad \text{where } r_j\in\mathbb{Q}\cap[0,1). \qquad (3.10)$$

对于 $i=1$ 和给定点 $u=(x_1,\ldots,x_{n+2})^T$，线性方程组 (3.10) 等于

$$\begin{cases} x_1 = r_1 - r_{n+1}, \\ x_2 = r_2 - r_{n+1}, \\ \cdots \\ x_n = r_n - r_{n+1}, \\ x_{n+1} = r_1 + \cdots + r_{n+2}, \\ x_{n+2} = r_1 + \cdots + r_{n+1}, \end{cases} \quad \text{where } r_j \in \mathbb{Q} \cap [0,1). \tag{3.11}$$

注意，$x_j \in \mathbb{Z}$，其中 $1 \le j \le n+2$。对于任意 $r=(r_1,\ldots,r_{n+2})^T \in S(\delta_1)$，我们有

$$r_1 = \cdots = r_n = r_{n+1} \in \frac{\mathbb{Z}}{n+1} \quad \text{and} \quad r_{n+2} = 0.$$

令 $S_p(\delta_i)$ 表示 $S(\delta_i)$ 中与 p 互素的部分。特别地，若 $p \nmid \det(M(\delta_i))$，则 $S_p(\delta_i) = S(\delta_i)$。假设给定 $p \nmid (n+1)$、范数函数 $|r|$ 和 $|\{pr\}|$，则

$$|r| = (n+1)r_1 \quad \text{and} \quad |\{pr\}| = (n+1)\{pr_1\}.$$

当且仅当 $p \equiv 1 \mod (n+1)$ 时，$S_p(\delta_1)$ 上的 $|r|$ 在 p-作用下保持不变。为此，只需考虑范数为 1 的唯一点 $r=(\frac{1}{n+1},\cdots,\frac{1}{n+1},0)$。通过类似的证明，这个条件对 $S_p(\delta_2)$ 也成立。由命题 2.19，我们得到命题 3.2。□

定理 3.3。$n+2$ 的霍奇数为 $\{1,2,2,\cdots,2,1\}$。也就是说，

$$H_\Delta(0)=1,\ H_\Delta(1)=\cdots=H_\Delta(n)=2,\ H_\Delta(n+1)=1.$$

证明。设 Δ_i 为由原点和 δ_i 生成的多胞体。设 $u=(x_1,\ldots,x_{n+2})^T \in C(\Delta_i)$ 是一个权为 $w(u)=k$ 的格点，其中 $0 \le k \le n+2$。对于 $i=1$，2，考虑线性方程组 (3.10)。由于 f^{δ_i} 是对角的，对于固定点 $u \in C(\Delta_i)$，方程组 (3.10) 有唯一解 $r=(r_1,\ldots,r_{n+2})^T$。此时，权由下式给出

$$w(u) = r_1 + \cdots + r_{n+2} = |r|.$$

当 $i=1$ 时，线性方程 (3.11) 恰有一个解 $u=(0,\ldots,0,k,k)^T$。由于 $x_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} r_j = k$ 且 $0 \le r_j < 1$，我们得到限制条件 $0 \le k < n+1$。霍奇数 $H_{\Delta_1}(k)$ 计数基本区域中权为 k/D 的格点 u 的数量：也就是说，

$$H_{\Delta_1}(k) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le k < n+1, \\ 0, & \text{for } k \ge n+1. \end{cases}$$

$H_{\Delta_1}(k)$ 的生成函数为

$$H_1(x) = 1 + x + \cdots + x^n.$$

由公式 (2.5)，可得 $W_{\Delta_1}(k)$ 的生成函数如下。

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\Delta_1}(k)x^k = \frac{H_1(x)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{n+3}}.$$

设 $H_2(x)$ 和 $W_2(x)$ 分别为 $H_{\Delta_2}(k)$ 和 $W_{\Delta_2}(k)$ 的生成函数。类似地，我们可以证明 $H_2(x)$、$= H_1(x)$ 以及 $W_2(x)$、$= W_1(x)$。多胞体 $\Delta_1 \bigcap \Delta_2$ 由 V_1、.....、V_{n+1} 确定，其生成函数为

$$W_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\Delta_1 \bigcap \Delta_2}(k)x^k = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}}.$$

通过面分解，我们有

$$W_\Delta(k) = W_{\Delta_1}(k) + W_{\Delta_2}(k) - W_{\Delta_1 \bigcap \Delta_2}(k), \tag{3.12}$$

这意味着

$$W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}W_{\Delta}(k)x^k=W_1(x)+W_2(x)-W_3(x)=\frac{1+2x+\cdots+2x^n+x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}}.$$

由公式 (2.5) 可得 Δ 的霍奇数，即

$$H_{\Delta}(0)=1,\ H_{\Delta}(1)=\cdots=H_{\Delta}(n)=2,\ H_{\Delta}(n+1)=1.$$

□

当 f 为普通时，$\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 的斜率可由定理 3.3 推出。

定理 3.4. 若 $p\equiv 1 \mod (n+1)$，则 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 的斜率序列为

$$\{0,1,1,2,2,\ldots,n,n,n+1\}.$$

证明. 此定理由引理2.5、命题 3.2 和定理 3.3 得出。 □

注意，此定理的逆命题也成立，因为命题 3.2 表明，条件$p\equiv 1 \mod (n+1)$ 是 f 为普通的充要条件。

现在我们可以考察 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 的倒数根的权。

定理 3.5. 假设 $p\nmid(n+1)$。我们有

$$\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}=(1-T)(1-qT)\prod_{i=1}^{2n}(1-\beta_iT).$$

对于每个 $1\le i\le 2n$，倒数根 β_i 满足 $|\beta_i|=q^{\frac{n+2}{2}}$。

证明。由于原点是 Δ 的一个顶点，我们通过边界分解$B(\Delta)$将锥 $C(\Delta)$ 分解。设 $N(i)$ 表示 $C(\Delta)$ 的 i 维面 Σ_i 的个数，其中 $0\le i\le \dim\Delta$。对于牛顿多面体 $\Delta=\Delta(f)$，我们有 $N(0)=1$ 且 $N(1)=n+3$。注意， Σ_i 是一个开锥，且 $\Sigma_i\in B(\Delta)$。令 $\overline{\Sigma}_i$ 为 Σ_i 的闭包。为简便起见，我们将弗雷德霍姆行列式记为

$$\begin{aligned}D(T)&=\det\left(I-TA_1(f)\right),\\ D_i^{\circ}(T)&=\det\left(I-TA_1(\Sigma_i,f^{\overline{\Sigma}_i})\right),\\ D_i(T)&=\det\left(I-TA_1(\overline{\Sigma}_i,f^{\overline{\Sigma}_i})\right).\end{aligned}$$

唯一的 0 维锥 $\overline{\Sigma}_0$ 是原点，且 $D_0(T)=D_0^{\circ}(T)=1-T$。当 $i=1$ 时，每个$f^{\overline{\Sigma}_1}$ 都可以通过变量代换归一化为 x。也就是说，

$$\mathrm{L}^*(f^{\overline{\Sigma}_1},T)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{T^k}{k}\right)=1-T.$$

由公式 (2.7)，可得

$$D_1(T)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(\mathrm{L}^*\left(f^{\overline{\Sigma}_1},q^iT\right)\right)^{\binom{i}{i}}=(1-T)\left(1-qT\right)\left(1-q^2T\right)\cdots.$$

由于 $\overline{\Sigma}_1$ 的边界仅为 Σ_1 和 $\overline{\Sigma}_0$，消去 $D_0^{\circ}(T)$ 后得到 $D_1^{\circ}(T)$，即 ，

$$D_1^{\circ}(T)=\frac{D_1(T)}{D_0^{\circ}(T)}=\left(1-qT\right)\left(1-q^2T\right)\prod_{i=3}^{\infty}\left(1-q^iT\right).$$

定理 2.16 表明， $D(T)$ 可以表示为 $D_i^{\circ}(T)$ 的乘积，如下所示。

$$D(T)=\prod_{i=1}^{n+2}\prod_{j=1}^{N(i)}D_i^{\circ}(T)=(1-T)(1-qT)^{n+3}\cdots,$$

注意，如果 f 非退化，则 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 是一个次数为 $2(n+1)$ 的多项式。结合公式 (2.6)，我们得到

$$\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}} = \frac{D(T)D(q^2T)^{\binom{n+2}{2}}\cdots}{D(qT)^{n+2}D(q^3T)^{\binom{n+2}{3}}\cdots} = (1-T)(1-qT)\prod_{i=1}^{2n}(1-\beta_i T),$$

其中 $|\beta_i| = q^{\frac{w_i}{2}} \le q^{\frac{n+2}{2}}$。也就是说， $w_i \le n+2$。

若 β_i 是 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}$ 的一个倒数根，则其共轭 $\overline{\beta_i}$ 是共轭 L 函数的一个倒数根

$$\overline{\mathrm{L}^*(f,T)}^{(-1)^{n+1}} = \mathrm{L}^*(-f,T)^{(-1)^{n+1}}.$$

根据定理 2.8，牛顿多边形与霍奇多边形在端点处重合。将此结论应用于乘积 $\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}\overline{\mathrm{L}^*(f,T)^{(-1)^{n+1}}}$，可得

$$2(n+1)^2 = 2(\sum_{i=1}^{n} 2i+n+1) = \mathrm{ord}_q(1\cdot q^2\cdot\prod_{i=1}^{2n}\beta_i\overline{\beta_i}) = 2+\sum_{i=1}^{2n} w_i \le 2+2n(n+2) = 2(n+1)^2.$$

由此可知，该不等式必为等式，也就是说，所有 $w_i = n+2$。 □

公式 (3.9) 将 $\mathrm{L}^*(f,T)$ 与 $\mathrm{L}_n(b,T)$ 联系起来。$\mathrm{L}_n(b,T)$ 的倒数根和极点的赋值由定理 3.4 和 3.5 得出。

定理 3.6. 假设 $p \nmid (n+1)$。我们有

$$\mathrm{L}_n(b,T)^{(-1)^{n+1}} = (1-T)^{(n+1)}\prod_{j=2}^{n}\left(1-q^{j-1}T\right)^{\binom{n}{j}(-1)^{j-1}}\prod_{i=1}^{2n}(1-\alpha_i T).$$

对于每个 $1 \le i \le 2n$，倒根 α_i 满足 $|\alpha_i| = q^{\frac{n}{2}}$。若 $p \equiv 1$ 模 $(n+1)$，则 α_i 的斜率序列由 $\{0,1,1,2,2,\ldots,n-1,n-1,n\}$ 给出。

根据环面 L 函数的权，我们得到其相关指数和的一个稍精确的上界。

推论 3.7. 若 $p \nmid (n+1)$，则有

$$|S_{k,n}(b) + \frac{(q^k-1)^n-(-1)^n(q^k+1)}{q^k}| \le 2nq^{\frac{nk}{2}}.$$

证明. 由定理 3.5 可知

$$|S_k^*(f) - (-1)^n(q^k+1)| \le 2nq^{\frac{(n+2)k}{2}}.$$

结合公式 (3.8)，我们得到 $S_{k,n}(b)$ 的上界。 □

注。本文最后提出两个关于反 Kloosterman 和估计的开放问题。如果 $n+1$ 可被 p整除，相关的劳朗多项式 f 是退化的，因此环面指数和的结果不再适用。在这种情况下，一般而言，确定 $S_n(\chi,b)$的最优平方根抵消仍是一个开放问题。 $n=1$ 且 $p=2$ 的情形已由 [Kat95]处理。第二个问题涉及 q-进斜率序列。若 p 模 $n+1$不等价于 1，则与 f 相对应的牛顿多边形严格位于其霍奇多边形之上。在这一假设下，是否仍能得到显式的 q-进斜率序列?

参考文献

[Ang96] Jeff Angel, 《有限域上的有限上半平面》, 《有限域及其应用》2（1996）, 第 1 期, 62–86。MR 1371720[AS87a] Alan Adolphson 和 Steven Sperber, 《与指数和相关的 L 函数的牛顿多面体与次数》, 《数学发明》 **88** 1987 3, 555 569 884800 （）, 第 – 期。MR AS b《扭曲克洛斯特曼和与 -adic 贝塞尔函数。II. 牛顿多边形与解析延拓》, 《美国数学杂志》 **109** 1987 4, 723 764 900037 （）, 第 – 期。MR AS《指数和与牛顿多面体：上同调与估计》, 《数学年刊》 130 2, 367 1989 406 1014928（）, 第 – 期。MR

[87]

[89]

[90] _____, $G_m{}^n$ **101** 1990 1, 63 79 1055711 AS《（ ）上的指数和》，《数学发明》（），第 – 期。MR AS《关于扭曲指数和》，《数学年刊》（），第 – 期，MR
[91] _____, **290** 1991 4, 713 726 1119948
[93] _____, **443** AS《扭曲指数和与牛顿多面体》，《纯粹与应用数学杂志》（1993），151–177。MR 1241131[Bom66] 恩里科·邦别里，《有限域上的指数和》，《几何、代数与数论趋势》，法国国家科学研究中心出版社（CNRS），巴黎，1966， 37 41 0204413 第 –
[22] **300** 2022 页。MR CL 陈超和 XIN LIN，《有限域上某些指数和的 L 函数》，《数学杂志》（），第 2 期，1851 1871 4363799 –。MR [Del80] 皮埃尔·德利涅，《韦伊猜想 II》，法国高等科学研究所数学出版物（1980），第 52 期，137–252。MR 601520[DL91] J. Denef 和 F. Loeser，《指数和的权、交叉上同调与牛顿多面体》，《数学发明》106（1991），第 1 期，275–294。MR 1128216[Dwo60] 伯纳德·德沃克，《关于代数簇的 ζ 函数的有理性》，《美国数学杂志》82（1960），631–648。MR 140494[Eva95] 罗纳德·埃文斯，《特征 2 的有限上半平面的球函数》，《有限域及其应用》1（1995），第 3 期，376–394。MR 1341954
[09] **262** 2009 2, 449 472 2504886 Fu 傅磊，《扭曲
[16] _____ ℓ **298** 指数和的权》，《数学杂志》（），第 – 期。MR Fu，《-adic GKZ 超几何层与指数和》，《数学进展》（2016），51–88。MR 3505737[FW21] 傅磊和万大庆，《关于 Katz 的（A， B）指数和》，《数学季刊》72（2021），第 3 期，773–793。MR 4310299[Gro68] 亚历山大·格罗滕迪克，《勒夫谢茨公式与 L 函数的有理性》 *[见 1608788]*，《关于概形上同调的十篇报告》，《纯粹数学高级研究》第 3 卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1968，31–45 页。MR 3202554
[95] **1** 1995 3, 395 398 1341955 Kat 尼古
[84] p p 拉斯·M·卡茨，《指数和札记》，《有限域及其应用》（），第 – 期。MR Kob 尼尔·科布利茨，《-adic 数、-adic 分析与 ζ 函数》，第 2 版，《数学研究生教材》第 58， 1984 754003 卷，施
[22] 普林格出版社，纽约，。MR LC XIN LIN 和陈超，《有限域上某些指数和的 L 函数 II》，《数论杂志》241（2022），198–220。MR 4472439[Li21] 李继友，《与德利涅多项式相关的 L 函数的牛顿多边形》，《有限域及其应用》75（2021），论文编号 101880, 10 4272552 。MR Spe Steven Sperber，《超克洛斯
[80] 特曼和的同余性质》，《数学汇刊》40 1, 3 1980 33 558257（），第 – 期。MR [Wan93]万大庆，《ζ 函数与 L 函数的牛顿多边形》，《数学年刊》137（1993），249–293。MR 1207208[Wan04] _____, 指数和 L 函数的 p-adic 牛顿多边形的变化，《亚洲数学杂志》8（2004），第 3 期，427–472。MR 2129244[YZ22] 杨丽萍和张昊，《（A， B）指数和的 L 函数的一般牛顿多边形》，《有限域及其应用》78（2022），论文编号 101980，20。MR 4349885

数学系 ，上海海事大学 ，上海 201306 ，中华人民共和国。

电子邮件地址：xlin1126@hotmail.com

加利福尼亚大学欧文分校数学系，美国加利福尼亚州 92697-3875。电子邮箱：dwan@math.uci.edu