arXiv:2301.04296v1 [math.ST] 11 Jan 2023

用于动态网络的度修正Cox模型*

Yuguo Chen†、Lianqiang Qu‡、Jinfeng Xu§、Ting Yan¶、Yunpeng Zhou‖

†伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，

‡¶华中师范大学，§香港城市大学，

‖香港大学

摘要

连续时间网络数据已成功地通过多元计数过程进行建模，其中强度函数由协变量信息刻画。然而，模型尚未纳入度异质性，这可能导致同质性效应的估计产生较大偏差。本文提出一种度校正 Cox 网络模型，用于同时分析连续时间有向网络数据中的动态度异质性和同质性效应。由于模型中每个节点都有其特定的入度效应和出度效应，时变参数向量的维度会随节点数量增加，使得估计问题变得非标准。我们采用局部估计方程法估计未知的时变参数，并利用强大的鞅过程理论建立所提出估计量的一致性和渐近正态性。此外，我们还提出检验统计量，用于检验动态网络中的趋势和度异质性。我们通过模拟研究评估所提方法的有限样本性能，并利用真实数据分析说明其实际用途。

*作者按字母顺序排列。

†伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校统计系，伊利诺伊州香槟市，61820。电子邮箱：yuguo@illinois.edu。

‡华中师范大学数学与统计学学院，中国湖北省武汉市，430079。电子邮箱：qulianq@ccnu.edu.cn。§香港城市大学生物统计学系，香港九龙达之路。电子邮箱：jinfengxu@gmail.com。

¶华中师范大学统计系，中国湖北省武汉市，430079。电子邮箱：tingyanty@mail.ccnu.edu.cn。

‖香港大学统计与精算学系，香港。电子邮箱：u3514104@connect.hku.hk。

关键词：度异质性；动态网络；同质性；核平滑；多元计数过程。

1 引言

网络在许多领域都十分常见，包括社会科学、生物科学、交通系统和电网。在网络中，节点用于表示感兴趣的实体，边用于表示节点之间的交互。例如，在电子邮件网络中，节点代表用户，边代表用户之间的电子邮件通信。统计模型是分析网络中交互的有用工具（例如，Goldenberg等人，2010；Fienberg，2012）。关于网络数据统计分析的全面综述，参见Kolaczyk （2009）。

在许多网络中，节点之间的交互（例如电子邮件和电话）会随时间变化。近年来，对此类动态网络数据进行建模和推断引起了广泛关注。一种常见方法是将网络数据聚合到预先定义的时间区间上，从而得到一系列随机图的离散时间戳快照，其中包含无权边或加权边。例如，时间指数随机图模型（Hanneke等人，2010；Krivitsky和Handcock，2014）、动态随机块模型（Yang等人，2011；Matias和Miele，2017；Pensky，2019）以及动态潜在空间模型（Sewell和Chen，2015a,b）。然而，在许多情境中，观测／交互时间是连续且不规则的，包括电子邮件网络（Perry and Wolfe，2013）、Twitter私信网络（DuBois等人，2013）和共享单车网络（Matias等人，2018）。正如Perry and Wolfe（2013）所讨论的，根据将交互次数转换为二元边所得结果进行推断，取决于阈值的选择；阈值选择可能导致网络及结论截然不同（De Choudhury等人，2010）。此外，数据聚合也极大地取决于时间区间的选择，这同样可能导致不同的网络和推断。因此，更理想的做法是开发连续时间网络模型，以充分利用数据。

对节点间连续时间交互进行建模的一种自然方法是使用计数过程（例如，Butts，2008；Vu等人，2011；DuBois等人，2013年；Matias等人，2018）。例如，Perry and Wolfe （2013年）提出了一种用于强度函数的Cox型回归模型，以分析动态有向交互，并为其模型建立了偏似然推断。与使用强度函数不同，Sit等人 （2021年）提出使用速率函数对有向交互进行建模。然而，Perry and Wolfe（2013年）和Sit等人 （2021年）都假设回归参数不随时间变化。由于回归参数往往会随时间变化，因此了解协变量对交互的时变效应十分重要。最近，Kreiß 等人 （2019年）扩展了Perry

and Wolfe的研究，提出了时变系数 Cox 模型，用以刻画协变量对交互的时间效应，并证明了局部最大似然估计量的逐点一致性和渐近正态性。

上述关于动态网络计数过程的文献主要关注如何处理协变量的影响，并未考虑度异质性，也就是说，个体与他人互动的程度存在显著差异。这也是许多现实世界网络的另一项重要特征。在模拟研究中，我们发现，当存在度异质性却未在模型中加以考虑时，同质性参数的估计量会产生较大偏差；见图 2。 Graham（2017年）在静态无向网络中也观察到了这一现象：存在“枢纽”节点（即度较高的节点），它们与不同类型的节点形成许多互动，从而有效削弱了测得的网络同质性。这里的同质性是指具有相似协变量取值的个体更容易彼此建立连接。

本文旨在针对连续时间有向网络数据，同时对动态度异质性和同质性效应进行建模。我们的贡献有三点。首先，我们提出一种新模型，即式（1）中的度校正 Cox 网络模型，用于处理网络中 n 个节点之间的动态度异质性。该新模型包含一组 $2n$个时变度参数，用以衡量动态度异质性；还包含一个 p维时变回归系数，用以刻画动态同质性效应。我们开发了一种局部估计方程法，用于估计 $2n+p$ 个未知时变参数。其次，我们结合鞅过程理论和核平滑方法，建立了所提出估计量的一致性和渐近正态性。主要挑战在于，参数向量的维数随网络中节点数增加，即我们的设定属于高维范式。这不同于 Perry and Wolfe （2013年）和 Kreiß 等人（2019年）的研究；在这些研究中，感兴趣的未知参数个数是固定的，因此其方法无法应用于此处。第三，在实践中，网络是否存在度异质性并不总是显而易见，尤其是在网络稀疏时。因此，我们进一步提出了检验统计量，用于检验动态网络中是否存在度异质性。据我们所知，现有文献尚未探讨过此类检验。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍我们提出的度校正 Cox 网络模型。第3 节提出一种局部估计方程法，用于估计 $2n+p$ 参数函数。第4 节证明估计量的一致一致性及其逐点中心极限定理，并构造参数的置信区间。第5 节提出用于检验趋势和度异质性的统计量。第6 节进行模拟研究，并展示一项真实数据分析应用。所有证明均见补充材料。

2 度校正 Cox 网络模型

我们考虑一个包含 n 个节点的网络，节点标记为“$1,\ldots,n$”，并研究节点之间的有向交互过程。从起始节点 i 到终止节点 j 的有向交互，指的是从 i 到 j的一条有向边。我们用 $[n]$ 和 $[n-1]_n$ 分别表示整数集合 $\{1,\ldots,n\}$ 和$\{n+1,\ldots,2n-1\},$。对于任意两个节点 $i \neq j \in [n]$，定义 $N_{ij}(s,t)$为时间区间$(s,t]$.内从起始节点 i 到终止节点 j 的有向交互次数。记 $N_{ij}(t) = N_{ij}(0,t)$。不失一般性，我们假设交互过程在 $t=0$ 时开始，且 $N_{ij}(0) = 0$，对 $1 \leq i \neq j \leq n.$ 均成立。计数过程 $\{N_{ij}(t): t \geq 0\}$记录了从起始节点 i 到终止节点 j的有向交互发生情况。

设 $Z_{ij}(t)$ 为节点对 (i,j) 的一个 p 维外部协变量过程。协变量 $Z_{ij}(t)$ 可用于衡量个体层面特征的相似性或差异性。例如，若个体 i 具有一个 d 维特征 $X_i(t)$，则可通过设定 $Z_{ij}(t) = X_i(t)^\top X_j(t)$、$Z_{ij}(t) = \|X_i(t) - X_j(t)\|_2$，或 $Z_{ij}(t) = X_i(t) \otimes X_j(t)$ 来构造成对协变量 $Z_{ij}(t)$。这里，$\|x\|_2$ 表示任意向量$x \in \mathbb{R}^d$ 的 ℓ_2-范数，而 $x \otimes y$ 表示向量 x 与向量 y的克罗内克积。

观测值由 $\{N_{ij}(t)\ Z_{ij}(t): i \neq j \in [n],\ t \in [0,\tau]\},$组成，其中 τ是观测期的终止时间。令 $\mathcal{F}_t$ 表示 σ-滤过，它记录了截至时间 t发生的一切。定义

$$\lambda_{ij}(t|\mathcal{F}_t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} P\big(N_{ij}((t+\Delta t)^-) - N_{ij}(t^-) = 1|\mathcal{F}_t\big)/\Delta t$$

作为 $N_{ij}(t)$ 的强度函数，其中 $N_{ij}(t^-)$ 表示时间 t 之前的交互次数。我们提出以下模型来描述 $N_{ij}(t)$ 的强度函数：

$$\lambda_{ij}(t|\mathcal{F}_t) = \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1}$$

其中 $\alpha_i(t)$ 表示节点 i 的外向性，$\beta_j(t)$ 表示节点 j的受欢迎程度，而$\gamma(t)$ 是一个共同回归系数函数。正如PerryandWolfe(2013年) 和 Yan 等 (2019年) 所讨论的，$\gamma(t)$ 能够简洁地捕捉并估计协变量的同质性效应。项 $Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)$ 越大，同质节点彼此交互的可能性就越高。

与 p_1 静态网络模型（Holland 和 Leinhardt，1981）中对模型参数的解释类似，参数 α_i（t）和 β_j（t）用于衡量度异质性。为了在我们的模型中清楚地说明这一点，我们考虑 N_{ij}（t）为泊松过程这一特殊情形。注意，节点 i 在时间区间（s，t] 内的出度和入度分别为

$\sum_{k\neq i} N_{ik}$（s，t）和 $\sum_{i\neq k} N_{ik}$（s，t），。在泊松过程的情形下，我们有 e

$$\sum_{k=1,k\neq i}^{n} E\{N_{ik}(s,t)\} = \int_s^t \exp\{\alpha_i(u)\} \sum_{k\neq i}^{n} \exp\{\beta_k(u) + Z_{ik}(u)^\top \gamma(u)\} du, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1,k\neq i}^{n} E\{N_{ki}(s,t)\} = \int_s^t \exp\{\beta_i(u)\} \sum_{k\neq i}^{n} \exp\{\alpha_k(u) + Z_{ki}(u)^\top \gamma(u)\} du. \tag{3}$$

显然，$\alpha_i(t)$ 越大，节点 i 与其他节点发生交互的可能性就越大。因此，$\alpha_i(t)$ $(i \in [n])$ 刻画了不同节点间的出度异质性。另一方面，$\beta_i(t)$ 越大，节点 i 接收其他节点交互的可能性就越大，也就是说，$\beta_i(t)$ 反映了入度异质性。因此，通过估计节点特定参数 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_j(t)$，可以清晰地刻画度异质性的影响。

在模型 (1) 中，如果将 $\lambda_{0,ij}(t) := \exp\{\alpha_i(t)+\beta_j(t)\}$ 视为基准强度函数，则该模型就简化为著名 Cox回归模型的网络版本。基于这一点，我们称模型 (1) 为度校正 Cox 网络模型。注意，如果通过一个未知函数 $c(t)$ 将 $\alpha_i(t) + \beta_j(t)$ 转换为 $[\alpha_i(t) + c(t)] + [\beta_j(t) - c(t)]$，模型 (1) 不会发生变化。为保证模型 (1) 的可辨识性，以下我们按照 Yan 等人（2016a）的做法设定 $\beta_n(t) = 0$。

现在，我们讨论我们的模型与 Perry 和 Wolfe（2013）、Kreiß 等人（2019）及 Kreiß（2021）提出的模型之间的差异。在模型 (1) 中，若乘以发送者 i 的接收者集合的指示函数，并令 $\beta_j(t) = 0$ $(j \in [n])$ 和 $\gamma(t) = \gamma$，则该模型会简化为 Perry和 Wolfe模型。模型 (1) 与 Perry和Wolfe模型有两项主要差异：(1) 在 Perry和Wolfe模型中，回归系数 γ 是时间常数；而在模型 (1) 中，它是未知函数 $\gamma(t)$。我们对 $\gamma(t)$ 的估计可用于推断协变量效应随时间的变化；(2) Perry和Wolfe模型仅考虑出度异质性，而我们的模型则同时刻画出度和入度异质性。由入度参数 $\beta_j(t)$ 衡量的节点受欢迎程度是网络的另一项重要特征（Sengupta 和 Chen，2018）。为了解模型 (1) 如何捕捉这一特征，我们计算 $u_i^{(1)}(0,t)$ 与 $u_j^{(1)}(0,t)$ 的对数比，其中 $u_i^{(1)}(0,t)$ 表示 $u_i(0,t) = \sum_{k\neq i}^{n} E\{N_{ki}(0,t)\}$ 关于 t 的一阶导数。于是我们有

$$\log\left(\frac{u_i^{(1)}(0,t)}{u_j^{(1)}(0,t)}\right) = \beta_i(t) - \beta_j(t) + \log\left(\frac{\sum_{k\neq i}\exp\{\alpha_k(t) + Z_{ki}(t)^\top\gamma(t)\}}{\sum_{k\neq j}\exp\{\alpha_k(t) + Z_{kj}(t)^\top\gamma(t)\}}\right).$$

如我们所见，节点 i 在网络中的受欢迎程度往往高于节点 j，如果 $\beta_i(t) > \beta_j(t)$ 在时刻 t。在 Perry and Wolfe 模型下，我们注意到该比率不包含

差值 $\beta_i(t) - \beta_j(t)$。此外，Perry and Wolfe (2013年) 将基准强度函数视为干扰参数，并专注于估计 γ。

在模型（1）中，若 $\alpha_i(t) = \alpha(t)$、$i \in [n]$，且 $\beta_j(t) = \beta(t)$、$j \in [n]$，则将基线函数转换为 $\lambda_{0,ij}(t) = \exp\{\alpha(t) + \beta(t)\}$ 后，该模型就成为 Kreiß 等人（2019）和 Kreiß（2021）提出的模型。Kreiß 等人（2019）和 Kreiß（2021）的模型存在一个缺点，即他们为所有节点设定了相同的度参数，忽略了现实世界网络中度异质性的影响。在模型（1）中，我们不仅关注估计 $\gamma(t)$，还关注估计 $2n$ 节点指定的参数 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_j(t)$。在模型（1）中，参数维数随节点数量增加，这比 Kreiß 等人（2019）和 Kreiß（2021）中参数维数固定的情形更为困难。这需要开发用于统计推断的新方法；参见下文第 3—5 节。

最后，我们的模型允许网络具有不同的边密度。特别地，它允许网络是稀疏的。如果在任意时间区间 $(s,t] \subset (0,\tau)$ 内，预期边数与 n^2 的比值随着$n \to \infty$. 趋于零，我们称动态网络是稀疏的。考虑 $\sup_{t\in[0,\tau]}[\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top\gamma(t)] = -q_n$ 的情形，其中 q_n 是依赖于 n. 的正常数。那么，根据 (2) 和 (3)，时间区间 $(s,t]$ 内的预期边数为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\int_s^t \exp\{\alpha_i(u) + \beta_j(u) + Z_{ij}(u)^\top\gamma(u)\}du \leq (t-s)n^2e^{-q_n}. \tag{4}$$

因此，q_n 决定了网络的稀疏程度。越大，网络就越稀疏。如果令 $q_n = c_0\log(n)$，其中常数 $c_0 \in (0,1]$, 则 (4) 右侧的阶为n^{2-c_0}，小于 n^2，因此动态网络是稀疏的。

3 局部估计方程方法

令 $\alpha(t) = (\alpha_1(t)\ldots,\alpha_n(t))^\top$ 和 $\beta(t) = (\beta_1(t)\ldots,\beta_{n-1}(t))^\top$。定义 $\theta(t) = (\gamma(t)^\top,\alpha(t)^\top,\beta(t)^\top)^\top$。我们用上标 * 表示真实值（例如，$\theta^*(t)$ 是 $\theta(t)$ 的真实值）。为方便起见，定义 $N = n(n-1)$。令 $\mathcal{K}_h(u) = h^{-1}\mathcal{K}(u/h)$，其中 $\mathcal{K}(\cdot)$ 是核函数，h 表示带宽。此外，我们定义

$$\mathcal{M}_{ij}(t;\alpha_i(t),\beta_j(t),\gamma(t)) = N_{ij}(t) - \int_0^t \exp\{\alpha_i(s) + \beta_j(s) + Z_{ij}(s)^\top\gamma(s)\}ds.$$

在模型 (1) 下，$\mathcal{M}_{ij}(t) = \mathcal{M}_{ij}(t;\ \alpha_i^*(t)\ \beta_j^*(t)\ \gamma^*(t))$ 是一个零均值鞅过程（参见 Fleming 和 Harrington, 1991中的引理 2.3.2）。假设 $\alpha_i^*(t)\ \beta_j^*(t)$ 和 $\gamma^*(t)$

在 $s \to t$ 时足够光滑，

$$\max_{i\in[n]} |\alpha_i^*(s) - \alpha_i^*(t)| \to 0, \quad \max_{j\in[n-1]} |\beta_j^*(s) - \beta_j^*(t)| \to 0, \quad \max_{k\in[p]} |\gamma_k^*(s) - \gamma_k^*(t)| \to 0.$$

当 s 接近 t时，这会导致

$$\begin{aligned} d\mathcal{M}_{ij}(s) =& dN_{ij}(s) - \exp\{\alpha_i(s) + \beta_j(s) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(s)\} ds \\ \approx& dN_{ij}(s) - \exp\{\alpha_i^*(t) + \beta_j^*(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t)\} ds, \end{aligned}$$

其中 $dN_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}[N_{ij}((t+\Delta t)^-) - N_{ij}(t^-)]$. 为简单起见，令 $d\mathcal{M}_{ij}(s, t) = dN_{ij}(s) - \exp\{\alpha_i^*(t) + \beta_j^*(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t)\} ds$. 基于这些事实，我们提出如下局部估计方程

$$(F(\theta(t))^\top, Q(\theta(t))^\top)^\top = 0, \tag{5}$$

其中 $F(\theta(t)) = (F_1(\theta(t)) \ldots, F_{2n-1}(\theta(t)))^\top$ 其中

$$\begin{aligned} F_i(\theta(t)) =& \frac{1}{n-1} \sum_{j\neq i} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) d\mathcal{M}_{ij}(s,t), \quad i \in [n], \\ F_{n+j}(\theta(t)) =& \frac{1}{n-1} \sum_{i\neq j} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) d\mathcal{M}_{ij}(s,t), \quad j \in [n-1], \end{aligned}$$

and

$$Q(\theta(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \int_0^\tau Z_{ij}(s) \mathcal{K}_{h_2}(s-t) d\mathcal{M}_{ij}(s,t).$$

我们通过方程（$\theta^*(t)$）的解来估计方程 (5)，记为 $\widehat{\theta}(t) = (\widehat{\gamma}(t)^\top, \widehat{\alpha}(t)^\top, \widehat{\beta}(t)^\top)^\top$。

现在，我们讨论求解 (5) 的算法。我们交替求解$F(\theta(t)) = 0$ 和 $Q(\theta(t)) = 0$，采用不动点迭代法与牛顿-拉夫森法相结合的方法。该算法详见算法1，其中，步骤 1 是在给定 $\gamma(t)$ 的情况下，通过不动点迭代法求解 $F(\theta(t)) = 0$；步骤 2 是在给定 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 的情况下，通过牛顿-拉夫森法求解 $Q(\theta(t)) = 0$。步骤 3 中的停止准则为

$$\epsilon^{(k)} = \max_{i\in[n]} |\alpha_i^{[k]}(t) - \alpha_i^{[k-1]}(t)| + \max_{i\in[n-1]} |\beta_i^{[k]}(t) - \beta_i^{[k-1]}(t)| + \max_{j\in[p]} |\gamma_j^{[k]} - \gamma_j^{[k-1]}| \leq 10^{-3}, \tag{6}$$

其在第6节的模拟研究和真实数据分析中表现良好。

算法1： 求解局部估计方程的算法

输入： $k=0$， $\alpha_i^{[0]}(t)=0$， $\beta_j^{[0]}(t)=0$， $\gamma^{(0)}(t)=0$ 和 $\epsilon^{(0)}=1$；**当** $\epsilon^{(k)}>10^{-3}$ **执行**

设定 $k\leftarrow k+1$;

步骤 1：通过以下方式计算 $\alpha_i^{[k]}(t)$ 和 $\beta_j^{[k]}(t)$

$$\alpha_i^{[k]}(t)=\log\left\{\frac{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)dN_{ij}(t)}{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\exp\{\beta_j^{[k-1]}(t)+Z_{ij}(s)^\top\gamma^{[k-1]}(t)\}ds}\right\},$$

$$\beta_j^{[k]}(t)=\log\left\{\frac{\sum_{i\neq j}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)dN_{ij}(t)}{\sum_{i\neq j}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\exp\{\alpha_i^{[k-1]}(t)+Z_{ij}(s)^\top\gamma^{[k-1]}(t)\}ds}\right\}.$$

步骤 2：通过以下方程的解更新 $\gamma^{[k]}(t)$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau Z_{ij}(s)\mathcal{K}_{h_2}(s-t)\left[dN_{ij}(s)-\exp\left\{\alpha_i^{[k-1]}(t)+\beta_j^{[k-1]}(t)+Z_{ij}(s)^\top\gamma(t)\right\}ds\right]=0.$$

Step 3: Calculate $\epsilon^{(k)}$ according to (6)

输出： $\widehat{\alpha}_i(t)$， $\widehat{\beta}_j(t)$ 和 $\widehat{\gamma}(t)$。

4 理论性质

本节将介绍估计量的一致性和渐近正态性。为获得 $\widehat{\theta}(t)$ 的一致性，我们采用两阶段过程。令 $\eta(t)=(\alpha(t)^\top,\beta(t)^\top)^\top$和 $\widehat{\eta}_\gamma(t)$ 表示在给定 $\gamma(t)$ 的情况下，通过求解 $F(\theta(t))=0$ 所得到的估计量。将$\frown Q_c(\gamma(t))$ 定义为通过以 $\widehat{\eta}_\gamma(t)$ 替换 $\eta(t)$ 而得到的 $Q(\theta(t))$ 的剖面函数。显然， $Q_c(\widehat{\gamma}(t))=0$。在第一阶段，我们证明 $\widehat{\eta}_\gamma(t)$ 的存在性，并在 $t\in[a,b]$ 上一致地推导其一致性速率（见补充材料中的引理 6）。在第二阶段，我们利用剖面函数 $Q_c(\gamma(t))$，推导 $\widehat{\gamma}(t)$ 与 $\gamma^*(t)$ 之间误差的上界^。

为方便起见，定义 $\pi_{ij}(t)=\alpha_i(t)+\beta_j(t)+Z_{ij}(t)^\top\gamma(t)$ 和 $\pi_{ij}^*(t)=\alpha_i^*(t)+\beta_j^*(t)+Z_{ij}(t)^\top\gamma^*(t)$。令 $\mathbb{V}(t;\eta(t)\ \gamma(t))$ 表示式 (5) 在 $\theta(t)$ 处的海森矩阵，并记

$$\mathbb{V}(t;\eta(t),\gamma(t))=\begin{pmatrix}V_{\eta,\eta}(t,\gamma(t)), & V_{\eta,\gamma}(t)\\ V_{\gamma,\eta}(t), & V_{\gamma,\gamma}(t)\end{pmatrix}.$$

此外，定义 $V^*(t)=-\mathbb{E}\{V_{\eta^*,\eta^*}(t,\ \gamma^*(t))\}$ 和 $v_{i,\ j}^*(t)$ 为第 $(i,\ j)$ 个元素

$V^*(t)$，其中

$$
\begin{aligned}
v^*_{i,i}(t) =&(n-1)^{-1}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\{e^{\pi^*_{ij}(t)}\}, \quad i\in[n],\\
v^*_{n+j,n+j}(t) =&(n-1)^{-1}\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\{e^{\pi^*_{ij}(t)}\}, \quad j\in[n-1],\\
v^*_{i,n+j}(t) =&v_{n+j,i}(t) = (n-1)^{-1}\mathbb{E}\{e^{\pi^*_{ij}(t)}\},\ i\in[n],\ j\in[n-1],\ i\neq j,
\end{aligned}
$$

且 $v^*_{i,\,j}(t)=v^*_{j,\,i}(t)=0$ 否则。令 $v^*_{2n,\,2n}(t)=\sum_{i=1}^{n}v^*_{ii}(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n-1}{}_{,\,j\neq i}\,v^*_{ij}(t)$。那么，定义 $S^*(t)=(s^*_{ij}(t))\in\mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$，其中

$$
s^*_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{\delta_{ij}}{v^*_{i,i}(t)}+\frac{1}{v^*_{2n,2n}(t)}, & i,j\in[n]\ \text{ or }\ i,j=[n-1]_n,\\ \frac{1}{v^*_{2n,2n}(t)}, & \text{otherwise.}\end{cases}
$$

在上述方程中，δ_{ij} 是指示函数，即当 $i=j$ 时为 $\delta_{ij}=1$，否则为 $\delta_{ij}=0$。令 $\|a\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|a_i|$ 表示任意向量 $a=(a_1,\ldots,a_n)^\top$. 的 ℓ_∞-范数

在介绍该估计量的一致性和渐近正态性之前，我们先给出以下条件。

条件1。 $\max_{i,\,j}\|Z_{ij}(t)\|_\infty\le\kappa_n$ 几乎必然成立，其中 κ_n 可能随 n发散。

条件2。 参数函数 $\alpha^*_i(t)$ $\beta^*_j(t)$ 和 $\gamma^*(t)$ 二阶连续可微。此外，$\gamma^{(l)}(t)$ 的每个元素（$l=0$，1，2）都是有界函数，并且

$$
\theta^*(t)\in\mathcal{B}=\left\{\theta(t):\max_{i,j}\sup_{t\in[a,b]}\left|\alpha^{(l)}_i(t)+\beta^{(l)}_j(t)+Z_{ij}(t)^\top\gamma^{(l)}(t)\right|\le q_n\ (l=0,1,2)\right\},
$$

其中 q_n 可能随 n发散。

条件3。 $H_Q(\gamma(t))=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{V_{\gamma,\gamma}(t)-V_{\gamma,\,\eta^*}(t)V_{\eta^*,\,\eta^*}(t,\ \gamma(t))^{-1}V_{\eta^*,\,\gamma}(t)\}$ 在 $\gamma^*(t)$ 的某个邻域内连续，并且

$$
\inf_{t\in[a,b]}\rho_{\min}\left\{H_Q(\gamma^*(t))\right\}>\varsigma>0,
$$

其中 $\rho_{\min}(M)$ 表示矩阵 M，的最小特征值，且 ς 是某个常数。

条件4。 $\mathcal{K}(x)$ 是一个对称密度函数，其支撑集为 $[-1,1]$.

条件5。 $nh_1^2\to\infty$，$nh_2\to\infty$，$ne^{2q_n}h_1^5\to0$ 和 $ne^{q_n}h_2^{5/2}\to0$ 作为 $n\to\infty$. 此外，$h_2=O(h_1^2)$。

条件1 假设协变量一致地被 κ_n 所上界。如果 $Z_{ij}(t)$ 是二元预测变量，则条件1 自动成立。如果 $Z_{ij}(t)$ 是由以下分布生成的

方差由常数上界的正态分布下，条件1仍以 $\kappa_n = O(\log n)$ 成立。条件2要求参数函数足够光滑，且参数函数之和及其一阶和二阶导数之和均由 q_n 上界。条件3是确保 $\gamma^*(t)$ 可辨识性的假设。条件4是非参数统计中的标准假设。核函数仅通过乘法常数影响估计量的收敛速率，因此对收敛速率影响甚微（例如，Fan and Gijbels，1996）。在条件5中， h_1 和 h_2 分别是估计式（5）中的 $(\alpha(t)\ \beta(t))$ 和 $\gamma(t)$ 所用的带宽。带宽 h_1 和 h_2 的阶由样本量 n 和稀疏参数 q_n. 决定。若 q_n 是绝对常数，则带宽可选为$h_1 = o(n^{-1/5})$ 和 $h_2 = o(n^{-2/5})$。

4.1 一致性与渐近正态性

我们首先 $\widehat{\ }$给出 $\theta(t)$的一致性，其证明见补充材料 1.

定理*1.* 假设条件 *1-5*成立。若$(q_n + 1)e^{19q_n}\kappa_n^3\sqrt{log(nh_1)/(nh_1)} \to 0$当 $n \to \infty$时，则估计量 $\widehat{\theta}(t) = (\widehat{\eta}(t)^\top, \widehat{\gamma}(t)^\top)^\top$（方程（*2*）的解）存在且满足

$$\sup_{t\in[a,b]} \|\widehat{\eta}(t) - \eta^*(t)\|_\infty = O_p\left((q_n + 1)e^{13q_n}\kappa_n^3\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right), \tag{7}$$

$$\sup_{t\in[a,b]} \|\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t)\|_\infty = O_p\left((q_n + 1)e^{7q_n}\kappa_n^2\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}} + \frac{1}{n^2h_2}\right). \tag{8}$$

注1. 定理1中的条件意味着 q_n 可取为 $c\log(nh_1)$，其中 $c \in (0, 1/40)$。因此，(4)右端的项为 $n^{\tilde{c}}$ 阶，其中$\tilde{c} \in (79/40, 2)$，其与 n^2 的比值趋于零。定理1中关于 q_n 的条件似乎强于保证(7)和(8)右端趋于零所需的条件。这是因为该条件不仅确立了一致一致性，还保证了(5)的解存在。解的存在要求对 q_n 施加更严格的条件，而这一点并未在(7)和(8)中明确体现。这种现象也存在于其他研究中（例如，Chatterjee等人，2011；Yan 等，2016b）。

注2。 事实上，定理 1 中的一致收敛速率体现了核平滑文献（例如 Fan and Gijbels，1996）中熟悉的偏差—方差权衡。具体而言，在定理 1的证明中， $\widehat{\eta}$（t）和 $\widehat{\gamma}$（t）的偏差项分别为 O（$e^{q_n}h_1^2$）和 O（$e^{q_n}h_2^2$）的阶，分别对应。因此，带宽应谨慎选择，以平衡偏差与方差。当条件5 成立时，偏差

定理 1 中的偏差一致地由 $O_p\big((q_n+1)e^{13q_n}\kappa_n^3\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)}\big)$ 和$O_p\big((q_n+1)e^{7q_n}\kappa_n^2\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)+1/(n^2h_2)}\big)$.

定义 $\mu_0=\int\mathcal{K}^2(u)du$，并记 $H_Q(t)=H_Q(\gamma^*(t))$。接下来，我们给出 $\widehat{\gamma}(t)$ 的渐近正态性。

定理 2. 假设条件 1-5 成立。若 $(q_n+1)^{3/2}e^{15q_n}\kappa_n^2[\log(nh_1)]^{3/4}/(nh_1)^{1/4}\to 0$，则 $(Nh_2)^{1/2}\Psi(t)^{-1/2}\{\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)-\{H_Q(t)\}^{-1}b_*(t)\}$ 依分布收敛于 p 维标准正态分布，其中 $\Psi(t)=\{H_Q(t)\}^{-1}\Sigma(t)\{H_Q(t)\}^{-1}$。这里，$\Sigma(t)$ 和 $b_*(t)$ 是

$$\Sigma(t)=\frac{\mu_0}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mathbb{E}\left[\Big(Z_{ij}(t)-V_{\gamma^*\eta^*}(t)S^*(t)\iota_{ij}\Big)^{\otimes 2}e^{\pi_{ij}^*(t)}\right],$$

$$b_*(t)=\frac{\mu_0}{2Nh_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j\neq i}\mathbb{E}(Z_{ij}(t)\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}{\sum_{j\neq i}\mathbb{E}(\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(Z_{ij}(t)\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}{\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}\right],$$

其中，对于任意向量 a，$a^{\otimes 2}=aa^\top$，且 ι_{ij} 是一个 $(2n-1)$ 维向量，其第 i 个和第 $(n+j)$ 个元素为 1，其余元素为 0。

注 3。$\widehat{\gamma}(t)$ 的极限分布包含一个偏差项 $\{H_Q(t)\}^{-1}b_*(t)$。这被称为计量经济学文献中的所谓附带参数问题（Neyman 和 Scott，1948；Fern´andez-Val 和 Weidner，2016；Dzemski，2017）。这一现象也出现在网络文献中（Graham，2017；Yan 等，2019年）。偏差源于估计量 $\widehat{\eta}(t)$ 出现在剖面函数 $Q(\theta)$ 中，且 $\widehat{\eta}(t)$ 的维数随 $n\to\infty$. 发散。若 q_n 是一个绝对常数，则$\{H_Q(t)\}^{-1}b_*(t)=O(1/(nh_1))$，当 $nh_1\to\infty$ 时该项渐近可忽略。

$\widehat{\eta}(t)$ 的渐近正态性将在以下定理中给出。

定理 3。在条件 1-5下，若 $(q_n+1)\kappa_n^3e^{23q_n}(\log nh_1)^{1/2}/(nh_1)^{1/4}\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时，则对任意固定的正整数 k，$(nh_1)^{1/2}\big\{(\mu_0S^*(t))^{-1/2}[\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)]\big\}_{1:k}$ 依分布收敛到一个 k 维标准正态分布。

注 4。根据定理 3，$(nh_1)^{1/2}[\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)]_{1:k}$ 的协方差矩阵由 $k\times k$ 的左上 $\mu_0S^*(t)$块给出。此外，对于任意固定的 i，当 $nh_1\to\infty$时，$\widehat{\eta}_i(t)$ 的收敛速率为 $O((nh_1)^{-1/2}e^{q_n/2})$。

4.2 $\eta^*(t)$ 的置信区间

接下来，我们构造 $\eta^*(t)$ 的逐点置信区间。由于 $\eta^*(t)$ 的渐近协方差矩阵涉及用于近似 $[V^*(t)]^{-1}$ 的未知 $S^*(t)$，我们使用

$\widehat{S}(t) = (\widehat{s}_{ij}(t))_{i,\ j\in[2n-1]}$ 来估计它，其中未知参数 $\eta^*(t)$ 和 $\gamma^*(t)$ 分别由其估计量 $\widehat{\eta}(t)$ 和 $\widehat{\gamma}(t)$ 替代，即

$$\widehat{s}_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{\delta_{ij}}{\widehat{v}_{i,i}(t)} + \frac{1}{\widehat{v}_{2n,2n}(t)}, & i,j \in [n], \text{or} \quad i,j \in [n-1]_n, \\ -\frac{1}{\widehat{v}_{2n,2n}(t)}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在上述方程中，$\widehat{v}_{2n,\ 2n} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{v}_{ii}(t) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n-1}{}_{,\ j\neq i} \widehat{v}_{ij}(t)$。

根据定理3，$(nh_1)^{1/2}\{\widehat{\eta}(t) - \eta^*(t)\}$ 的分布渐近等价于

$$S^*(t)\left(\frac{h_1}{n}\right)^{1/2} \int_0^{\tau} \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{M}}(t) = (\widetilde{M}_1(s)\ldots,\ \widetilde{M}_{2n-1}(t))^{\top}$ 满足

$$\widetilde{M}_i(t) = \sum_{k\neq i} \mathcal{M}_{ik}(t)\ (i \in [n]) \quad \text{and} \quad \widetilde{M}_{n+i}(t) = \sum_{k\neq i} \mathcal{M}_{ki}(t)\ (i \in [n-1]).$$

注意，$\widetilde{M}_i(t)$ 是局部平方可积鞅之和。因此，根据鞅性质，我们可以用 $\Omega(t) = (\widehat{\omega}_{ij}(t):\ i,\ j \in [2n-1])$ 估计 $\sqrt{h_1/n}\int_0^{\tau} \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)$ 的协方差 $\Omega(t)$，其中

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_{ii}(t) =& \frac{h_1}{n}\sum_{j\neq i}\int_0^{\tau} \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)dN_{ij}(s),\ i \in [n], \\ \widehat{\omega}_{n+j,n+j}(t) =& \frac{h_1}{n}\sum_{i\neq j}\int_0^{\tau} \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)dN_{ij}(s),\ j \in [n-1], \\ \widehat{\omega}_{i,n+j}(t) = \widehat{\omega}_{n+j,i}(t) =& \frac{h_1}{n}\int_0^{\tau} \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)dN_{ij}(s), \qquad i \in [n],\ j \in [n-1], \\ \widehat{\omega}_{ij}(t) = \widehat{\omega}_{ji}(t) =& 0, \qquad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

因此，我们通过 $S(t)\Omega(t)S(t)$ 的 i 个对角元素 $\widehat{\sigma}_{ii}(t)$，估计 $\sqrt{nh_1}\{\widehat{\eta}_i(t) - \eta_i^*(t)\}$ 的方差。

通过与补充材料中的引理 7 类似的论证，我们可以证明

$$\|\widehat{S}(t)\widehat{\Omega}(t)\widehat{S}(t) - \mu_0 S^*(t)\|_{\max} = o_p(1),$$

其中，$\|M\|_{\max} = \max_{i,\ j}|m_{i,\ j}|$ 表示任意矩阵 $M = (a_{i,\ j})$ 的最大绝对逐元素范数。令 z_α 为标准正态分布的 $100(1-\alpha)$ 百分位数。那么，$\eta_i^*(t)$ 的 $(1-\alpha)$-置信区间为

$$\widehat{\eta}_i(t) \pm (nh_1)^{-1/2} z_{\alpha/2}\widehat{\sigma}_{ii}^{1/2}(t), \quad i \in [2n-1].$$

备注 5. 由于 $\eta^*(t)$ 的维数随样本量 n 增大而发散，在有限样本下直接使用 $\mu_0 S(t)$ 估计 $\mu_0 S^*(t)$ 可能会导致局部平滑估计量出现较大偏差$\widehat{}$。因此，我们不使用 $\mu_0 S(t)$，而是考虑三明治型估计量$\widehat{S}(t)\widehat{}\Omega(t)\widehat{S}(t)$ 来估计 $\sqrt{n h_1}\{\widehat{\eta}_i(t) - \eta_i^*(t)$ 的方差$\}$.。这不同于 Yan 等人（2019）针对静态网络提出的协方差估计量，后者使用了最大似然估计量。

4.3 $\gamma^*(t)$的置信区间

根据定理 2， $\widehat{\gamma}(t)$ 存在不可忽略的偏差项 $H_Q(t)^{-1} b_*(t)$。因此，需要进行偏差校正。为此，定义

$$\widehat{b}(t) = \frac{h_1}{2N}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j\neq i} Z_{ij}(t)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)dN_{ij}(s)}{\sum_{j\neq i}\exp\{\widehat{\pi}_{ij}(t)\}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{i\neq j} Z_{ij}(t)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)dN_{ij}(s)}{\sum_{i\neq j}\exp\{\widehat{\pi}_{ij}(t)\}}\right],$$

$$\widehat{H}_Q(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} Z_{ij}(t)^{\otimes 2} e^{\widehat{\pi}_{ij}(t)} - \widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t)\widehat{S}(t)\widehat{V}_{\widehat{\eta},\widehat{\gamma}}(t),$$

其中 $\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\ \widehat{\eta}}(t) = N^{-1}(\widehat{u}_1(t)\ldots,\widehat{u}_{2n-1}(t))$ 和 $\widehat{V}_{\widehat{\eta},\ \widehat{\gamma}}(t) = n\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\ \widehat{\eta}}(t)^\top$ 满足

$$\widehat{u}_i(t) = \sum_{j\neq i} Z_{ij}(t) e^{\widehat{\pi}_{ij}(t)},\ i\in[n] \quad \text{and} \quad \widehat{u}_{n+j}(t) = \sum_{i\neq j} Z_{ij}(t) e^{\widehat{\pi}_{ij}(t)},\ j\in[n-1].$$

此外，根据鞅性质， $\Sigma(t)$ 可以估计为

$$\widehat{\Sigma}(t) = \frac{h_2}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\left(Z_{ij}(t) - \widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t)\widehat{S}(t)\iota_{ij}\right)^{\otimes 2}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}^2(u-t)dN_{ij}(u).$$

最后，我们用 $\{\widehat{H}_Q(t)\}^{-1}\widehat{b}(t)$ 估计偏差 $\{H_Q(t)\}^{-1}b_*(t)$，并用 $\widehat{\Psi}(t) = \{\widehat{H}_Q(t)\}^{-1}\widehat{\Sigma}(t)\{\widehat{H}_Q(t)\}^{-1}$ 估计协方差 $\Psi(t)$。

通过类似于补充材料中引理 7 的论证，逐项绝对误差以概率趋于零，即:

$$\|\{\widehat{H}_Q(t)\}^{-1}\widehat{b}(t) - \{H_Q(t)\}^{-1}b_*(t)\|_\infty = o_p(1) \quad \text{and} \quad \|\widehat{\Psi}(t) - \Psi(t)\|_{\max} = o_p(1).$$

令 $\widetilde{b}_j(t)$ 为 $\{\widehat{H}_Q(t)\}^{-1}\widehat{b}(t)$ 的第 j 个元素，令 $\widehat{\psi}_{jj}(t)$ 为 $\widehat{\ }\Psi(t).$ 的第 j 个对角元素。于是，$\gamma_j^*(t)$ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间为

$$\widehat{\gamma}_j(t) - \widetilde{b}_j(t) \pm (Nh_2)^{-1/2} z_{\alpha/2}\widehat{\psi}_{jj}^{1/2}(t),\ \ j\in[p].$$

5 假设检验

5.1 趋势检验

Perry 和 Wolfe（2013）以及 Sit 等人（2021）假设 $\gamma^*(t)$ 随时间保持常数，而 Kreiß 等人（2019）、Kreiß（2021）以及我们提出的模型 (1) 假设 $\gamma^*(t)$ 随时间变化。协变量对交互的影响是否随时间变化，通常是未知的。如果 $\eta^*(t)$ 和 $\gamma^*(t)$ 均不随时间变化，则网络可能是静态的。因此，检验 $\eta^*(t)$ 和 $\gamma^*(t)$ 是否具有时变趋势具有重要意义。我们将此称为趋势检验问题。本节考虑检验以下假设：

$$\begin{aligned} H_{0\eta} : \eta^*(t) = \eta^* \quad \text{for all} \quad t \in [a,b] \\ \text{versus } H_{1\eta} : \eta^*(t) \neq \eta^* \quad \text{for some } t \in [a,b], \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} H_{0\gamma} : \gamma^*(t) = \gamma^* \quad \text{for all} \quad t \in [a,b] \\ \text{versus } H_{1\gamma} : \gamma^*(t) \neq \gamma^* \quad \text{for some } t \in [a,b], \end{aligned}$$

其中 η^* 和 γ^* 是一些未指定的向量。我们看到，

- 如果 $H_{0\eta}$ 和 $H_{0\gamma}$ 中任一条件成立，则模型（1）是一个半参数模型；
- 如果 $H_{0\eta}$ 和 $H_{0\gamma}$ 均成立，则模型（1）就成为一个完全参数模型。

Kreiß （2021年）提出了一种检验统计量，利用距离比较完全参数估计量和非参数估计量，以检验 $H_{0\eta}$ 和 $H_{0\gamma}$. 然而，由于在模型（1）下，参数维数随节点数增加，Kreiß （2021年）中针对固定维数所开发的方法无法直接应用于此处。我们考虑以下检验统计量，分别用于检验 $H_{0\eta}$ 和 $H_{0\gamma}$，：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\eta &= \max_{i\in[2n-1]} \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \sqrt{nh_1}\big|\widehat{\eta}_i(t_1) - \widehat{\eta}_i(t_2)\big| / \widehat{\vartheta}^{1/2}_{i,\eta}(t_1,t_2), \\ \mathcal{T}_\gamma &= \max_{j\in[p]} \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \sqrt{Nh_2}\big|\widehat{\gamma}_j(t_1) - \widetilde{b}_j(t_1) - \widehat{\gamma}_j(t_2) + \widetilde{b}_j(t_2)\big| / \widehat{\vartheta}^{1/2}_{j,\gamma}(t_1,t_2), \end{aligned}$$

其中 $\widehat{\vartheta}_{i,\eta}(t_1,t_2) = \widehat{\sigma}_{ii}(t_1) + \widehat{\sigma}_{ii}(t_2)$ 以及 $\widehat{\vartheta}_{j,\gamma}(t_1,t_2) = \psi_{jj}(t_1) + \psi_{jj}(t_2)$.

检验统计量 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 在原假设 $H_{0\eta}$ 和 $H_{0\gamma}$下分别接近于零。因此，如果 $H_{0\eta}$ 满足 $\mathcal{T}_\eta > c_\eta(\nu)$，我们将拒绝；如果 $H_{0\gamma}$ 满足 $\mathcal{T}_\gamma > c_\gamma(\nu)$，我们将拒绝，其中 $c_\eta(\nu)$和 $c_\gamma(\nu)$ 是临界值。为获得这些临界值，我们考虑一种重抽样方法。采用与定理3的证明类似的论证，可以证明在原假设 $H_{0\eta}$下，

的分布 $\sqrt{nh_1}[\widehat{\eta}(t_1)-\overline{\widehat{\eta}(t_2)}]$ 渐近等价于

$$\sqrt{\frac{h_1}{n}}\left[\widehat{S}(t_1)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t_1)d\widetilde{\mathcal{M}}(u)-\widehat{S}(t_2)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t_2)d\widetilde{\mathcal{M}}(u)\right],$$

和 $\sqrt{nh_1}[\widehat{\eta}(t_1)-\eta^*]$和 $\sqrt{nh_1}[\widehat{\eta}(t_2)-\eta^*]$渐近独立，且 $t_1\neq t_2$.此外，采用与定理 2的证明类似的论证可得，在原假设$H_{0\gamma}$下， $\sqrt{Nh_2}[\widehat{\gamma}(t_1)-\widehat{b}(t_1)-\widehat{\gamma}(t_2)+\widehat{b}(t_2)]$的分布渐近等价于

$$\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\left[\left(Z_{ij}(t_1)-\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t_1)\widehat{S}(t_1)\iota_{is}\right)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(u-t_1)d\mathcal{M}_{ij}(u)\right.$$
$$\left.-\left(Z_{ij}(t_2)-\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t_2)\widehat{S}(t_2)\iota_{ij}\right)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(u-t_2)d\mathcal{M}_{ij}(u)\right],$$

并且 $\sqrt{Nh_2}[\widehat{\gamma}(t_1)-\widehat{b}(t_1)-\gamma^*]$和 $\sqrt{Nh_2}[\widehat{\gamma}(t_2)-\widehat{b}(t_2)-\gamma^*]$渐近独立，且 $t_1\neq t_2$. 直接计算可得， $\mathcal{M}_{ij}(u)$ 的方差函数为 $E\{N_{ij}(u)\}$（参见 Fleming 和 Harrington（1991）的定理 2.5.3）。受 Lin 等（1994）工作的启发，我们用 $N_{ij}(u)G_{ij}$ 替换 $\mathcal{M}_{ij}(u)$，即:

$$\widetilde{T}_\eta(t_1,t_2)=\sqrt{\frac{h_1}{n}}\left[\widehat{S}(t_1)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t_1)d\widetilde{\mathcal{N}}(u)-\widehat{S}(t_2)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t_2)d\widetilde{\mathcal{N}}(u)\right],$$
$$\widetilde{T}_\gamma(t_1,t_2)=\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\left[\widehat{H}_Q^{-1}(t_1)\left(Z_{ij}(t_1)-\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t_1)\widehat{S}(t_1)\iota_{ij}\right)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(u-t_1)dN_{ij}(u)G_{ij}\right.$$
$$\left.-\widehat{H}_Q^{-1}(t_2)\left(Z_{ij}(t_2)-\widehat{V}_{\widehat{\gamma},\widehat{\eta}}(t_2)\widehat{S}(t_2)\iota_{ij}\right)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(u-t_2)dN_{ij}(u)G_{ij}\right],$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 $\mathcal{N}(u)=(N_1(u)\ldots,N_{2n-1}(u))^\top$ 与

$$\widetilde{N}_i(u)=\sum_{k\neq i}N_{ik}(u)G_{ik}\ (i\in[n])\ \text{ and }\ \widetilde{N}_{n+i}(u)=\sum_{k\neq i}N_{ki}(u)G_{ki}\ (i=[n-1]),$$

且 G_{ij} $(i\neq j\in[n])$ 是相互独立的标准正态变量，并且与观测数据 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$独立，且 $G_{ii}=0.$。定义 $\vartheta_\eta(t_1,t_2)=\text{diag}\{\vartheta_{1,\eta}(t_1,t_2)$ $\ldots,\vartheta_{2n-1,\eta}(t_1,t_2)\}\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 以及 $\vartheta_\gamma(t_1,t_2)=\text{diag}\{\vartheta_{1,\gamma}(t_1,t_2)\ldots,$ $\vartheta_{p,\gamma}(t_1,t_2)\}$，其中 $\text{diag}\{a_1,\ldots,a_n\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示一个对角矩阵，其第 i 个对角元素为 a_i。通过反复生成正态随机样本 G_{ij}， $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 的分布可分别近似为

$\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 在给定观测数据时的条件分布，其中

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\eta = \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \|\widehat{\vartheta}_\eta^{-1/2}(t_1,t_2)\widetilde{T}_\eta(t_1,t_2)\|_\infty,$$
$$\widetilde{\mathcal{T}}_\gamma = \sup_{a\le t_1<t_2\le b} \|\widehat{\vartheta}_\gamma^{-1/2}(t_1,t_2)\widetilde{T}_\gamma(t_1,t_2)\|_\infty.$$

然后，临界值 $c_\eta(\nu)$ 和 $c_\gamma(\nu)$ 分别可由 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$, 的条件分布的上侧（$1-\nu$）百分位数~ ~得到。

5.2 度异质性检验

度异质性是现实世界网络的一个重要特征，但网络是否具有度异质性并不总是显而易见，尤其是在网络稀疏时。本节将讨论度异质性检验。如第 2节所述，这等价于检验以下假设:

$$H_{01}: \alpha_i^*(t) = \alpha^*(t) \quad \text{for all} \quad i \in [n]$$
$$\text{versus } H_{11}: \text{There exists some } i \in [n] \text{ such that } \alpha_i^*(t) \neq \alpha^*(t),$$

and

$$H_{02}: \beta_i^*(t) = \beta^*(t) \text{ 对所有 } i \in [n-1] \text{ 均成立}$$
$$\text{与之相对，} H_{12}: \text{存在某个 } i \in [n-1]\text{，使得 } \beta_i^*(t) \neq \beta^*(t),$$

其中，$\alpha^*(t)$ 和 $\beta^*(t)$ 是一些未指定的函数。我们可以看到

- 若满足 H_{01} 但不满足 H_{02}，则该网络仅存在入度异质性。
- 若满足 H_{02} 但不满足 H_{01}，则该网络仅存在出度异质性（Perry and Wolfe, 2013年）。
- 若 H_{01} 和 H_{02} 均满足，则该网络不存在度异质性（Kreiß 等人，2019年; Kreiß，2021年）。

令 $e_{i,j}$ 为一个 $(2n-1)$ 维向量，其中第 i 个元素为 1, j 个元素为 -1，其余元素为 0。我们分别考虑针对 H_{01} 和 H_{02},的以下检验统计量:

$$\mathcal{D}_\alpha = \max_{i\neq j\in[n]} \sup_{t\in[a,b]} \sqrt{nh_1}|\widehat{\alpha}_i(t) - \widehat{\alpha}_j(t)|/\widehat{\zeta}_{ij,\alpha}^{1/2}(t),$$
$$\mathcal{D}_\beta = \max_{i\neq j\in[n-1]} \sup_{t\in[a,b]} \sqrt{nh_1}|\widehat{\beta}_i(t) - \widehat{\beta}_j(t)|/\widehat{\zeta}_{ij,\beta}^{1/2}(t),$$

其中

$$\widehat{\zeta}_{ij,\alpha}(t) = e_{i,j}^{\top}\widehat{S}(t)\widehat{\Omega}(t)\widehat{S}(t)e_{i,j},$$
$$\widehat{\zeta}_{ij,\beta}(t) = e_{n+i,n+j}^{\top}\widehat{S}(t)\widehat{\Omega}(t)\widehat{S}(t)e_{n+i,n+j}.$$

在原假设 H_{01} 和 H_{02} 下，检验统计量 $\mathcal{D}_\alpha$ 和 $\mathcal{D}_\beta$ 分别接近于零。因此，若 $\mathcal{D}_\alpha > c_1(\nu)$，我们就拒绝 H_{01}；若 $\mathcal{D}_\beta > c_2(\nu)$，我们就拒绝 H_{02}，其中 $c_1(\nu)$ 和$c_2(\nu)$ 是临界值。我们采用重抽样方法来获取这些临界值。这里我们只关注如何获取 $c_1(\nu)$，而 $c_2(\nu)$ 可以用类似的方法获得。运用与定理 3 的证明类似的论证，我们可以证明，在原假设H_{01}下，$\sqrt{n h_1}\{\widehat{\alpha}_i(t) - \widehat{\alpha}_j(t)\}$ $(i \neq j \in [n])$的分布渐近等价于$\sqrt{h_1/n}e_{i,j}^{\top}\widehat{S}(t)$ $\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(u)$。与第 5.1 节中一样，我们在 $\mathcal{M}(u)$ 中用 $N_{is}(u)\widetilde{G_{is}}$ 替换 $\mathcal{M}_{is}(u)$，即，

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{ij,\alpha}(t) = \sqrt{\frac{h_1}{n}}e_{i,j}^{\top}\widehat{S}(t)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(u-t)d\widetilde{N}(u),$$

通过反复生成正态随机样本 G_{ij}，$\mathcal{D}_\alpha$ 的分布可以用给定观测数据时 $\mathcal{D}_\alpha$ 的条件分布来$\widetilde{\text{近似}}$，其中

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha = \max_{i\neq j\in[n]}\sup_{t\in[a,b]}|\widetilde{\mathcal{D}}_{ij,\alpha}(t)|/\widehat{\zeta}_{ij,\alpha}^{1/2}(t).$$

然后，临界值 $c_1(\nu)$ 可由$\widetilde{\text{条件分布的上}}$ $(1-\nu)$ 百分位数 $\mathcal{D}_\alpha$.得到

6 数值研究

6.1 模拟研究

本节通过模拟研究评估所提方法的有限样本性能。时变度参数 $\alpha_i^*(t)$ 和 $\beta_j^*(t)$ 为

$$\alpha_i^*(t) = \begin{cases} -c_0\log(n) + (2.5 + \sin(2\pi t)), & \text{if} \quad i < \frac{n}{2}, \\ -c_0\log(n) + (1.5 + t/2), & \text{if} \quad i \geq \frac{n}{2}, \end{cases}$$

and

$$\beta_j^*(t) = \begin{cases} -c_0\log(n) + (2.5 + \cos(2\pi t)), & \text{if} \quad j < \frac{n}{2}, \\ -c_0\log(n) + (1.5 + t/2), & \text{if} \quad \frac{n}{2} \leq j < n, \\ 0 & \text{if} \quad j = n, \end{cases}$$

其中， c_0 用于指定稀疏情形。我们取 $c_0 = 0.5$，因此 $q_n \approx \log(n)$。由 $\tau n^2 e^{-q_n}$ 定义的网络稀疏度为 $O(n)$，小于 n^2，因此生成的是一个中度稀疏网络。对于同质性项，我们设 $\gamma^*(t) = (\gamma_1^*(t)\ \gamma_2^*(t))^\top$，其中$\gamma_1^*(t) = \gamma_2^*(t) = \sin(2\pi t)/3$。协变量 Z_{ij} 独立地从标准正态分布中生成。我们设 $\tau = 1$，节点数分别为 $n = 100$、200 和 500。采用高斯核 $\mathcal{K}(x) = \exp(-x^2/2)/(2\pi)^{1/2}$，并按照经验法则选择带宽： $h_1 = 0.1n^{-1/5}$ 和 $h_2 = 0.015n^{-2/5}$。所有结果均基于 1000 次重复模拟。为衡量估计量的误差，我们使用平均积分平方误差（MISE），其定义为

$$\mathrm{MISE} = \frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}\int_0^\tau [\widehat{f}_k(t) - f_k^*(t)]^2 dt.$$

这里， $f_k^*(t)$表示真实值， $f_k(t)$是第 k次重复中的估计值。

参数估计量的均方积分误差 $\alpha_1^*(t)$ $\alpha_{n/2+1}^*(t)$ $\beta_1^*(t)$ $\beta_{n/2+1}^*(t)$ 和 $\gamma_1^*(t$见表1。其他参数的结果类似，故不再列出。从表1可以看出，所有均方积分误差都很小，且小于0。2。正如预期，均方积分误差随着样本量 n 的增加而减小。与度参数的均方积分误差相比， $\gamma_1^*(t)$ 的均方积分误差小得多（最多相差两个数量级），这是因为回归系数的维数固定，而度参数的数量级为 n。

$\alpha_1^*(t)$ $\beta_1^*(t)$ 和 $\gamma_1^*(t)$ 的 1000 条系数估计曲线的平均值及其点态95%置信带见图1。可以看出，随着节点数量增加，估计曲线越来越接近真实曲线，置信带也趋于覆盖整个真实曲线。表2报告了 $\alpha_1^*(t)$ $\beta_1^*(t)$ 和 $\gamma_1^*(t)$ 的点态95%置信区间覆盖概率及置信区间的平均长度。可以看到，覆盖概率接近名义水平，且置信区间长度随着 n 增加而减小。补充材料中的图 S1进一步展示了标准化后的$\widehat{\alpha}_1(t)$、 $\beta_1(t)$ 和 $\widehat{\gamma}_1(t)$（$t = 0.6$ 和 0.8）的渐近分布，其中包含 $n = 500$，这些分布可以用标准正态分布很好地近似。这验证了定理2和定理3的理论结果。

*与Kreiß 等人(2019年)*的比较。现在，我们比较我们的方法与Kreiß 等人(2019年)在估计同质性参数方面的表现。由于 Perry andWolfe(2013 年) 假设协变量的效应随时间保持不变，因此此处不比较他们的方法。在这项模拟中，同质性参数设为 $\gamma^*(t) = \sin(2\pi t)/3$，协变量 Z_{ij} 在 $i \le 4$ 且 $j \le n/3$时设为 1，否则设为 0。我们设$\alpha_i^*(t)$

且 $\beta_i^*(t)$ 为

$$\alpha_i^*(t) = \beta_i^*(t) = \begin{cases} b\big[-0.5\log(n) + (3 + t/2)\big], & \text{if} \quad i < \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

当 $b = 0$，模拟网络不存在度异质性，因此两种方法都能得到一致估计量。随着 b 增加，Kreiß 等人（2019年）的方法可能会因度异质性的存在而对同质性参数产生有偏估计。我们选择 b 为 0， $1/3$， $1/2$ 和 1，并设定 $n = 200$。

基于 1000 次重复模拟的结果如图 2所示。我们看到，当$b = 0$时，两种方法在偏差方面的表现相当。然而，我们的方法得到的置信带更宽，这并不令人意外，因为我们的模型中有$2n + p - 1$个未知参数，而Kreiß 等人的模型中只有Kreiß 等人的模型。另一方面，当$\gamma^*(t)$ 取 $b = 1/3$、 $1/2$和 1 时，我们的模型在估计方面仍然表现良好，但 Kreiß 等人（2019年）的方法对 $\gamma^*(t)$ 的估计有偏。随着 b 从 $1/3$ 增加至 1，偏差也随之增加；当 $b = 1$时，95% 点态置信带甚至无法覆盖 $\gamma^*(t)$ 的整条真实曲线。这表明，当网络中存在度异质性时，忽略这一特征可能会导致同质性效应的估计有偏。

趋势检验。为考察趋势检验的性能，我们对所有 $i \in [n]$ 和 $j \in [n-1]$，设定 $\alpha_i^*(t) = \beta_j^*(t) = -0.5\log(n) + (2.5 + \widetilde{c}_1 \sin(2\pi t))$，并设定 $\gamma^*(t) = \widetilde{c}_2 \sin(2\pi t)/3$。协变量 Z_{ij} 独立地取自标准正态分布。参数 $\widetilde{c}_1$ 和 $\widetilde{c}_2$ 表示趋势水平。可以看出，当 $\widetilde{c}_1 = 0$ 时， $H_{0\eta}$ 成立，且随着 $\widetilde{c}_1$ 增大，与 $H_{0\eta}$ 的偏离也增大。类似地，当 $\widetilde{c}_2 = 0$ 时， $H_{0\gamma}$ 成立，且随着 $\widetilde{c}_2$ 增大，与 $H_{0\gamma}$ 的偏离也增大。为简单起见，我们选取 t_1 和 t_2 为 0.1、0.2、.....、0.9，以计算 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$.。核函数和带宽的选择与之前相同。样本量 $n = 100$ 和 200，显著性水平 ν 设为 0.05。临界值通过重抽样方法，基于 1000 次模拟实现计算得到。

图 3 展示了统计量 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$. 的检验大小和功效。注意， $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 的估计检验水平约为 0.05，且两个检验统计量的经验功效均随 $\widetilde{c}_1$ 和 $\widetilde{c}_2$ 增大而提高。检验功效也随样本量增大而提高。结果表明，统计量 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 在原假设下表现良好，并且能够在备择假设下成功检测参数的时变趋势。

度异质性检验。现在，我们考察第5.2节提出的用于检验度异质性的检验统计量的表现。我们设定 $\gamma^*(t) = \sin(2\pi t)/3$，协变量 Z_{ij} 独立地取自标准正态分布。令$\alpha_i^*(t) = \beta_i^*(t) = \alpha(t)$ 对所有 $i \in [n-1]$均成立， $\alpha_n^*(t) = \alpha(t) + \widetilde{c}$ 且 $\beta_n^*(t) = 0$，其中 $\widetilde{c}$ 表示

度异质性的程度。当 $\widetilde{c}=0$时，原假设 H_{01} 成立，而偏离原假设的程度 H_{01} 会随着 $\widetilde{c}$ 的增大而增大。这里我们设定 $\alpha(t)=t/2$。我们选取t 为 0。1、0。2、.....、0。9，以计算 $\mathcal{D}_{\alpha}$. 核函数和带宽的选取与第6.1节相同。样本量为 $n=100$ ，取 200，检验水平 ν 设为 0。05。临界值采用重抽样方法，基于 1000 次模拟实现计算。

估计的检验大小和检验功效 $\mathcal{D}_{\alpha}$ 如图4所示。当 $\widetilde{c}=0$时，估计的检验大小约为 0.05，且所提检验的检验功效随着 $\widetilde{c}$ 趋近于 1.5 而增加。此外，样本量从 100 增加到 200 时，检验功效也会提高。结果表明，统计量 $\mathcal{D}_{\alpha}$ 在原假设下表现良好，也能在备择假设下成功检测出度异质性的存在。 $\mathcal{D}_{\beta}$ 的表现与 $\mathcal{D}_{\alpha}$ 相似，故此处省略。

6.2 真实数据分析

本节将所提方法应用于合作网络数据分析，该数据可从 Web of Science 数据库（https://www.webofscience.com/wos/woscc/basic-search）获取。我们从机器学习领域中提取了 2000年1月至2022年4月间被引次数最多的 30,000 篇论文的信息。原始数据集包含作者姓名、文章标题、来源标题、关键词、摘要、地址、电子邮件地址以及其他出版信息等关键内容。鉴于机器学习近年来日益普及，我们希望了解该领域在不同国家的发展趋势，以及不同地区之间的合作网络如何演变。因此，我们从原始数据集中提取了国家间的合作网络。网络中的节点代表不同的国家或地区。对于每篇文章，如果第一作者和其他作者来自不同国家，则这些国家之间构成合作关系，并在网络中添加一条从第一作者所在国指向每位合作者所在国的有向边。两个国家之间允许存在重边，但省略自环（同一国家内部的连边）。该合作网络包含 74 个国家（作为节点，标记为 1 至 74）和 19,679 条合作记录（边）。

图 5 展示了四个时期网络的快照：2000年1月—2002年4月、2002年5月—2004年8月、2004年9月—2007年1月、2007年2月—2009年5月。节点大小对应其入度，国家则按大洲以不同颜色标示。可以看到，在2000年1月—2002年4月期间，合作集中在来自欧洲和美洲的少数几个国家。然而，在2007年2月—2009年5月期间，越来越多的连边涉及亚洲国家。在补充材料的图 S2 中，

我们进一步绘制了2000年1月至2022年4月五个选定国家的入度和出度，图中显示这两种度都随时间显著增长。此外，补充材料中的图 S3 展示了2000年1月至2022年4月74个国家的总入度和出度，表明各国的度差异很大。例如，最高入度为3743，而最低仅为11。这些结果表明，合作网络可能存在度异质性，且其结构随时间演变。

从图 5中，我们还可以观察到，合作网络中可能存在一些枢纽节点（即度数较高的节点），例如美国，它是最大的橙色节点。无论这些国家所属的大洲如何，枢纽节点往往会与其他国家形成许多交互。如果我们将来自同一大洲的国家（即颜色相同的节点）视为同质性国家，将来自不同大洲的国家（即颜色不同的节点）视为异质性国家，那么枢纽节点的存在会使异质性节点之间的交互多于同质节点之间的交互。例如，在2000年1月—2002年4月期间，111条边中有77条是异质性的。经典的动态连边形成模型可能会得出结论，认为合作网络中的偏好并非同质性的，但我们后续的分析表明，该数据中仍然存在同质性效应。

我们的研究旨在估计入度和出度的时变趋势，并检验合作网络中是否存在同质性效应。为此，我们考虑以下协变量： M_i、 A_i和 E_i、 $i \in \{1, \ldots, 74\}$，它们分别表示国家 i是否来自美洲、亚洲和欧洲。令 $X_i = (M_i,\ A_i,\ E_i)^T$。进一步定义 $Z_{ij} = X_i \otimes X_j$，即

$$Z_{ij} = (M_iM_j, M_iA_j, M_iE_j, A_iM_j, A_iA_j, A_iE_j, E_iM_j, E_iA_j, E_iE_j)^\top.$$

这里， M_iA_j 表示第一作者是否来自美洲、合作者是否来自亚洲。其他术语的定义类似。与模拟研究中一样，使用高斯核$\mathcal{K}(x)$ =exp$(-x^2/2)/(2\pi)^{1/2}$ ，并按照经验法则选择带宽，分别为 $h_1 = 0.1n^{-1/5}$ 和 $h_2 = 0.015n^{-2/5}$。

我们按照第 5.1 节所述的检验程序，考察参数 $\alpha_i^*(t)$ 和 $\beta_j^*(t)$ 是否随时间变化。p 值小于 0.001，表明入度和出度的趋势随时间变化。图 6 展示了若干国家的 $\alpha_i^*(t)$ 和 $\beta_j^*(t)$ 的估计值。为避免选取基线进行比较，图 6 给出了曲线 $\widehat{\alpha}_i'(t) = \widehat{\alpha}_i(t) - \alpha(t)$ 和 $\widehat{\beta}_i'(t) = \widehat{\beta}_i(t) - \beta(t)$，其中$\alpha(t) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \widehat{\alpha}_i(t)$ 和 $\beta(t) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \widehat{\beta}_i(t)$。我们观察到，不同国家的合作活动趋势各不相同。例如，在美国，无论是作为第一作者还是

其他作者，美国在机器学习研究中引领全球合作的作用似乎随时间推移而减弱，尽管近年来其产出水平仍高于平均水平。乍得的图显示了不同的合作模式及其在合作中的角色。乍得的大多数作者在合作研究中往往担任第一作者，且 $\widehat{\alpha}(t)$ 在初期高于平均水平，而 $\beta(t)$ 低于平均水平；但几年后，他们开始更频繁地担任合作者。尼日利亚的估计曲线与美国和乍得的截然不同。曲线在 2007 年后迅速上升，但在整个时间区间内，对合作活动的影响均为负。我们还采用第 5.2 节所述的检验程序来检验度异质性。检验 $\alpha_i^*(t)$ 和 $\beta_i^*(t)$ 的 p 值均小于 0.001，表明该合作网络具有度异质性。

对于同质性效应，我们首先采用第5.1 节提出的检验程序，检验是否存在时变趋势。p 值小于 0.001，这表明同质性效应具有显著的时变趋势。随后，我们在图7中展示同质性参数的估计曲线。可以看出，如果两个国家都来自美洲或欧洲，它们往往会更频繁地合作。然而，两个亚洲国家在初期更有可能合作，但近年来合作倾向较低。我们的结果与 Kreiß 等人（2019年）的方法所得结果不同。例如，他们的方法显示，亚洲国家之间合作的同质性效应非常接近于零；而我们的方法表明，最初的同质性参数显著为正。这可能归因于我们的方法考虑了度异质性。

7 讨论

本文提出了一种新的度校正 Cox 网络模型，用于分析网络复发数据。我们开发了一种核平滑方法，用于估计同质性参数和个体特异性参数，并确立了所提出的估计量的一致性和渐近正态性。我们还提出了用于检验动态网络中的趋势和度异质性的检验程序。尽管本文聚焦于有向网络，但这里开发的方法也很容易推广到无向网络。数值研究表明，所提出的方法在实践中表现良好。

未来研究有几个方向。首先，本文讨论的度异质性也可以纳入其他模型。例如，为了刻画网络情境中的依赖结构，Kreiß 等人（2019年提出了渐近不相关的概念，并将其进一步扩展至瞬时m依赖和 β混合性，见Kreiß （2021年）。相关研究还可参见 Sit等人（2021年）

以及Kreiß（2021年）。然而，这些论文并未考虑度异质性，而它会显著增加这类分析背后数学推导的难度，尤其是在参数为 $2n$ 的情况下。未来探讨这一问题将很有意义。

其次，为了简化分析，我们仅采用局部常数拟合来构造估计方程。事实上，这可以扩展为局部线性拟合和一般的局部多项式拟合。然而，由此产生的推断程序会复杂得多，需要在未来进一步研究。最后，我们采用经验法则选择带宽。开发数据驱动方法（例如 K 折交叉验证）来选择最优带宽，无疑很有意义。然而，在我们的模型中，这需要处理 $2n$ 个体特异性参数，因此颇具挑战性，未来还需要投入更多精力进行研究。

参考文献

Butts, C. T. (2008). 社会行动的关系事件框架。社会学方法论, 38, 155–200. Chatterjee, S., Diaconis, P., and Sly, A. (2011). 给定度序列的随机图。《应用概率年刊》, 21, 1400–1435. De Choudhury, M., Mason, W. A., Hofman, J. M., and Watts, D. J. (2010). 从人际沟通推断相关社交网络, 第301–310页。美国计算机协会, 美国纽约州纽约。DuBois, C., Butts, C., and Smyth, P. (2013). 关系事件动态的随机块模型分析。载于第十六届人工智能与统计国际会议论文集, 《机器学习研究论文集》第31卷, 第238–246页。Dzemski, A. (2017). 存在未观测异质性的网络中二元链接形成的经验模型。《经济学工作论文》, 第698号。Fan, J. and Gijbels, I. (1996). 《局部多项式建模及其应用》. Chapman and Hall, 伦敦。Fern´andez-Val, I. and Weidner, M. (2016). 大样本n、t下非线性面板模型中的个体效应与时间效应。《计量经济学杂志》, 192, 291–312. Fienberg, S. E. (2012). 网络分析统计模型简史与开放挑战。《计算与图形统计学杂志》, 21, 825–839. Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1991). 《计数过程与生存分析》. Wiley, 纽约。

Goldenberg, A., Zheng, A., Fienberg, S. E., and Edoardo, M. A. (2010). 统计网络模型综述。《机器学习基础与趋势》, **2**, 129–233. Graham, B. S. (2017). 具有度异质性的网络形成计量经济模型。《计量经济学》, **85**, 1033–1063. Hanneke, S., Fu, W., and Xing, E. P. (2010). 社交网络的离散时间模型。《电子统计学期刊》, **4**, 585–605. Holland, P. W. and Leinhardt, S. (1981). 有向图概率分布的指数族。《美国统计学会会刊》, **76**(373), 33–50. Kantorovich, L. V. (1948). 泛函分析与应用数学。《数学科学进展》, 第89–185页。Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. (1964). 《赋范空间中的泛函分析》. 牛津，Pergamon。Kolaczyk, E. D. (2009). 网络数据统计分析. 施普林格出版社，纽约。Kreiß, A. (2021). 随机时变网络距离下的相关性界、混合性与m-依赖及其在Cox过程中的应用。《伯努利》, **27**, 1666–1694. Kreiß, A., Mammen, E., and Polonik, W. (2019). 连续时间事件计数和基于链接的动态网络模型的非参数推断。《电子统计学期刊》, **13**, 2764–2829. Krivitsky, P. N. and Handcock, M. S. (2014). 动态网络的可分模型。《英国皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）》, **76**, 29–46. Lin, D. Y., Fleming, T. R., and Wwi, L. J. (1994). 比例风险模型下生存曲线的置信带。*Biometrika*, **81**, 73–81. Matias, C. and Miele, V. (2017). 通过动态随机块模型对时序网络进行统计聚类。《英国皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）》, **79**, 1119–1141. Matias, C., Rebafka, T., and Villers, F. (2018). 纵向网络随机块模型的半参数扩展。*Biometrika*, **105**, 665–680. Neyman, J. and Scott, E. L. (1948). 基于部分相合观测的相合估计。《计量经济学》, **16**, 1–32.

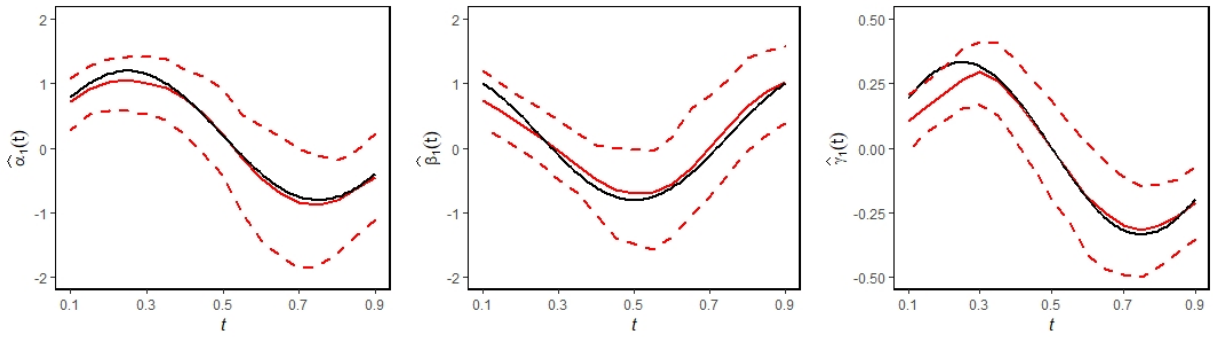
Pensky, M.（2019）。动态网络模型与图子估计。《统计年鉴》，**47**，2378–2403。Perry, P. O. 和 Wolfe, P. J.（2013）。有向交互网络的点过程建模。《英国皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）》，**75**，821–849。Sengupta, S. 和 Chen, Y.（2018）。具有社区结构的网络中节点受欢迎程度的区块模型。《英国皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）》，**80(2)**，365–386。Sewell, D. K. 和 Chen, Y.（2015a）。使用排序动态网络的潜在空间模型分析社交网络结构的形成。皇家统计学会期刊：*C*辑（应用统计），**64**，611–633。Sewell, D. K. 和 Chen, Y.（2015b）。动态网络的潜在空间模型。《美国统计学会会刊》，**110**，1646–1657。Sit, T.、Ying, Z. 和 Yu, Y.（2021）。动态网络的事件史分析。*Biometrika*，**108**，223–230。Vu, D. Q.、Asuncion, A. U.、Hunter, D. 和 Smyth, P.（2011）。引文网络的动态自我中心模型。载于第*28*届国际机器学习会议（*ICML-11*）论文集，第857–864页。Yan, T.、Jiang, B.、Fienberg, S. E. 和 Leng, C.（2019）。含协变量的有向网络模型中的统计推断。《美国统计学会会刊》，**114**，857–868。Yan, T.、Leng, C. 和 Zhu, J.（2016a）。递增双度序列下有向指数随机图模型的渐近性质。《统计年鉴》，**44**，31–57。Yan, T.、Leng, C. 和 Zhu, J.（2016b）。递增双度序列下有向指数随机图模型的渐近性质。《统计年鉴》，**44(1)**，31–57。Yang, T.、Chi, Y.、Zhu, S.、Gong, Y. 和 Jin, R.（2011）。检测动态社交网络中的社区及其演变：贝叶斯方法。机器学习，**82**，157–189。

表1：参数 $\alpha_1^*(t)$ $\alpha_{n/2+1}^*(t)$ $\beta_1^*(t)$ $\beta_{n/2+1}^*(t)$ 和 $\gamma_1^*(t)$ 的均方积分误差。

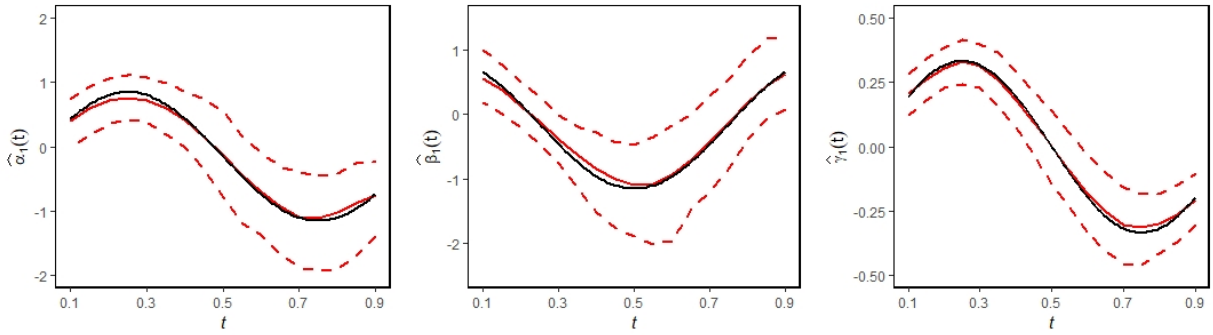
n	MISE				
	$\alpha_1^*(t)$	$\alpha_{n/2+1}^*(t)$	$\beta_1^*(t)$	$\beta_{n/2+1}^*(t)$	$\gamma_1^*(t)$
100	0.129	0.190	0.130	0.169	0.008
200	0.111	0.173	0.107	0.153	0.004
500	0.104	0.169	0.096	0.149	0.002

表2：在不同时间点，参数 $\times 100$ (95%置信区间的长度) 对于 $\alpha_1^*(t)$ $\alpha_{n/2+1}^*(t)$ $\beta_1^*(t)$ $\beta_{n/2+1}^*(t)$ 和 $\gamma_1^*(t)$ 的覆盖概率。

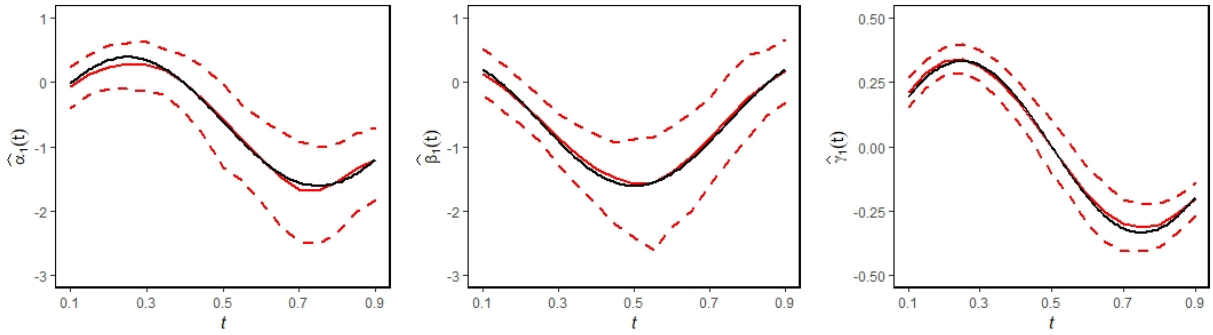
n		$t=0.4$	$t=0.6$	$t=0.8$
100	$\alpha_1^*(t)$	95.5 (1.00)	92.3 (1.61)	95.9 (1.45)
	$\alpha_{n/2+1}^*(t)$	93.7 (1.64)	93.8 (1.69)	95.4 (1.39)
	$\beta_1^*(t)$	92.8 (1.12)	95.8 (1.60)	92.7 (1.30)
	$\beta_{n/2+1}^*(t)$	92.6 (1.18)	94.7 (1.65)	93.9 (1.66)
	$\gamma_1^*(t)$	93.8 (0.31)	95.8 (0.44)	94.7 (0.37)
200	$\alpha_1^*(t)$	96.5 (0.95)	97.8 (1.54)	91.1 (1.36)
	$\alpha_{n/2+1}^*(t)$	95.8 (1.65)	95.3 (1.63)	95.9 (1.29)
	$\beta_1^*(t)$	90.7 (1.08)	92.3 (1.57)	94.4 (1.20)
	$\beta_{n/2+1}^*(t)$	96.1 (1.15)	96.3 (1.61)	95.5 (1.60)
	$\gamma_1^*(t)$	95.3 (0.23)	95.3 (0.33)	95.3 (0.27)
500	$\alpha_1^*(t)$	95.5 (0.92)	97.1 (1.53)	94.8 (1.33)
	$\alpha_{n/2+1}^*(t)$	92.9 (1.73)	94.5 (1.65)	93.7 (1.24)
	$\beta_1^*(t)$	93.7 (1.08)	94.9 (1.60)	93.8 (1.14)
	$\beta_{n/2+1}^*(t)$	95.5 (1.15)	97.5 (1.54)	95.4 (1.59)
	$\gamma_1^*(t)$	94.6 (0.16)	95.3 (0.23)	95.2 (0.19)



(a) $n = 100$, $\widehat{\alpha}_1(t)$ (b) $n = 100$, $\widehat{\beta}_1(t)$ (c) $n = 100$, $\widehat{\gamma}_1(t)$

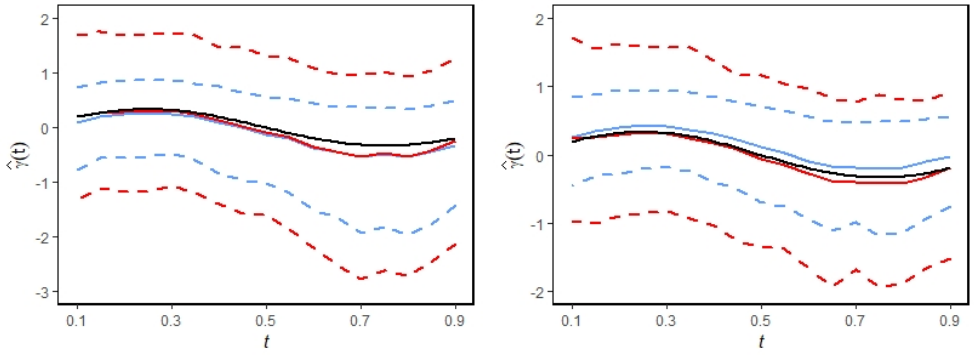


(d) $n = 200$, $\widehat{\alpha}_1(t)$ (e) $n = 200$, $\widehat{\beta}_1(t)$ (f) $n = 200$, $\widehat{\gamma}_1(t)$

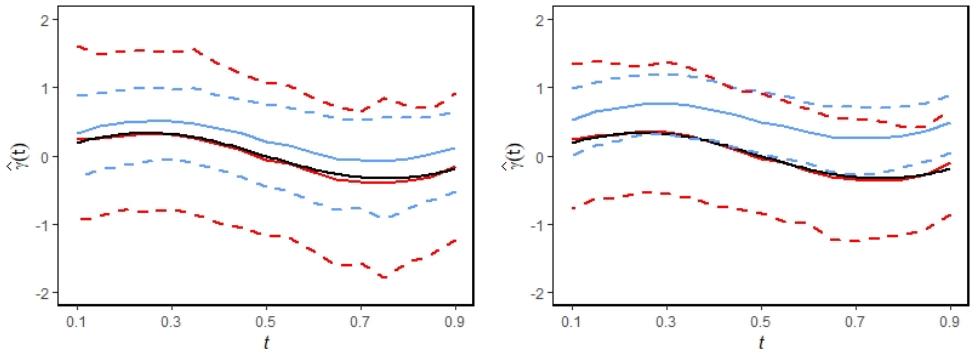


(g) $n = 500$, $\widehat{\alpha}_1(t)$ (h) $n = 500$, $\widehat{\beta}_1(t)$ (i) $n = 500$, $\widehat{\gamma}_1(t)$

图1： $\alpha_1^*(t)$ $\beta_1^*(t)$和 $\gamma_1^*(t)$的估计曲线。黑色实线表示 $\alpha_1^*(t)$ $\beta_1^*(t)$和 $\gamma_1^*(t)$的真实曲线。红色实线表示所提出的估计量 $\widehat{\alpha}_1(t)$ $\beta_1(t)$和 $\widehat{\gamma}_1(t)$的平均值（基于1000次重复模拟），红色虚线表示点态95%置信区间。

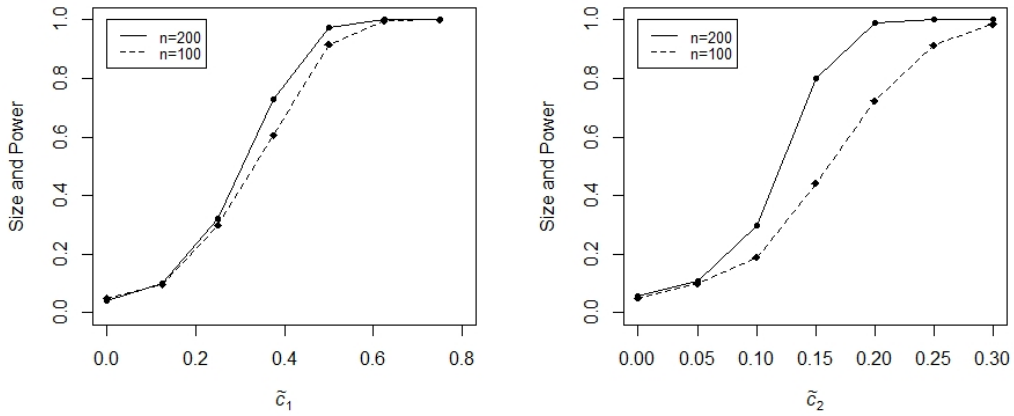


(a) $b = 0$ (b) $b = 1/3$



(c) $b = 1/2$ (d) $b = 1$

图 2：红色实线表示 $\gamma^*(t)$ 的所提出的估计量在 1000 次重复模拟中的平均值，红色虚线表示点态95%置信区间。蓝色实线表示通过 Kreiß 等人(2019年) 的方法得到的估计量在 1000 次重复模拟中的平均值，蓝色虚线表示点态95%置信区间。黑色实线表示 $\gamma^*(t)$的真实曲线。



(a) $\mathcal{T}_\eta$ 的检验大小和检验功效 (b) $\mathcal{T}_\gamma$的检验大小和检验功效

图3：随着趋势水平 $\tilde{c}_1$ 和 $\tilde{c}_2$ 增大，检验统计量 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 的检验大小和检验功效。

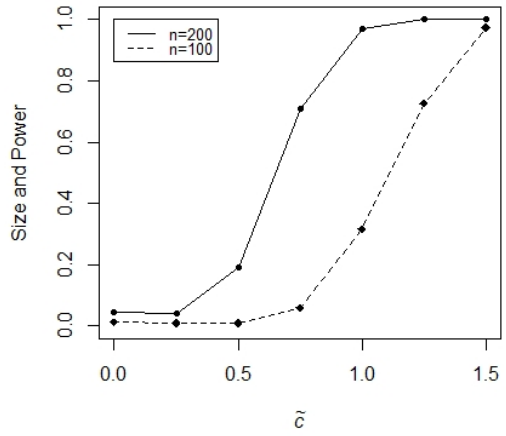
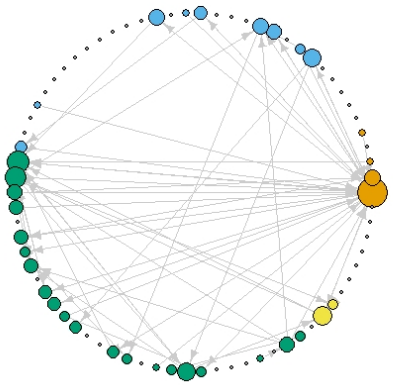
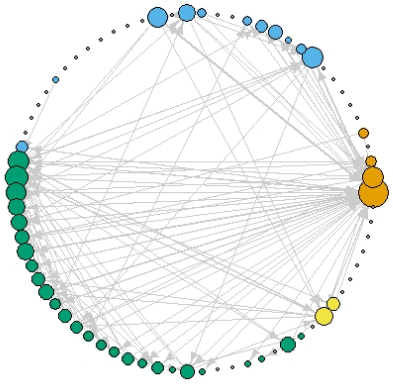


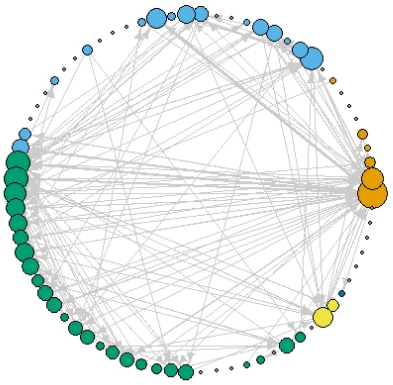
图4：检验统计量 $\mathcal{D}_\alpha$ 随着异质性水平 $\tilde{c}$ 从 0 变化到 1.5 时的检验大小和检验功效。



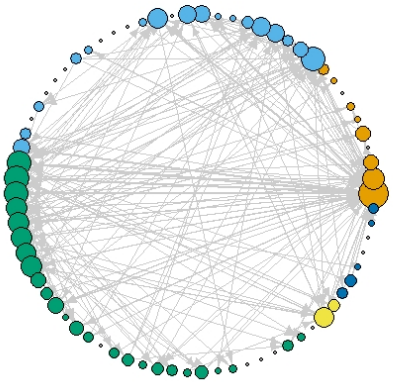
(a) 2000年1月 - 2002年4月 (P1)



(b) 2002年5月 - 2004年8月 (P2)

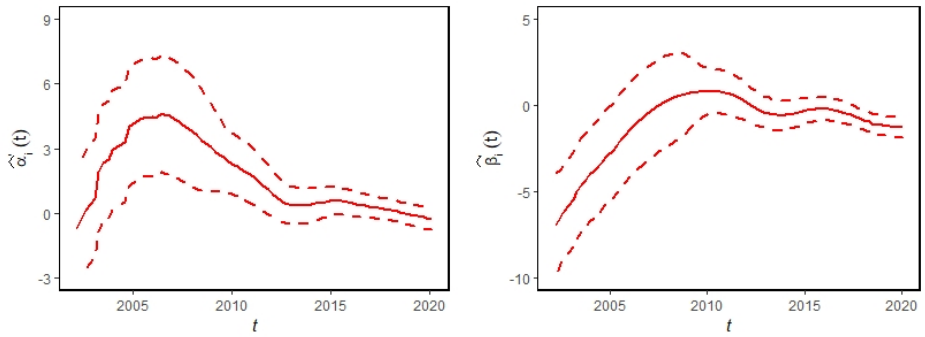


(c) 2004年9月 - 2007年1月 (P3)



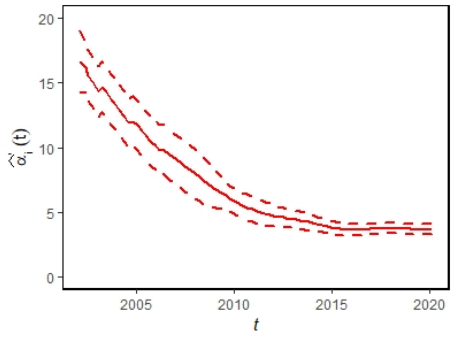
(d) 2007年2月 - 2009年5月 (P4)

图 5：2000年1月至2009年5月74个国家之间的合作关系连线。节点的检验大小对应其入度。各国按大洲着色：美洲（橙色）、亚洲（青色）、欧洲（绿色）、大洋洲（黄色）和非洲（深蓝色）。

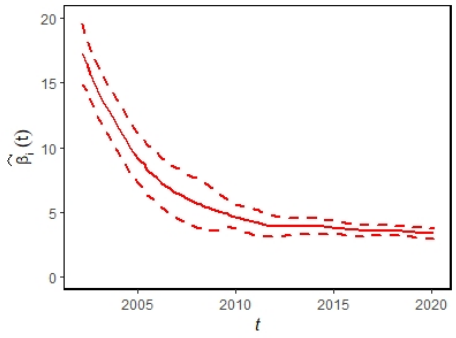


(a) 乍得， $\widehat{\alpha}'(t)$

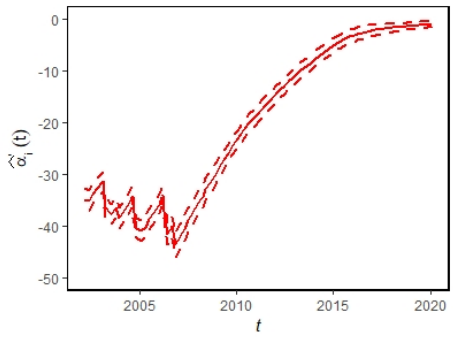
(b) 乍得， $\widehat{\beta}'(t)$



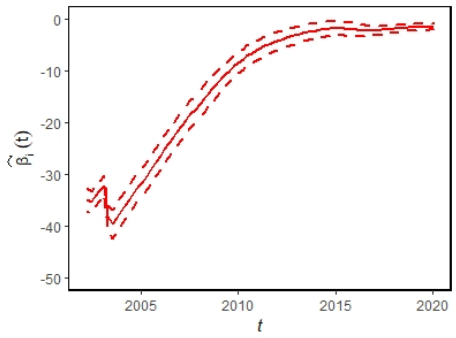
(c) 美国， $\widehat{\alpha}'(t)$



(d) 美国， $\widehat{\beta}'(t)$

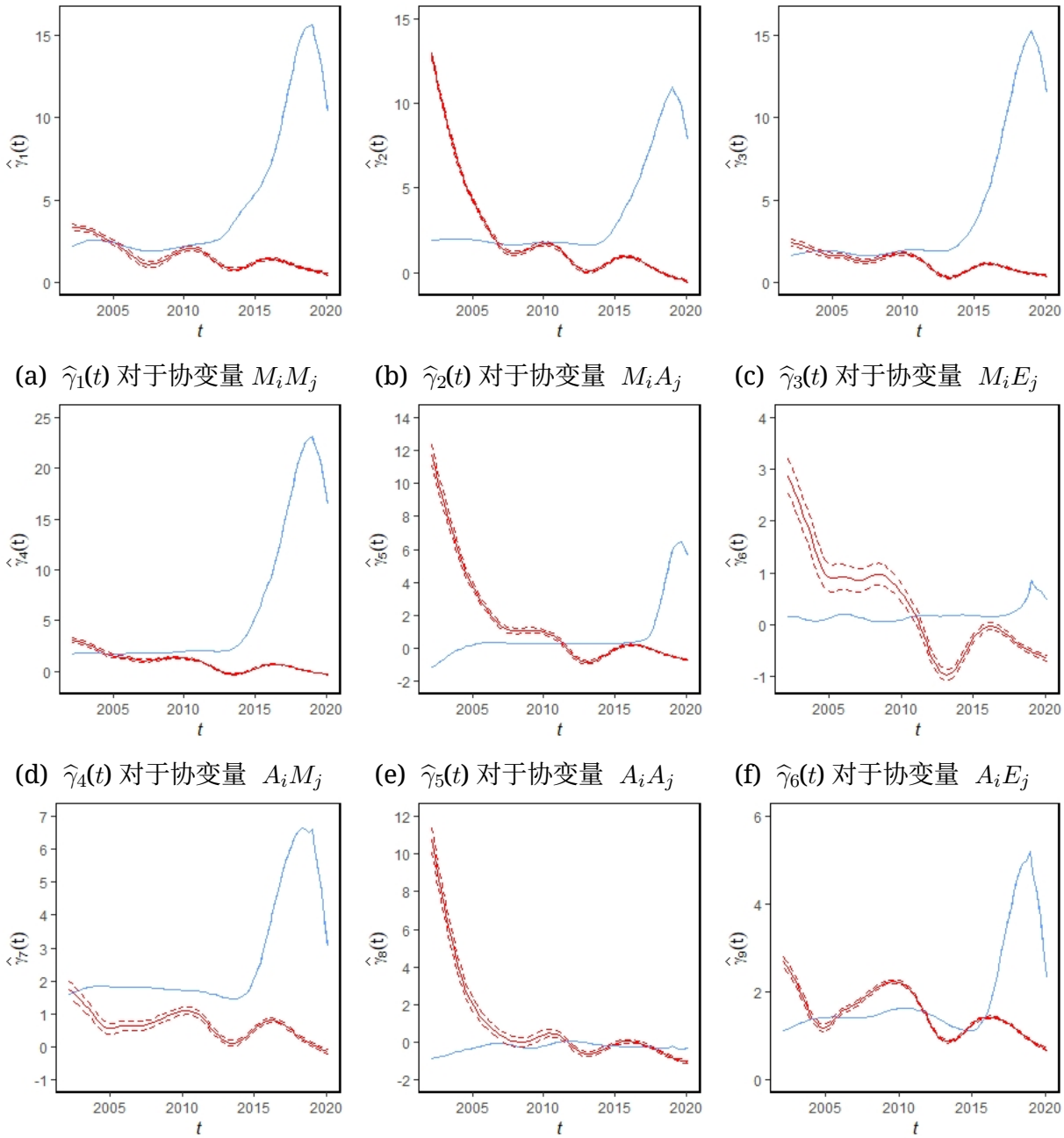


(e) 尼日利亚， $\widehat{\alpha}'(t)$



(f) 尼日利亚， $\widehat{\beta}'(t)$

图 6：真实数据分析：度异质性参数的估计结果。实线表示估计曲线，虚线表示其 95 % 点态置信带。



(a) $\hat{\gamma}_1(t)$ 对于协变量 M_iM_j (b) $\hat{\gamma}_2(t)$ 对于协变量 M_iA_j (c) $\hat{\gamma}_3(t)$ 对于协变量 M_iE_j

(d) $\hat{\gamma}_4(t)$ 对于协变量 A_iM_j (e) $\hat{\gamma}_5(t)$ 对于协变量 A_iA_j (f) $\hat{\gamma}_6(t)$ 对于协变量 A_iE_j

(g) $\hat{\gamma}_7(t)$ 的协变量为 E_iM_j (h) $\hat{\gamma}_8(t)$ 的协变量为 E_iA_j (i) $\hat{\gamma}_9(t)$ 的协变量为 E_iE_j

图7：真实数据分析：同质性参数的估计结果。红色实线表示我们的估计值，红色虚线表示其 95% 点态置信带。蓝线表示采用 Kreiß 等人 (2019年) 得到的估计值。

《度修正Cox模型：动态网络》补充材料

A 预备知识

本节给出一些将在证明中用到的结果，并将其表述为引理。给定 $b_L, b_U > 0$，若 $M = (m_{i,j})_{n\times n}$ 满足以下条件，则称其属于矩阵类 $\mathcal{L}_n(b_L, b_U)$ M

$$
\begin{aligned}
&m_{i,j} = m_{j,i} = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n,\ i \neq j,\\
&m_{i,j} = m_{j,i} = 0, \quad i,j = n+1,\ldots,2n-1,\ i \neq j,\\
&m_{n+i,i} = m_{i,n+i} = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n-1,\\
&b_L \leq m_{i,i} - \textstyle\sum_{j=n+1}^{2n-1} m_{i,j} \leq b_U, \quad i = 1,\ldots,n,\\
&m_{i,i} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}, \quad i = n+1,\ldots,2n-1,\\
&b_L \leq m_{i,j} = m_{j,i} \leq b_U, \quad i = 1,\ldots,n,\ j = n+1,\ldots,2n-1;\ j \neq n+i.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

显然，若 $M \in \mathcal{L}_n(b_L, b_U)$，则 M是一个 $(2n-1)\times(2n-1)$ 对角占优的对称非负矩阵，并且 M 具有如下结构：

$$
M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^{\top} & M_{22} \end{pmatrix},
$$

其中， M_{11} (n 乘 n) 和 M_{22} ($n-1$ 乘 $n-1$) 是对角矩阵； M_{12} ($n-1$ 乘 n) 是一个非负矩阵，其非对角元素为正，且对角元素均为零。这里， M_{12} 的对角元素指行指标和列指标相同的元素。一般而言， M 的逆矩阵没有闭式形式。定义$m_{2n,i} = m_{i,2n}$：$= m_{i,i} - \sum_{j=1}^{2n-1}{}_{;j\neq i}\, m_{i,j}$，其中 $i = 1,\ldots,2n-1$，且 $m_{2n,2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} m_{2n,i}$。那么，对于 $i = 1,\ldots,n-1$，有 $b_L \leq m_{2n,i} \leq b_U$；对于 $i = n,n+1,\ldots,2n-1$，有 $m_{2n,i} = 0$；并且$m_{2n,2n} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,2n} = \sum_{i=1}^{n} m_{2n,i}$。Yan等人（2016）提出使用一个简单的矩阵$\mathcal{S}(M) = (s_{ij})^{(2n-1)\times(2n-1)}$来近似 $M \in \mathcal{L}_n(b_L, b_M)$ 的逆矩阵，其中 s_{ij}定义为

$$
s_{i,j} = \begin{cases}
\frac{\delta_{i,j}}{m_{i,i}} + \frac{1}{m_{2n,2n}}, & i,j = 1,\ldots,n,\\
-\frac{1}{m_{2n,2n}}, & i = 1,\ldots,n,\ \ j = n+1,\ldots,2n-1,\\
-\frac{1}{m_{2n,2n}}, & i = n+1,\ldots,2n-1,\ \ j = 1,\ldots,n,\\
\frac{\delta_{i,j}}{m_{i,i}} + \frac{1}{m_{2n,2n}}, & i,j = n+1,\ldots,2n-1.
\end{cases}
$$

在上述方程中，当 $i = j$ 时，$\delta_{i,j} = 1$；当 $i \neq j$ 时，$\delta_{i,j} = 0$。

定义 $\|M\|_{\max} := \max_{i,\ j} |m_{i,\ j}|$ 作为一个

矩阵 $M=(a_{i,\ j})$ 。 Yan 等 （2016a）证明了近似误差上界的阶为 n^{-2}。

引理 1 (Yan 等 (2016) 中的命题 1）。若 $M \in \mathcal{L}_n(b_L, b_U)$ 满足 $b_U/b_L = o(n)$，则当 n 足够大时，

$$\|M^{-1} - \mathcal{S}(M)\|_{\max} \leq \frac{c_1 b_U^2}{b_L^3 (n-1)^2},$$

其中， c_1 是一个不依赖于 M、 m 和 n的常数。

设 $G(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $x \in \mathbb{R}^n$上的函数向量。若雅可比矩阵$G^{(1)}(x)$ 满足 $x \in \mathbb{R}^n$ ，则称其在凸集 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ 上利普希茨连续；对于任意 x， $y \in \mathcal{D}$，存在一个常数 $\lambda > 0$，使得对于任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$，不等式

$$\| \left\{ G^{(1)}(x) - G^{(1)}(y) \right\} v \|_\infty \leq \lambda \|x-y\|_\infty \|v\|_\infty$$

成立。

我们引入 Kantorovich 和 Akilov (1964) 在 Kantorovich 条件（Kantorovich, 1948）下给出的牛顿法误差界。

引理 2 (Kantorovich 和 Akilov(1964) 中的定理 6）。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开凸子集，并且 F： $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ 是 *Fr´echet* 可微的。假设在某个 $x_0 \in \mathcal{D}$，$F'(x_0)$ 可逆，且

$$\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq K\|x-y\|, \quad x, y \in \mathcal{D}, \tag{9}$$

$$\|F'(x_0)^{-1} F(x_0)\| \leq \eta, \quad h = K\eta \leq 1/2, \tag{10}$$

$$\bar{S}(x_0, t^*) \subseteq \mathcal{D}, \quad t^* = 2\eta/(1+\sqrt{1-2h}).$$

那么： （*1*）牛顿迭代 $x_{n+1} = x_n - \{F'(x_n)\}^{-1} F(x_n)$， $n \geq 0$定义良好， $\bar{}$位于 $S(x_0, t^*)$ 内，并收敛到 $F(x) = 0$的一个解 x^*。

（*2*）当 $2h < 1$ 时，解 x^* 在 $S(x_0, t^{**}) \cap \mathcal{D}$ 中唯一；当 $2h = 1$ 时，解 $t^{**} = (1+\sqrt{1-2h})/K$ 在 $S(x_0, t^{**})$ 中唯一。

（*3*）当 $n = 0$ 时， $\|x^* - x_n\| \leq t^*$ ；当 $n \geq 1$ 时， $\|x^* - x_n\| \leq 2^{1-n}(2h)^{2^n - 1}\eta$ 。

以下引理给出了有界随机变量的矩的指数界。

引理 3。设 Y为一个随机变量。若对于某个常数 C_0 有 $|Y| < C_0$ ，且 $\mathbb{E}(Y) = 0$，则对于所有充分小的 $\upsilon > 0$，

$$\mathbb{E}\{\exp(\upsilon Y)\} \leq \exp\left\{\upsilon^2 \mathbb{E}(Y^2)\right\}.$$

证明。 根据泰勒展开，对于一个较小的 $\upsilon > 0$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big\{\exp(\upsilon Y)\big\} =& 1 + \upsilon\mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2}\upsilon^2\mathbb{E}(Y^2) + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{\upsilon^j\mathbb{E}Y^j}{j!} \\ \leq& 1 + \frac{1}{2}\upsilon^2\mathbb{E}(Y^2) + \frac{\upsilon^2\mathbb{E}Y^2}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\upsilon^{j-2}C_0^{j-2}}{3^{j-2}} \\ =& 1 + \frac{1}{2}\upsilon^2\mathbb{E}(Y^2) + \frac{\upsilon^2\mathbb{E}Y^2}{2}\frac{\upsilon C_0/3}{1-\upsilon C_0/3}.\end{aligned}$$

通过选择 $0 < \upsilon < \min\{1, 2C_0/3\}$，我们得到

$$1 + \frac{1}{2}\upsilon^2\mathbb{E}(Y^2) + \frac{\upsilon^2\mathbb{E}Y^2}{2}\frac{\upsilon C_0/3}{1-\upsilon C_0/3} \leq 1 + \upsilon^2\mathbb{E}(Y^2) \leq \exp\Big\{\upsilon^2\mathbb{E}(Y^2)\Big\},$$

其中，最后一个不等式对所有足够小的 $\upsilon > 0.$ 都成立。证明完毕。 □

定理1-3的证明

B.1 定理1的证明

本节给出定理1的证明。我们首先证明三个引理。第一个引理涉及 $\|F^*(t)\|_\infty$ 和 $\|Q^*(t)\|_\infty$的上界，其中 $F^*(t) = F(\theta^*(t))$ 和 $Q^*(t) = Q(\theta^*(t))$。对于给定的 $\gamma(t)$，记作

$$F_\gamma(\eta(t)) = (F_{1,\gamma}(\eta(t)), \ldots, F_{2n-1,\gamma}(\eta(t)))^\top = F(\eta(t), \gamma(t)).$$

将 $\alpha_{i,\gamma}^*(t)$ 和 $\beta_{j,\gamma}^*(t)$ 定义为 $\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{ij}(t; \alpha_i(t)\ \beta_j(t)\ \gamma(t))\} = 0\,(1 \leq i \neq j \leq n)$ 在给定 $\gamma(t)$ 时的解。进一步定义 $\eta_\gamma^*(t) = (\alpha_{1,\gamma}^*(t) \ldots, \alpha_{n,\gamma}^*(t)\,\beta_{1,\gamma}^*(t) \ldots, \beta_{n,\gamma}^*(t))^\top$.

引理 4. 假设条件 *1-5* 成立，且 $\gamma(t)$ 取值于一个紧集 $\mathcal{J}$ $of\mathbb{R}^p$.则有

$$\sup_{t\in[a,b]}\|F^*(t)\|_\infty = O_p\Big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\Big), \tag{11}$$

$$\sup_{t\in[a,b]}\|Q^*(t)\|_\infty = O_p\Big(\kappa_n(q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log Nh_2}{Nh_2}}\Big), \tag{12}$$

$$\sup_{t\in[a,b]}\sup_{\gamma(t)\in\mathcal{J}}\|F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty = O_p\Big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\Big). \tag{13}$$

证明。 为便于说明，定义

$$\begin{aligned}\pi^*_{ij}(t) &= \alpha^*_i(t) + \beta^*_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma^*(t),\\ \pi^*_{1,ij}(t) &= \alpha^*_i(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma^*(t),\\ \pi^*_{2,ij}(t) &= \beta^*_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma^*(t).\end{aligned}$$

类似地，定义

$$\begin{aligned}\pi^*_{ij}(s,t) &= \alpha^*_i(t) + \beta^*_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t),\\ \pi^*_{1,ij}(s,t) &= \alpha^*_i(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t),\\ \pi^*_{2,ij}(s,t) &= \beta^*_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t).\end{aligned}$$

对于 $i = 1, \ldots, n$，我们将 $(n-1)F^*_i(t)$ 分解为两部分：

$$(n-1)F^*_i(t) = \underbrace{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s)}_{B_{1i}(t)} - \underbrace{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau K_{h_1}(s-t)\left[e^{\pi^*_{1,ij}(s,t)} - e^{\pi^*_{1,ij}(s)}\right]ds}_{B_{2i}(t)}. \tag{14}$$

注意，如果 $g(t)$ 是一个二阶导数有界于常数c的通用函数，则有（例如，Eubank, 1988，第128页）

$$\left|\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)[g(s)-g(t)]ds\right| \leq \frac{1}{2}ch_1^2,$$

其中 $t \in [h_1, \tau - h_1]$ 和 h_1 满足 $[-1,1] \subset [-t/h_1, (\tau-t)/h_1]$。由条件 1、2和 4 可得

$$|\mathbb{E}B_{2i}(t)| = \left|\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\left\{\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\left[e^{\pi^*_{ij}(s,t)} - e^{\pi^*_{ij}(s)}\right]ds\right\}\right| = O\left(e^{q_n}nh_1^2\right)$$

and

$$\mathrm{Var}(B_{2i}(t)) \leq \sum_{j\neq i}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\left[e^{\pi^*_{ij}(s,t)}ds - e^{\pi_{ij}(s)}\right]ds\right]^2 = O\left(e^{2q_n}nh_1^4\right),$$

其中 $f^{(l)}(t)$ 表示任意函数 $f(t)$ 的 l 阶导数。根据切比雪夫不等式，我们有

$$B_{2i}(t) = O_p(e^{q_n}nh_1^2). \tag{15}$$

如果 $ne^{q_n}h_1^5 \to 0$，那么

$$B_{2i}(t) = o_p\left(e^{2q_n}\sqrt{n\log(nh_1)/h_1}\right).$$

通过 由并集界和三角不等式可知，对于足够大的 n ，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]} (n-1)\|F^*(t)\|_\infty \geq 4\sqrt{10}C_1\vartheta_n\sqrt{n\log(nh_1)/h_1} \Big) \\
\leq&(n-1)\max_{1\leq i\leq n-1}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]}|B_{1i}(t)| + \sup_{t\in[a,b]}|B_{2i}(t)\}| \geq 4\sqrt{10}C_1\vartheta_n\sqrt{n\log(nh_1)/h_1} \Big) \\
\leq&(n-1)\max_{1\leq i\leq n-1}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]}|B_{1i}(t)| \geq 2\sqrt{10}C_1\vartheta_n\sqrt{n\log(nh_1)/h_1} \Big), \qquad (16)
\end{aligned}$$

其中 C_1 是下文指定的某个常数，且 $\vartheta_n = e^{q_n}(q_n+1) > 1$。

现在我们对（16）中的概率进行界定。对于任意 $\kappa > 0$，将 $[a,b]$ 划分为互不相交的子集 $\bigcup_{k=1}^{M_n}\Theta_k$ ，使得 Θ_k 中任意两点之间的距离κh_1^2不超过 M_n 。注意， $O(\tau/(\kappa h_1^2))$ 不大于。于是，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]}|B_{1i}(t)| > \varepsilon \Big) \leq \sum_{k=1}^{M_n}\mathbb{P}\Big(|B_{1i}(t_k)| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{M_n}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in\Theta_k}|B_{1i}(t) - B_{1i}(t_k)| > \frac{\varepsilon}{2}\Big). \quad (17)$$

令 $Y_{1ij}(t) = \int_0^\tau \mathcal{K}\left((s-t)/h_1\right) d\mathcal{M}_{ij}(s)$ 。由马尔可夫不等式和引理 3，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sum_{j\neq i}Y_{1ij}(t_k) > h_1\varepsilon/2\Big) \\
\leq\ & \exp\{-\upsilon h_1\varepsilon/2\}\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\upsilon\sum_{j\neq i}Y_{1ij}(t_k)\Big\}\Big] \\
\leq\ & \exp\{-\upsilon h_1\varepsilon/2\}\prod_{j\neq i}\mathbb{E}\Big[\exp\big\{\upsilon Y_{1ij}(t_k)\big\}\Big] \\
\leq\ & \exp\{-\upsilon h_1\varepsilon/2\}\prod_{j\neq i}\exp\Big(\upsilon^2\mathrm{Var}(Y_{1ij}(t_k))\Big)
\end{aligned}$$

对于某个较小的 $\upsilon > 0$。注意，存在某个常数 $C_1 > 0$ ，使得 $|Y_{1ij}(t_k)| < C_1$ ，且 $\mathrm{Var}(Y_{1ij}(t_k)) < C_1^2\vartheta_n^2 h_1.$ 。因此，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j\neq i}Y_{1ij}(t_k) > h_1\varepsilon/2\Big) \leq \exp\Big(-\upsilon h_1\varepsilon/2 + C_1^2\upsilon^2 n\vartheta_n h_1\Big).$$

然后，通过设定 $\varepsilon = 2\sqrt{10}C_1\vartheta_n\sqrt{n\log(nh_1)/h_1}$ 和 $\upsilon = \varepsilon/(4C_1^2\vartheta_n^2 n)$，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(|B_{1i}(t_j)| > \varepsilon\Big) \leq O((nh_1)^{-5/2}). \qquad (18)$$

由于 $B_{1i}(t)$ 一致连续，且 $\mathcal{K}(x)$ 的一阶导数有界，

存在一个常数 C_2，使得

$$\frac{1}{n}|B_{1i}(t)-B_{1i}(t_j)|<(C_2/h_1^2)|t-t_j|<C_2\kappa.$$

通过设定 $\kappa<\varepsilon/(4nC_2)$，（17）右端的第二项消失，即

$$\sum_{k=1}^{M_n}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in\Theta_k}|B_{1i}(t)-B_{1i}(t_k)|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)=0. \tag{19}$$

现在我们对（17）右端的第一项进行界定。注意到

$$M_n=O(1/(\kappa h_1^2))=o((n/h_1^3)^{1/2}).$$

由（17）、（18）和 19），存在某个常数 $C_3>0$ 使得

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]}|B_{1i}(t)|>2\sqrt{10}C_1\vartheta_n\sqrt{n\log(nh_1)/h_1}\Big)\le\frac{C_3}{nh_1^2}. \tag{20}$$

结合（15）、（16）和（20）可得

$$\max_{1\le i\le n}|F_i^*(t)|=O_p\Big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\Big),$$

关于 $t\in[a,b]$ 一致成立。对于 $i=n+1,\ \ldots 2n-1$，用相同的论证可得

$$\max_{n+1\le i\le 2n-1}|F_i^*(t)|=O_p\Big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\Big)$$

关于 $t\in[a,b]$一致成立。这证明了（11）。

接下来，我们证明（12）。我们将 Q（η^*（t））分成两部分：

$$\begin{aligned}NQ(\eta^*(t))=&\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\int_0^\tau Z_{ij}(s)\mathcal{K}_{h_2}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s)}_{B_2(t)}\\&\underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau Z_{ij}(s)\mathcal{K}_{h_2}(s-t)\big[e^{\pi_{ij}(s,t)}-e^{\pi_{ij}(s)}\big]ds}_{B_3(t)}.\end{aligned}$$

与 $B_{2i}(t)$ 的证明类似，我们有

$$|B_3(t)|=O_p((q_n+1)^2e^{q_n}\kappa_n h_2^2n^2),$$

其被 $O(\vartheta_n^2\kappa_n n\sqrt{\log(nh_2)/h_2})$ 所支配，当 $ne^{q_n}h_2^{5/2}\to 0$时。此外，和式中每一项的方差 $B_2(t)$ 的阶为 $C_4\kappa_n^2\vartheta_n e^{q_n}h_2$ ，其中某个常数 $C_4>0$。它小于 $C_4\kappa_n^2\vartheta_n^2 h_2$。通过与 (11) 的证明类似的论证，我们有，对于某个常数 $C_5>0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[a,b]}\big|B_2(t)\big|>4\sqrt{10}C_4\kappa_n\vartheta_n n\sqrt{\log(nh_2)h_2}\Big)\le\frac{C_5}{nh_2^2}.$$

也就是说,

$$\frac{1}{n^2}\|Q(\eta^*(t))\|_\infty=O_p\Big(\kappa_n(q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log n^2h_2}{n^2h_2}}\Big).$$

最后，我们证明（13）。注意

$$\begin{aligned}(n-1)F_i\big(\eta_\gamma^*(t)\big)=&\underbrace{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s;\gamma)}_{\widetilde{B}_{1i}}\\&-\underbrace{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau K_{h_1}(s-t)\big[e^{\alpha_{i,\gamma}^*(t)+\beta_{j,\gamma}^*(t)+Z_{ij}^\top(s)\gamma(t)}-e^{\alpha_{i,\gamma}^*(s)+\beta_{j,\gamma}^*(s)+Z_{ij}^\top(s)\gamma(s)}\big]ds}_{\widetilde{B}_{2i}},\end{aligned}\tag{B.11}$$

其中 $\mathcal{M}_{ij}(s;\gamma)=\mathcal{M}_{ij}(t;\alpha_{i,\gamma}(t)\,\beta_{j,\gamma}^*(t)\,\gamma(t))$。通过与 $B_{2i}(t)$ 类似的一些论证，我们有 $\widetilde{B}_{2i}=o_p(e^{2q_n}\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)})$。接下来，我们将 $[a,b]$ 划分为 M_n 个子区间，记为 $\{\Theta_m:1\le m\le M_n\}.$。进一步将 $\mathcal{J}$ 划分为 M_n 个子区间，记为 $\backsim\{J_m:1\le m\le M_n\}.$。设 Θ_M 中任意两点之间的距离不超过 $\kappa h_1^2/2.$，且 Θ_M 与 J_m 中任意两点之间的距离不超过 $\kappa h_1^2/2.$。那么，通过与 (18)–(20) 的证明类似的论证，我们可以证明

$$\|\widetilde{B}_{1i}\|_\infty=O_p\Big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\frac{\log(nh_1)}{nh_1}}\Big).$$

由（B.11）及事实 $\widetilde{B}_{2i}=o_p(e^{2q_n}\sqrt{n\log(nh_1)/h_1})$，我们有 $\|F_\gamma\big(\eta_\gamma^*(t)\big)\|_\infty=O_p\big((q_n+1)e^{q_n}\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)}\big)$. 证明至此完成。 □

引理 5。 设 $\mathcal{D}$ 是定义在 $(0,\tau]$ 上的二阶连续可微函数集合，满足 $\eta_\gamma(t)\in\mathcal{B}$ 由条件 2 定义。雅可比矩阵 $F_\gamma^{(1)}(x(t))$ 在 $F_\gamma(x(t))$ 上 $\mathcal{D}$满足

$$\begin{aligned}\|[F_\gamma^{(1)}(x(t))-F_\gamma^{(1)}(y(t))]v\|_\infty&\le 3e^{q_n}\|x(t)-y(t)\|_\infty\|v\|_\infty,\\\max_{i=1,\dots,2n-1}\|F_{i,\gamma}^{(1)}(x(t))-F_{i,\gamma}^{(1)}(y(t))\|_\infty&\le 3e^{q_n}\|x(t)-y(t)\|_\infty.\end{aligned}$$

证明。 定义

$$
\begin{aligned}
F_{i,\gamma}^{(1)}(\eta(t)) :=& \Big(\frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \alpha_1(t)}, \ldots, \frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \alpha_n(t)}, \frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_1(t)}, \ldots, \frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_{n-1}(t)}\Big) \\
=& (F_{i,1,\gamma}^{(1)}(\eta(t)), \ldots, F_{i,(2n-1),\gamma}^{(1)}(\eta(t))).
\end{aligned}
$$

$F_{i,\ \gamma}(\eta(t))$ 关于 $\alpha_i(t)$ 和 $\beta_j(t)$ 的一阶偏导数如下:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \alpha_i(t)} =& \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \int \mathcal{K}_{h_1}(s-t) \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(t)\} ds \\
=& \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} + O_p\big((e^{q_n} h^2)\big), \\
-\frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_j(t)} =& \frac{1}{n-1} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(t)\} ds \\
=& \frac{1}{n-1} \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} + O_p\big((e^{q_n} h^2)\big) \quad (j \neq i), \\
-\frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \alpha_j(t)} =& 0 \quad (j \neq i), \qquad -\frac{\partial F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_i(t)} = 0.
\end{aligned}
$$

$F_{i,\ \gamma}(\eta(t))$ 的二阶偏导数计算如下:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial^2 \alpha_i(t)} =& \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(t)\} ds \\
=& \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} + O_p\big((e^{q_n} h^2)\big), \\
-\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_j(t) \partial \alpha_i(t)} =& \frac{1}{n-1} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(t)\} ds \\
=& \frac{1}{n-1} \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} + O_p\big((e^{q_n} h^2)\big), \quad j \in [n-1], j \neq i, \\
-\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial^2 \beta_j(t)} =& \frac{1}{n-1} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t) \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma(t)\} ds \\
=& \frac{1}{n-1} \exp\{\alpha_i(t) + \beta_j(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} + O_p\big((e^{q_n} h^2)\big) \quad j \in [n-1], j \neq i, \\
-\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \alpha_i(t) \partial \alpha_j(t)} =& 0 \quad (j \neq i), \quad -\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_i(t) \partial \alpha_i(t)} = 0, \quad -\frac{\partial^2 F_{i,\gamma}(\eta(t))}{\partial \beta_j(t) \partial \beta_k(t)} = 0, \quad j \neq k.
\end{aligned}
$$

根据条件 2，我们有

$$
e^{-q_n} < \exp\{\alpha_i(t) + \beta_s(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\} \leq e^{q_n}
$$

几乎必然地。根据向量值函数的中值定理（Lang，1993），我们

have

$$F_{i,\gamma}^{(1)}(x(t)) - F_{i,\gamma}^{(1)}(y(t)) = J_i(t)\{x(t) - y(t)\},$$

其中 $J_i(t) = (J_{i,\ sl}(t)) \in \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ 与

$$J_{i,sl}(t) = \int_0^1 \frac{\partial F_{i,s,\gamma}^{(1)}}{\partial \theta_l}(vx(t) + (1-v)y(t))dv, \quad s,l = 1,\ldots,2n-1.$$

因为

$$\max_s \sum_{l=1}^{2n-1} |J_{i,sl}(t)| \le 2e^{q_n} \quad \text{and} \quad \sum_{s,l} |J_{i,sl}(t)| \le e^{q_n}$$

对于 $t \in [a,b]$，一致地，有

$$\|F_{i,\gamma}^{(1)}(x(t)) - F_{i,\gamma}^{(1)}(y(t))\|_\infty \le \|J_i(t)\|_{\max}\|x(t) - y(t)\|_\infty \le 3e^{q_n}, \quad i = 1,\ldots,2n-1,$$

且对于任意向量 $v \in \mathbb{R}^{2n-1}$,

$$\begin{aligned}\|[F_\gamma^{(1)}(x(t)) - F_\gamma^{(1)}(y(t))]v\|_\infty &= \max_i |\sum_{j=1}^{2n-1}(F_{i,j}^{(1)}(x(t)) - F_{i,j}^{(1)}(y(t)))v_j| \\ &\le \|x(t) - y(t)\|_\infty \|v\|_\infty \sum_{s,l} |J_{i,sl}(t)| \\ &\le 3e^{q_n}\|x(t) - y(t)\|_\infty \|v\|_\infty\end{aligned}$$

对于 $t \in [a,b]$. 一致地成立。证明完毕。 □

以下引理刻画了 $\widehat{\eta}_\gamma(t)$ 与 $\eta_\gamma^*(t)$ 之间误差的上界。

引理 6. 若 $(q_n+1)e^{12q_n}\kappa_n = o((nh_1)^{1/2}/(\log nh_1)^{1/2})$，则以趋于 *1* 的概率，$\widehat{\eta}_\gamma(t)$ $(\gamma(t) \in \mathcal{D})$ 存在且满足

$$\sup_{t\in[a,b]}\sup_{\gamma(t)\in\mathcal{D}} \|\widehat{\eta}_\gamma(t) - \eta_\gamma^*(t)\|_\infty = O_p\left((q_n+1)e^{6q_n}\kappa_n\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right).$$

证明。 注意，$\widehat{\eta}_\gamma(t)$ 是方程 $F_\gamma(\eta(t)) = 0$. 为证明该引理，只需证明引理 2 中关于 $F_\gamma(\eta(t))$ 的条件成立。在牛顿迭代步骤中，我们设 $\eta_\gamma^{(0)}(t) := \eta_\gamma^*(t)$。

鉴于 $(\eta_\gamma^*(t)^\top,\ \gamma(t)^\top)^\top \in \mathcal{B}$，我们有 $-F_\gamma(\eta_\gamma^*(t)) \in \mathcal{L}_n(c_8e^{-q_n},\ C_8e^{q_n})$，其中$c_8$ 和 C_8 是绝对常数。然后，利用引理1 和 4以及Yan 等人

等(2016)，我们有

$$\begin{aligned} r(t) &= \|[F_\gamma^{(1)}(\eta_\gamma^*(t))]^{-1}F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty \\ &\le \|[F_\gamma^{(1)}(\eta_\gamma^*(t))^{-1} - S_\gamma(t)]F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty + \|S_\gamma(t)F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty \\ &\le (2n-1)\|F_\gamma^{(1)}(\eta_\gamma^*(t))^{-1} - S_\gamma(t)\|_{\max}\|F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty + \|S_\gamma(t)F_\gamma(\eta_\gamma^*(t))\|_\infty \\ &\le O_p\left((q_n+1)e^{6q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right), \end{aligned}$$

其中 $S_\gamma(t) = \mathcal{S}(F_\gamma^{(1)}(\eta_\gamma^*(t)))$。

结合引理 5 和条件 $e^{12q_n}\kappa_n\sqrt{\log nh_1/(nh_1)} = o(1)$，可得

$$\begin{aligned} \rho(t)r(t) =& O_p\left(e^{6q_n}\right) \times O_p\left((q_n+1)e^{6q_n}\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right) \\ =& O_p\left((q_n+1)e^{12q_n}\kappa_n\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right) = o_p(1). \end{aligned}$$

应用引理2 可得

$$\sup_{t\in[a,b]}\sup_{\gamma(t)\in\mathcal{D}}\|\widehat{\eta}_\gamma(t) - \eta_\gamma^*(t)\|_\infty = O_p\left((q_n+1)e^{6q_n}\kappa_n\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right) = o_p(1).$$

证明至此完成。 □

现在我们正式给出定理 1 的证明。

^定理1的证明。注意，$Q_c(\gamma(t)) = Q(\widehat{\eta}_\gamma(t)\ \gamma(t))$。定义 $Q_c(\gamma(t)) = Q(\eta_\gamma^*(t)\ \gamma(t))$。^
根据引理 4，并对 $Q_c(\gamma(t))$ 在 $\eta_\gamma^*(t)$ 处进行泰勒展开，我们有

$$\|\widehat{Q}_c(\gamma(t)) - Q_c(\gamma(t))\| = O_p\left((q_n+1)e^{7q_n}\kappa_n^2\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right) \tag{21}$$

一致地（关于 $t \in [a,b]$ 和 $\gamma(t)$）。由 Donsker 定理（例如 van Der Vaart, 1998，定理 19.5），$(n(n-1))^{-1}\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}N_{ij}(t) = O_p(n^{-1})$ 关于 $t \in [a,b]$. 注意到

$$\begin{aligned} Q_c(\gamma(t)) = &\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(s-t)d\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}\sum_{j\neq i}Z_{ij}(s)N_{ij}(s)\right] \\ &- \frac{1}{N}\sum_{i=1}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(s-t)Z_{ij}(s)\exp\{\alpha_{i,\gamma}^*(t) + \beta_{j,\gamma}^*(t) + Z_{ij}(s)^\top\gamma^*(t)\}ds. \end{aligned}$$

I由此可得 $Q_c(\gamma(t)) = U(\gamma(t)) + O_p((n^2h_2)^{-1})$，关于 $t \in [a,b]$一致成立，其中

$$U(\gamma(t)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{E}\Big\{ Z_{ij}(t)\big(\exp\{\alpha_i^*(t) + \beta_j^*(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma^*(t)\} - \exp\{\alpha_{i,\gamma}^*(t) + \beta_{j,\gamma}^*(t) + Z_{ij}(t)^\top \gamma(t)\}\big)\Big\}.$$

这与（21）一起可得

$$\begin{aligned} \|\widehat{Q}_c(\gamma(t)) - U(\gamma(t))\| \leq & \|\widehat{Q}_c(\gamma(t)) - Q_c(\gamma(t))\| + \|Q_c(\gamma(t)) - U(\gamma(t))\| \\ = & O_p\left((q_n+1)e^{7q_n}\kappa_n^2 \sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}} + \frac{1}{n^2h_2} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

对 $t \in [a,b]$ 和 $\gamma(t)$一致成立。

令 r_0 为满足 $\|\gamma(t) - \gamma^*(t)\| \leq r_0$. 的任意正常数。对于任意满足 $\|w\| = 1$ 的 $w \in \mathbb{R}^p$, $w^\top U(\gamma^*(t) + wr)$ 随 r 增大。这意味着对于任意 $r \geq r_0 > 0$, $w^\top[U(\gamma^*(t) + wr) - U(\gamma^*(t))] \geq 0$。于是，我们有

$$\begin{aligned} & \|w\| \|U(\gamma^*(t) + wr) - U(\gamma^*(t))\| \\ \geq & |w^\top [U(\gamma^*(t) + wr) - U(\gamma^*(t))]| \\ \geq & |w^\top [U(\gamma^*(t) + wr, t) - U(\gamma^*(t))]| \\ \geq & w^\top H(\gamma^*(t) + w\bar{r})wr > \bar{\kappa} r_0, \end{aligned}$$

其中 $\bar{r} \in [0, r_2]$ 且 $\bar{\kappa} > 0$ 为某个常数。这里，第一个不等式由柯西–施瓦茨不等式成立，最后一个不等式则由条件 3 以及 $H(\gamma(t)$的连续性推出。因此，

$$\inf_{t\in[a,b]} \inf_{\|\gamma(t)-\gamma^*(t)\|>r_0} \|U(\gamma(t)) - U(\gamma^*(t))\| > \bar{\kappa} r_0. \tag{23}$$

注意 t $\widehat{\text{hat}}$ $Q_c(\widehat{\gamma}(t)) = 0$ 几乎必然成立，并且 $U(\gamma^*(t)) = 0$。由此可从式 (22) 得到 at

$$\begin{aligned} \|U(\widehat{\gamma}(t)) - U(\gamma^*(t))\| = & \|\widehat{Q}_c(\widehat{\gamma}(t)) - \{\widehat{Q}_c(\widehat{\gamma}(t)) - U(\widehat{\gamma}(t))\}\| \\ = & O_p\left((q_n+1)e^{7q_n}\kappa_n^2 \sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}} + \frac{1}{n^2h_2} \right) = o_p(1), \end{aligned} \tag{24}$$

且对于充分大的 n, $\|U(\widehat{\gamma}(t))\| < \bar{\kappa} r_0/2$ 关于 $t \in [a,b]$一致。因此，由（23），

我们得到 n $\|\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t)\| < r_0$ 以趋于 1 的概率。直接计算得出 s

$$\frac{\partial U(\gamma(t))}{\partial \gamma(t)^\top} = \mathbb{E}\Big\{V_{\gamma,\gamma}(t) - V_{\gamma,\eta^*}(t)V_{\eta^*,\eta^*}(t,\gamma(t))^{-1}V_{\eta^*,\gamma}(t)\Big\}.$$

在 $\gamma^*(t)$ 处对 $U(\widehat{\gamma}(t))$ 进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[a,b]}\|\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t)\| &= \sup_{t\in[a,b]}\|H_Q(\bar{\gamma}(t))^{-1}[U(\widehat{\gamma}(t)) - U(\gamma^*(t))]\| \\ &\le \sup_{t\in[a,b]}\|H_Q(\bar{\gamma}(t))^{-1}\|\|U(\widehat{\gamma}(t)) - U(\gamma^*(t))\| \\ &\le \sup_{t\in[a,b]}\|H_Q(\bar{\gamma}(t))^{-1}\|\|U(\widehat{\gamma}(t)) - U(\gamma^*(t))\|, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\bar{\gamma}(t$位于连接 $\widehat{\gamma}(t)$ 与 $\gamma^*(t)$ 的线段上。根据条件 3 以及 $H_Q(\gamma(t)$ 的连续性，存在一个正的常数 ς 使得 $\inf_{t\in[a,b]}\rho_{\min}\{H_Q(\bar{\gamma}(t))\} > \varsigma$。因此，由 (24) 和 (25) 可得

$$\sup_{t\in[a,b]}\|\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t)\| = o_p(1).$$

接下来证明 $\widehat{\eta}(t)$ 的一致性。令 $\varepsilon_n = O((q_n+1)e^{7q_n}\kappa_n^2\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)+1/(n^2h_2)})$。由引理 6，只需证明

$$\|\widehat{\eta}_\gamma(t) - \eta^*(t)\|_\infty = o_p(1) \tag{26}$$

对 $t \in [a,b]$ 和 $\gamma(t)$ 一致地，当 $\|\gamma(t) - \gamma^*(t)\| < \varepsilon_n$. 注意，对于 $j = 1,\dots,n-1$,

$$\begin{aligned}&(n-1)|F_i(\eta^*(t),\gamma^*(t)) - F_i(\eta^*(t),\gamma(t))| \\ =&\Big|\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \exp\{\alpha_i^*(t)+\beta_j^*(t)\}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)\Big[\exp\{Z_{ij}(s)^\top\gamma^*(t)\}ds - \exp\{Z_{ij}(s)^\top\gamma(t)\}\Big]\Big| \\ =&\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\exp\{\alpha_i^*(t)+\beta_j^*(t)+Z_{ij}(s)^\top\widetilde{\gamma}(t)\}|Z_{ij}(s)^\top\{\gamma^*(t)-\gamma(t)\}ds| \\ \le&2ne^{q_n}\kappa_n\varepsilon_n.\end{aligned}$$

类似地，对于 $j = 1,\dots,n-1$, 我们有 $|F_{n+j}(\eta^*(t)\ \gamma^*(t)) - F_{n+j}(\eta^*(t)\ \gamma(t))| \le e^{q_n}\kappa_n\varepsilon_n$.

然后，按照6引理证明的相同步骤，我们得到

$$\begin{aligned} r(t) &= \|[F^{(1)}(\eta^*(t),\gamma(t))]^{-1}F(\eta^*(t),\gamma(t))\|_\infty \\ &\le \|[F^{(1)}(\eta^*(t),\gamma(t))^{-1}-\bar{S}(t)]F(\eta^*(t),\gamma(t))\|_\infty + \|\bar{S}(t)F(\eta^*(t),\gamma(t))\|_\infty \\ &\le O_p\left((q_n+1)e^{13q_n}\kappa_n^3\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \rho(t)r(t) =& O_p\big(e^{6q_n}\big)\times O_p\left((q_n+1)e^{13q_n}\kappa_n^3\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right) \\ =& O_p\left((q_n+1)e^{19q_n}\kappa_n^3\sqrt{\frac{\log nh_1}{nh_1}}\right), \end{aligned}$$

其中 $\bar{S}(t) = \mathcal{A}(F^{(1)}(\eta^*(t)\ \gamma(t))$。因此，根据引理 2，若满足 (26) 中的条件，则有 $(q_n+1)e^{19q_n}\kappa_n^3\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)} = o(1)$。证明完毕。 □

B.2 定理 2 的证明

下面的引理给出了 $\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)$ 的渐近表示，该表示将在定理2的证明中使用。

引理 7. 若 $(q_n+1)e^{15q_n}\kappa_n = o((nh_1)^{1/4}/(\log nh_1)^{1/2})$，则

$$\sqrt{nh_1}\big(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\big) = -[V_{\eta^*,\eta^*}(t,\gamma^*(t))]^{-1}\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)+o_p(1), \quad (27)$$

~ ~ ~其中 $\mathcal{M}(s) = (M_1(s)\ldots,M_{2n-1}(s))^\top$ 且

$$\widetilde{M}_i(s) = \begin{cases} \sum_{k\neq i}\mathcal{M}_{ik}(s), & i=1,\ldots,n, \\ \sum_{k\neq(i-n)}\mathcal{M}_{ki}(s), & i=n+1,\ldots,2n-1. \end{cases}$$

此外，对于固定的 k，$\sqrt{nh_1}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t))_{1:k}$ 依分布收敛到一个 k 维零均值正态随机向量，其协方差由 $\mu_0 S^*(t)$的左上角 $k\times k$ 区块给出，其中 $\mu_0 = \int\mathcal{K}^2(u)du$。

证明。令 $V(t) = -V_{\eta^*,\eta^*}(t,\gamma^*(t))$ 和 $v_{ij}(t)$ 分别为 $V(t)$ 的第 (i,j) 个元素。定义$v_{2n,2n}(t) = \sum_{i=1}^n v_{ii}(t) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{2n-1}{}_{,j\neq i}\, v_{ij}(t)$。对 $F(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)\ \gamma^*(t))$ 进行二阶泰勒展开

可得

$$\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)=[V(t)]^{-1}\underbrace{F(\eta^*(t),\gamma^*(t))}_{B_{31}(t)}+[V(t)]^{-1}\underbrace{\left[\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)-\eta_k^*(t)\right)\frac{\partial F(\bar{\eta}(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_k(t)\partial\eta(t)^\top}\left(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\right)\right]}_{B_{32}(t)},$$

其中，$\bar{\eta}(t)$ 位于 $\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)$ 和 $\eta^*(t)$ 之间。令 $B_{32,l}(t)$ 为 $B_{32}(t)$ 的第 l 个元素。令$b_{l,ij}(t)=\partial F_l(\bar{\eta}(t)\ \gamma^*(t))/\partial\eta_i(t)\partial\eta_j(t)$. 注意，对于 $1\le l\le n$，我们有

$$\begin{aligned}|B_{32,l}(t)|=&\frac{1}{2n}\left|\left(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\right)^\top\frac{\partial F_l(\bar{\eta}(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta(t)\partial\eta(t)^\top}\left(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\right)\right|\\ \le&\frac{1}{2n}\|\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2\sum_{i,j=1}^{2n-1}|b_{l,ij}(t)|,\end{aligned}$$

and

$$b_{l,ij}(t)=\begin{cases}-\sum_{j\neq l}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)\exp\{\bar{\alpha}_l(t)+\bar{\beta}_j(t)+Z_{lj}(s)^\top\gamma^*(t)\}ds, & i=j=l,\\ -\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)\exp\{\bar{\alpha}_l(t)+\bar{\beta}_{j-n}(t)+Z_{ij}(s)^\top\gamma^*(t)\}ds, & i=j\neq l,\\ & \text{or } i=l, j\neq i, \text{ or } i\neq j, j=l,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是，由引理 6，我们有

$$\begin{aligned}|B_{32,l}(t)|\le&\frac{1}{2n}\|\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2\sum_{i,j=1}^{2n-1}|b_{l,ij}(t)|\le 2e^{q_n}\|\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2\\ =&O_p\Big((q_n+1)^2e^{25q_n}\kappa_n^2\frac{\log nh_1}{nh_1}\Big).\end{aligned}$$

鉴于引理1 和6，对于 $1\le l\le n$，我们有

$$\begin{aligned}|(V(t)^{-1}B_{32})_l|\le&|[(V(t)^{-1}-S(t))B_{32}]_l|+|(S(t)B_{32})_l|\\ \le&(2n-1)\|V(t)^{-1}-S(t)\|_{\max}\|B_{32}(t)\|_\infty+\max_{1\le l\le 2n-1}\frac{|B_{32,l}(t)|}{v_{ll}(t)}\\ &+\|\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2\times\frac{|\sum_{i=1}^{n-1}b_{l,in}(t)|}{nv_{2n,2n}(t)}\\ =&O_p\Big((q_n+1)^2e^{30q_n}\kappa_n^2\frac{\log nh_1}{nh_1}\Big)=o_p((nh_1)^{-1/2}).\end{aligned}$$

类似 因此，我们有 $(V(t)^{-1}B_{32}(t))_l = o_p((nh_1)^{-1/2})$，对于 $n+1 \le l \le 2n-1$。这表明 s

$$\sqrt{nh_1}\big(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t) - \eta^*(t)\big) = V(t)^{-1}B_{31}(t) + o_p(1).$$

现在，我们将 $B_{31}(t)$ 改写为

$$B_{31}(t) = \sqrt{\frac{h_1}{n}} \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s) - B_{31,2}(t),$$

其中 $B_{31,\ 2}(t) = (B_{31,\ 21}(t) \ldots,\ B_{31,\ 2(2n-1)}(t))^\top$ 且

$$B_{31,2i}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\big[\exp\{\pi^*_{ij}(s,t)\} - \exp\{\pi^*_{ij}(s)\}\big]ds \quad \text{for} \quad i \in [n],$$
$$B_{31,2(n+j)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i\neq j}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\big[\exp\{\pi^*_{ij}(s,t)\} - \exp\{\pi^*_{ij}(s)\}\big]ds \quad \text{for} \quad j \in [n-1].$$

为了证明 (27)，只需证明

$$V(t)^{-1}B_{31,2} = o_p((nh_1)^{-1/2}).$$

直接计算可得

$$|(V(t)^{-1}B_{31,2})_l| \le \|V(t)^{-1} - S(t)\|_{\max}\sum_{i=1}^{2n-1}|B_{31,2i}(t)| + \max_{1\le l\le 2n-1}\frac{|B_{31,2l}(t)|}{v_{ll}(t)} \tag{28}$$
$$+ \frac{|\sum_{i=1}^{n-1} b_{31,2in}(t)|}{nv_{2n,2n}(t)}, \tag{29}$$

其中 $b_{31,\ 2in}(t) = \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)[\exp\{\pi^*_{in}(s,\ \ t)\} - \exp\{\pi^*_{in}(s)\}]ds$。根据条件 1-5，可得

$$\mathbb{E}\{B_{31,2i}(t)\} = O(e^{q_n}h_1^2), \quad \mathrm{Var}(B_{31,2i}(t)) = O(e^{2q_n}h_1^4/n).$$

因此，根据引理 1和切比雪夫不等式，(28) 右侧的第一项的阶为 $O_p(e^{6q_n}h_1^2)$。类似地，可以证明，(28) 右侧的最后两项的阶为 $O_p(e^{2q_n}h_1^2)$。这些事实与 $ne^{12q_n}h_1^5 \to 0$,共同推出

$$|(V(t)^{-1}B_{31,2})_l| = O_p(e^{6q_n}h_1^2) = o_p((nh_1)^{-1/2}).$$

这就完成了对 (27) 的证明。

现在，我们证明引理 7 的第二部分。采用与证明中类似的论证

由（11），根据引理 3，可得

$$\sup_{t\in[a,b]}\max_{1\le i\le n}\left|\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)[e^{\pi^*_{ij}(s,t)}-\mathbb{E}e^{\pi^*_{ij}(t)}]ds\right| = O_p(e^{q_n}\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)}), \quad (30)$$

$$\sup_{t\in[a,b]}\max_{1\le j\le n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)[e^{\pi^*_{ij}(s,t)}-\mathbb{E}e^{\pi^*_{ij}(t)}]ds\right| = O_p(e^{q_n}\sqrt{\log(nh_1)/(nh_1)}). \quad (31)$$

因此，$n^{-1}\sum_{j\neq i}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi^*_{ij}(s,t)}ds$ 和 $n^{-1}\sum_{i\neq j}\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi^*_{ij}(s,t)}ds$ 分别依概率收敛到 $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}e^{\pi^*_{ij}(t)}$ 和 $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i\neq j}\mathbb{E}e^{\pi^*_{ij}(t)}$。然后，我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{nh_1}\big(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\big) =& V(t)^{-1}\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)+o_p(1)\\
=& \underbrace{(V(t)^{-1}-S(t))\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)}_{B_{41}}\\
&+\underbrace{(S(t)-S^*(t))\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)}_{B_{42}}\\
&+\underbrace{S^*(t)\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)}_{B_{43}}+o_p(1).
\end{aligned}$$

根据引理 1，直接计算可得 $\mathbb{E}(B_{41})=0$ 以及 $\|\mathrm{Cov}(B_{41})\|_{\max}=O(e^{11q_n}/n)$。因此，$B_{41}=o_p(1)$。对于 B_{42}，其 l 阶（$1\le l\le n$）元素可写为

$$\begin{aligned}
B_{42,l} =& \sum_{k=1}^{2n-1}(s_{lk}(t)-s^*_{lk}(t))\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{M}_l(s)\\
=&\Big(\frac{1}{v_{ll}(t)}-\frac{1}{v^*_{ll}(t)}\Big)\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{M}_l(s)\\
&+\sqrt{\frac{h_1}{n}}\Big(\frac{1}{v_{2n,2n}(t)}-\frac{1}{v^*_{2n,2n}(t)}\Big)\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{in}(s),
\end{aligned}$$

即 阶为 $O_p(e^{q_n}\sqrt{\log(n)/n})$ 由 (30)。这一事实与 $B_{41}=o_p(1)$ 一起，给出 s

$$\sqrt{nh_1}\big(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\big)=S^*(t)\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)+o_p(1).$$

注意到， $\sqrt{h_1/n}S^*(t)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)$ 的第 i 个元素 $U_i(t)$ 是

$$
\begin{aligned}
U_i(t) =& \sqrt{\frac{h_1}{n}}\frac{\sum_{j\neq i}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s)}{v^*_{ii}(t)} + \sqrt{\frac{h_1}{n}}\frac{\sum_{l=1}^{n-1}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ln}(s)}{v^*_{2n,2n}(t)},\ i\in[n],\\
U_{n+j}(t) =& \sqrt{\frac{h_1}{n}}\frac{\sum_{i\neq j}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s)}{v^*_{ii}(t)} - \sqrt{\frac{h_1}{n}}\frac{\sum_{l=1}^{n-1}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\mathcal{M}_{ln}(s)}{v^*_{2n,2n}(t)},\ j\in[n-1].
\end{aligned}
$$

因此， $U_i(t)$ $(i=1,\ldots,2n-1)$ 是局部平方可积鞅之和，其协方差过程由 $S^*(t)V(t,u)S^*(t)$, 给出，其中 $V(t,u)=(\bar{v}_{ij}(t,u))$ 并且

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_{i,i}(t,u) =& \frac{h_1}{n}\sum_{j\neq i}\int_0^u \mathcal{K}^2_{h_1}(s-t)e^{\pi^*_{ij}(s)}ds,\quad i\in[n],\\
\bar{v}_{n+j,n+j}(t,u) =& \frac{h_1}{n}\sum_{i\neq j}\int_0^u \mathcal{K}^2_{h_1}(s-t)e^{\pi^*_{ij}(s)}ds,\quad j\in[n-1],\\
\bar{v}_{i,n+j}(t,u) =& \bar{v}_{n+j,i}(t,u) = \frac{h_1}{n}\int_0^u \mathcal{K}^2_{h_1}(s-t)e^{\pi^*_{ij}(s)}ds,\quad i\in[n],\ j\in[n-1],\\
\bar{v}_{i,j}(t,u) =& 0,\quad \text{otherwise.}
\end{aligned}
$$

协方可以证明，当 $\to\mu_0 S^*(t)$ 的概率趋于 1。具体而言，根据一致大数定律， $\bar{v}_{ij}(t,\tau)$ 依概率收敛于其期望，其表达式为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\bar{v}_{i,i}(t)\} =& \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\{\mu_0 e^{\pi^*_{ij}(t)} + \mu_{12}e^{\pi^*_{ij}(t)}\pi^{*(1)}_{ij}(t)h + O_p(q_n e^{q_n}h^2)\}\\
=& \mu_0 v^*_{i,i}(t) + \mu_{12}h\widetilde{v}^*_{i,i}(t) + O(q_n e^{q_n}h^2),\quad i\in[n],\\
\mathbb{E}\{\bar{v}_{n+j,n+j}(t)\} =& \frac{1}{n}\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\{\mu_0 e^{\pi^*_{ij}(t)} + \mu_{12}e^{\pi^*_{ij}(t)}\pi^{*(1)}_{ij}(t)h + O_p(q_n e^{q_n}h^2)\}\\
=& \mu_0 v^*_{n+j,n+j}(t) + \mu_{12}h\widetilde{v}^*_{n+j,n+j}(t) + O(q_n e^{q_n}h^2),\quad j\in[n-1],\\
\mathbb{E}\{\bar{v}_{i,j}(t)\} =& \mathbb{E}\{\bar{v}_{j,i}(t)\} = \frac{1}{n}\mathbb{E}\{\mu_{02}e^{\pi^*_{ij}(t)} + \mu_{12}e^{\pi^*_{ij}(t)}\pi^{*(1)}_{ij}(t)h + O_p(q_n e^{q_n}h^2)\}\\
=& \mu_0 v^*_{ij}(t) + h\mu_{12}\widetilde{v}^*_{ij}(t) + O(q_n e^{q_n}h^2/n),\quad i\in[n],\ j\in n+[n-1],\\
\mathbb{E}\{\bar{v}_{i,j}(t)\} =& 0,\quad \text{otherwise}\quad (\text{Here, we set } v^*_{ij}(t)=0 \text{ and } \widetilde{v}^*_{ij}(t)=0).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\mathbb{E}\bar{V}(t,\tau) = \mu_0 V^*(t) + h\mu_{12}\widetilde{V}^*(t) + O(q_n e^{q_n}h^2),
$$

~ ~其中 $V^*(t)=(v^*_{ij}(t))$，且 $V^*(t)=(\widetilde{v}^*_{ij}(t))$。然后， $S^*(t)V^*(t)$ 的第 $(i,\ j)$ 个元素

满足

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{2n-1} s_{ik}^*(t)\widetilde{v}_{ki}^*(t)| \leq & \frac{|\widetilde{v}_{ii}^*(t)|}{v_{ii}^*(t)} + \frac{|\widetilde{v}_{ni}^*(t)|}{v_{2n,2n}^*(t)} \leq q_n e^{2q_n}(1+1/n),\ i=j\in[n],\\
|\sum_{k=1}^{2n-1} s_{ik}^*(t)\widetilde{v}_{ki}^*(t)| \leq & \frac{|\widetilde{v}_{ii}^*(t)|}{v_{ii}(t)} \leq q_n e^{2q_n},\ i=j\in n+[n-1],\\
|\sum_{k=1}^{2n-1} s_{ik}^*(t)\widetilde{v}_{kj}^*(t)| \leq & \frac{|\widetilde{v}_{nj}^*(t)|}{v_{2n,2n}^*(t)} \leq q_n e^{2q_n}/n,\ i\neq j\in[n],\\
|\sum_{k=1}^{2n-1} s_{ik}^*(t)\widetilde{v}_{kj}^*(t)| = & |\sum_{k=1}^{2n-1} s_{jk}^*(t)\widetilde{v}_{ki}(t)| \leq \frac{|\widetilde{v}_{i,n+i}^*(t)|}{v_{ii}^*(t)} + \frac{|\widetilde{v}_{i,n+i}^*(t)|}{v_{2n,2n}^*(t)}\\
& \leq q_n e^{2q_n}/n,\ i\in[n],\ j=\in n+[n-1]\ (j\neq n+i),\\
|\sum_{k=1}^{2n-1} s_{ik}^*(t)\widetilde{v}_{kj}^*(t)| = & 0,\ j=n+i\ (i\in[n-1])\text{ or }i=n+j\ (j\in[n-1]).
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\|S^*(t)\widetilde{V}^*(t) - q_n e^{2q_n}\mathbb{I}\|_{\max} \leq 2q_n e^{2q_n}/n, \tag{32}
$$

其中，$\mathbb{I}$ 表示一个由全 **1** 构成的 $(2n-1)\times(2n-1)$ 矩阵。由此可得

$$
\begin{aligned}
& \|S^*(t)\widetilde{V}^*(t)S^*(t)\|_{\max}\\
\leq\ & \|(S^*(t)\widetilde{V}^*(t) - q_n e^{2q_n}\mathbb{I})S^*(t)\|_{\max} + q_n e^{2q_n}\|S^*(t)\|_{\max}\\
\leq\ & \|(S_0(t)\widetilde{V}(t) - q_n e^{2q_n}\mathbb{I})\|_{\max} \times \max_{1\leq j\leq 2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}|s_{kj}^*(t)| + q_n e^{2q_n}\|S^*(t)\|_{\max}\\
=\ & O(q_n e^{3q_n}).
\end{aligned}
$$

也就是说，

$$
\|S^*(t)h\mu_{12}\widetilde{V}^*(t)S^*(t)\|_{\max} = O(hq_n e^{3q_n}).
$$

根据与证明（32）中类似的论证，我们有 $S^*(t)V^*(t) = \mathbb{I} + q_n e^{2q_n}(C_n - \mathbb{I})$ 以及 $\|S^*(t)(C_n - \mathbb{I})\|_{\max} = q_n e^{3q_n}/n$。这些事实意味着

$$
\begin{aligned}
& \|S^*(t)\mathbb{E}\{\bar{V}(t,\tau)\}S^*(t) - \mu_0 S^*(t)\|_{\max}\\
\leq\ & \|S^*(t)\mathbb{E}\{\bar{V}(t,\tau)\}S^*(t) - \mu_0 S^*(t)V^*(t)S^*(t)\|_{\max}\\
& +\mu_0\|S^*(t)V^*(t)S^*(t) - S^*(t)\|_{\max}\\
=\ & O\big(hq_n e^{2q_n} + q_n e^{3q_n}/n\big) \to 0.
\end{aligned}
$$

此外，对于任意 $\varepsilon > 0$，由于 $\mathcal{K}_{h_1}(x)$ 被 $O(h_1^{-1})$ 所界定，

$$I\Big(\sqrt{\frac{h_1}{n}}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)/v_{ii}^*(t) > \varepsilon\Big) = I(O(e^{q_n}(nh_1)^{-1/2}) > \varepsilon) \to 0,$$
$$I\Big(\sqrt{\frac{h_1}{n}}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)/v_{2n,2n}^*(t) > \varepsilon\Big) = I(O(e^{q_n}(nh_1)^{-1/2}) > \varepsilon) \to 0$$

因此，以趋于 1 的概率，

$$\begin{aligned}
&\frac{h_1}{n}\sum_{j\neq i, j<n}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)\frac{e^{\pi_{ij}^*(s)}}{[v_{ii}^*(t)]^2}I\Big(\sqrt{\frac{h_1}{n}}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)/v_{ii}(t) > \varepsilon\Big)ds \\
&+\frac{h_1}{n}\sum_{l=1}^{n-2}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)\frac{e^{\pi_{ij}^*(s)}}{[v_{2n,2n}^*(t)]^2}I\Big(\sqrt{\frac{h_1}{n}}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)/v_{2n,2n}(t) > \varepsilon\Big)ds \\
&+\frac{h_1}{n}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}^2(s-t)e^{\pi_{in}^*(s)}\Big(\frac{1}{v_{ii}^*(t)}+\frac{1}{v_{2n,2n}^*(t)}\Big)^2 I\Big(\xi > \varepsilon\Big)ds \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\xi = \sqrt{\frac{h_1}{n}}\mathcal{K}_{h_1}(s-t)\frac{(v_{ii}^*(t)+v_{2n,2n}^*(t))}{v_{ii}^*(t)v_{2n,2n}^*(t)}.$$

因此，根据 Fleming 和 Harrington （2005）的定理 5.1.1，我们得出，对于任意固定的 k，有 $U_1(t), \ldots, U_k)^\top$ 依分布收敛于一个 k维零均值正态随机向量，其协方差由 $k \times k$ 的左上 $\mu_0 S^*(t)$ 的分块给出。

□

定理 2 的证明。注意，$\widehat{\eta}(t) = \widehat{\eta}_{\widehat{\gamma}}(t)$。中值展开给出

$$\widehat{Q}_c(\widehat{\gamma}(t)) - \widehat{Q}_c(\gamma^*(t)) = \frac{\partial \widehat{Q}_c(\bar{\gamma}(t))}{\partial \gamma(t)}(\widehat{\gamma} - \gamma^*),$$

其中 $\bar{\gamma}(t) = s\gamma^*(t) + (1-s)\widehat{\gamma}(t)$ 对某个 $s \in (0, 1)$ 成立。根据 $\widehat{\gamma}(t)$ 的定义，我们得到

$$\sqrt{Nh_2}\{\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t)\} = -\left[\frac{\partial \widehat{Q}_c(\bar{\gamma}(t))}{\partial \gamma(t)}\right]^{-1}\left[\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1, j\neq i}^n \xi_{ij}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t), \gamma^*(t))\right],$$

其中

$$\xi_{ij}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t), \gamma^*(t)) = \int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(s-t)Z_{ij}(s)\Big[dN_{ij}(s) - \exp\big\{\widehat{\pi}_{ij,\gamma^*}(t)\big\}ds\Big],$$

and

$$\widehat{\pi}_{ij,\gamma^*}(t) = \widehat{\alpha}_{i,\gamma^*}(t) + \widehat{\beta}_{j,\gamma^*}(t) + Z_{ij}(s)^\top \gamma^*(t).$$

直接计算可得

$$\frac{\partial \widehat{Q}_c(\bar{\gamma}(t))}{\partial \gamma(t)^\top} = V_{\bar{\gamma},\bar{\gamma}}(t) - V_{\bar{\gamma},\widehat{\eta}}(t)\big[V_{\widehat{\eta},\widehat{\eta}}(t,\bar{\gamma}(t))\big]^{-1}V_{\widehat{\eta},\bar{\gamma}}(t),$$

其极限为 $H_Q(t)$。因此，

$$\sqrt{Nh_2}\{\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\} = [H_Q(t)]^{-1}\left[\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\xi_{ij}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t),\gamma^*(t))\right] + o_p(1). \tag{33}$$

在 $\eta^*(t)$ 处对 $\xi_{ij}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)\ \gamma^*(t))$ 作三阶泰勒展开，得到

$$\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\xi_{ij}(\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t),\gamma^*(t)) = B_{51}(t)+B_{52}(t)+B_{53}(t), \tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned}
B_{51}(t) &= \sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t)) \\
&\quad +\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta(t)^\top}\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))\Big]\{\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\}, \\
B_{52}(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{k=1}^{2n-1}\Big[(\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)-\eta_k^*(t))\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\partial^2\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_k(t)\partial\eta(t)^\top}\times\{\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\}\Big], \\
B_{53}(t) &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{k=1}^{2n-1}\sum_{l=1}^{2n-1}\Bigg\{(\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)-\eta_k^*(t))(\widehat{\eta}^*_{l,\gamma^*}(t)-\eta_l^*(t)) \\
&\quad\times\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\partial^3\xi_{ij}(\bar{\eta}_{\gamma^*}(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_k(t)\partial\eta_l(t)\partial\eta(t)^\top}\Big]\{\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

在上述公式中，对于某个 $s\in(0,1)$，有 $\bar{\eta}_{\gamma^*}(t) = s\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t) + (1-s)\eta^*(t)$；$\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)$ 是 $\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)$ 的第 k 个分量。只需证明：(i) $B_{51}(t)$ 依分布收敛于正态分布；(ii) $B_{52}(t) = b_*(t) + o_p(1)$，其中 $b_*(t)$ 由（37）给出；(iii) $B_{53}(t)$ 是渐近可忽略余项。这些结论分三步按逆序证明。

步骤 1. 我们证明 $B_{53}(t) = o_p(1)$。根据指标 k,l,s，计算 $g^{ij}_{kls}(t) = \frac{\partial^3\xi_{ij}(\bar{\eta}_{\gamma^*}(t)\,\gamma^*(t))}{\partial\eta_k(t)\partial\eta_l(t)\partial\eta_s(t)}$，如下所示。注意，当 $k,l,s\notin\{i,n+j\}$. 时，$g^{ij}_{kls}(t) = 0$。因此，$g^{ij}_{kls}\neq 0$ 只有两种情况。

(1) 三个指标 k,l,s 中仅有两个值相等。若 $k=l=i$ 和 $s=n+j$，则 $g^{ij}_{kls}(t) = -Z_{ij}\exp\{\bar{\alpha}_{i,\gamma^*}(t)+\bar{\beta}_{j,\gamma^*}(t) + Z_{ij}^\top\gamma^*(t)\}$. 其他情况下，结果类似。(2) 若 $k=l=s=i$ 或 $k=l=s=n+j,$，则 $g^{ij}_{kls}(t) = -Z_{ij}\exp\{\alpha_i(t)+\beta_j(t)+Z_{ij}^\top\gamma^*(t)\}$.

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
B_{53}(t) =& \frac{1}{6}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{k,l,s=1}^{2n-1} g_{kls}^{ij}(t)(\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)-\eta_k^*(t))(\widehat{\eta}_{l,\gamma^*}^*(t)-\eta_l^*(t))(\widehat{\eta}_{s,\gamma^*}(t)-\eta_s^*(t)) \\
=& \frac{1}{6}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} g_{iii}^{ij}(t)(\widehat{\eta}_{i,\gamma^*}(t)-\eta_i^*(t))^3 \\
&+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} g_{jjj}^{ij}(t)(\widehat{\eta}_{n+j,\gamma^*}(t)-\eta_{n+j}^*(t))^3 \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} g_{iij}^{ij}(t)(\widehat{\eta}_{i,\gamma^*}(t)-\eta_i^*(t))^2(\widehat{\eta}_{n+j,\gamma^*}(t)-\eta_{n+j}^*(t)) \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} g_{jji}^{ij}(t)(\widehat{\eta}_{i,\gamma^*}(t)-\eta_i^*(t))(\widehat{\eta}_{n+j,\gamma^*}(t)-\eta_{n+j}^*(t))^2
\end{aligned}
$$

结合 $g_{kls}^{ij}(t)$ 的定义，可推出

$$
\|B_{53}(t)\|_\infty \leq 2\sqrt{Nh_2}\max_{i,j}\{\exp\{\bar{\pi}_{ij,\gamma^*}\|Z_{ij}(t)\|_\infty\}\times\|\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^3,
$$

其中

$$
\bar{\pi}_{ij,\gamma^*} = \bar{\alpha}_{i,\gamma^*}(t)+\bar{\beta}_{j,\gamma^*}(t)+Z_{ij}(t)^\top\gamma^*(t)\}.
$$

根据引理6 和条件1-2，我们有

$$
\|B_{53}(t)\|_\infty = O_p\Big(\frac{\kappa_n^4(q_n+1)^3e^{19q_n}(\log nh_1)^{3/2}h_2^{1/2}}{n^{1/2}h_1^{3/2}}\Big) = o_p(1). \tag{35}
$$

步骤 2。我们证明断言 (ii)。注意到

$$
\begin{aligned}
B_{52}(t) =& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{k=1}^{2n-1}\Big[(\widehat{\eta}_{k,\gamma^*}(t)-\eta_k^*(t))\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\partial^2\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_k(t)\partial\eta(t)^\top}\times\{\widehat{\eta}_{\gamma^*}(t)-\eta^*(t)\}\Big] \\
=& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\partial^2\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_i^2(t)}[\widehat{\eta}_{i,\gamma^*}(t)-\eta_i^*(t)]^2 \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{\partial^2\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_{n+j}^2(t)}[\widehat{\eta}_{n+j,\gamma^*}(t)-\eta_{n+j}^*(t)]^2 \\
&+\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\partial^2\xi_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t))}{\partial\eta_i(t)\partial\eta_{n+j}(t)}[\widehat{\eta}_{i,\gamma^*}(t)-\eta_i^*(t)][\widehat{\eta}_{n+j,\gamma^*}(t)-\eta_{n+j}^*(t)].
\end{aligned}
$$

那么，si 与定理 4 中渐近偏差推导的计算类似 in

Graham(2017)，我们有

$$B_{52}(t) = b_*(t) + o_p(1), \tag{36}$$

其中

$$b_*(t) = \frac{\mu_0}{2Nh_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j\neq i}\mathbb{E}(Z_{ij}(t)\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}{\sum_{j\neq i}\mathbb{E}(\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(Z_{ij}(t)\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}{\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(\exp\{\pi_{ij}^*(t)\})}\right], \tag{37}$$

以及 $\pi_{ij}^* = \alpha_i^*(t) + \beta_j^*(t) + Z_{ij}(t)^\top\gamma^*(t)$。

步骤 3。我们证明论断 (i)。令 ι_{ij} 为一个 $(2n-1)$ 维向量，其中第 i 个和第 $(n+j)$ 个元素为 1，其余元素为 0。对于 $B_{51}(t)$，我们有

$$B_{51}(t) = \sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\widetilde{\xi}_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t)) + o_p(1), \tag{A.16}$$

其中

$$\widetilde{\xi}_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t)) = \int_0^\tau Z_{ij}(s)\mathcal{K}_{h_2}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s) - V_{\gamma^*\eta^*}(t)S^*(t)\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_2}(s-t)d\mathcal{M}_{ij}(s)\iota_{ij}.$$

对于任意固定的 $t\in[a,b]$，采用与引理 7 的证明类似的论证，我们有，$B_{51}(t)$ 的分布近似服从均值为 0、协方差矩阵为$\sim\mu_0\Sigma(t)$ 的正态分布，其中

$$\widetilde{\Sigma}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\left[\left(Z_{ij}(t) - V_{\gamma^*\eta^*}(t)S^*(t)\iota_{ij}\right)^{\otimes 2}e^{\pi_{ij}^*(t)}\right].$$

这里，对于任意满足 a 的向量 $a^{\otimes 2} = aa^\top$，将 (35)-(A.16) 代入 (33) 得

$$\sqrt{Nh_2}\big(\widehat{\gamma}(t) - \gamma^*(t) - H_Q(t)^{-1}b(t)\big) = H_Q(t)^{-1}\sqrt{\frac{h_2}{N}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\widetilde{\xi}_{ij}(\eta^*(t),\gamma^*(t)) + o_p(1),$$

其依分布收敛于一个均值为 0、协方差矩阵为 $\mu_0 H_Q(t)^{-1}\Sigma(t)H_Q(t)$ 的 p 维多元正态随机向量。由此完成证明。 □

B.3 定理 3 的证明

本节给出定理 3 的证明。

定理 3 的证明。为简化记号，记 $\widehat{\pi}_{ij}(t) = \widehat{\alpha}_i(t) + \widehat{\beta}_j(t) + Z_{ij}(t)^\top\widehat{\gamma}(t)$。令$\widehat{\theta}_{ij}(t) = (\widehat{\alpha}_i(t)\ \widehat{\beta}_j(t)\ \widehat{\gamma}(t)^\top)^\top$，且 $\theta_{ij}^*(t) = (\alpha_i^*(t)\ \beta_j^*(t)\ \gamma^*(t)^\top)^\top$.。根据泰勒展开，

我们有

$$\begin{aligned} & F(\widehat{\eta}(t),\widehat{\gamma}(t))-F(\eta^*(t),\gamma^*(t)) \\ =& V_{\eta^*,\eta^*}(t,\gamma^*(t))\{\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)\}-V_{\eta^*,\gamma^*}(t)\{\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\}+n^{-1}g(t), \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $g(t)=(g_1(t)\ldots,g_{2n-1}(t))^\top$, $g_i(t)=\sum_{j\neq i}g_{ij}(t)$ $(1\leq i\leq n)$, $g_{n+j}(t)=\sum_{i\neq j}g_{ij}(t)$ $(j\in[n-1])$, 以及 $g_{ij}(t)=\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)\bar{g}_{ij}(s,t)ds$ 满足

$$\bar{g}_{ij}(s,t)=(\widehat{\theta}_{ij}(t)-\theta^*_{ij}(t))^\top\begin{pmatrix} e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)}Z_{ij}(s)^\top \\ e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)}Z_{ij}(s)^\top \\ e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)}Z_{ij}(s) & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)}Z_{ij}(s) & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(s,t)}Z_{ij}(s)Z_{ij}(s)^\top \end{pmatrix}(\widehat{\theta}_{ij}(t)-\theta^*_{ij}(t)).$$

这里，$\widetilde{\pi}_{ij}(t)$ 位于 $\pi^*_{ij}(t)$ 和 $\widehat{\pi}_{ij}(t)$ 之间。回顾一下，$V(t)=V_{\eta^*,\eta^*}(t,\gamma^*(t))$。由于$F(\widehat{\eta}(t)$ $\widehat{\gamma}(t))=0$，(38) 等价于

$$\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)=-[V(t)]^{-1}F(\eta^*(t),\gamma^*(t))+[V(t)]^{-1}V_{\eta^*,\gamma^*}(t)\{\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\}-\frac{1}{n}[V(t)]^{-1}g(t).$$

证明的其余部分是说明上述等式右侧的第一项渐近服从正态分布，而第二项和第三项渐近可忽略。以下三个步骤将证明这些结论。

步骤 1。我们证明

$$[V(t)]^{-1}g(t)=o_p((nh_1)^{-1/2}). \tag{39}$$

注意，$|g_{ij}(t)-g^*_{ij}(t)|=O(\kappa_n e^{q_n}h_1^2)$，其中

$$\bar{g}^*_{ij}(t)=(\widehat{\theta}_{ij}(t)-\theta^*_{ij}(t))^\top\begin{pmatrix} e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t)^\top \\ e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)} & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t)^\top \\ e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t) & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t) & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t)Z_{ij}(t)^\top \end{pmatrix}(\widehat{\theta}_{ij}(t)-\theta^*_{ij}(t)).$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} g^*_{ij}(t) \;=\; & e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}[(\widehat{\alpha}_i(t)-\alpha^*_i(t))^2+(\widehat{\beta}_j(t)-\beta^*_j(t))^2+2(\widehat{\alpha}_i(t)-\alpha^*_i(t))(\widehat{\beta}_j(t)-\beta^*_j(t))] \\ & +2e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}Z_{ij}(t)^\top(\widehat{\gamma}(t)-\gamma(t))(\widehat{\alpha}_i(t)-\alpha^*_i(t)+\widehat{\beta}_j(t)-\beta^*_j(t)) \\ & +e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}(\widehat{\gamma}(t)-\gamma(t))^\top Z_{ij}(t)Z_{ij}(t)^\top(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)). \end{aligned}$$

注意到 $\kappa_n:=\max_{i,\,j}\|Z_{ij}(t)\|$ 和 $e^{\widetilde{\pi}_{ij}(t)}\leq e^{2q_n}$。由定理 1 和条件 2，我们

have

$$\begin{aligned}|g_{ij}(t)| \leq & 4e^{2q_n}\|\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2+4\kappa_n e^{2q_n}\|\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)\|_\infty\|\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\| \\ & +e^{2q_n}\kappa_n^2\|\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\|^2 \\ \leq & 2e^{2q_n}[4\|\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2+\kappa_n^2\|\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\|^2]. \end{aligned} \tag{40}$$

记 $(V(t)^{-1}g(t))_i=(S(t)g(t))_i+(W(t)g(t))_i$，其中 $W(t)=V(t)^{-1}-S(t)$。对于 $i\in[n]$，直接计算可得

$$n^{-1}(S(t)g(t))_i=\frac{g_i(t)}{v_{ii}(t)}+\frac{\sum_{j=1}^{n-1}g_{jn}(t)}{nv_{2n,2n}(t)}.$$

根据（40）和定理 1，可得

$$\begin{aligned}|n^{-1}(S(t)g(t))_i| \leq & 2e^{3q_n}\{4\|\widehat{\eta}(t)-\eta^*(t)\|_\infty^2+\kappa_n^2\|\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\|^2\} \\ = & O_p\Big((q_n+1)^2e^{41q_n}\kappa_n^6\frac{\log nh_1}{nh_1}\Big).\end{aligned}$$

此外，根据引理 1，可得

$$\|n^{-1}W(t)g(t)\|_\infty\leq\|W(t)\|_{\max}\|g(t)\|_\infty=O_p\Big((q_n+1)^2e^{45q_n}\kappa_n^6\frac{\log nh_1}{nh_1}\Big).$$

因此，若 $(q_n+1)^2e^{45q_n}\kappa_n^6\log nh_1/\sqrt{nh_1}=o(1)$，则

$$\|n^{-1}W(t)g(t)\|_\infty=o_p\big((nh_1)^{-1/2}\big).$$

这说明（39）。

步骤 2。我们证明

$$[V(t)]^{-1}V_{\eta^*\gamma^*}(t)\{\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\}=o_p((nh_1)^{-1/2}). \tag{41}$$

注意，

$$V_{\eta^*,\gamma^*}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{j\neq1}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi_{1j}^*(s,t)}Z_{1j}(s)^\top ds, \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{j\neq n}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi_{nj}^*(s,t)}Z_{nj}(s)^\top ds, \\ \frac{1}{n}\sum_{j\neq1}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi_{j1}^*(s,t)}Z_{j1}(s)^\top ds, \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{j\neq n-1}\int_0^\tau\mathcal{K}_{h_1}(s-t)e^{\pi_{j,n-1}^*(s,t)}Z_{j,n-1}(s)^\top ds,\end{pmatrix}.$$

我们有

$$\|V_{\eta^*,\gamma^*}(t)(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))\|_\infty \leq (2-1/n)e^{q_n}\kappa_n\|\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t)\|.$$

这与定理 2结合，可得

$$\begin{aligned}\|S(t)V_{\eta^*,\gamma^*}(t)(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))\|_\infty \leq & \max_i \frac{1}{v_{ii}(t)}\|V_{\eta^*\gamma^*}(t)(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))\|_\infty \\ & + \frac{|\sum_{j=1}^{n-1} e^{\pi_{jn}(t)}Z_{jn}(t)^\top(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))|}{v_{2n,2n}(t)} \\ = & O_p\left(\frac{e^{2q_n}\kappa_n}{n\sqrt{h_2}}\right).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|W(t)V_{\eta^*\gamma^*}(t)(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))\|_\infty \leq & (2n-1)\|W(t)\|_{\max}\|V_{\eta^*\gamma^*}(t)(\widehat{\gamma}(t)-\gamma^*(t))\|_\infty \\ = & O_p\left(\frac{e^{6q_n}\kappa_n}{n\sqrt{h_2}}\right).\end{aligned}$$

这与 $h_2 = O(h_1^2)$ 以及 $e^{6q_n}\kappa_n/\sqrt{n} = o(1)$ 结合，得到 (41)。

步骤 3 是一个组合步骤。由 (39) 和 (41)，我们有

$$\sqrt{nh_1}\{\widehat{\eta}_i(t)-\eta_i^*(t)\} = \left\{S^*(t)\sqrt{\frac{h_1}{n}}\int_0^\tau \mathcal{K}_{h_1}(s-t)d\widetilde{\mathcal{M}}(s)\right\}_i + o_p(1).$$

由引理 7，可知对于任意固定的 k，$\left[(\mu_0 S^*(t))^{-1/2}\{\widehat{\eta}_i(t)-\eta^*(t)\}\right]_{1:L}$ 依分布收敛到一个 k 维标准正态随机向量。证明完毕。

□

参考文献

Eubank, R. L.（1988）。《样条平滑与非参数回归》。纽约：Marcel Dekker。

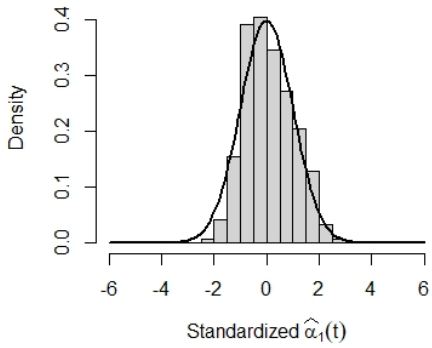
Fleming, T. 和 Harrington, D.（2005）。《计数过程与生存分析》。纽约：Wiley。

Graham, B.（2017）。一个具有度异质性的网络形成计量经济模型。《计量经济学》85，1033-1063。

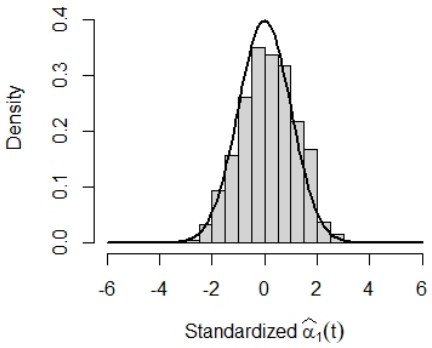
Lang, S.（1993）。实分析与泛函分析。Springer。

van Der Vaart, A. W.（1998）。渐近统计学。剑桥大学。

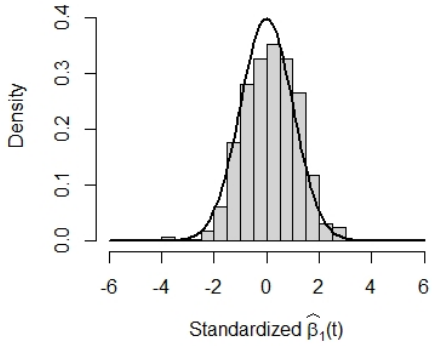
Yan, T.、Leng, C. 和 Zhu, J.（2016）。具有递增双度序列的有向指数随机图模型的渐近性质。《统计年鉴》44，31–57。



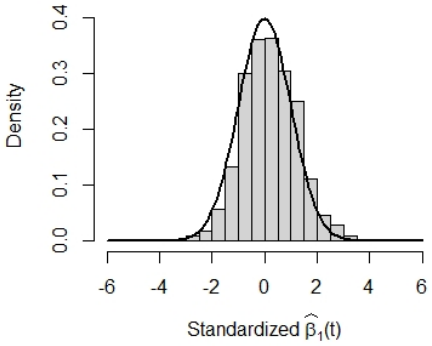
(a) $t = 0.6$



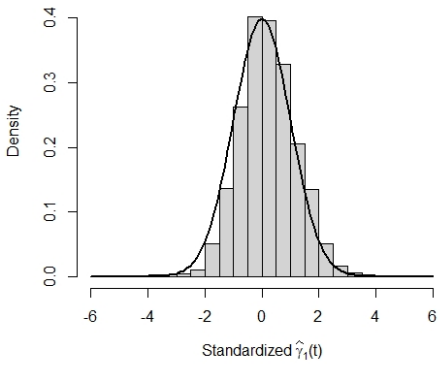
(b) $t = 0.8$



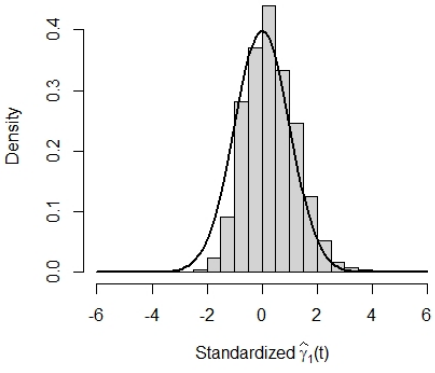
(c) $t = 0.6$



(d) $t = 0.8$

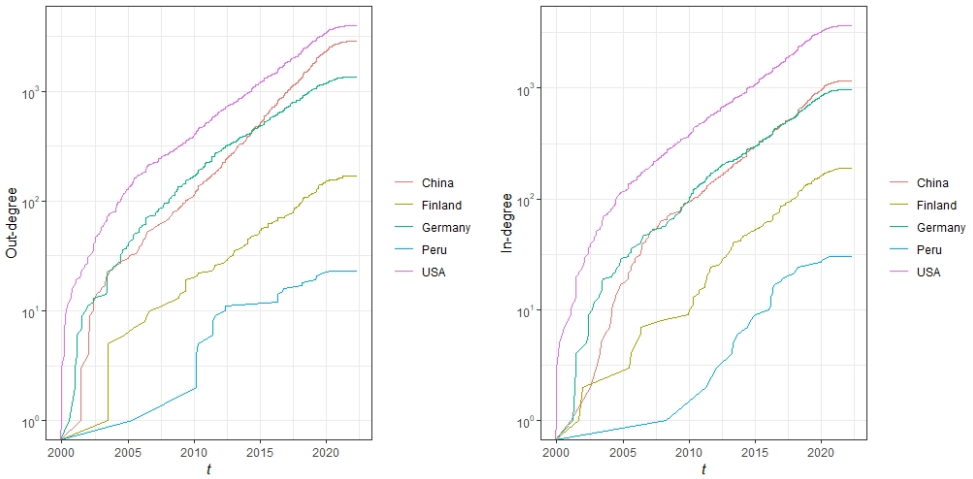


(e) $t = 0.6$



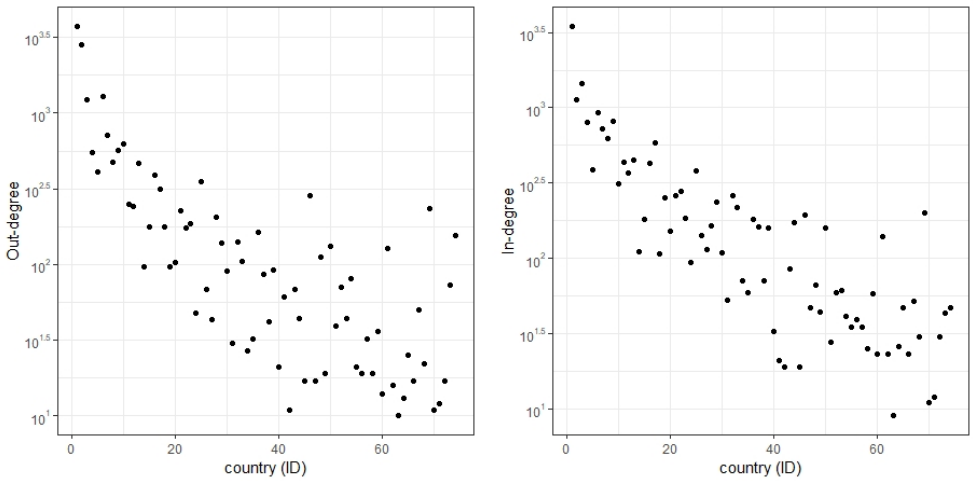
(f) $t = 0.8$

图 S1. 模拟结果：标准化后的 $\widehat{\alpha}_1(t)$、$\widehat{\beta}_1(t)$ 和 $\widehat{\gamma}_1(t)$ 的渐近正态性（$t = 0.6$ 和 0.8），其中 $n = 500$.



(a) 入度　　(b) 出度

图 S2。真实数据分析：5 个选定国家的入度和出度曲线。



(a) 入度　　(b) 出度

图 S3。真实数据分析：2000年1月至2022年4月74个国家的入度和出度总和。