arXiv:2301.04291v1 [math.DG] 11 Jan 2023

F-F-Yang-Mills 联络不稳定性的 Simons 型条件

KURANDO BABA 和 KAZUTO SHINTANI

ABSTRACT. F-Yang-Mills 联络是主丛联络空间上 F-Yang Mills 泛函的临界点，是 Yang-Mills 联络、 p-Yang-Mills 联络、指数 Yang-Mills 联络等的推广。这里， F 是一个严格递增的 C^2-函数。本文将关于 Yang-Mills 联络不稳定性的 Simons 定理推广到 F-Yang-Mills 联络。我们推导出一个充分条件：欧几里得空间中凸超曲面上的任意非平坦 F-Yang-Mills 联络都是不稳定的。在球面的情形下，该条件可表示为一个关于其维数以及函数 F 的微分次数的不等式。通过将 Kobayashi-Ohnita-Takeuchi 的计算推广至 F-Yang-Mills 联络，给出了这些结果的证明。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. F-Yang-Mills 泛函与 F-Yang-Mills 联络 8 3.1. 定义与第一变分公式 8 3.2. 不稳定性与二次变分公式 9 4. F-Yang-Mills 联络不稳定性的 Simons 型条件 11 4.1. F-调和形式指标分析（1） 11 4.2. F-调和形式指标分析（2） 17 4.3. F-欧几里得空间中凸超曲面上的 Yang-Mills 联络不稳定性 19 参考文献 22

1. INTRODUCTION

Yang-Mills 联络是定义在连通闭黎曼流形上任意主丛的联络空间上的 Yang-Mills 泛函的临界点。Yang-Mills 联络理论已有许多进展。另一方面，

日期：2023年1月11日。2020 年数学主题分类。主要分类：53C07，次要分类：58E15。关键词与短语： F-Yang-Mills 联络，不稳定性，次数， F-调和形式，指标。

人们还引入了若干杨–米尔斯型泛函，并研究了这类泛函的临界点，例如， p-Yang-Mills 泛函（Uhlenbeck[19], Chen-Zhou [4]）、指数型 Yang-Mills 泛函（Matsuura-Urakawa [16], 魏[20]）以及广义 Yang-Mills-Born-Infeld 能量泛函（Sibner-Sibner-Yang[17], 董–魏 [6], Gherghe [7]）。

F-Yang-Mills 泛函为上述泛函提供了统一的描述（Jia-Zhou[10], Dong-Wei [6]）。这里， F 表示定义在 $[0, c$上的严格递增 C^2-函数， $0 < c \leq \infty$。 F-Yang-Mill 泛函的临界点称为 F-Yang-Mills 联络。本文旨在研究F-Yang-Mills 联络的稳定性。更确切地说，我们希望给出一个充分条件，使任何非平坦的 F-Yang-Mills 联络都不稳定。这是将以下关于 Yang-Mills 联络不稳定性的 Simons 定理推广到 F-Yang-Mills 联络的结果。

定理 1.1（[18]）。对于 $n > 4$，标准球面 S^n 上的任何非平坦 Yang-Mills 联络都不稳定。

由此定理可知，只有当 S^n 时，研究 $n \leq 4$上通常 Yang-Mills 联络的弱稳定性才有意义。众所周知，四维球面上的弱稳定 Yang-Mills 联络与自对偶联络和反自对偶联络密切相关。事实上，布尔吉尼翁–劳森 [3, 定理B] 证明，当结构群为某个特定的酉群时， S^4 上的任何弱稳定 Yang-Mills 联络要么是自对偶的，要么是反自对偶的。另一方面，阿蒂亚–德林费尔德–希钦–曼宁[2]给出了这些联络的构造。我们期望此类研究也能推广到 F-Yang-Mills 联络。

本文旨在为1.1 中的 F-Yang-Mills 联络找到一种合适的推广。事实上，我们为欧几里得空间中凸超曲面上的 F-Yang-Mills 联络的不稳定性推导出一个 Simons 型条件（详见定理4.11）。该定理的证明通过推广 Kobayashi-Ohnita-Takeuchi 对通常的 Yang-Mills 泛函二次变分的计算 [11] 而得出。由定理4.11，我们得到定理1.1 的如下推广。

定理 1.2 （推论 4.12）。设 $d_{F'}$表示定义 4.8 中定义的微分 F'的次数4.8。假设次数 $d_{F'}$ 有限。那么，对于 $n > 4d_{F'} + 4$，任意非平坦的 F-Yang-Mills 联络，在 S^n 上都是不稳定的。

定理 1.2 阐明了次数有限性对于推导 $d_{F'}$ 的不稳定性 Simons 型条件的重要性，适用于 F-Yang-Mills 联络。对于通常的 Yang-Mills 联络，由于$d_{F'} = 0$ 成立，该结果与定理 1.1 一致。此外，可以验证，定理1.2 也与 p-Yang-Mills 联络的不稳定性定理一致，该定理由 Chen-Zhou[4, 推论 42]给出。Jia-Zhou [10, 推论 16]给出了F-Yang-Mills 联络不稳定性定理的一种替代表达式。

另一方面，当 F' 的次数为无穷时，在一般情形下很难找到 F-Yang-Mills 联络不稳定性的充分条件。例如，与指数 Yang-Mills 泛函 $\mathscr{YM}_e$ 或广义 Yang-Mills-Born-Infeld 能量泛函 $\mathscr{YM}_{\epsilon=-1}$（取负号时）相对应的 F-函数具有无穷次数。Matsuura-Urakawa 研究了 $\mathscr{YM}_e$ 这些泛函临界点的稳定性，而 Gherghe 则研究了 $\mathscr{YM}_{\epsilon=-1}$。为进一步发展，我们利用定理 4.3中给出的指标公式，研究 S^n 上的联络的不稳定性。事实上，我们通过要求曲率有界，推导出了联络不稳定性的一个充分条件（详见命题 4.13 和4.14 ）。

本文结构如下：第 2 节回顾与本文相关的 Yang-Mills 理论基本概念。值得注意的是，Kobayashi-Ohnita-Takeuchi [11] 通过分析调和形式的指标研究了 Yang-Mills 联络的不稳定性。这里，调和形式定义为 Hodge-Laplacian 算子的零特征空间中的元素。我们回顾 Hodge-Laplacian 算子的 Bochner-Weitzenb¨ock 公式，本文的计算需要用到该公式。第 3 节回顾 F-Yang-Mills 联络的基础知识。第 3.1 小节回顾 F-Yang-Mills 联络的概念，并推导 F-Yang-Mills 方程，即 F-Yang-Mills 泛函的欧拉-拉格朗日方程。受 F-Yang-Mills 方程的启发，我们引入 F-调和形式的概念（定义 3.5）。第 3.2 小节回顾 F-Yang-Mills 联络不稳定性的定义，并给出 F-Yang-Mills 泛函的二阶变分公式。受该公式启发，我们定义 F-调和形式的指标（定义 3.8）。第 4 节通过分析 F-调和形式的指标证明定理 1.2。第 4.1 小节将调和形式指标的结果[11, (4.37) 命题] 推广到 F-调和形式（定理 4.3）。根据定理 4.3，我们还需要评估定义4.2中定义的一个量。我们还发现，证明定理 1.2 的关键在于评估 F-调和 2-形式 φ的 $F'(\|\varphi\|^2/2)$ 与 $F''(\|\varphi\|^2/2)$ 之间的关系。基于这一考虑，我们在第 4.2 小节引入微分 F' 的次数 $d_{F'}$ 这一概念（定义 4.8）。当 $d_{F'}$ 有限时，我们基于定理 4.3 推导出关于 F-调和形式指标的不等式（定理 4.10）。第 4.3 小节借助定理 4.10，将 Yang-Mills 联络不稳定性的结果 [11, (5.3) 定理] 推广到 F-Yang-Mills 联络（定理 4.11）。作为定理 4.11 的推论，我们得到定理 1.2（推论 4.12）。我们证明命题 4.13 和 4.14。众所周知，Yang-Mills 联络理论与调和映射理论之间存在很强的相似性。最后，我们讨论本文结果在调和映射理论中的一个对应结果。

2. Preliminaries

设 (M, g) 是一个 n 维连通闭黎曼流形，令 D 表示 M 上的 Levi-Civita 联络。令 G 为紧李群，$\mathfrak{g}$ 表示其李代数。我们将 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示记为 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$。设 P 是 M 上以 G 为结构群的主丛。若 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 A 定义在 P 上，且 A 为 Ad 型，并满足对所有 $X \in \mathfrak{g}$ 都有 $A(X) = X$，则称其为联络；其中 X 表示 P 上与 X 相关的基本向量场。我们用 $\Omega^k_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$ 表示 P 上取值于 $\mathfrak{g}$ 的水平 k-形式且为 Ad 型的向量空间。可以验证，P 上联络的曲率 2-形式属于 $\Omega^2_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$。$P$ 上联络的核定义了一个 Ehresmann 联络，即 P 上右不变的水平分布。已知该分布可积，当且仅当 A 的曲率 2-形式为零。若联络 A 的曲率 2-形式为零，则称其为平坦联络。对于任意两个联络 A、A'，其差 $A - A'$ 属于 $\Omega^1_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$。反之，对于所有 $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$，$A + \alpha$ 都给出 P 上的另一个联络。因此，P 上联络的集合 $\mathscr{C}_P$ 构成以向量空间 $\Omega^1_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$ 为底的仿射空间。

我们采用一种不同的方式来描述 P 上的联络。用 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ 表示 P 的伴随丛，即 P 上由 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 Ad 所确定的关联向量丛。由 [8, 定理 5.13.4] 可知，$\Omega^k_{\mathrm{Ad},\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})$ 与 k 上取值于 $\mathfrak{g}_P$ 的 M-形式向量空间典范同构，我们将其记为 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes \mathfrak{g}_P)$。$P$ 上的任意联络都对应于 $\mathfrak{g}_P$ 上的一个联络，即丛 $\mathfrak{g}_P$ 上的协变导数 $\nabla\colon \Gamma(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$。可以证明，$\nabla$ 在 $\mathfrak{g}_P$ 上的曲率 R^∇ 属于 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$（参见 [8, 推论 5.13.5]）。下文中，我们将 $\mathscr{C}_P$ 与 $\mathfrak{g}_P$ 上的联络集合等同起来；后者是以向量空间 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 为底空间的仿射空间。

我们在 $\mathfrak{g}_P$ 上赋予一个纤维度量，使其与 $\mathfrak{g}_P$ 上的联络相容。这样的纤维度量由 $\mathfrak{g}$ 上一个 $\mathrm{Ad}(G)$- 不变内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导而来（参见 [8, 命题 5.9.7]）。此外，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 还在空间 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上诱导出一个逐点内积，记作同一个符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。我们令 $\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle$ 表示 $\varphi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P)$。这里，我们用分量表示 $\langle \varphi, \psi \rangle$ $(\varphi, \psi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P))$。我们取切空间 T_xM 在 $x \in M$ 处的一个标准正交基 $(e_1, \ldots, e_n)$，并将其对偶基记为 $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$。若记

$$\varphi = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \varphi_{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}, \quad \psi = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \psi_{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k},$$

于是我们得到

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \langle \varphi_{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}}, \psi_{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}} \rangle .$$

将这个逐点内积在 M 上积分，我们得到 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上的内积如下：

$$(\varphi,\psi)=\int_M\langle\varphi,\psi\rangle dv\,, \tag{2.1}$$

其中， dv 表示 M上的黎曼体积形式。

对于任意联络 ∇，协变外微分 $d^\nabla\colon\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\to\Omega^{k+1}(\mathfrak{g}_P)$ 定义为

$$(d^\nabla\varphi)_{X_0,\ldots,X_k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\nabla_{X_i}\varphi)_{X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k}\,, \tag{2.2}$$

对于 $\varphi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$，其中 X_0、……、X_k是 M的切向量。我们将 δ^∇记为 d^∇的形式伴随算子，即 $\delta^\nabla\colon\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\to\Omega^{k-1}(\mathfrak{g}_P)$ 由 $(d^\nabla\psi,\varphi)=(\psi,\delta^\nabla\varphi)$ 定义，其中 $\varphi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 且 $\psi\in\Omega^{k-1}(\mathfrak{g}_P)$。根据[3,(2.13)],，对于任意 $\varphi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$，$\delta^\nabla$ 具有如下表达式：

$$(\delta^\nabla\varphi)_{X_1,\ldots,X_{k-1}}=-\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}\varphi)_{e_j,X_1,\ldots,X_{k-1}}\,.$$

对于任意联络 ∇，曲率 2-形式 R^∇ 满足 $d^\nabla R^\nabla=0$，这称为 ∇的 Bianchi 恒等式。一般而言，$d^\nabla\circ d^\nabla$ 不为零。已知若 ∇ 是平坦的，则有 $d^\nabla\circ d^\nabla=0$ 成立。这是对平坦联络的另一种解释。

一个 Yang-Mills 联络 ∇ 被定义为 Yang-Mills 泛函的临界点 1

$$\mathscr{C}_P\to\mathbb{R};\ \nabla\mapsto\frac{1}{2}\int_M\|R^\nabla\|^2dv\,.$$

可以证明，该泛函的欧拉-拉格朗日方程为 $\delta^\nabla R^\nabla=0$，称为 Yang-Mills 方程。Hodge-Laplacian 算子定义为 $\Delta^\nabla=d^\nabla\delta^\nabla+\delta^\nabla d^\nabla$，其在 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上给出了一个微分算子。一个 $\mathfrak{g}_P$值形式 φ若满足以下条件，则称为调和形式： φ 满足 $\Delta^\nabla\varphi=0$。随后可以验证， φ 是调和形式，当且仅当其满足 $d^\nabla\varphi=0$ 以及 $\delta^\nabla\varphi=0$。由此可知，Yang-Mills 联络的曲率形式 R^∇ ∇ 是调和形式。在第 3节中，我们将回顾 F-Yang-Mills 联络的概念，这是 Yang-Mills 联络的一种推广。此外，我们将介绍 F-调和形式的概念，作为调和形式的推广（见定义 3.5）。

我们证明了 Bochner-Weitzenb¨ock 公式，适用于取值于 $\mathfrak{g}_P$ 的形式。该公式描述了 Hodge-Laplacian 算子与粗拉普拉斯算子之间的关系。这一公式在 F-调和形式的分析中发挥着基础作用。事实上，我们利用该公式证明了第 4.7 节中的命题 4，该命题给出了一种计算曲率 R^∇ 微分的方法。我们先回顾粗拉普拉斯算子的定义：

$$\nabla^*\nabla\varphi=-\sum_{j=1}^{n}\nabla^2_{e_j,e_j}\varphi,\quad\varphi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\,,$$

其中 $\nabla^2_{X,\ Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{D_X Y}$。可以验证， $\nabla^* \nabla$ 是对称且非负的。这意味着，取值于 $\mathfrak{g}_P$ 的形式 φ 满足 $\nabla^* \nabla \varphi = 0$ 当且仅当 φ 是平行的（$\nabla \varphi = 0$）。我们还回顾 Weitzenb¨ock 曲率 $\mathfrak{R}^\nabla$： 对于 $k = 1$， $\Omega^k(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^k(\mathfrak{g}_P)$，如下所示。

当 $k = 1$ 时，算子 $\mathfrak{R}^\nabla$： $\Omega^1(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 定义为

$$\mathfrak{R}^\nabla(\alpha) = \sum_{i,j} [R^\nabla_{ji}, \alpha_j] \theta^i \,,$$

对于 $\alpha = \sum_i \alpha_i \theta^i \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$。若设

$$[\cdot \wedge \cdot] : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P);\ [\alpha \wedge \beta]_{X,Y} = [\alpha_X, \beta_Y] - [\alpha_Y, \beta_X]$$

则有以下关系:

$$\langle \mathfrak{R}^\nabla(\alpha), \alpha \rangle = \langle [\alpha \wedge \alpha], R^\nabla \rangle \,, \quad \alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \,. \tag{2.3}$$

我们将 R 上的黎曼曲率记为 M，并将 Ric： $T_x M \to T_x M (x \in M)$ 记为里奇曲率算子，即

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{i=1}^n R_{X, e_i} e_i \,, \quad X \in T_x M \,.$$

对于 $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$，我们定义 $\alpha \circ \mathrm{Ric} \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 为 $(\alpha \circ \mathrm{Ric})^X = \alpha_{\mathrm{Ric}(X)}$ 对所有 $X \in T_x M$ 成立。然后，以下命题给出了 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 的 Bochner-Weitzenb¨ock 公式。

命题 2.1 ([3, (3.2) 定理])。 对于 $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$，有

$$\Delta^\nabla \alpha = \nabla^* \nabla \alpha + \alpha \circ \mathrm{Ric} + \mathfrak{R}^\nabla(\alpha) \,.$$

接下来，考虑 $k = 2$ 的情形。我们回顾 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 的魏岑博克曲率，即 $\mathfrak{R}^\nabla$： $\Omega^2(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 由下式给出

$$\mathfrak{R}^\nabla(\varphi)_{X,Y} = \sum_{j=1}^n \left\{ [R^\nabla_{e_j, X}, \varphi_{e_j, Y}] - [R^\nabla_{e_j, Y}, \varphi_{e_j, X}] \right\} \,,$$

对于 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，其中 X、Y 是 M 上的切向量场。记 $\mathfrak{X}(M)$ 为 M 上切向量场的空间，记 $\Omega^2(M)$ 为 M 上 2-形式的空间。对于$\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 和 $\omega \in \Omega^2(M) \otimes \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$，定义

$$(\varphi \circ \omega)_{X,Y} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \varphi_{e_j, \omega_{X,Y}(e_j)} \,, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \,.$$

这里给出一个 ω 的具体例子，它出现在 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 的博赫纳–魏岑博克公式中。

例 2.2. 对于任意 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，定义

$$(X \wedge Y)(Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \,, \quad Z \in \mathfrak{X}(M) \,.$$

若 I 表示 T_xM 上的恒等变换，则 $\mathrm{Ric}\wedge I\in\Omega^2(M)\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ 定义为

$$(\mathrm{Ric}\wedge I)_{X,Y}=\mathrm{Ric}(X)\wedge Y+X\wedge\mathrm{Ric}(Y)\,,\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,.$$

我们现在准备证明 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 的 Bochner-Weitzenböck 公式。

命题 2.3 ([3, (3.10) 定理])。对于 $\varphi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，我们有

$$\Delta^\nabla\varphi=\nabla^*\nabla\varphi+\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I+2R)+\mathfrak{R}^\nabla(\varphi)\,.\tag{2.4}$$

为了计算（2.4）中的第二项，Kobayashi-Ohnita-Takeuchi [11, (4.36)] 引入了 $R(\varphi,\varphi)$ 和 $\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)$，用于 $\varphi=(1/2)\sum_{i,\ j}\varphi_{ij}\theta^i\wedge\theta^j\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，其定义如下：

$$\begin{aligned}R(\varphi,\varphi)&=\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle\,,\\ \mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)&=\sum_{i,j,k,l}R_{ik}\delta_{jl}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle\,,\end{aligned}$$

其中，R_{ijkl} 和 R_{ik} 分别是 M 上黎曼曲率 R 和里奇曲率 Ric 的分量，即 $R(e_k,e_l)e_j=\sum_i R^i_{jkl}e_i=\sum_i R_{ijkl}e_i$ 和 $R_{ik}=\sum_l R_{lkli}$。根据定义，$R(\varphi,\varphi)$ 和 $\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)$ 与 $(e_1,\dots,e_n)$ 的选择无关。在此，我们指出，在 $R(\varphi,\varphi)$ 和 $\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)$ 的原始定义中，使用的是（2.1）中的内积 $(\cdot,\cdot)$，而不是 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。

于是我们得到以下引理。

引理 2.4. 对于任意 $\varphi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，有

$$\langle\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I+2R),\varphi\rangle=\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)-\frac{1}{2}R(\varphi,\varphi)\,.$$

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}\langle\varphi\circ\mathrm{Ric}\wedge I,\varphi\rangle&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle(\varphi\circ\mathrm{Ric}\wedge I)_{e_i,e_j},\varphi_{e_i,e_j}\rangle\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\langle\varphi_{e_k,(\mathrm{Ric}\wedge I)_{e_i,e_j}(e_k)},\varphi_{e_i,e_j}\rangle\,.\end{aligned}$$

然后，利用 $\varphi_{e_i,\ e_j}=-\varphi_{e_j,\ e_i}$，我们得到

$$\langle\varphi\circ\mathrm{Ric}\wedge I,\varphi\rangle=\sum_{i,j,k}R_{ik}\langle\varphi_{e_k,e_j},\varphi_{e_i,e_j}\rangle=\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)\,.$$

以类似的方式，我们可以推导出

$$\langle\varphi\circ 2R,\varphi\rangle=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle=-\frac{1}{2}R(\varphi,\varphi)\,.$$

因此，我们得到了所述结论。□

3. F-Yang-Mills functionals and F-Yang-Mills connections

3.1. 定义与第一变分公式。设 M 是一个连通闭黎曼流形， G 是一个紧致连通李群。设 $P = P(M, G)$是 M 上的一个结构群为 G的主丛。我们用 $\mathfrak{g}_P$ 表示 P的伴随丛。设 $0 < c \leq \infty$和 $F\colon [0, c) \to \mathbb{R}$ 是一个严格递增的 C^2-函数。我们定义 $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$。

Defi定义 3.1。 F-Yang-Mills 泛函 $\mathscr{YM}_F\colon \mathscr{C}_P \to \mathbb{R}_{\geq 0}$定义为

$$\mathscr{YM}_F(\nabla) = \int_M F(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)dv\,.$$

若联络 ∇ 定义在 $\mathfrak{g}_P$ 上，且 ∇ 是$\mathscr{YM}_F$的临界点，则称其为 F-Yang-Mills 联络。此时，其曲率 2-形式 R^∇ 也称为 ∇的 F-Yang-Mills 场。

例如，若取 $F(t) = t$，则 F-Yang-Mills 泛函与通常的 Yang-Mills 泛函一致。其他例子见 Uhlenbeck ([19])、Sibner- Sibner-Yang ([17]) 和 Matsuura-Urakawa ([16])。

例 3.2。(1) 设 $p \geq 2$。若令 $F_p(t) = (1/p)(2t)^{p/2}$，则 F_p-Yang-Mills 泛函与 p-Yang-Mills 泛函一致。 p-Yang-Mills 泛函的临界点称为 p-Yang-Mills 联络（参见 [19]）。

(2) 设 $\epsilon = \pm 1$。若令 $F_\epsilon(t) = \epsilon\sqrt{1 + 2\epsilon t} - \epsilon$，则称 F_ϵ-Yang-Mills 泛函为符号为 ϵ 的广义 Yang-Mills-Born-Infeld 能量泛函。我们称其临界点为该泛函的临界联络（参见 [17]）。

(3) 若令 $F_e(t) = e^t$，则 F_e-Yang-Mills 泛函与指数型 Yang-Mills 泛函重合。指数型 Yang-Mills 泛函的临界点称为指数杨–米尔斯联络（参见[16]）。

F-Yang-Mills 联络通过求解$\mathscr{YM}_F$的欧拉-拉格朗日方程得到。这里，我们回顾该泛函的第一变分公式。

命题 3.3（[6, 引理 3.1], [10, (11)]）。设 ∇^t $(|t| < \varepsilon)$ 是 $\mathscr{C}_P$ 中满足 $\nabla^0 = \nabla$ 的 C^∞-曲线。若令

$$\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \nabla^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\,,$$

于是我们有

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t) = \int_M \langle \delta^\nabla(F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)R^\nabla), \alpha\rangle dv\,.$$

证明。设 $\nabla \in \mathscr{C}_P$和 $\nabla^t = \nabla + A^t$ 是经过 ∇的 $\mathscr{C}_P$中的一条 C^∞-曲线，其中 $A^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$，且 $A^0 = 0$。那么 ∇^t 的曲率为

$$R^{\nabla^t} = R^\nabla + d^\nabla A^t + \frac{1}{2}[A^t \wedge A^t]\,.$$

经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{YM}_F(\nabla^t) &= \int_M \frac{d}{dt}F(\frac{1}{2}\|R^{\nabla^t}\|^2)dv \\ &= \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^{\nabla^t}\|^2)\langle\frac{d}{dt}R^{\nabla^t}, R^{\nabla^t}\rangle dv \\ &= \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^{\nabla^t}\|^2)\langle d^{\nabla}\frac{d}{dt}A^t + [\frac{d}{dt}A^t \wedge A^t], R^{\nabla^t}\rangle dv\,.\end{aligned}$$

设 $\alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t$。上述等式变为：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t) = \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^{\nabla}\|^2)\langle R^{\nabla}, d^{\nabla}\alpha\rangle dv = \int_M \langle\delta^{\nabla}(F'(\frac{1}{2}\|R^{\nabla}\|^2)R^{\nabla}), \alpha\rangle dv\,.$$

因此，证明完成。 □

由命题 3.3 我们立即得到 $\mathscr{YM}_F$ 的欧拉-拉格朗日方程如下：

推论 3.4. ∇ 是一个 F-Yang-Mills 联络，当且仅当 ∇ 满足 s

$$\delta^{\nabla}(F'(\frac{1}{2}\|R^{\nabla}\|^2)R^{\nabla}) = 0\,. \tag{3.1}$$

(3.1) 称为 F-Yang-Mills 方程。受 F-Yang-Mills 方程的启发，我们引入 F-调和形式的概念如下。

定义 3.5. 若 $\mathfrak{g}_P$ 值形式 φ 满足以下两个方程，则称其为 F-调和的： φ

$$d^{\nabla}\varphi = 0\,, \quad \delta^{\nabla}(F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\varphi) = 0\,. \tag{3.2}$$

我们注意到， R^{∇} 一个 F-Yang-Mills 联络 ∇ 的曲率 2-形式 F是 R^{∇} -调和的。事实上， R^{∇} 由于 Bianchi 恒等式以及 F-Yang-Mills 方程，满足（3.2）。 ∇。

3.2. 不稳定性与二次变分公式。考虑一个 F-Yang-Mills 联络的不稳定性。这里回顾这一性质的定义。

定义 3.6. 若对任意 $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$，以下不等式成立，则称 F-Yang-Mills 联络 ∇ 弱稳定：

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t) \geq 0 \quad \text{where} \quad \alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t\,.$$

An 若 ∇ 不弱稳定，则称 F-Yang-Mills 联络 ∇ 不稳定。

以下命题给出了 F-Yang-Mills 泛函的二次变分公式。

命题 3.7. 设 ∇ 是一个 F-Yang-Mills 联络，且 ∇^t ($|t| < \varepsilon$) 是 $\mathscr{C}_P$ 中的一条 C^∞-曲线，并满足 $\nabla^0 = \nabla$。那么， F-Yang-Mills 泛函的二次变分由下式给出：

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t) = \int_M F''(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\alpha, R^\nabla\rangle^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\left\{\langle\mathfrak{R}^\nabla(\alpha),\alpha\rangle + \|d^\nabla\alpha\|^2\right\} dv\,, \quad (3.3)$$

其中 $\alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t$。

证明。直接计算可得

$$\frac{d}{dt}R^{\nabla^t} = d^\nabla\frac{dA^t}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[A^t \wedge A^t]\,,$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}R^{\nabla^t} = d^\nabla(\frac{d^2}{dt^2}A^t) + [\frac{d^2}{dt^2}A^t \wedge A^t] + [\frac{dA^t}{dt} \wedge \frac{dA^t}{dt}]\,.$$

因此我们有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R^{\nabla^t} = d^\nabla\alpha, \quad \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} = d^\nabla\beta + [\alpha\wedge\alpha].$$

其中 $\alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A^t$ 和 $\beta = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A^t$。我们有

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t)\\ &= \int_M F''(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\alpha, R^\nabla\rangle^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\left\{\langle[\alpha\wedge\alpha], R^\nabla\rangle + \|d^\nabla\alpha\|^2\right\} dv\\ &\qquad + \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\beta, R^\nabla\rangle dv. \quad (3.4)\end{aligned}$$

接下来可以验证，(3.4) 的第三项为零。事实上，由于 ∇ 是一个F-Yang-Mills 联络，我们得到

$$\int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\beta, R^\nabla\rangle dv = \int_M \langle\beta, \delta^\nabla(F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)R^\nabla)\rangle dv = 0.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathscr{YM}_F(\nabla^t)\\ &= \int_M F''(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\alpha, R^\nabla\rangle^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\left\{\langle[\alpha\wedge\alpha], R^\nabla\rangle + \|d^\nabla\alpha\|^2\right\} dv\\ &= \int_M F''(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\langle d^\nabla\alpha, R^\nabla\rangle^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)\left\{\langle\mathfrak{R}^\nabla(\alpha),\alpha\rangle + \|d^\nabla\alpha\|^2\right\} dv.\end{aligned}$$

这里，在最后一个等式中我们使用了（2.3）。因此，证明已完成。 □

二次变分公式的另一种表达式见 [10, (20)]。它们的差是（3.3）中第二项的被积函数。当$\mathscr{YM}_F$是通常的 Yang-Mills 泛函时（$F(t) = t$, $F''(t) = 0$成立，因此（3.3）的第一项消失。

受命题 3.7 的启发，我们为任意 F-调和 2-形式定义如下指标：

定义 3.8。 F-调和形式 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 的指标定义为

$$I_\varphi(\alpha) = \int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle d^\nabla\alpha, \varphi\rangle^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{\langle \mathfrak{R}^\nabla(\alpha), \alpha\rangle + \|d^\nabla\alpha\|^2\right\} dv\,,$$

对任意 $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$。

由命题 3.7 可知，对于任意 F-Yang-Mills 联络 ∇，若 ∇ 弱稳定，则 $I_{R^\nabla}(\alpha) \geq 0$对所有 $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P$均成立。下一节中，我们将通过分析 F-调和形式的指标，推导出 F-Yang-Mills 联络不稳定性的一个充分条件。

4. A Simons type condition for instability of F-Yang-Mills connections

4.1. F-调和形式指标的分析（1）。设 M 是一个 n 维的连通闭黎曼流形， D 表示 M 上的 Levi-Civita 联络。设 $P = P(M, G)$ 是 M 上结构群为 G 的主丛。假设底空间 M 等距浸入 N 维欧几里得空间（$\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle$）中，且 $n < N$。记其第二基本形式为 h。下面约定指标的取值范围：

$$1 \leq A, B, C \leq N, \quad 1 \leq i, j, k, l, m \leq n, \quad n+1 \leq \mu \leq N\,.$$

设 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 $T_xM (x \in M)$ 的标准正交基，$(e_{n+1}, \ldots, e_N)$ 是 M 在 $\mathbb{R}^N$ 中的法空间 $T_x^\perp M$ 的标准正交基。设 $(E_1, \ldots, E_N)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的标准基。我们用 V_A 表示 E_A 关于正交分解 $\mathbb{R}^N = T_xM \oplus T_x^\perp M$ 的切向分量。若令 $v_A^B = \langle E_A, e_B\rangle$，则矩阵 $(v_A^B)_{1\leq A,\ B\leq N}$ 成为正交矩阵。切向量场 V_A 由 $V_A = \sum_i v_A^i e_i$ 给出。设 h_{ij}^μ 表示 $h(e_i, e_j) = \sum_\mu h_{ij}^\mu e_\mu$ 的分量。于是得到以下引理。

引理 4.1。在上述设定下，我们得到：

$$D_{e_i}V_A = \sum_j\sum_\mu v_A^\mu h_{ij}^\mu e_j\,.$$

证明。我们将 $D_{e_i}V_A$写作 $D_{e_i}V_A = \sum_j\langle D_{e_i}V_A, e_j\rangle e_j$。为了证明这个引理，只需验证 $\langle D_{e_i}V_A, e_j\rangle = \langle E_A, h(e_i, e_j)\rangle$。由于 M等距浸入于 $(\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中， M上的 Levi-Civita 联络 D与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$相容。因此我们有

$$e_i\langle V_A, e_j\rangle = \langle D_{e_i}V_A, e_j\rangle + \langle V_A, D_{e_i}e_j\rangle\,. \tag{4.1}$$

另一方面，由于 E_A 关于$\mathbb{R}^N$上的正则联络 D^0 平行，我们有

$$e_i\langle V_A, e_j\rangle = e_i\langle E_A, e_j\rangle = \langle E_A, D^0_{e_i}e_j\rangle = \langle V_A, D_{e_i}e_j\rangle + \langle E_A, h(e_i, e_j)\rangle\,. \tag{4.2}$$

这里，在最后一个等式中，我们使用了子流形的高斯公式 M 位于$\mathbb{R}^N$中。比较 (4.1) 与 (4.2)，可得 $\langle D_{e_i}V_A,\ e_j\rangle = \langle E_A,\ h(e_i,\ e_j)\rangle$。因此，证明完成。 □

我们计算 F-调和 2-形式的指标。更确切地说，对于一个 $\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi)$，我们计算求和 F-调和 2-形式 φ，其中 ι 表示内积。根据定义 3.8 ，我们有

$$\begin{aligned}\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) = &\int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle\sum_A d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi), \varphi\rangle^2 dv\\ &+\int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{\langle\sum_A \mathfrak{R}^\nabla(\iota_{V_A}\varphi), \iota_{V_A}\varphi\rangle + \sum_A \|d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)\|^2\right\} dv\,.\end{aligned} \tag{4.3}$$

参照 [11, (4.37)], , 我们对任意 $H(\varphi,\ \varphi)$ 定义 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 如下 :

$$H(\varphi,\varphi) = \sum_{i,j,k,l}\sum_\mu H^\mu h^\mu_{ik}\delta_{jl}\langle\varphi_{ij}, \varphi_{kl}\rangle\,,$$

其中，$H^\mu = \sum_m h^\mu_{mm}$ 表示 M 在 $\mathbb{R}^N$中的平均曲率。

另一方面，在当前情形下，我们引入以下量 y.

定义4.2。我们令

$$\boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi) = \sum_\mu h^\mu_1(\varphi,\varphi)e_\mu\,,\quad h^\mu_1(\varphi,\varphi) = \sum_{i,j,k,l} h^\mu_{ik}\delta_{jl}\langle\varphi_{ij}, \varphi_{kl}\rangle\,.$$

这里，我们注意到 $H(\varphi,\varphi)$和 $\boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)$与$(e_1,\dots,e_n)$和$(e_{n+1},\dots,e_N)$的选取无关。此外，对于每个 μ，$h^\mu_1(\varphi,\varphi)$作为 $\boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)$的分量，也与$(e_1,\dots,e_n)$的选取无关。正如稍后在定理 4.3中所示，计算(4.3)中的第一项需要用到 $\boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)$。

本小节旨在证明以下定理。

定理 4.3。在上述设定下，我们得到:

$$\begin{aligned}\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) = &\int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle\boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle dv\\ &+\int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{H(\varphi,\varphi) - 2\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + R(\varphi,\varphi)\right\} dv\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Thi这个定理是[11, (4.37) 命题] 到 F-调和形式 s.
为了证明定理4.3，我们先准备一些结果。

引理 4.4. 对任意 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，我们有

$$\sum_A \langle \mathfrak{R}^\nabla(\iota_{V_A}\varphi), \iota_{V_A}\varphi\rangle = \langle \mathfrak{R}^\nabla(\varphi), \varphi\rangle\,. \tag{4.5}$$

证明。我们将 φ 和 R^∇ 表示如下：

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_{e_i,e_j}\theta^i\wedge\theta^j, \quad R^\nabla = \frac{1}{2}\sum_{i,j}R^\nabla_{e_i,e_j}\theta^i\wedge\theta^j\,.$$

于是，由（2.3），可得

$$\begin{aligned}\text{the l.h.s. of (4.5)} &= \sum_A \langle [\iota_{V_A}\varphi\wedge\iota_{V_A}\varphi], R^\nabla\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_A\sum_{i,j} 2\langle [(\iota_{V_A}\varphi)_{e_i}, (\iota_{V_A}\varphi)_{e_j}], R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle \\ &= \sum_{i,j,k}\langle [\varphi_{e_k,e_i}, \varphi_{e_k,e_j}], R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\,. \end{aligned}\tag{4.6}$$

这里，在最后一个等式中，我们使用了 $(\iota_{V_A}\varphi)_{e_i} = \sum_k v_A^k\varphi_{e_k,e_i}$。另一方面，由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 Ad(G)-不变性，我们得到以下两个关系：

$$\begin{aligned}\langle [R^\nabla_{e_i,e_k}, \varphi_{e_i,e_j}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle &= -\langle \varphi_{e_i,e_j}, [R^\nabla_{e_i,e_k}, \varphi_{e_j,e_k}]\rangle\,, \\ \langle [R^\nabla_{e_i,e_j}, \varphi_{e_i,e_k}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle &= \langle [\varphi_{e_k,e_i}, \varphi_{e_k,e_j}], R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\,.\end{aligned}$$

利用这些关系，我们得到

$$\begin{aligned}\text{the r.h.s. of (4.5)} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\Big\{\langle [R^\nabla_{e_i,e_j}, \varphi_{e_i,e_k}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle - \langle [R^\nabla_{e_i,e_k}, \varphi_{e_i,e_j}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\Big\{\langle [R^\nabla_{e_i,e_j}, \varphi_{e_i,e_k}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle + \langle \varphi_{e_i,e_j}, [R^\nabla_{e_i,e_k}, \varphi_{e_j,e_k}]\rangle\Big\} \\ &= \sum_{i,j,k}\langle [R^\nabla_{e_i,e_j}, \varphi_{e_i,e_k}], \varphi_{e_j,e_k}\rangle \\ &= \sum_{i,j,k}\langle [\varphi_{e_k,e_i}, \varphi_{e_k,e_j}], R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\,. \end{aligned}\tag{4.7}$$

比较（4.6）和（4.7），即可得到所述结论。 □

我们如下定义 $h_2(\varphi,\varphi)$ 和 $h_2'(\varphi,\varphi)$，其中 $\varphi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_E)$：

$$h_2(\varphi,\varphi) = \sum_{i,j,k,l}\sum_\mu h^\mu_{ik}h^\mu_{lj}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle, \quad h_2'(\varphi,\varphi) = \sum_{i,j,k,l,m}\sum_\mu h^\mu_{mk}h^\mu_{mi}\delta_{jl}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle\,.$$

根据定义，$h(\varphi,\varphi)$ 和 $h_2'(\varphi,\varphi)$ 的取值与 $(e_1,\dots,e_n)$ 和 $(e_{n+1},\dots,e_N)$ 的选取无关。因此，我们得到以下引理。

引理 4.5. 设 φ 属于 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 且满足 $d^\nabla\varphi = 0$。则有：

(1) $\sum_A \|d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)\|^2 = \|\nabla\varphi\|^2 + h_2(\varphi,\varphi) + h_2'(\varphi,\varphi)$.**(2)** $\sum_A \langle d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)\ \varphi\rangle^2 = \|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 + \langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\ \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle$.

证明。设 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，其中 $d^\nabla\varphi = 0$。我们将 φ 和 $\nabla\varphi$ 表示如下：

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_{ij}\theta^i\wedge\theta^j\,,\quad \nabla\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\nabla_k\varphi_{ij}\theta^k\otimes(\theta^i\wedge\theta^j)\,.$$

(1) 若记

$$d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi))_{e_i,e_j}\theta^i\wedge\theta^j\,,$$

那么，根据 (2.2)，分量 $(d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi))_{e_i,e_j}$ 有如下表达式：

$$\begin{aligned}(d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi))_{e_i,e_j} &= \sum_k\sum_\mu v_A^\mu h_{ik}^\mu\varphi_{kj} + \sum_k v_A^k(\nabla_{e_i}\varphi)_{e_k,e_j}\\ &\quad - \left\{\sum_k\sum_\mu v_A^\mu h_{jk}^\mu\varphi_{ki} + \sum_k v_A^k(\nabla_{e_j}\varphi)_{e_k,e_i}\right\}\,. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\sum_A\|d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_A\sum_{i,j}\langle d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)_{e_i,e_j}, d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)_{e_i,e_j}\rangle\\ &= \sum_{i,j,k}\{\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle - \langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_j\varphi_{ki}\rangle\}\\ &\quad + \sum_{i,j,k,l}\sum_\mu\left\{h_{ik}^\mu h_{il}^\mu\langle\varphi_{kj},\varphi_{lj}\rangle - h_{ik}^\mu h_{jl}^\mu\langle\varphi_{kj},\varphi_{li}\rangle\right\}\,. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

(4.9) 的第二项可以证明与 $h_2(\varphi,\varphi) + h_2'(\varphi,\varphi)$ 相同。另一方面，我们利用条件 $d^\nabla\varphi = 0$ 来验证 (4.9) 的第一项等于 $\|\nabla\varphi\|^2$。这里，$d^\nabla\varphi = 0$ 给出

$$\nabla_i\varphi_{kj} + \nabla_j\varphi_{ik} + \nabla_k\varphi_{ji} = 0\,. \qquad (4.10)$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_j\varphi_{ki}\rangle &= \sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle + \sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_k\varphi_{ji}\rangle\\ &= \sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle + \sum_{i,j,k}\langle\nabla_j\varphi_{ik},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle\,,\end{aligned}$$

也就是说，

$$\sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_j\varphi_{ki}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\langle\nabla_i\varphi_{kj},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle\,.$$

由上述论证可得（1）。

（2）利用（4.8），我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_A \langle d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi),\varphi\rangle \\
&= \sum_{\substack{i,j,k\\ i',j'}} \langle \varphi_{ij}, \nabla_i\varphi_{kj}\rangle\langle \varphi_{i'j'}, \nabla_{i'}\varphi_{kj'}\rangle + \sum_{\substack{i,j,k\\ i',j',k'}}\sum_\mu h^\mu_{ik}h^\mu_{i'k'}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kj}\rangle\langle\varphi_{i'j'},\varphi_{k'j'}\rangle \\
&= \sum_k\left(\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle\right)^2 + \sum_{\substack{i,j,k,l\\ i',j',k',l'}}\sum_\mu h^\mu_{ik}h^\mu_{i'k'}\delta_{jl}\delta_{j'l'}\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle\langle\varphi_{i'j'},\varphi_{k'l'}\rangle\,. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

然后，我们可以验证，式（4.11）右端的第二项与$\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\ \varphi)\ \boldsymbol{h}_1(\varphi,\ \varphi)\rangle$相同。利用式（4.10），得到

$$\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\nabla_k\varphi_{ij}\rangle = \langle\varphi,\nabla_{e_k}\varphi\rangle = \|\varphi\|(\nabla_{e_k}\|\varphi\|)\,.$$

Su将其代入式（4.11）右端的第一项，我们得到

$$\sum_k\left(\sum_{i,j}\langle\varphi_{ij},\nabla_i\varphi_{kj}\rangle\right)^2 = \|\varphi\|^2\sum_k(\nabla_{e_k}\|\varphi\|)^2 = \|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2\,.$$

根据以上论证，我们完成了该引理的证明。 □

这里，我们将 $h_2(\varphi,\varphi)$ 和 $h_2'(\varphi,\varphi)$ 改写为 $\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)$、$R(\varphi,\varphi)$ 和 $H(\varphi,\varphi)$ 的形式。

引理 4.6. 对任意 $\varphi\in\Omega^2(\varphi,\varphi)$，我们得到：

$$h_2(\varphi,\varphi) = \frac{1}{2}R(\varphi,\varphi)\,,\quad h_2'(\varphi,\varphi) = H(\varphi,\varphi) - \mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)\,. \quad (4.12)$$

证明。 由 M 在 $\mathbb{R}^N$ ([13, 第七章命题 4.1]) 中的高斯方程可得以下关系成立：

$$R_{ijkl} = \sum_\mu(h^\mu_{ik}h^\mu_{jl} - h^\mu_{jk}h^\mu_{il})\,. \quad (4.13)$$

于是我们得到 $R(\varphi,\varphi) = \sum_{i,j,k,l}\sum_\mu(h^\mu_{ik}h^\mu_{jl} - h^\mu_{jk}h^\mu_{il})\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle = 2h_2(\varphi,\varphi)$。另一方面，(4.13) 满足 $R_{ik} = \sum_\mu(H^\mu h_{ik} - \sum_m h^\mu_{im}h^\mu_{mk})$，由此可推出 $\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) = H(\varphi,\varphi) - h_2'(\varphi,\varphi)$。因此，我们证明了这个引理。□

将 (4.12代入引理 4.5，(1) 得到

$$\sum_A\|d^\nabla(\iota_{V_A}\varphi)\|^2 = \|\nabla\varphi\|^2 + \frac{1}{2}R(\varphi,\varphi) + H(\varphi,\varphi) - \mathrm{Ric}(\varphi,\varphi)\,. \quad (4.14)$$

我们还得到

$$H(\varphi,\varphi) - 2\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + R(\varphi,\varphi) = -H(\varphi,\varphi) + 2(h_2(\varphi,\varphi) + h_2'(\varphi,\varphi))\,. \quad (4.15)$$

Bochner-Weitzenb¨ock 公式给出了一种计算微分的方法，适用于一个 F- 调和形式。实际上，我们利用这个公式证明下述定理，它是[9, 引理 8]的推广。

命题 4.7. 对任意 F-调和形式 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，有：

$$\int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{\langle\mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right\} dv$$
$$= -\int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I + 2R),\varphi\rangle dv\,. \quad (4.16)$$

证明. 设 $x \in M$ and $(e_1,\dots,e_n)$ 是 T_xM 的标准正交基。我们将 $(e_1,\dots,e_n)$ 延拓为一个局部标准正交标架场，使得 $(De_1)(x) = 0,\dots,(De_n)(x) = 0$。于是，在点 x 处，有

$$\Delta F(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) = -\sum \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}F(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)$$
$$= -F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 + F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\cdot\frac{1}{2}\Delta\|\varphi\|^2\,. \quad (4.17)$$

由命题 2.3 和 $d^\nabla\varphi = 0$，我们可以推出

$$\frac{1}{2}\Delta\|\varphi\|^2 = \langle d^\nabla\delta^\nabla\varphi,\varphi\rangle - \langle\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I + 2R),\varphi\rangle - \langle\mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle - \|\nabla\varphi\|^2\,.$$

将其代入式（4.17）第二项的右端，得到

$$\Delta F(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)$$
$$= -F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 - F'(\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2)\left\{\langle\mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right\}$$
$$- F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I + 2R),\varphi\rangle + F'(\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2)\langle d^\nabla\delta^\nabla\varphi,\varphi\rangle\,.$$

对 M 两边积分，由于格林定理（[12, 附录 6]），左端为零，而右端等于

$$-\int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 dv - \int_M F'(\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2)\left\{\langle\mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right\} dv$$
$$- \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge I + 2R),\varphi\rangle dv\,.$$

这里，我们使用了（3.5）中的第二个等式。根据上述论证，我们得到了这一断言。□

我们现在可以证明定理 4.3。

定理 4。3。 设 φ 是一个 F-调和 2-形式。利用引理 4.4、4.5、(2) 和 (4.14)，求和式 (4.3) 可改写如下：

$$\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) = \int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle dv$$
$$+ \int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{\langle \mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right\} dv$$
$$+ \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{H(\varphi,\varphi) - \mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + \frac{1}{2}R(\varphi,\varphi)\right\} dv\,. \quad (4.18)$$

通过利用引理 2.4 改写（4.16）的右端，我们得到

$$\int_M F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\|\nabla\|\varphi\|\|^2 dv + \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{\langle \mathfrak{R}^\nabla(\varphi),\varphi\rangle + \|\nabla\varphi\|^2\right\} dv$$
$$= \int_M F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{-\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + \frac{1}{2}R(\varphi,\varphi)\right\} dv\,.$$

将其代入（4.18），可推出（4.4）。由此，证明完成。 □

4.2. 关于 F-调和形式指标的分析（2）。我们将根据定理 $\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi)$ 对求和 $F'(\|\varphi\|^2/2)$ 与（ $F''(\|\varphi\|^2/2)$）中 4.4 的关系作进一步计算。因此，我们定义微分 F' 的次数如下。

定义 4.8. 设 F 是定义在 $[0,c$ 上的严格递增 C^2-函数， $0<c\le\infty$。 F' 的次数定义为

$$d_{F'} = \sup_{0<t<c}\frac{tF''(t)}{F'(t)}\,.$$

根据定义，次数 $d_{F'}$ 取值于 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$。

例 4.9。 我们确定函数 $d_{F'}$ 的次数 F，如例 3.2所示。(1) 对于 $F=F_p$ $(p\ge 2)$，有

$$d_{F_p'} = \sup_{t>0}\frac{tF_p''(t)}{F_p'(t)} = \sup_{t>0}\frac{(p-2)t(2t)^{\frac{p-4}{2}}}{(2t)^{\frac{p-2}{2}}} = \frac{p-2}{2}\,.$$

(2) 对于 $F=F_\epsilon$ $(\epsilon=\pm 1)$，若 $\epsilon=1$，则定义在 $[0,\infty)$ 上；若 $\epsilon=-1$，则定义在 $[0,1/2)$ 上，由

$$\frac{tF_\epsilon''(t)}{F_\epsilon'(t)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+2\epsilon t)}\,,$$

我们得到 $d_{F'_{\epsilon=1}}=0$和 $d_{F'_{\epsilon=-1}}=\infty$。

（3）对于 $F=F_e$，我们有 $F_e'(t)=F_e''(t)=e^t$。因此，我们有 $d_{F_e'}=\infty$。

下文中，我们假设次数 $d_{F'}$ 有限。设 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 是一个非零的 F-调和形式。φ 的范数 $\|\varphi\|$ 在 M 上给出一个光滑函数。我们在 M 中定义一个闭子集 M_0，如下：

$$M_0 = \{x \in M \mid \|\varphi\|(x) = 0\} .$$

然后，利用 M 和 $\varphi \not\equiv 0$ 的连通性，可以验证 M_0 在 M 中测度为零。由于 $d_{F'}$ 有限，我们得到

$$F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) \leq \frac{2}{\|\varphi\|^2} F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) \cdot d_{F'} \qquad \text{on } M - M_0 .$$

因此（4.4）推出

$$\begin{aligned}
\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) &= \int_{M-M_0} F''(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle dv \\
&\quad + \int_{M-M_0} F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\{H(\varphi,\varphi) - 2\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + R(\varphi,\varphi)\} dv \\
&\leq \int_{M-M_0} \frac{2}{\|\varphi\|^2} F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) \cdot d_{F'} \langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle dv \\
&\quad + \int_{M-M_0} F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\{H(\varphi,\varphi) - 2\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + R(\varphi,\varphi)\} dv . \quad (4.19)
\end{aligned}$$

因此，若令

$$\begin{aligned}
B(\varphi,\varphi) &= d_{F'}\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle + \frac{\|\varphi\|^2}{2}\{H(\varphi,\varphi) - 2\mathrm{Ric}(\varphi,\varphi) + R(\varphi,\varphi)\} \\
&= d_{F'}\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle + \frac{\|\varphi\|^2}{2}\{-H(\varphi,\varphi) + 2(h_2(\varphi,\varphi) + h_2'(\varphi,\varphi))\} , \quad (4.20)
\end{aligned}$$

那么，由（4.19），可得

$$\sum_A I(\iota_{V_A}\varphi) \leq \int_{M-M_0} \frac{2}{\|\varphi\|^2} F'(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) B(\varphi,\varphi) dv . \qquad (4.21)$$

由上述论证，我们得出：

定理 4.10。 设 M 是等距浸入于 $\mathbb{R}^N$ 的连通闭黎曼流形。假设其次数 $d_{F'}$ 有限。那么，对于任意非零的 F- 调和 2-形式 φ，不等式（4.21）成立。此外，若 $B(\varphi, \varphi) < 0$ 成立，则有 $\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) < 0$。

这里需要指出，$B(\varphi,\varphi)$ 与 T_xM 的标准正交基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 以及 $T_x^\perp M$ 的标准正交基 $(e_{n+1}, \ldots, e_N)$ 的选择无关。特别地，不等式 $B(\varphi,\varphi) < 0$ 在标准正交基变换下是不变的。

4.3. 欧几里得空间中的凸超曲面上 F-Yang-Mills 联络的不稳定性。设 φ 为一个 F-调和 2-形式。设 M 为$(n+1)$-欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的连通紧致凸超曲面，且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为其主曲率。不失一般性，我们可以假设对于每个 i， λ_i 均为正数。由 $h_{ij}^{n+1} = \lambda_i \delta_{ij}$ 可知， $H(\varphi, \varphi)$可表示如下：

$$H(\varphi, \varphi) = \sum_{i,j} \left(\sum_m \lambda_m \right) \lambda_i \|\varphi_{ij}\|^2 .$$

此外，我们有 $\langle \boldsymbol{h}_1(\varphi, \varphi)\ \boldsymbol{h}_1(\varphi, \varphi) \rangle = \sum_{i,j,i',j'} \lambda_i \lambda_{i'} \|\varphi_{ij}\|^2 \|\varphi_{i'j'}\|^2$， $h_2(\varphi, \varphi) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \|\varphi_{ij}\|^2$ 以及 $h_2'(\varphi, \varphi) = \sum_{i,j} \lambda_i^2 \|\varphi_{ij}\|^2$。将这些代入 (4.20)，得到：

$$B(\varphi, \varphi) = \sum_{i,j,i',j'} B_{iji'} \|\varphi_{ij}\|^2 \|\varphi_{i'j'}\|^2 ,$$

$$B_{iji'} = d_{F'} \lambda_i \lambda_{i'} + \frac{1}{4} \left\{ - \left(\sum_m \lambda_m \right) \lambda_i + 2\lambda_i \lambda_j + 2\lambda_i^2 \right\} .$$

若 B_{ijk} 对每个 i， j， k，则得到 $B(\varphi, \varphi) < 0$。于是，定理 4.10给出

$$\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A} \varphi) < 0 . \tag{4.22}$$

另一方面，不等式 $B_{ijk} < 0$ 可改写为

$$\lambda_i \sum_{m \neq i,j} \lambda_m > \lambda_i \left(\lambda_i + \lambda_j + 4 d_{F'} \lambda_k \right) ,$$

也就是说，

$$\sum_{m \neq i,j} \lambda_m > \lambda_i + \lambda_j + 4 d_{F'} \lambda_k . \tag{4.23}$$

由此论证可知，(4.23) 给出了一个充分条件，使得任何非平坦的、 F-Yang-Mills 联络在 M 上都不稳定。为证明这一点，反设存在一个非平坦的、弱稳定的 F-Yang-Mills 联络 ∇位于 M上。将$\varphi = R^\nabla \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 应用于 (4.22)，得到

$$\sum_A I_{R^\nabla}(\iota_{V_A} R^\nabla) < 0 .$$

另一方面，由于 ∇ 的弱不稳定性，可知对于每个 A， $I_{R^\nabla}(\iota_{V_A} R^\nabla) \geq 0$ 都成立。这满足

$$\sum_A I_{R^\nabla}(\iota_{V_A} R^\nabla) \geq 0 ,$$

这就产生了矛盾。因此，我们得到了以下定理。

定理 4.11. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是连通紧致凸超曲面 M 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的主曲率。假设次数 $d_{F'}$ 有限。那么，若满足以下条件， M 上任意非平坦的 F-Yang-Mills 联络都是不稳定的:

$$\sum_{m\neq i,j} \lambda_m > \lambda_i + \lambda_j + 4d_{F'}\lambda_k \quad (1 \leq i, j, k \leq n)\,.$$

考虑 M 为标准 n球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$的情形。若记 r 为 S^n的半径，则主曲率 λ_i 均等于 $1/r$。因此，我们得到以下推论，它是定理 4.11的推论。

推论 4.12。若不等式

$$n > 4d_{F'} + 4 \tag{4.24}$$

成立，则 S^n 上任意非平坦的 F-Yang-Mills 联络都是不稳定的。

我们将推论 4.12 应用于 F-Yang-Mills 联络，如例3.2所示。如例4.9所示，对于 $F = F_p\,(p \geq 2)$， $F_{\epsilon=1}$，次数 $d_{F'}$ 是有限的。

(1) 当 $F = F_p$时，(4.24) 化简为 $n > 2p$。因此，若 $n > 2p$，则 p-Yang-Mills 联络在 S^n 上只要非平坦，就不稳定。这个结果与 Simons ([18]) 对 $p = 2$ 以及 Chen-Zhou ([4, 推论 4.2]) 对 $p \geq 2$ 所得的结果一致。

(2) 在 $F = F_{\epsilon=1}$ 的情况下，我们得到了 $d_{F'_{\epsilon=1}} = 0$。因此，若 $n > 4$，则任何具有正号的广义 Yang-Mills-Born-Infeld 能量泛函的非平坦临界联络都是不稳定的。

借助定理4.3，我们对 F-Yang-Mills 联络在 F' 具有无限次数时的不稳定性作一观察。这里，我们回顾一下，定理4.3 不要求对 $d_{F'}$的有限性作任何假设。现在，我们来考察 $\mathscr{YM}_{\epsilon=-1}$ 的临界联络以及指数型 Yang-Mills 联络的不稳定性；它们是满足 $d_{F'} = \infty$的 F-Yang-Mills 联络的例子。我们首先考虑 $F = F_{\epsilon=-1}$的情形。根据 $F_{\epsilon=-1}$ 的定义域，我们假设$F_{\epsilon=-1}$-调和形式 $\varphi = R^{\nabla} \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$满足 $\|\varphi\| < 1$。由$h_{ij}^{n+1} = (1/r)\,\delta_{ij}$ 可得

$$H(\varphi,\varphi) = \frac{2n}{r^2}\|\varphi\|^2, \quad \langle \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi), \boldsymbol{h}_1(\varphi,\varphi)\rangle = \frac{4}{r^2}\|\varphi\|^4, \quad h_2(\varphi,\varphi) = h_2'(\varphi,\varphi) = \frac{2}{r^2}\|\varphi\|^2\,.$$

由定理4.3 和（4.15），可得

$$\begin{aligned}&\sum_A (I_\varphi \iota_{V_A}\varphi)\\ &\quad = \int_{S^n} \frac{4}{r^2} F''_{\epsilon=-1}(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^4 dv + \int_{S^n} F'_{\epsilon=-1}(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\left\{-\frac{2(n-4)}{r^2}\right\}\|\varphi\|^2 dv\,.\end{aligned}$$

通过使用

$$F'_{\epsilon=-1}(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) = \frac{1}{\sqrt{1-\|\varphi\|^2}}\,, \quad F''_{\epsilon=-1}(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2) = \frac{1}{(1-\|\varphi\|^2)\sqrt{1-\|\varphi\|^2}}\,,$$

我们得到

$$\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) = \frac{2}{r^2}\int_{S^n} \frac{\|\varphi\|^2}{\sqrt{1-\|\varphi\|^2}}\left\{\frac{2}{1-\|\varphi\|^2} - (n-2)\right\} dv\,. \tag{4.25}$$

由此论证可知，若右端（4.25）的被积函数在 S^n上为负，则 $\sum_A I_\varphi(\iota_{V_A}\varphi) < 0$ 成立。因此，我们得出以下命题。

命题 4.13. 设 ∇是标准 n-球面S^n 上广义 Yang-Mills-Born-Infeld 能量泛函 $\mathscr{YM}_{\epsilon=-1}$ （取负号）对应的非平坦临界联络。若 $n>4$ 且曲率 2-形式 R^∇ 满足

$$\|R^\nabla\| < \sqrt{\frac{n-4}{n-2}}\,,$$

则 ∇不稳定。

我们给出关于指数型 Yang-Mills 联络的类似结果。设 ∇ 是 S^n 上的指数型 Yang-Mills 联络，且 φ 属于 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$。类似的计算表明

$$\sum_A (I_\varphi \iota_{V_A}\varphi) = \frac{2}{r^2}\int_{S^n} \exp(\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)\|\varphi\|^2\left\{2\|\varphi\|^2 - (n-4)\right\} dv\,.$$

由此我们得出:

命题4.14. 设 ∇ 是标准 n 球面 S^n 上的一个非平坦指数杨–米尔斯联络。若 $n>4$ 且曲率 2-形式 R^∇ 满足

$$\|R^\nabla\| < \sqrt{\frac{n-4}{2}}\,,$$

则 ∇ 是不稳定的。

Yang-Mills 联络理论与调和映射理论之间有着很强的相似性；调和映射是定义在黎曼流形之间光滑映射空间上的某个能量泛函的临界点。最后，我们讨论调和映射理论中与本文结果相对应的结论如下：Ara [1]引入了 F-调和映射的概念，将其作为调和映射的推广， p-调和映射，等等。他（[1, 定理 7。1]）还推导出了从闭黎曼流形到 F维标准球面的 n-调和映射的不稳定性定理 S^n，这是对 Leung 关于调和映射以及 Cheung-Leung 关于 [15]的 [5] -调和映射结果的推广。借助 Ara 的结果，定义p 4.8意义下次数 $d_{F'}$ 的有限性给出了以下作为推论4.12对应结论：若不等式

$$n > 2d_{F'} + 2$$

成立时，从连通闭黎曼流形到 S^n 的任意非常值 F-调和映射都是不稳定的。这个不等式是 Leung 提出的不等式的自然推广

[15, 推论 1]。在 Koh 关于指数调和映射的理论中，我们也能找到命题 4.14的对应结果 [14, 定理，第 212]。

References

[1] M. Ara，《 F-调和映射的几何》，Kodai. Math. J.，22 (1999)，243–263。[2]M.F. Atiyah、V.G. Drinfeld、N.J. Hitchin、Yu.I. Manin，《瞬子的构造》，Phys. Lett. A，65 (1978)，185–187。[3] J. P. Bourguignon、H. B. Lawson, Jr.，《杨–米尔斯场的稳定性与孤立现象》，Commun. Math. Phys.，79 (1981)，189–230。[4] Q. Chen、Z.-R. Zhou，《关于 p-杨–米尔斯场的间隙性质与不稳定性》，Cand. J. Math.，59 (2007)，1245–1259。[5] L. F. Cheung、P. F. Leung，《关于稳定的 p-调和映射的一些结果》，Glasgow Math. J.，36 (1994)，77–80。[6] Y. Dong、S. W. Wei，《关于向量丛值 p-形式的消失定理及其应用》，Commun. Math. Phys.，304 (2011)，329–368。[7] C. Gherghe，《关于一种杨–米尔斯型泛函》，SIGMA，15 (2019)，022，第8页。[8] M. Hamilton，《数学规范理论》，Springer Cham，2017。[9] G.-Y. Jia、Z.-R. Zhou，《子流形上的 F-杨–米尔斯场的间隙》，Tsukuba J. Math，36 (2012)，121–134。[10] G.-Y. Jia、Z.-R. Zhou，《子流形上 F-杨–米尔斯场的稳定性》，Archivum Mathematicum，49 (2013)，125–139。[11] S. Kobayashi、Y. Ohnita 和 M. Takeuchi，《关于 Yang-Mills 联络的不稳定性》，Math. Z.，193 (1986)，165–189。[12] S. Kobayashi、K. Nomizu，《微分几何基础，第一卷》，John Wiley & Sons, Inc.，1963。[13] S. Kobayashi、K. Nomizu，《微分几何基础，第二卷》，John Wiley & Sons, Inc.，1969。[14]S. E. Koh，《稳定的指数调和映射的一个不存在性定理》，Bull. Korean Math. Soc.，32 (1995)，211–214。[15] P. F. Leung，《关于调和映射的稳定性，调和映射》，数学讲义，949，Springer Verlag，1982，122–129。[16] F. Matsuura、H. Urakawa，《关于指数型 Yang-Mills 联络》，Journal of Geometry and Physics，17 (1995)，73–89。[17] L. Sibner、R. Sibner 和 Y. S. Yang，《玻恩–因费尔德理论中的广义伯恩斯坦性质与引力弦》，Nonlinearity，20 (2007)，1193–1213。[18] J. Simons，《规范场》，东京极小子流形与测地线研讨会，1977。[19] K. Uhlenbeck，《曲率具有 L^p 界的联络》，Comm. Math. Phys.，83 (1982)，31–42。[20]S. W. Wei，《关于指数杨–米尔斯场与 p-杨–米尔斯场》，arXiv:2205.03016v1[数学.微分几何] 6 2022年5月。

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba, 278-8510, Japan电子邮箱：kurando.baba@rs.tus.ac.jp

Department of Mathematics, Graduate School of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba, 278-8510, Japan电子邮箱：6121505@ed.tus.ac.jp