arXiv:2301.04340v2 [cs.GT] 7 Nov 2024

厌恶设施选址中的比例公平

Alexander Lam*[1](✉)，Haris Aziz[2], Bo Li[3], Fahimeh Ramezani[2],和 Toby Walsh[2]

[1]香港城市大学[2]悉尼新南威
尔士大学[3]香港理工大学

摘要

我们研究厌恶设施选址问题（在该问题中，代理人希望设施位置离自己越远越好），并针对这一问题提出一套基于距离的比例公平概念层级。这些公平公理确保位于同一位置的代理人组，其与设施之间的距离至少与群体规模成比例。我们研究确定性和随机化机制，并计算比例公平代价的紧确界。在确定性设定中，我们证明比例公平公理与策略无关性不兼容，并证明比例公平的福利最优机制具有渐近紧确的 ϵ 无政府价格和稳定性界。在随机化情形中，我们找到了兼具比例公平性和策略无关性的机制，其期望福利与最优福利相差不超过一个常数倍。最后，我们证明了模型的两种扩展形式的存在性结果。

1 引言

在厌恶设施选址问题（OFLP）中，需要在单位区间（即位置的定义域为 $[0,1]$）上选址建设某种不受欢迎的设施，例如垃圾填埋场或炼油厂，而沿区间分布的代理人则希望距离该设施尽可能远 [Feigenbaum等人，2020年；Cheng等人，2011年；Ibara 和 Nagamochi，2012年；Cheng等人， 2019]。在这个问题中，代理人具有单峰值偏好，这与经典设施选址问题中代理人的单峰偏好形成对比（在经典设施选址问题中，代理人希望距离设施尽可能近）。

厌恶设施选址问题刻画了许多会对附近代理人造成负面影响的现实设施选址，例如监狱或发电厂 [Church 和 Drezner， 2022]。除了厌恶设施的地理位置之外，OFLP 还可应用于各种集体决策问题。例如，当代理人厌恶其最糟糕的可能社会结果（以其位置表示）时，该问题所涉及的情形包括需要就社会政策或预算构成作出决策。当一项对社会敏感的

*alexlam@cityu.edu.hk

或在政治上不受欢迎的政策需要实施时，可能需要在结果空间中对这类政策的设置纳入公平性考量。

众所周知，将设施设在某个区间端点处可以最大化代理人距离之和 [Cheng等人，2013], 但这种解可能对代理人而言并非“比例公平”。为帮助理解，请看图1所示的实例。最优功利主义解（即最大化代理人距离之和的解）将设施设在 0 处，这会使位于 0.1 处的代理人遭受不成比例的不利影响，因为他们距离设施仅 0.1。若将设施设在 0.45 处，两个代理人组到设施的距离相同；从平等主义意义上说，这会被视为更“公平”。然而，这并非比例公平：尽管 0.8 处的代理人组人数是 0.1 处代理人组的两倍多，但两个组到设施的距离却相同。比例公平的解会将设施设在 0.3 处，使代理人组到设施的距离与该组的规模成正比。

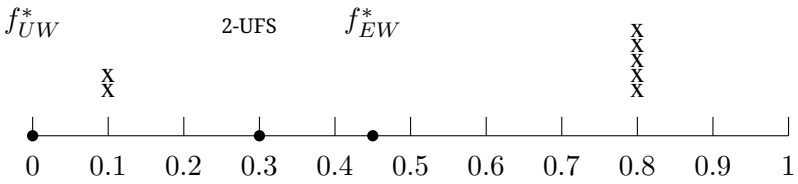


图1：代理人位置配置为 (0.1, 0.1, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8) 的 OFLP，以 x 表示。设施位置（以 • 表示）分别对应功利主义结果 $f^*_{UW} = 0$、比例公平结果 2-UFS $= 0.3$ 和平等主义结果 $f^*_{EW} = 0.45$。

在本研究中，我们将比例公平理念作为该问题的核心关注点。具体而言，我们提出了一套比例公平公理层级，以确保位于同一位置的每个代理人组与设施之间的距离和该组的相对规模成比例。虽然比例公平公理已在经典设施选址问题中得到提出和研究 [Aziz 等人, 2022a], , 但尚未应用于 OFLP。本文全面概述了厌恶设施选址问题中的比例公平解，考察比例公平与功利主义/平等主义福利之间的相互作用，并探讨确定性和随机化情形下代理人策略行为方面的问题。

贡献

- 我们在令人厌恶的设施选址问题中，对 2-个人公平份额（2-IFS）和 2-一致公平份额（2-UFS）等（近似）比例公平概念进行了形式化。其中若干定义是对公平分配和参与式预算中的公理所作的自然改编。

- 我们针对极小化福利和功利主义福利这两种目标，在确定性和随机化情形下，得出了 2-IFS 和 2-UFS 公平性的代价上界的紧确界。

- 我们证明，在确定性设定下，我们的比例公平公理与策略无关性不兼容，并给出满足这些比例公平公理（在期望意义下）的策略无关随机化机制；这些机制

表1：公平代价与福利近似结果。

		公平代价		已知最佳
		2-IFS	2-UFS	2-UFS SP 近似
确定性	功利主义福利	2（定理 1）	2（定理 2）	不兼容（命题 4）
	平等主义福利	1（命题 3）	$n-1$（定理 3）	
随机化	功利主义福利	12/11（推论 2）	1.094...(推论 3)	1.5 (定理 10)
	平等主义福利	1 (命题 3)	1 (推论 1)	1 (命题 6)

要么具有常数级的功利主义福利近似比，要么在平等主义福利方面达到最优。

• 对于满足 2-IFS 和 2-UFS 约束、旨在最大化功利主义福利的确定性机制，我们证明纯 ϵ-Nash 均衡始终存在。随后，我们为相应的 ϵ-无政府价格找到了渐近紧的线性界，并为相应的 ϵ-稳定性价格找到了渐近紧的常数界。

• 最后，我们提出了模型的两种可能扩展：公平性公理 2-比例公平（2-PF），它比 2-UFS 更强，因为它体现了对位置相近但不一定处于同一位置的代理人组的比例公平性考量；以及混合模型，该模型还纳入了“经典”代理人，他们希望靠近设施。我们证明了这两种扩展下的存在性结果。

表1汇总　了我们的一些结果。未附证明的结果均在附录中证明。　.

相关工作 与我们研究最相关的论文，是那些将设施视为厌恶设施的研究：代理人希望设施尽可能远离自己。与经典设施选址问题类似，早期运筹学领域关于 OFLP 的研究采用优化方法计算解；Church 和 Drezner [2022]对这些方法进行了综述。还有一些关于厌恶设施选址问题的论文采用机制设计方法，并假设代理人的位置是私人信息。Cheng等人 [2011, 2013], 开创了这方面的研究，他们将代理人的效用定义为其与设施之间的距离，并设计了策略防操纵机制，以近似求解路径和网络度量上的最优功利主义福利。其他近期相关论文包括 [Cheng等人，2019年；Feigenbaum等人，2020年；Ibara 和 Nagamochi，2012年；Xu等人， 2021]。这些论文并未提出或研究本文探讨的公平概念。

过去几十年来，各种集体决策问题中的公平性概念已得到广泛探讨 [Moulin，2003年；Nash，1950年；Shapley， 1953]。与设施选址问题尤为相关的公平性目标包括最大成本/平等主义福利（例如参见 [Procaccia 和 Tennenholtz，2013年；Wang等人， 2021]）以及最大总成本/平均群体成本[Zhou等人， 2022]。我们不以优化或近似公平性目标为重点，而是关注能够满足比例公平公理的方案；这些公理保证偏好或位置相似或相同的代理人组获得与群体规模相对应的最低效用。我们提出的比例公平公理源自社会选择领域中若干相关方向。个人公平份额（IFS）与 Steinhaus 提出的比例性公理 [1948], 密切相关，并与一致公平份额（UFS）一同出现在参与式预算中 [Bogomolnaia等人，

2005年；Aziz 等人， 2019]。我们提出的所有比例公平公理都已由 Aziz 等人 [2022a]在经典设施选址问题中进行研究。

在本文中，我们还分析了实施所提出的比例公平公理所造成的效率损失，即公平代价。针对设施选址问题的一些变体，已有研究探讨过公平代价，例如存在字典序极小极大目标的情形 [Buzna 等人， 2014], ，以及设施对代理人子集具有偏好、并从设施视角考察公平性的情形 [Wang 和 Zhang， 2021]。近年来，公平代价在各种社会选择背景下也得到了广泛研究，例如公平分配和概率社会选择 [Barman 等人，2020年；Caragiannis 等人，2012年；Bei 等人，2021年；Bertsimas 等人， 2011]。

由于在我们的确定性设定中，策略无关性无法实现，我们给出了关于纯纳什均衡的存在性以及无政府状态代价和稳定性代价的结果。已证明此类结果的类似模型包括霍特林-唐斯模型的一种变体 [Feldman 等人， 2016], ，以及设施和客户都采取策略性行动的两阶段设施选址博弈 [Krogmann 等人，2021]。在经典设施选址问题中，Aziz 等人 [2022a] 刻画了满足 UFS 的严格单调设施选址机制的纯纳什均衡，并证明由此产生的均衡设施选址也必然满足 UFS。在我们的设定中，某些机制可能不存在纯纳什均衡，因此我们证明了近似纯 ϵ-纳什均衡的存在性。将这一概念应用于其他设定的论文示例包括[Chien 和 Sinclair，2011年；Mylvaganam 等人， 2015]。

本文的后半部分聚焦于随机化情形，以克服与策略无关性的冲突。在许多社会选择场景中，常采用随机化机制来克服不可能性结果（例如，见 [Brandt，2017年；Aziz， 2019]）。此外，Aziz 等人 [2022b] 在经典设施选址问题中采用随机化方法，以实现更强的比例公平概念，并对满足一项称为强比例性的公理的普遍匿名且普遍真实的机制给出了独特刻画。采用随机化机制还可以得到更优的近似比／公平代价界限。这在设施选址问题的许多变体中都很常见，例如代理人具有分数偏好或可选偏好时 [Fong 等人，2018年；Chen 等人， 2020], ，以及在混合设施选址模型中 [Feigenbaum 等人， 2020]。

2 模型

设 $N = \{1, \ldots, n\}$ 是代理人集合， $X := [0, 1]$ 是位置的定义域。[1] 代理人 i 的位置记为 $x_i \in X$；代理人位置配置记为 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$。我们还假设代理人位置按 $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ 的顺序排列。确定性机制是一个映射 $f\colon X^n \to X$，将位置配置 $\hat{x} \in X^n$ 映射到设施位置 $y \in X$。给定设施位置 $y \in X$，代理人 i 的效用 [2] 等于其与设施之间的距离 $u(y, x_i) := |y - x_i|$。我们关注于最大化功利主义福利（UW）和公平主义福利（EW）这两个目标：对于设施位置 y 和位置配置 x，功利主义福利定义为代理人效用之和 $\sum_i u(y, x_i)$；公平主义福利则定义为代理人效用的最小值 $\min_i u(y, x_i)$。

[1] 我们的结果可以自然地推广到 $\mathbb{R}$ 上的任意紧区间。[2] 该定义与 [Cheng等人， 2013] 一致。

请注意，OFLP 中的偏好可视为单峰底偏好，与经典设施选址问题（FLP）中的单峰偏好形成对比。FLP 和 OFLP 的底层模型相同，区别仅在于代理人的偏好结构不同。除非另有说明，本文所述结果均针对厌恶设施选址问题（OFLP）。

3 比例公平公理

本节将介绍针对厌恶设施选址问题的比例公平公理。

3.1 个人公平份额

我们首先介绍个人公平份额（IFS）的一种改编形式，它是我们提出的比例公平公理中最弱的一项（Aziz 等人 [2022a] 在经典设施选址问题的背景下研究过该公理）。IFS 为每个代理人与设施之间的距离提供最低保障，要求每个代理人至少获得 $\frac{1}{n}$ 效用。将两名代理人分别置于$\frac{1}{4}$和$\frac{3}{4}$，很容易看出 IFS 解可能不存在。因此，我们转而研究 $\overline{\text{IFS}}$ 的近似形式。

定义 1（α-个人公平份额（IFS））。给定一个位置配置 x，若某设施位置 y满足 α-个人公平份额（α-IFS），则

$$u(y, x_i) \geq \frac{1}{\alpha n} \quad \forall i \in N.$$

我们发现，使 IFS 解始终存在的 α 最小值为 $\alpha = 2$。直观地说，当 $\alpha = 2$ 时，每个代理人所在位置周围都有一个半径为 $\frac{1}{2n}$ 的开区间。区间长度之和为 1，这意味着始终存在一个 2-IFS 解。对于任意 $\alpha < 2$，IFS 解可能并非总是存在，因为区间长度之和将超过 1。

命题 1. 总是存在 α-IFS 解的 α 最低取值为 $\alpha = 2$。

证明。考虑位于有序位置 $x_1, \ldots, x_n$ 的 n 个代理人。对于每个代理人 i，我们构造一个中心为 x_i、半径为 $\frac{1}{2n}$ 的开区间 B_i： $B_i = \{z | d(z, x_i) < \frac{|1|}{2n}\}$。注意，区间长度之和为 1。

分两种情况：

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ 对所有 $i \neq j$ 都成立。由于区间长度之和为 1，两个相邻区间的边界相交，因此可以将设施放置在任意区间的边界上。

- $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ 对某个 $i \neq j$ 成立。在这种情况下， $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ 的长度小于 1，因此 $[0, 1]$ 上必定存在一块未被任何开区间覆盖的区域。可以将设施放置在该区域内，从而得到一个 2–IFS 解。

要说明 $\alpha < 2$ 可能不存在 α–IFS 解，考虑 $n = 2$ 位置配置（$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$），其中区间的交集涵盖整个单位区间。 □

一种多项式时间 2-IFS 机制（记作 f^*_{2IFS}）通过遍历满足约束的区间端点来最大化功利主义福利，并输出最优设施位置；若有多个最优位置，则选择最靠左的那个。

3.2 一致公平份额

现在，我们介绍一致公平份额（UFS）。它是对 IFS 的强化和推广，适用于位于同一位置的代理人组。简而言之，如果同一位置有 k 名代理人，那么 UFS 要求设施与这些代理人之间至少相距 $\frac{k}{n}$。在 UFS 下，位置非常接近但并不完全共址的代理人不被视为同一群组。然而，在实际中，代理人共址的情况往往自然出现，例如多名公民居住在同一栋公寓楼中，或是在考察城镇人口时。本文末尾将提出一种更强的比例公平公理，它将位置接近但不一定相同的代理人视为同一群组的成员。

同样，我们关注 UFS 的近似，因为 UFS 解可能不存在。

定义2（α-一致公平份额（UFS））。给定一个位置配置 $\boldsymbol{x}$，若设施位置 y满足 α-一致公平份额（α-UFS），则对于任何位置相同的代理人集合 S，

$$u(y, x_i) \geq \frac{|S|}{\alpha n} \quad \forall i \in S.$$

请注意，α–UFS 蕴含 α–IFS。与 α–IFS 一样，我们发现，始终存在 α-UFS 解的 α 最优值为 $\alpha = 2$。证明的直觉与命题1类似，但区间的大小会根据群组中的代理人数而变化。

命题 2. 始终存在 α-UFS 解的 α 最小值为 $\alpha = 2$.

证明。考虑位于 m 个不同有序位置 x_1、.....、x_m 的 n 个代理人，对于 $i \in [m]$，令 S_i 表示位于位置 x_i 的代理人组。对于每个 S_i，我们构造一个以 x_i 为中心、半径为$\frac{|S_i|}{2n}$ 的开区间 B_i： $B_i = \{z | d(z, x_i) < \frac{|S_i|}{2n}\}$。注意，区间长度之和为 $\sum_{i=1}^{m} \frac{|S_i|}{n} = 1$。

分两种情况:

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ 对所有 $i \neq j$ 均成立。由于区间长度之和为 1，两个相邻区间的边界会相交，因此可以将设施放置在任一区间的边界上。

- $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ 对某个 $i \neq j$ 成立。在这种情况下， $B_1 \cap \cdots \cap B_m$ 的长度小于 1，因此 $[0, 1]$ 上必定存在一块未被任何区间覆盖的区域。将设施放置在该区域内，即可得到一个 2–UFS 解。

为了了解可能不存在 α–UFS 解，因此对于 $\alpha < 2$，将所有 n 代理人置于位置1 2 –. □

与 f^*_{2IFS} 类似，一个计算功利主义福利下最优 2-UFS 设施位置的多项式时间机制（记为 f^*_{2UFS}）会遍历满足 2-UFS 的区间端点，并输出最优设施位置；若有多个最优位置，则优先选择最靠左的位置。

4 确定性设定

我们首先研究确定性设定，分析比例公平代价和代理人策略行为。本节所述的所有结果均适用于确定性设定。

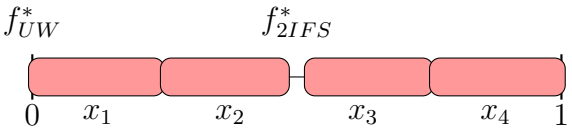


图2： $n = 4$的定理 1 证明中的下界实例。 f^*_{UW} 表示使功利主义福利最大化的设施选址，而 f^*_{2IFS} 则是在 2-IFS 约束下使功利主义福利最大化的选址。红色区间表示在 2-IFS 下不可行的位置。

4.1 公平代价

本节分析针对我们的（近似）公平公理的公平代价。[3] 一般而言，公平代价衡量施加特定公平约束所导致的效率损失。我们重点关注功利主义福利和平等主义福利这两个目标，前者定义为效用之和，后者定义为最低代理人效用。

公平性属性 P是从代理人位置配置 $x \in X^n$ 到设施位置的一个（可能为空的）集合 $P(x) \in X$的映射。每个设施位置 $P(x)$都满足公平性属性 P。属性 P 的公平代价是最优福利与满足 P的设施位置所能实现的最优福利之间的最坏情况比率。

定义3（功利主义/平等主义福利的公平代价）。设 $\{f^*_{UW}, f^*_{EW}\}$为返回使功利主义/平等主义福利最大化的解的机制。对于功利主义/平等主义福利及公平性属性 P，我们将公平代价定义为（在所有位置配置上取最坏情况的）最优功利主义/平等主义福利与满足 P的设施位置所实现的最优功利主义/平等主义福利之比：

$$\max_{x\in[0,1]^n} \frac{W(f^*(x),x)}{\max_{y\in P(x)} W(y,x)}.$$

对于功利主义福利， $f^*(x) := f^*_{UW}(x)$， 且 $W(y,x) := \sum_i u(y,x_i)$。
对于平等主义福利， $f^*(x) := f^*_{EW}(x)$， 且 $W(y,x) := \min_i u(y,x_i)$。

4.1.1 功利主义福利

实例的功利主义福利（UW）是衡量效率的标准指标。计算我们的比例公平公理对功利主义福利所产生的公平代价，可以量化 OFLP 系统受比例公平约束时对效率造成的影响。

现在，我们来计算 2-IFS 和 2-UFS 公平性对功利主义福利所产生的公平代价。回顾一下，使功利主义福利最大化的解必定是 0 或 1 [Cheng等人， 2013]。为了证明公平代价的下界，我们对代理人进行布置，使得唯一可行的 2-IFS/UFS 解位于最优中位数区间内（例如，见图2）。

定理 1. 功利主义福利下 2-IFS 的价格为 2，且该界是紧的。

[3]公平代价也可以解释为满足公平性约束的相应最优机制的近似比。

下界证明。假设 n 为偶数，且代理人位于 $\frac{1}{2n}-\epsilon, \frac{3}{2n}-2\epsilon, \ldots,$
$\frac{n-1}{2n}-\frac{n}{2}\epsilon \ \frac{n+1}{2n}+\frac{n}{2}\epsilon \ \ldots \ \frac{2n-3}{2n}+2\epsilon \ \frac{2n-1}{2n}+\epsilon$ ϵ 2 ,,,,, 其中 足够小（例如，见图 ）。在此对称配置下，设施位置为 0 或 1 时，功利主义福利均达到最大值 $\frac{n}{2}$。满足 2-IFS 的唯一设施位置位于区间 $[\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\epsilon, \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\epsilon]$ 内。由于两侧的代理人数相同，该区间内任意位置所产生的功利主义福利都相同，因此不妨设设施位于 1 2。对应的功利主义福利为$\frac{n}{4}+\epsilon n(1+\frac{n}{2})$。取极限 $\epsilon \to 0$，可得比率为 2。 □

定理2。对于功利主义福利，2-UFS的公平代价为2，且该界是紧的。

由于对于功利主义福利，两种比例公平公理的公平代价相同，因此，如果主要考虑的是减少功利主义福利的损失，那么相比2-IFS，采用2-UFS或许更可取。

4.1.2 平等主义福利

平等主义福利（EW）是文献中常见的另一种公平性衡量标准，关注处境最差的代理人。我们的公平代价分析揭示了在OFLP中，平等主义福利／极小极大公平与比例公平之间的权衡。

我们的第一个结果是，2-IFS的公平代价为1，这意味着最大化平等主义福利的机制能够保证满足2-IFS。这一结论由命题1得出；该命题指出，2-IFS解（其中每位代理人至少获得$\frac{1}{2n}$效用）始终存在。

命题3. 平等主义福利下 2-IFS 的公平代价为 1。

证明. 我们知道， $2-$IFS 解必定始终存在，这意味着对于任意代理人位置配置，都存在一个设施位置，使得每位代理人与设施之间的 $\frac{1}{2n}$ 距离至少为该值。因此，最大化平等主义福利的解显然满足 $2-$IFS。 □

另一方面，我们发现，2-UFS 的公平代价明显更差，达到线性因子$n-1$。其直观原因是，位于同一点的 $n-1$ 代理人组成的联盟，可以通过一个$n-1$ 的“倍数”确保设施远离他们的位置（并更靠近剩余代理人的位置）（参见例如图 3）。

定理 3. 平等主义福利下 2-UFS的公平代价为 $n-1$。

证明. 我们首先证明下界为 $n-1$。只需考虑 $n \geq 3$。考虑一个位置配置：1 位代理人在 $\frac{1}{2n}-\epsilon$， $n-1$ 位代理人在 $\frac{n+1}{2n}+\epsilon$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小（参见例如图 3）。最优解将设施设在 1，从而得到 $\frac{n-1}{2n}-\epsilon$ 的平等主义福利。唯一的 2-UFS 解位于区间 $[\frac{1}{n}-\epsilon, \frac{1}{n}+\epsilon]$ 内，而 $\frac{1}{n}+\epsilon$ 的解得到 $\frac{1}{2n}+2\epsilon$ 的平等主义福利。由于 $\epsilon \to 0$，该比值趋近于 $n-1$。

现在我们证明上界为 $n-1$。首先，显然只需考虑每个群组最多包含 $n-1$ 个代理人的位置配置。假设存在这样的 x，使得 $\min_i u(f^*_{EW}(x)\ x_i) \geq \frac{n-1}{2n}$，即存在一种解，使每个代理人的效用至少为 $\frac{n-1}{2n}$。那么该解也满足 2-UFS，且平等主义比率为 1。因此，最大比率必然满足 $\min_i u(f^*_{EW}(x)\ x_i) < \frac{n-1}{2n}$。由于满足 2-UFS，我们还有 $\max_{y \in 2UFS(x)} \min_i u(y, x_i) \geq \frac{1}{2n}$。将这两项相除即可得出定理结论。 □

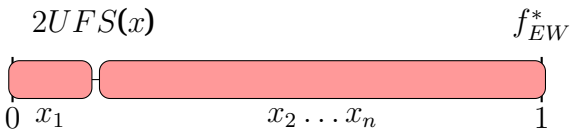


图 3：定理 3 证明中的实例。 f^*_{EW} 表示最大化平等主义福利的设施选址，而 $2UFS(x)$表示满足 2-UFS 的设施选址区间。红色区间表示在 2-UFS 下不可行的位置。

4.2 与策略无关性的不相容性

在机制设计中，人们往往追求策略无关性这一规范性属性，因为它能抑制代理人虚报自己的真实位置。

定义 4（策略无关性）。若对于每个代理人$i \in N$、每个 x_i、 x'_i 和 $\hat{x}_{-i}$，均有 f，则称（确定性）机制 f 具有策略无关性。

$$u(f(x_i, \hat{x}_{-i}), x_i) \geq u(f(x'_i, \hat{x}_{-i}), x_i).$$

如果没有代理人能够通过虚报自己的位置来提高其期望效用，我们就称随机化机制具有期望策略无关性。

我们注意到，任何具有策略无关性的确定性机制都无法实现 IFS 的任何近似（因此也无法实现 UFS 的任何近似）。

命题 4. 不存在任何确定性且策略无关的机制，能够实现 IFS 的任何近似。

证明. 根据 Feigenbaum 和 Sethuraman 的刻画 [2015], ，可以看出，对于任何确定性且策略无关的机制，都存在一种位置配置，使得设施被放置在某个代理人的位置上。这样的机制无法满足 IFS 的任何近似。 □

由于策略无关性与我们的公平公理不兼容，因此，当考虑代理人的策略行为时，我们关注模型中按比例公平机制的表现。此类表现可以用无政府价格和稳定性价格来量化。

4.3 ϵ-无政府价格与 ϵ-稳定性价格

本节中，我们计算代理人虚报其位置（在报告构成的纯纳什均衡中）时，在机制 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}下造成的效率损失。回想一下，这些机制分别是在 2-IFS 和 2-UFS 约束下使功利主义福利最大化的机制。这种效率损失可以从“最坏情况”的角度用无政府价格量化[Koutsoupias 和 Papadimitriou，1999年；Nisan 等人， 2007], 也可以从“最好情况”的角度用稳定性价格量化 [Anshelevich 等人， 2008]。

然而，对于 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}，我们证明纯纳什均衡可能并不存在，因此无政府价格也就没有明确定义。

命题 5. 对于 f^*_{2IFS}或 f^*_{2UFS}，纯纳什均衡可能不存在。

证明. 为简便起见，我们针对 f^*_{2IFS} 证明这一结论。相同的论证也完全适用于f^*_{2UFS}。

定义一个足够小的常数 $\epsilon > 0$，并考虑位置配置 $x = (\frac{1}{4}-\epsilon, \frac{3}{4}+\epsilon)$。将报告位置配置记为 $x' = (x'_1, x'_2)$，并通过对代理人1的报告位置 x'_1 分类来证明这一结论。注意，在纯纳什均衡下，f^*_{2IFS}不能将设施放置在区间 $[0, \frac{1}{2} - \epsilon)$ 内，因为代理人1可以将其报告改为 $x'_1 = \frac{1}{4} - \epsilon$，从而严格提高自己的效用。同理，在纯纳什均衡下，$f^*_{2IFS}$不能将设施放置在区间 $(\frac{1}{2} + \epsilon, 1]$ 内，因为代理人2可以将其报告改为 $x'_2 = \frac{3}{4} + \epsilon$，从而严格提高自己的效用。

情形 1（$x'_1 < \frac{1}{4} - \epsilon$）：如果 $x'_2 \leq \frac{3}{4}$，那么 f^*_{2IFS}会将设施放置在 1，因此这不是纯纳什均衡。如果 $x'_2 > \frac{3}{4}$，那么 f^*_{2IFS}会将设施放置在 $x'_1 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} - \epsilon$，因此这也不是纯纳什均衡。

情形 2 ($x'_1 \geq \frac{1}{4}$)：如果 f^*_{2IFS}将设施放置在严格大于 0 的位置，那么这不是纯纳什均衡，因为代理人 2 可以报告 $x'_2 = 1$，将设施移动到 0，从而提高其效用。如果 f^*_{2IFS}将设施放置在 0，那么这也不是纯纳什均衡，因为代理人 1 可以将其报告改为 $x'_1 = \frac{1}{4} - \epsilon$，从而严格提高其效用。

情况3 ($x'_1 \in [\frac{1}{4} - \epsilon, \frac{1}{4})$：回顾一下，在纯纳什均衡下，$f^*_{2IFS}$不能将设施放置在区间 $(\frac{1}{2} + \epsilon, 1]$。由于 x'_1，f^*_{2IFS}也不能将设施放置在区间 $[0, x'_1 + \frac{1}{4})$。如果 $x'_2 \leq \frac{3}{4}$，那么 f^*_{2IFS} 会将设施放置在 1，因此这不是纯纳什均衡。假设 $x'_2 > \frac{3}{4}$，这意味着设施必须放置在区间 $[x'_1 + \frac{1}{4}, x'_2 - \frac{1}{4}]$内。由于 f^*_{2IFS}会将设施放置在最优区间的最左端点，因此它会将设施放置在 $x'_1 + \frac{1}{4}$。因此，对于任意 $x'_1 \in [\frac{1}{4} - \epsilon, \frac{1}{4})$，都存在一个足够小的 $\delta > 0$，使代理人 1 可以改为报告 $x'_1 + \delta$ 来提高其效用；根据定义，这意味着不存在纯纳什均衡。换句话说，代理人 1 可以不断移动其报告的位置，使其渐近地接近$\frac{1}{4}$ 以提高效用；但根据情形 2，我们知道 x'_1 不能到达$\frac{1}{4}$，否则就不存在纯纳什均衡。 □

因此，我们转而证明近似纯 ϵ-纳什均衡的存在性，并计算相应的 ϵ-无政府价格和 ϵ-稳定性价格。

定义 5（Tardos 和 Vazirani [2007]）。纯 ϵ-纳什均衡是一个申报的代理人位置配置 $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$，满足任何单个代理人都无法通过改变其申报的位置，使其自身效用（相对于其真实位置）严格提高超过 ϵ。当 $\epsilon = 0$ 时，纯纳什均衡就是纯 ϵ-纳什均衡。

为证明以下定理，我们将代理人位置配置的空间划分为若干子情形，并针对每个子情形描述一个纯 ϵ-纳什均衡。

定理 4。对于任意 $\epsilon > 0$，f^*_{2IFS} 总是存在纯 ϵ-纳什均衡。

定理 5. 对任意 $\epsilon > 0$，对于 f^*_{2UFS}，始终存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。

在现实场景中，ϵ 的值可以表示定义域的离散化，或代理人能够改变其报告位置的最小距离。

对于机制 f，ϵ-无政府价格（相应地，稳定性）定义为：在所有位置配置 x 中，如实报告的所有代理人所对应的功利主义福利，与代理人在纯 ϵ-Nash 均衡中报告时所对应的最低（相应地，最高）功利主义福利之间的最坏情况比率。

定义 6. 给定 f 和 x，将纯 ϵ-Nash 均衡位置配置的集合定义为 ϵ-$Equil(f,x)$。功利主义福利的 ϵ-无政府价格定义为:

$$\epsilon\text{-}PoA(f) := \max_{x\in X^n} \frac{\sum_i u(f(x),x_i)}{\min_{x'\in\epsilon\text{-}Equil(f,x)} \sum_i u(f(x'),x_i)}.$$

功利主义福利的 ϵ-稳定性价格定义如下:

$$\epsilon\text{-}PoS(f) := \max_{x\in X^n} \frac{\sum_i u(f(x),x_i)}{\max_{x'\in\epsilon\text{-}Equil(f,x)} \sum_i u(f(x'),x_i)}.$$

现在，我们继续求出功利主义福利的 ϵ-无政府价格界限。相同的证明论证也可用于求出 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}的相同界限。

定理 6. 对于任意 $\epsilon \in (0, \frac{1}{n})$， f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}下功利主义福利的 ϵ-无政府价格至少为 $\frac{2n-1+n\epsilon}{1-n\epsilon}$。对于 $\epsilon \geq \frac{1}{n}$，无政府价格无界。

证明。假设对于任意 $\epsilon \in (0, \frac{1}{n})$，真实的代理人位置配置为 $x = (\frac{1}{2n} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2n} - \frac{\epsilon}{2}, \ldots, \frac{1}{2n} - \frac{\epsilon}{2})$。我们证明，位置配置 $x' = (1, \ldots, 1)$ 是 x下的纯 ϵ-Nash 均衡。在 x'下，f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}都会将设施放置在 0 处，导致每位代理人的效用为 $\frac{1}{2n} - \frac{\epsilon}{2}$。代理人只能通过偏离并报告 $[0, \frac{1}{2n})$ 中的位置来改变设施位置，从而使设施改为放置在 $(0, \frac{1}{n})$ 中的某处。这样，该代理人获得的效用为 $u(x_i) < \frac{1}{2n} + \frac{\epsilon}{2}$，最多增加 ϵ。由于没有代理人能够通过虚报使其效用提高超过 ϵ，因此 x'是一个纯 ϵ-Nash 均衡。现在，x下的功利主义福利为 $n - \frac{1}{2} + \frac{n\epsilon}{2}$，而 x'下则为 $\frac{1}{2} - \frac{n\epsilon}{2}$（相对于 x）。因此，对于 $\epsilon \in (0, \frac{1}{n})$，$\epsilon$-无政府价格至少为 $\frac{2n-1+n\epsilon}{1-n\epsilon}$。

对于 $\epsilon \geq \frac{1}{n}$，真实的代理人位置配置 $x = (0, \ldots, 0)$ 对应着一个纯 ϵ-Nash 均衡 $x' = (1, \ldots, 1)$，在该均衡下，每个代理人的效用均为 0。显然，没有代理人能够通过偏离 $\frac{1}{n}$ 或更多来提高自己的效用，因为代理人只能通过将报告改为 $(0, \frac{1}{2n})$ 中的位置，才能将设施改到 $(0, \frac{1}{n})$ 中的位置。由于在纯 ϵ-Nash 均衡下，每个代理人的效用均为 0，因此，对于 $\epsilon \geq \frac{1}{n}$，$\epsilon$无政府价格无界。 □

定理 7. 对任意 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2n})$， f^*_{2IFS} 和 f^*_{2UFS} 的功利主义福利的 ϵ无政府价格至多为 $\frac{2n}{1-2n\epsilon}$。

证明。在纯 ϵ-Nash 均衡下，每位代理人的效用至少为 $\frac{1}{2n} - \epsilon$。这是因为代理人如实报告自己的位置，至少可以获得 $\frac{1}{2n}$ 效用。因此，纯 ϵ-Nash 均衡下的功利主义福利至少为 $\frac{1}{2} - n\epsilon$。而在任意实例中，所有代理人都位于 0、设施位于 1 时，功利主义福利至多为 n。将这些项相除即可得到定理结论。 □

如 $\epsilon \to 0$ 所示，我们看到 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}的 ϵ-无政府价格呈线性，因此这些机制在最坏情况均衡下表现相当差。相比之下，我们证明了 ϵ-稳定性价格的渐近紧常数界。为了证明下界，我们给出一种位置配置：最优的 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}设施选址靠近区间端点，但唯一的ϵ-纳什均衡设施选址位于代理人群体的中间。

定理 8. 对于 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}，若 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2n})$，则 ϵ-稳定性价格至少为

$$\frac{4n^2 - 4n + 4 + 8n\epsilon}{2n^2 + n + 2 + (2n^3 + 4n^2 - 8n)\epsilon}.$$

当 $\epsilon \to 0$ 和 $n \to \infty$ 时，该表达式趋近于 2。

证明。假设代理人数 n 为偶数，并且（真实的）代理人位置配置为 $x = 0, \frac{3}{2n} - 2\delta, \frac{5}{2n} - 3\delta, \cdots, \frac{n-1}{2n} - \frac{n}{2}\delta, \frac{n+1}{2n} + \frac{n}{2}\delta, \frac{n+3}{2n} + \delta, \cdots, \frac{2n-1}{2n} + \delta$，其中 $\delta \geq \epsilon$ 和 $\delta - \epsilon$ 足够小。此处，f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}将设施放置在 $\frac{1}{2n}$，由此得到的功利主义福利为

$$\frac{1}{2n} + (\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}) + \delta = \frac{n^2 - n + 1}{2n} + \delta.$$

现在注意，在纯 ϵ-Nash 均衡下，设施只能放置在区间$[\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\delta, \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\delta]$内。如果设施与某个代理人的真实位置之间的距离小于 $\frac{1}{2n} - \epsilon$，该代理人就可以报告其真实位置，从而获得严格高于 ϵ 的效用。此外，设施也不能放置在区间 $[0, \frac{1}{n} - 2\delta]$ 内，因为位于 $x_1 = 0$ 的代理人可以将其报告改为 $x'_1 = \frac{1}{2n} - \delta$，从而获得高于 ϵ 的效用。

对应于 $\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\delta$ 的均衡设施位置的功利主义福利为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} + (\frac{1}{2n} + \frac{3}{2n} + \cdots + \frac{n-3}{2n}) + (\frac{1}{2n} + \frac{3}{2n} + \cdots + \frac{n-1}{2n}) + (\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} + 2)\delta + \delta \\ &= \frac{2n^2 + n + 2}{8n} + (\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - 1)\delta.\end{aligned}$$

将我们的福利相除并取极限 $\delta \to \epsilon$，得到 ϵ-稳定性价格的下界为

$$\frac{4n^2 - 4n + 4 + 8n\epsilon}{2n^2 + n + 2 + (2n^3 + 4n^2 - 8n)\epsilon}.$$

令极限 $\epsilon \to 0$，该表达式等于 $2 - \frac{6n}{2n^2+n+2}$，因此我们看到它在 $n \geq 1$时单调递增，并趋近于 2。 □

接下来我们证明，对于 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}，ϵ-稳定性价格的上界为 2。该证明遍历定理 4 的证明中每个子情形下的 ϵ-均衡，并构造使如下比值最大化的位置配置：代理人如实报告时的功利主义福利与对应于给定 ϵ-均衡设施位置的功利主义福利之比。

定理 9. 对于 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}，取极限 $\epsilon \to 0$时，ϵ-稳定性价格至多为 2。

正如我们所展示的，在 2-IFS 或 2-UFS 下最大化功利主义福利时，ϵ-Nash 均衡下的效率损失可能从常数因子到线性因子不等。为避免悲观的结果，我们可以采用随机化机制，在实现期望意义下的 2-IFS 或 2-UFS 的同时，保证策略无关性。下一节将给出这类机制的示例。

5 随机化机制

通过使用随机化机制，我们可以为 2-IFS 和 2-UFS 实现更低的公平代价，并克服其与策略无关性之间的不相容问题。我们将随机化机制定义为确定性机制上的概率分布，并将代理人的效用定义为其与设施之间的期望距离。

在随机化情形下，对于始终存在解的 IFS 和 UFS，其最优近似为 $\alpha = 2$；如将 1 个代理人置于 $_1$ $_2$ 即可看出。我们的公平性公理调整如下： $^-$

定义 7（α-期望个人公平份额（IFS））。若对于任意位置配置 x，机制 f 满足 α-期望个人公平份额（α-期望个体公平份额），则称该机制满足此条件：

$$\mathbb{E}[u(f(x), x_i)] \geq \frac{1}{\alpha n} \quad \forall i \in N.$$

定义 8（α-期望一致公平份额（UFS））。若对于任意位置配置 x，以及位于同一位置的任意代理人集合S，机制 f满足 α-期望一致公平份额（α-期望一致公平份额），则称该机制满足此条件：

$$\mathbb{E}[u(f(x), x_i)] \geq \frac{|S|}{\alpha n} \quad \forall i \in S.$$

我们首先证明，在随机化情形下最大化福利时，只需考虑仅能将设施选址于 0 或 1 的机制。

引理1。考虑一个代理人位置配置 x。对于每个以严格正概率将设施选址于 0 和 1 之间的 2-IFS/UFS 随机化机制，都存在一个仅对将设施选址于 0 或 1 具有正支撑的 2-IFS/UFS 随机化机制，使得每个代理人的期望效用至少与原机制相同。

5.1 策略无关性

根据命题 4，我们知道，在确定性设定中，策略无关性与我们的比例公平公理不兼容。在随机化情形中，机制的空间要大得多，因此我们能够克服这一不可能性。

我们首先考虑 [Cheng等人 2013]提出的机制 2。分别用 n_1 和 n_2 表示位于 $[0, 1/2]$ 和 $(1/2, 1]$ 的代理人数，机制 2 以 α 的概率将设施设在 0，以 $(1-\alpha)$ 的概率将设施设在 1，其中 $\alpha = \frac{2n_1n_2+n_2^2}{n_1^2+n_2^2+4n_1n_2}$。已知该机制具有群体策略无关性（在期望意义下），且 $\frac{3}{2}$–近似功利主义福利。我们证明该机制满足 2-UFS（因此也满足 2-IFS）。

定理 10。机制 2 在期望意义下满足 2-UFS。

5.2 平等主义福利

现在，我们给出一些关于平等主义福利的结果。具体而言，我们提出一种随机化、抗策略操纵的机制，在满足期望 2-IFS 和 2-UFS 约束的前提下，使平等主义福利最大化。

随机平等主义福利机制会在所有代理人都位于$[0, \frac{1}{2}]$,时将设施设置在 1；在所有代理人都位于 $(\frac{1}{2}, 1]$,时将设施设置在 0；否则，以 0.5 的概率将设施设置在 0 或 1。

通过分类讨论，很容易看出该机制是最优的，并满足理想的规范性属性。

命题6. 随机平等主义福利机制具有期望策略无关性，在平等主义福利方面是最优的，并满足 2-UFS。

证明. 我们首先证明策略无关性。如果所有代理人都在 $[0, \frac{1}{2}]$，或者所有代理人都在 $(\frac{1}{2}, 1]$,，那么每个代理人的期望效用至少为 $\frac{1}{2}$。任何虚报要么使其期望效用保持不变，要么因设施以概率 $\frac{1}{2}$ 各自放置在 0 或 1 而使其期望效用降至 $\frac{1}{2}$。如果每个区间内至少有一名代理人，那么只有当某代理人是其所在区间内唯一的代理人，且虚报自己位于另一个区间时，该代理人才会影响结果；但这只会使该代理人的期望效用弱降低。

现在我们证明平等主义福利的最优性以及对 2-UFS 的满足性。所有代理人都在 $[0, \frac{1}{2}]$ 以及所有代理人都在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 的情形显然成立，因此只需考察两个区间内都至少有一名代理人的情形。位于 x_i 的代理人到设施的期望距离为 $\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}(1 - x_i) = 1/2$，因此该机制满足期望一致公平份额。根据引理1，只需考虑只能将设施放置在 0 或 1 的机制。假设不以 $\frac{1}{2}$ 的概率将设施放置在任一端点，而是以 $\frac{1}{2} + p$ 的概率将设施放置在 1，以 $\frac{1}{2} - p$ 的概率将设施放置在 0，其中 $p \in (0, \frac{1}{2}]$。最右侧代理人的期望效用为 $x_n(\frac{1}{2} - p) + (1 - x_n)(\frac{1}{2} + p) = \frac{1}{2} + p(1 - 2x_n) < \frac{1}{2}$。通过对称论证，如果以 $\frac{1}{2} - p$ 的概率将设施放置在 1，以 $\frac{1}{2} + p$ 的概率将设施放置在 0，那么最左侧代理人的期望效用将严格小于 $\frac{1}{2}$。因此，在这种情形下，我们的机制是最优的。 □

注1. 由于在随机化平等主义福利机制下，每位代理人与设施之间的期望距离至少为 $1/2$，因此对于 $n \geq 2$，该机制甚至满足 1-IFS。

换言之，该机制在平等主义福利方面的近似比为 1。回想一下，公平代价可以解释为满足公平约束的相应最优机制的近似比。这引出了以下推论。

推论1. 在这 种随机化情形下，2-UFS 在平等主义福利方面的公平代价为 1 .

这与确定性设定形成鲜明对比，在确定性设定中，相应的公平代价为 $n - 1$。

5.3 2-IFS

现在我们分析功利主义福利，首先从2-IFS公理开始。考虑下面的随机化机制，该机制在满足2-IFS的条件下最大化功利主义福利：

2-IFS 随机化机制

- 如果 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}$，则以$\frac{1}{2}$的概率将设施设在0处，并以$\frac{1}{2}$的概率将设施设在1处。
- 如果 $\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{n}{2}$，– 如果 $x_1 \geq \frac{1}{2n}$,

则将设施放置在 0。

– 如果 $x_1 < \frac{1}{2n}$，则以 $1-\alpha$ 的概率将设施放置在 0，以 α 的概率将其放置在 1，其中 $\alpha = {}_{2n}{}^{\frac{1-2nx_1}{(1-2x_1)}}$。

• 如果 $\sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{n}{2}$，– 如果 $x_n \le 1 - \frac{1}{2n}$，则将设施设在 1。– 如果 $x_n > 1 - \frac{1}{2n}$，则以概率 $1-\beta$ 将设施设在 0，以概率 β 将其设在 1，其中 $\beta = {}_{2n}{}^{\frac{1-2nx_n}{(1-2x_n)}}$。

该机制背后的直觉如下。当 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}$ 时，设施位置 0 和 1 在最大化功利主义福利方面并列；以 $_{1\,2}$ 的概率将设施设在任一位置，可以实现期望个体公平份额为 2-IFS。当 $\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{n}{2}$ 时，最优设施位置为 0，因此，如果将设施设在那里不会违反任何代理人的 2-IFS，该机制就会将设施设在那里；否则，它会以确保所有代理人都满足 2-IFS 的最小概率将设施设在 1。$\sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{n}{2}$ 的情况与此对称。

我们对该机制福利最优性的证明基于其直觉。

引理 2. 在所有满足期望个体公平份额的随机化机制中，2-IFS 随机化机制在功利主义福利方面是最优的。

现在，我们通过代数方法证明，该机制具有紧的常数近似比。

定理 11. 2-IFS 随机化机制在功利主义福利方面的近似比为 $\frac{12}{11} \approx 1.091$。

这意味着 2-IFS 具有如下公平代价结果。

推论 2. 在随机化情形下，2-IFS 的功利主义福利（UW）公平代价为 $\frac{12}{11} \approx 1.091$。

5.4 2-UFS

现在我们转而分析功利主义福利背景下的 2-UFS 公理。与上一小节一样，我们首先介绍一种在满足 2-UFS 约束的前提下使功利主义福利最大化的随机化机制：

2-UFS 随机化机制

• 将 m 个不同的代理人位置按顺序排列，使得 $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$。

• 令 $S_1, \ldots, S_m$ 表示位于 m 个不同代理人位置的代理人组 .

• 若 $\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i = \frac{n}{2}$，则以概率 $_{1\,2}$ 将设施设于 0，以概率 $_{1\,2}$ 将设施设于 1。 –

• 若 $\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i > \frac{n}{2}$，– 令 k 表示满足 $x_k < \frac{1}{2}$ 的最大唯一代理人位置的索引。– 对于 $\{1, \ldots, k\}$ 中的 i，设置 $\alpha_i = \frac{|S_i| - 2nx_i}{2n\ 1-2x_i\ ()}$。

– 令 $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$，以概率 $1-\alpha$ 将设施设在 0，以概率 α设在 1。

• 如果 $\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i < \frac{n}{2}$，– 令 k 表示满足 $x_k > \frac{1}{2}$ 的最小唯一代理人位置的索引。– 对于 i 中的 $\{k, \ldots, m\}$，设 $\alpha_i = \frac{|S_i|-2nx_i}{2n\ 1-2x_i}$()。– 令 $\alpha = \min\{\alpha_k, \ldots, \alpha_m\}$，以 $1-\alpha$ 的概率将设施放置在 0，以 α 的概率放置在 1。

该机制与 2-IFS 随机化机制类似，但现在我们必须遍历代理人组，以找到能够保证所有代理人均满足 2-UFS 的 α 最优值。具体而言，如果 $\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i > \frac{n}{2}$，那么 α_i 表示使 S_i 满足 2-UFS 的位置 1 上最小概率权重。因此，将 α 设为最大的 α_i，即可使所有代理人均满足 2-UFS。

再次，我们的机制最优性的证明基于上述直觉 .

引理 3. 2-UFS 随机化机制在所有满足期望一致公平份额的随机化机制中，实现了功利主义福利的最优性。

令人惊讶的是，与 2-IFS 相比，施加更强的 2-UFS 公平性公理，对福利最优机制的近似比影响甚微。同样，近似比是通过代数方法计算得出的。

定理 12. 2-UFS 随机化机制的功利主义福利近似比为 $_2{}_7(1+2\sqrt{2}) \approx 1.09384$。

–

由定理 12 可得以下推论。

推论 3。在随机化情形下，2-UFS 对功利主义福利的公平代价为 $_2{}_7(1+2\sqrt{2})$– ≈1.09384。

6 扩展 1：比例公平

在对公平代价和随机化机制的分析中，我们分别考察了 2-IFS 和 2-UFS，它们分别为位于同一位置的个体代理人和代理人组提供最小距离保证。2-UFS 定义的一个缺点是，位置相近但不在同一位置的代理人会被视为属于独立群组。一项考虑了位置相对接近的代理人组的公理是比例公平性（PF），出自[Aziz 等人，2022a]。与 IFS 和 UFS 一样，PF 解可能不存在，因此我们将近似α–PF 定义如下：

定义 9（α-比例公平性）。给定位置配置 $\boldsymbol{x}$，若设施位置 y 满足 α-比例公平性，则对于范围 r 内的任意代理人集合 $S: = \max_{i\in S}\{x_i\} - \min_{i\in S}\{x_i\}$，

$$u(y, x_i) \geq \frac{1}{\alpha}(|S|/(n)) - r \quad \forall i \in S.$$

注意， α–比例公平性意味着 α–UFS，因此也意味着 α–IFS。然而， α–UFS 并不意味着 α–比例公平性，因此 α–比例公平性比 α–UFS 更强。

引理 4. F or $\alpha = 2$，存在一个 α–UFS 设施位置 y，它不满足 α–比例公平性 .

证明。假设 $n = 10$，并且有 2 组代理人：第一组有 7 名代理人，位于点 $c_1 = 0.35$；第二组有 3 名代理人，位于点 $c_2 = 0.55$。我们分别考虑两个区间 B_1 和 B_2，其中心分别为 c_1 和 c_2，半径分别为 $\frac{|S_1|}{2n} = \frac{7}{20} = 0.35$和 $\frac{|S_2|}{2n} = \frac{3}{20} = 0.15$。我们将设施位置 y 设在点 0.71。由于点 y 位于这两个区间之外，因此满足 2-UFS。然而，它不满足 2-PF 不等式： $d(y, c_2)$ $=0.16 \not\geq \frac{|S_1|}{20} + \frac{|S_2|}{20} - r = 0.3$。 □

现在证明 2-PF 解总是存在。证明采用归纳法，归纳对象是位于同一位置的代理人组的数量。

定理 13. 2-PF 解总是存在。

证明概要。我们对群组 m 的数量使用归纳法来证明该定理，其中每个群组都由位于同一位置的代理人组成。当 $m = 1$ 时，即所有代理人都位于同一点，2-PF 解的存在性由 2-UFS 解的存在性推出。假设对于任意满足 $k \leq m$ 的 k 个代理人组，都存在一个 2-PF 解。设有 $m + 1$ 个代理人组分别位于中心 c_1、c_2、……、c_{m+1}，这些中心从左到右排列。在每个中心 c_i 周围设定半径为 $\frac{|S_i|}{2n}$ 的开区间 B_i。我们根据开区间的交集情况讨论几种情形。如果所有开区间互不相交，可以证明存在一点 $y \in [0, 1]$ 位于开区间的并集 $B_1 \cup \cdots \cup B_{m+1}$ 之外，且满足 2-PF 不等式。如果有两个开区间（例如 B_1 和 B_2）相交，则将它们合并，并将其中的代理人放置在新的中心 c'_1。然后，我们以 c'_1 为中心，设定半径为 $\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n}$ 的开区间 B'_1。现在有 m 个代理人组分别位于 c'_1、c_3、……、c_{m+1}，根据归纳假设，我们知道 2-PF 解存在。

□

由定理2可知，对于厌恶设施选址问题，2-PF 是比例公平性的最优近似。

7 扩展2：混合模型

在混合模型中，代理人要么希望位于设施附近（如 FLP 中），要么希望远离设施（如我们的 OFLP 模型中）。这类模型有多种现实应用，例如学校或宗教礼拜场所的选址；有子女的家庭或宗教人士为了方便，希望住在设施附近，而其他人则因噪音和交通增加而希望远离设施。在我们的模型中，如果某代理人是经典代理人，并且偏好靠近设施，则称其为类型 C；如果某代理人是厌恶型代理人，并且偏好远离设施，则称其为类型 O。[4] 我们将经典代理人的集合记为 N_C，将厌恶型代理人的集合记为 N_O。

[4]我们的模型基于 Feigenbaum 和 Sethuraman 提出的模型 [2015]。

类型为 C 的代理人的效用为 $u(y, x_i) = 1 - d(y, x_i)$，类型为 O 的代理人的效用为 $u(y, x_i) = d(y, x_i)$。[5]

在混合模型中定义 IFS 和 UFS 时，我们采用与 [Aziz 等人，2022a] 及本文一致的定义。我们对混合个体公平份额（H-IFS）的定义，为每位代理人提供了适当的距离保证。

定义 10（混合个体公平份额（H-IFS））。给定一个位置配置 x，若设施位置 y 满足以下条件，则称其满足混合个体公平份额（H-IFS）：对所有 $i \in N_C$,

$$u(y, x_i) \geq \frac{1}{n} \quad \textit{or, equivalently,} \quad d(y, x_i) \leq 1 - \frac{1}{n},$$

且对所有 $i \in N_O$,

$$u(y, x_i) \geq \frac{1}{2n} \quad \textit{or, equivalently,} \quad d(y, x_i) \geq \frac{1}{2n}.$$

定义 UFS 时，我们旨在刻画同一位置、同一类型的代理人子集所获得的比例公平性保证。考虑位于同一位置的每个代理人子集 $S \subseteq N$，其中 $S = S_C \cup S_O$。S_C 表示 S 中类型为 C 的代理人，而 S_O 表示 S 中类型为 O 的代理人。

定义 11（混合一致公平份额（H-UFS））。给定一个位置配置 x，其中 $S_j \subseteq N$ 代理人[6] 具有相同的类型和位置，若设施位置 y 满足以下条件，则称其满足混合一致公平份额（H-UFS）：对所有 $i \in S_C$,

$$u(y, x_i) \geq \frac{|S_C|}{n} \quad \textit{or, equivalently,} \quad d(y, x_i) \leq 1 - \frac{|S_C|}{n},$$

并且对于所有 $i \in S_O$,

$$u(y, x_i) \geq \frac{|S_O|}{2n} \quad \textit{or, equivalently,} \quad d(y, x_i) \geq \frac{|S_O|}{2n}.$$

示例1。假设有 $n - k$ 类 C 个代理人和 k 类 O 个代理人，他们都位于同一位置。设施需要位于距离群组 $\frac{k}{2n}$ 至 $\frac{k}{n}$ 的范围内。

尽管我们的定义中，经典代理人与厌恶型代理人的效用函数有所不同，但我们仍将其设定为与相关文献一致，并使其达到能够保证解存在的最优界限。此外，根据我们的定义，若存在 H-UFS 解，则根据一个较弱的定义也必然存在解：在该定义中，同一位置的一组 S_C 经典代理人所获得的效用保证为 $\frac{|S_C|}{2n}$。

定理 14。在混合模型下，始终存在一个 H-UFS 解。

[5]此效用函数的选择改编自 [Feigenbaum 和 Sethuraman，2015年；Aziz 等人，2022a]。关于该效用模型的合理性，请参阅这些论文。[6] $j \in \{C, O\}$

8 讨论

本文为厌恶设施选址问题制定了比例公平公理，并给出了满足这些公理的福利最优确定性和随机化机制。在确定性和随机化情形下，我们针对功利主义福利和平等主义福利这两种目标，证明了 2-IFS 和 2-UFS 的紧确公平代价界。这些界分别对应于相应福利最优机制的近似比。对于确定性功利主义福利最优机制，我们证明了纯 ϵ-Nash 均衡的存在性、线性的 ϵ-无政府价格界，以及常数级的 ϵ-稳定性价格界。我们还给出了一种满足 2-UFS 的随机化策略无关机制，其功利主义近似比为常数级。

未来的研究方向可以从我们提出的 2-PF 扩展，以及将比例公平公理扩展到混合设施选址模型中展开。进一步的研究可以计算这两种扩展下的公平代价，以及这些情形下福利最优机制的无政府代价和稳定性代价。

公平代价结果的进一步扩展可以涉及不同的目标函数和效用函数。此外，也值得分析随机化功利主义福利最优机制的纳什均衡，因为这些机制在期望意义下并非策略无关。虽然我们的比例公平公理与确定性设定下的策略无关性不兼容，但我们可以考虑较弱的策略无关性概念，它们或许能与我们的公平性属性相容。

致谢

Bo Li 获得国家自然科学基金委员会项目（编号：62102333）和香港特别行政区研究资助局项目（编号：PolyU 15224823）的资助。我们谨此感谢 Minming Li 提供的宝贵反馈和建议。

参考文献

E. Anshelevich、A. Dasgupta、J. Kleinberg、É. Tardos、T. Wexler 和 T. Roughgarden。《具有公平成本分摊的网络设计中的稳定价格》。《SIAM计算杂志》，38(4):1602–1623，2008年。

H. Aziz、A. Bogomolnaia 和 H. Moulin。《公平混合：二元偏好的情形》。载于《2019年ACM经济学与计算会议论文集》，第753–781页，2019年。

H. Aziz、A. Lam、B. E. Lee 和 T. Walsh。《策略无关且比例公平的设施选址》。载于《第18届国际网络与互联网经济学会议论文集》，2022年。H. Aziz、A. Lam、M. Suzuki 和 T. Walsh。《随机排序：唯一的策略无关且比例公平的随机化设施选址机制》。《神经信息处理系统进展》，34，2022年。

H. Aziz.《投票、分配、匹配与联盟形成的概率方法》。载于《经济设计的未来》，第45–50页。施普林格，2019年。

S. Barman、U. Bhaskar 和 N. Shah. 不可分物品公平代价的最优界。载于国际网络与互联网经济学会议，第356–369页。施普林格，2020年。X. Bei、X. Lu、P. Manurangsi 和 W. Suksompong. 不可分物品的公平代价。《计算系统理论》，65(7):1069–1093，2021年。D. Bertsimas、V. F. Farias 和 N. Trichakis. 公平代价。《运筹学》，59(1):17–31，2011年。A. Bogomolnaia、H. Moulin 和 R. Stong. 二元偏好下的集体选择。《经济理论杂志》，122(2):165–184，2005年。F. Brandt. 掷骰子：概率社会选择的近期成果。《计算社会选择趋势》，第3–26页，2017年。L. Buzna、M. Kohániˇ 和 J. Janáˇcek. 一种用于字典序极小极大目标设施选址问题的近似算法。《应用数学杂志》，2014，2014年。I. Caragiannis、C. Kaklamanis、P. Kanellopoulos 和 M. Kyropoulou. 公平分配的效率。《计算系统理论》，50(4):589–610，2012年。Z. Chen、K. C. K. Fong、M. Li、K. Wang、H. Yuan 和 Y. Zhang. 具有可选偏好的设施选址博弈。《理论计算机科学》，847:185–197，2020年。Y. Cheng、W. Yu 和 G. Zhang. 路径上的厌恶设施博弈机制。载于《组合优化与应用——第五届国际会议，COCOA 2011》，中国张家界，2011年8月4日至6日。论文集，第262–271页，2011年。Y. Cheng、W. Yu 和 G. Zhang. 网络上厌恶设施博弈的策略无关近似机制。《理论计算机科学》，497:154–163，2013年。Y. Cheng、Q. Han、W. Yu 和 G. Zhang. 具有有界服务范围的厌恶设施博弈策略无关机制。《组合优化杂志》，37(2):737–755，2019年。S. Chien 和 A. Sinclair. 拥塞博弈中向近似纳什均衡的收敛。《博弈与经济行为》，71(2):315–327，2011年。R. L. Church 和 Z. Drezner. 厌恶设施选址问题综述。《计算机与运筹研究》，138:105468，2022年。I. Feigenbaum 和 J. Sethuraman. 一维混合型与厌恶型设施选址模型的策略无关机制。载于 AAAI研讨会：电子社区中的激励与信任，2015年。I. Feigenbaum、M. Li、J. Sethuraman、F. Wang 和 S. Zou. 具有线性单谷与单峰偏好的策略性设施选址问题。《自主智能体与多智能体系统》，34(2):1–47，2020年。M. Feldman、A. Fiat 和 S. Obraztsova. 霍特林-唐斯模型的变体。载于第三十届 AAAI 会议

f工智能会议 fi工智能 g会，2016年。

K. C. K. Fong、M. Li、P. Lu、T. Todo 和 M. Yokoo。具有分数偏好的设施选址博弈。载于《AAAI人工智能会议论文集》，第32卷，2018年。K. Ibara 和 H. Nagamochi。厌恶设施博弈中机制的刻画。载于《组合优化与应用——第六届国际会议（COCOA 2012）论文集》，第7402卷《计算机科学讲义》，第301–311页。施普林格，2012年。E. Koutsoupias 和 C. Papadimitriou。最坏情况均衡。载于《计算机科学理论方面年度研讨会》，第404–413页。施普林格，1999年。S. Krogmann、P. Lenzner、L. Molitor 和 A. Skopalik。具有策略性客户和设施的两阶段设施选址博弈。载于《第三十届国际人工智能联合会议论文集》，第292–298页，2021年。H. Moulin。公平分配与集体福利。麻省理工学院出版社，2003年。T. Mylvaganam、M. Sassano 和 A. Astolfi。非零和微分博弈的构造性 ϵ-纳什均衡。《IEEE自动控制汇刊》，60(4):950–965，2015年。J. Nash。议价问题。《计量经济学》，18(2):155–162，1950年。N. Nisan、T. Roughgarden、É. Tardos 和 V. Vazirani。《算法博弈论》。剑桥大学出版社，纽约，NY，美国，2007年。A. D. Procaccia 和 M. Tennenholtz。无金钱的近似机制设计。载于第14届会议，第1–26页，2013年。L. S. Shapley。 n人博弈的一个值，第143–164页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，1953年。H. Steinhaus。公平分配问题。《计量经济学》，16:101–104，1948年。E. Tardos 和 V. Vazirani。基本解概念与计算问题。载于 N. Nisan、T. Roughgarden、É. Tardos 和 V. Vazirani 编，《算法博弈论》，第1章，第3–28页。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。C. Wang 和 M. Zhang。具有连续需求的设施选址问题中的公平性与效率。载于《第20届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集》，第1371–1379页，2021年。C. Wang、X. Wu、M. Li 和 H. Chan。从设施视角看公平设施选址问题。载于《第35届AAAI人工智能会议（AAAI）论文集》，第5734–5741页，2021年。X. Xu、B. Li、M. Li 和 L. Duan。具有最小距离要求的双设施选址博弈。《人工智能研究杂志》，70:719–756，2021年。H. Zhou、M. Li 和 H. Chan。群组公平设施选址问题的策略无关机制。载于《第31届国际人工智能联合会议暨第25届欧洲人工智能会议（IJCAI-ECAI 2022）》，第613–619页，2022年。

定理 1 的证明

定理 1. 2–IFS 的功利主义福利代价为 2，且此界是紧的。

证明. 我们首先证明下界。假设 n 为偶数，代理人分别位于 $\frac{1}{2n}-\epsilon$、$\frac{3}{2n}-2\epsilon$、.....、$\frac{n-1}{2n}-\frac{n}{2}\epsilon$、$\frac{n+1}{2n}+\frac{n}{2}\epsilon$、.....、$\frac{2n-3}{2n}+2\epsilon$、$\frac{2n-1}{2n}+\epsilon$，其中 ϵ 足够小（例如，见图2）。在这个对称配置下，设施位置为 0 或 1 时，功利主义福利均达到最大值 $\frac{n}{2}$。满足 2-IFS 的设施位置只有区间 $[\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\epsilon, \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\epsilon]$ 内的点。由于区间两侧的代理人数相等，其中任意位置带来的功利主义福利都相同，因此不妨设设施位于 $_{1\ 2}$。这对应的功利主义福利为 $\frac{n}{4}+\underline{\epsilon} n(1+\frac{n}{2})$。取极限 $\epsilon \to 0$，得到比值 2。

现在我们证明上界。不失一般性，假设最优设施位置为 0。我们定义一个足够小的 $\epsilon > 0$，用于指定某些代理人位置，但在福利比率的计算中可以忽略不计。

情形 1：假设最优 2–IFS 设施位置 y^* 满足 $y^* \in [x_k, x_{k+1}]$，其中$k \leq \frac{n}{2}$。

由于 y^* 是最优的 2–IFS 设施位置，任何位于 x_k 左侧的设施位置都必须违反2–IFS。为此，假设存在某个 $y' < x_k$，使得 y' 满足 2–IFS。将设施设在 y'，其对应的效用主义福利高于设在 y^*，因为它与多数代理人的距离更远，这就导致矛盾。此外，福利比率

$$\frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x), x_i)}{\max_{y\in 2IFS(x)} \sum_i u(y, x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^k (y^* - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - y^*)}$$

随 $\sum_{i=1}^k x_i$增大，因此我们必须最大化 x_1，.....，x_k，同时确保任何位于 x_k 左侧的设施位置都违反 2–IFS。因此我们推得，对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$x_i = \frac{2i-1}{2n} - i\epsilon$，从而有

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]^n} \frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x), x_i)}{\max_{y\in 2IFS(x)} \sum_i u(y, x_i)} &= \max_{x\in[0,1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^k (y^* - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - y^*)} \\ &= \max_{x_{k+1},\ldots,x_n\in[0,1]} \frac{\sum_{i=1}^k (\frac{2i-1}{2n} - i\epsilon) + \sum_{i=k+1}^n x_i}{\sum_{i=1}^k (y^* - (\frac{2i-1}{2n} - i\epsilon)) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - y^*)}.\end{aligned}$$

现在，若要使最优设施位置为 0，必须满足 $\sum_i x_i \geq \sum_i (1-x_i)$，或者 $\sum_i x_i \geq \frac{n}{2}$。我们将其改写为 $\sum_{i=k+1}^n x_i \geq \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^k x_i$。现在，福利比率会随着 $\sum_{i=k+1}^n x_i$ 减小而增大，因此当 $\sum_{i=k+1}^n x_i = \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^k x_i$ 时，关于 $x_{k+1}, \ldots, x_n$ 的福利比率达到最大值（此时位置 1 与位置 0 并列为最优设施位置）。

将其代入福利比率，得到

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]^n}\frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x),x_i)}{\max_{y\in 2IFS(x)}\sum_i u(y,x_i)} &= \max_{x_{k+1},\ldots,x_n\in[0,1]}\frac{\sum_{i=1}^k(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon)+\sum_{i=k+1}^n x_i}{\sum_{i=1}^k(y^*-(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon))+\sum_{i=k+1}^n(x_i-y^*)}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^k(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon)+\frac{n}{2}-\sum_{i=1}^k(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon)}{(2k-n)y^*-\sum_{i=1}^k(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon)+\frac{n}{2}-\sum_{i=1}^k(\frac{2i-1}{2n}-i\epsilon)}\\ &= \frac{n/2}{(2k-n)y^*-2(\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{2k-1}{2n})+\frac{n}{2}+2\sum_{i=1}^k i\epsilon}\\ &= \frac{n/2}{(2k-n)y^*+\frac{n}{2}-\frac{k^2}{n}+2\sum_{i=1}^k i\epsilon}.\end{aligned}$$

由于 $k\le\frac{n}{2}$，将位于 (x_k,x_{k+1}) 内的设施稍微向左移动，会使总效用弱增加，因为获得效用的代理人多于失去效用的代理人。因此，由于 y^* 是最优的 2–IFS 设施，它必须尽可能靠近 x_k，即位于 $y^*=\frac{k}{n}-k\epsilon$。将其代入福利比率（并忽略可忽略不计的 ϵ），得到

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]^n}\frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x),x_i)}{\max_{y\in 2IFS(x)}\sum_i u(y,x_i)} &= \frac{n/2}{(2k-n)y^*+\frac{n}{2}-\frac{k^2}{n}}\\ &= \frac{n/2}{(2k-n)\frac{k}{n}+\frac{n}{2}-\frac{k^2}{n}}\\ &= \frac{n/2}{\frac{k^2}{n}-k+\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

简单的微积分计算表明，分母在 $k\in(0,\frac{n}{2}]$ 上（关于 $k\in$）于 $k=\frac{n}{2}$ 时达到最小值，得到福利比率 2。因此，当最优 2–IFS 设施位置 y^* 满足 $y^*\in[x_k,x_{k+1}]$，其中 $k\le\frac{n}{2}$ 时，功利主义福利下 2–IFS 的代价至多为 2。

情形 2：假设唯一的最优 2–IFS 设施位置 y 满足 $y^*\in[x_k,x_{k+1}]$，其中 $k>\frac{n}{2}$。[7]不失一般性，我们可以假设其唯一，因为另一个设施位置 $y^\dagger$ 若具有与 y^* 相同的功利主义福利，则必满足 $y^\dagger\in[x_j,x_{j+1}]$，其中 $j\le\frac{n}{2}$。与前一种情形类似，任何位于 x_{k+1} 右侧的设施位置都必须违反 2–IFS，因为 y^* 是最优设施位置；并且我们有 $y^*=x_{k+1}-\frac{1}{2n}$，因为它位于多数代理人的右侧，所以将其向左移动会降低功利主义福利。我们还指出，$x_k\le x_{k+1}-\frac{1}{n}$，因为 y^* 满足 2–IFS。

我们对位置配置应用一系列变换，其中每次变换都会提高福利比率。这些变换将位置配置转化为情形 1 的一个实例（其中最优 2–IFS 设施位置 y^* 满足 $y^*\in[x_k,x_{k+1}]$，其中 $k\le\frac{n}{2}$）。

变换如下：

- 如果 x_{k-1}（以及 x_k）位于 $y^*-\frac{1}{2n}$（$=x_{k+1}-\frac{1}{n}$），则将 x_k向右移动至 $x'_k=y^*+(y^*-x_k)$，使最优 2–IFS 设施位置 y^* 保持在原位置和/或满足情形 1。

[7]我们可以忽略 $k=n$，因为我们会得到 $y^*=1$；又由于 0 是最优设施位置，因此有 $\sum_{i=1}^n x_i\ge\frac{n}{2}$，这对应的福利比率低于 2。

•如果 $x_{k-1} \in (x_{k+1} - \frac{2}{n},\ x_{k+1} - \frac{1}{n})$，则将 x_k向右移动至 $x'_k = x_{k-1} + \frac{1}{n}$，使最优 2–IFS 设施位置 y^*向左移动至 $y' = x'_k - \frac{1}{2n}$（$= x_{k-1} + \frac{1}{2n}$）和/或满足情形 1。

•如果 $x_{k-1} \leq x_{k+1} - \frac{2}{n}$，将 x_k向右移动至 $x'_k = x_{k+1} - \frac{1}{n} + \epsilon$，使最优的 2–IFS 设施位置 y^*向左移动至 $y' = x'_k - \frac{1}{2n}(= x_{k+1} - \frac{3}{2n} + \epsilon)$，和/或满足情形 1。

为了说明移动 x_k对 y^* 的影响，回想一下，如果 y^* 移动后仍满足情形 2，那么它仍然是满足 2–IFS 的最右侧位置，因为多数代理人位于 y^*的左侧。现在，如果 y^*变为满足情形 1 的位置，那么根据我们先前的分析，福利比率至多为 2，因此可以忽略这种情况。假设出现了第一个要点，即 y^* 仍处于同一位置。回想一下，福利比率为

$$\frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x), x_i)}{\max_{y \in 2IFS(x)} \sum_i u(y, x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n |y^* - x_i|}.$$

随着代理人位置之和增加，最优设施位置仍为 0，因此分子严格增加。由于 x_k 已移动到 y^*另一侧与其等距的位置，而所有其他代理人都位于同一位置，因此分母保持不变。因此，这种变换会提高福利比率。

考虑第二和第三个要点，即 y^* 移动到 $y' = x'_k - \frac{1}{2n}$。显然，分子会增加，下面我们证明分母会减少。这种变换带来的功利主义福利变化为

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{i=1}^{k-1}(y' - x_i) + (x'_k - y') + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - y')\right] - \left[\sum_{i=1}^{k}(y^* - x_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - y^*)\right] \\ &\quad = (y' - y^*)(2k - n - 1) + (x'_k + x_k) - (y^* + y') < 0.\end{aligned}$$

我们知道，由于 $y' < y^*$和 $k \geq \frac{n+1}{2}$，$(y' - y^*)(2k - n - 1) < 0$。我们还知道，由于 y^*满足 2–IFS，$x_k \leq y^* - \frac{1}{2n}$，并且 $y' = x'_k - \frac{1}{2n}$，因此可以推得 $x'_k + x_k < y^* + y'$。因此，福利比率的分母会减少，这种变换会提高福利比率。

由于这些变换只要求 $k > \frac{n}{2}$，我们可以反复应用它们（并将 x_k更新为 y^*左侧最靠右的代理人），直到得到一个情形 1 的实例。已证明该情形的最大福利比率为 2。因此，针对功利主义福利， 2–IFS 的代价至多为 2；结合下界 2，即得定理结论。 □

B 定理 2 的证明

Theo注 2. 针对功利主义福利， 2–UFS 的代价为 2，且此界是紧的。

证明. 定理 1 的证明中的下界示例表明，针对功利主义福利， 2–UFS 的代价也至少为 2。接下来只需证明上界。

与定理 1 的证明类似，不失一般性地假设最优设施位置为 0，并定义一个足够小的 $\epsilon > 0$。我们还将证明分为两种情形：

情形 1：假设最优的 2–UFS 设施位置 y^* 满足 $y^* \in [x_k, x_{k+1}]$，其中 $k \leq \frac{n}{2}$。为避免与 y^*的 2–UFS 最优性相矛盾，代理人位置 x_1、……、x_k必须以这样的方式排列：任何位于 x_k 左侧的位置都会违反 2–UFS。此外，这些代理人的位置必须使 $\sum_{i=1}^{k} x_i$ 最大化，因为福利比率会随 $\sum_{i=1}^{k} x_i$增加。我们声称，当所有 k 代理人都位于同一个位置 $\frac{k}{2n} - \epsilon$时，这一条件成立。为说明这一点，假设在代理人 $\{1, \ldots, k\}$ 中存在 $m \leq k$ 个不同的代理人位置，并在每个不同的代理人位置处构造一个半径为 $\frac{c}{2n}$的开区间，其中 c 是位于该位置的代理人数。开区间内的任何位置都不满足 2–UFS，因此，为了使福利比率最大化且避免矛盾，最左侧的开区间必须包含 0，并且 m 个区间应以ϵ 距离相互重叠（以防止将 2–UFS 设施放置在两个区间的边界处）。当 $m = k$ 时，$i \in \{1, \ldots, k\}$、$x_i = \frac{2i-1}{2n} - i\epsilon$ 就是一个例子。因此可以看出，对于 $m \leq k$ 个不同的代理人位置，代理人位置之和为 $\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{2k-1}{2n} - m\epsilon$；当所有 k 代理人都位于 $\frac{k}{2n} - \epsilon$时，该和最大。

与 2–IFS 证明中一样，我们要求最优设施位置为 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{2}$ 0；又由于福利比率随 $x_{k+1} + \cdots + x_n$递减，因此必有 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}$且 $x_{k+1} + \cdots + x_n = \frac{n}{2} - (x_1 + \cdots + x_k)$。此外，由于 y是最优 2–UFS 位置，它必须取 $[x_k, x_{k+1}]$内最靠左的 2–UFS 点，即 $\frac{k}{n} - \epsilon$ 处。将这些表达式代入福利比率，得到

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x), x_i)}{\max_{y \in 2UFS(x)} \sum_i u(y, x_i)} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} |y^* - x_i|} \\ &= \frac{n/2}{\frac{k^2}{n} - k + \frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

在定理 1 的证明中已证明，该式的最大值为 2。因此，在这种情形下，2–UFS 的功利主义福利价格至多为 2。

情形 2：假设唯一的最优 2–UFS 设施位置 y^* 满足 $y^* \in [x_k, x_{k+1}]$，其中 $k > \frac{n}{2}$。不失一般性，我们可以假设其唯一，因为另一个设施位置 $y^\dagger$ 若具有与 y^* 相同的功利主义福利，则必满足 $y^\dagger \in [x_j, x_{j+1}]$，其中 $j \leq \frac{n}{2}$。我们将应用一系列变换，使福利比率弱增，并得到一个满足情形 1 的位置配置。变换步骤如下：将 x_k向右移动至 $x'_k = y^* + \frac{1}{2n}$。如果 $y + \frac{1}{2n}$处已经有代理人，则改为将 x_k向右移动至 $x'_k = y^* + \frac{1}{2n} + \epsilon_k$，其中 $\epsilon_k > 0$ 足够小，从而使 x'_k处没有其他代理人。[8] 这使得 y^* 保持在同一位置，和/或满足情形 1；因为如果 y^* 仍满足情形 2，那么它就是满足 2–UFS[9], 的最右侧位置，而位置 y^* 仍满足 2–UFS。此外，由于代理人位置之和严格增加，最优设施位置仍为 0。如果 y^* 满足情形 1，那么我们知道福利比率至多为 2，因此不考虑这种情况。现在我们证明，否则该变换会提高福利比率。回顾一下，福利比率为

$$\frac{\sum_i u(f^*_{UW}(x), x_i)}{\max_{y \in 2UFS(x)} \sum_i u(y, x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} |y^* - x_i|}.$$

我们知道，移动前，$y^* \geq x_k + \frac{1}{2n}$，因此分子至少增加 $\frac{1}{n}$。分母可能减小、保持不变，或最多增加 ϵ_k。由于选择 ϵ_k

[8]除非 $x_n = 1$、$y^* = 1 - \frac{1}{2n}$ 和 x_1、……、$x_{n-1} < y^*$，否则这样的位置始终存在；但很容易利用 $\sum_{i=1}^{n} \geq \frac{n}{2}$证明，这样的位置配置对应的福利比率小于 2。[9]多数代理人位于 y^*左侧，因此将 y^* 向左移动会降低功利主义福利。

足够小，我们得出结论，这一变换会使福利比率至少不降低。反复应用这些变换，并将 x_k 更新为 y^* 左侧最靠右的代理人后，我们最终会得到一个满足情形 1 的位置配置；我们知道，该配置的福利比率至多为 2。因此，功利主义福利下 2–UFS 的价格至多为 2。由于功利主义福利下 2–UFS 的价格至少为 2，定理结论得证。 □

C 定理 4 的证明

定理 4. 对任意 $\epsilon > 0$，对于 f^*_{2IFS}，总是存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。

证明. 考虑任意真实的代理人位置配置 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 以及足够小的 $\epsilon > 0$。注意，纯 ϵ-Nash 均衡也是纯 δ-Nash 均衡，其中 $\delta > \epsilon$。

情形 1（n 为偶数）：

子情形 1a：我们首先证明，若对任意 $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$，$x_i \geq \frac{2i-1}{2n}$，则存在纯 ϵ-Nash 均衡。假设情况如此，并令 $j = \arg\min_{i \in [\frac{n}{2}]}\{x_i \geq \frac{2i-1}{2n}\}$。若 $j = 1$（即 $x_1, \ldots, x_n \geq \frac{1}{2n}$），则报告位置配置 $(1, \ldots, 1)$ 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。这是因为代理人只能通过将其报告改为 $[0, \frac{1}{2n})$ 中的某个位置来影响设施位置，从而使设施从 0 移至 $(0, \frac{1}{n})$ 中的某个点，并降低其效用。

如果 $j > 1$，那么我们将证明，报告位置配置 $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) = (\frac{1}{2n} - \epsilon, \ldots, {}^{2}{}_{(j-1)}{}_{2n}{}^{-1} - (j-1)\epsilon, 1, \ldots, 1)$ 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。在 x' 下，由于 $x'_1, \ldots, x'_{j-1}$，设施无法设置在 $[0, \frac{j-1}{n} - (j-1)\epsilon)$，因此会设置在 $\frac{j-1}{n} - (j-1)\epsilon$。

假设某个代理人 $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ 将其报告改为某个 $x'_i \neq \frac{2i-1}{2n} - i\epsilon$。在由此产生的位置配置下，如果 $i = 1$，设施会移动到 $[0, \frac{1}{n} - 2\epsilon]$ 中的一个位置；如果 $i \in \{2, \ldots, j-2\}$，则会移动到 $[\frac{i-1}{n} - (i-1)\epsilon, \frac{i}{n} - (i+1)\epsilon]$ 中的一个位置，从而降低该代理人的效用。由于代理人 $j-2$ 位于 ${}^{2}{}_{(j-2)}{}_{2n}{}^{-1} - (j-2)\epsilon$，代理人 $j-1$（位于 $x'_{j-1} = {}^{2}{}_{(j-1)}{}_{2n}{}^{-1} - (j-1)\epsilon$）可以通过报告一个新位置 $x''_{j-1} = x'_{j-1} + \epsilon_1$ 来提高其效用，其中 $\epsilon_1 < \epsilon$。这会使设施向右移动。不过，代理人 $j-1$ 无法将其效用提高超过 ϵ，因为如果它报告位置 $x''_{j-1} \geq x'_{j-1} + \epsilon$，设施将设置在 $\frac{j-2}{2n} - (j-2)\epsilon$，从而降低其效用。因此，代理人 $1, \ldots, j-1$ 无法通过更改其报告位置将效用提高超过 ϵ。

现在考虑代理人 $j, \ldots, n$，其真实位置满足 $x_j, \ldots, x_n \geq \frac{2j-1}{2n}$，报告位置为 $x'_j, \ldots, x'_n = 1$。由于至少一半的代理人必须位于设施右侧，因此即使任何代理人更改其报告，设施也会取满足 2–IFS 的最左侧位置。[10]因此，来自 $\{j, \ldots, n\}$ 的代理人只能通过将报告改为位置 $(\frac{2(j-1)-1}{2n} - (j-1)\epsilon, {}^{2}{}_{\underline{(j-1)_{2n}}}{}^{+1} - (j-1)\epsilon)$ 来影响设施位置，从而使设施移至位置 $(\frac{j-1}{n} - (j-1)\epsilon, \frac{j+1}{n} - (j-1)\epsilon)$。显然，这会严格降低该代理人的效用。我们已经证明，单个代理人的任何偏离都无法使其效用增加超过 ϵ，因此 x' 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。因此，如果对于任意 $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$，$x_i \geq \frac{2i-1}{2n}$，则存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。

子情形 1b：根据对称性可知，对于任意 $i \in \{\frac{n}{2} + 2, \ldots, n\}$，当 $x_i \leq \frac{2i-1}{2n}$ 时也存在一个 ϵ-Nash 均衡。然而，当 $x_{\frac{n}{2}+1} > \frac{n+3}{4n}$ 时，对于 $i = \frac{n}{2} + 1$，完全相同的对称论证并不成立，因为在报告位置配置 $(0, \ldots, 0, \frac{n+3}{2n} + (\frac{n}{2} - 1)\epsilon, \ldots, 1 - \frac{1}{2n} + \epsilon)$ 下，

[10]回想一下，如果出现并列，f^*_{2IFS} 会选择最左侧的最优位置。

代理人 $\frac{n}{2}+1$ 可以将其报告从 $x'_{\frac{n}{2}+1}=0$ 改为 $\frac{n+1}{2n}+(\frac{n}{2})\epsilon$，使设施从$\frac{n+2}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon$移动到 $\frac{1}{2n}$。这是因为 f^*_{2IFS}在出现并列时优先选择最左侧的最优位置，从而提高了效用，因为 $x_{\frac{n}{2}+1}\in(\frac{n+3}{4n},\frac{n+1}{2n}]$。

现在我们证明，若对于所有 $i\in\{\frac{n}{2}+2,\ldots,n\}$ 和 $x_{\frac{n}{2}+1}\in(\frac{n+3}{4n},\frac{n+1}{2n}]$，存在纯 ϵ-Nash 均衡。只需假设对于所有 $i\in\{1,\ldots,\frac{n}{2}\}$，$x_i<\frac{2i-1}{2n}$；否则，根据子情形 1a，我们知道存在纯 ϵ-Nash 均衡。根据 $x_{\frac{n}{2}+1}$ 所在的位置，我们将此证明分为另外两个子情形。

子情形 1bi：在此子情形中，我们考虑 $x_{\frac{n}{2}+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$。我们声称，$x'=(\frac{1}{2n}-\epsilon,\ \frac{3}{2n}-2\epsilon,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2n}-(\frac{n}{2})\epsilon,\ 0,\ \frac{n+3}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon,\ \ldots\ldots,\ 1-\frac{1}{2n}+\epsilon)$是一个纯 ϵ-Nash 均衡。在 x' 下，设施被放置在唯一可行区间的最右端点，即 $y'=\frac{n+2}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon$，因为该点左侧有多数代理人。如果任何代理人 $i\in\{1,\ldots,\frac{n}{2}-1\}$ 更改其报告，那么当 $i=1$ 时，设施将移动到 $[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}-2\epsilon]$ 中的某个位置；当 $i\in\{2,\ldots,\frac{n}{2}-1\}$ 时，则移动到 $[\frac{i-1}{n}-(i-1)\epsilon、\ \frac{i}{n}-(i+1)\epsilon]$ 中的某个位置。这会降低代理人 i 的效用，因为 $x_i<\frac{2i-1}{2n}$。现在考虑代理人 $\frac{n}{2}$（报告 $x'_{\frac{n}{2}}=\frac{n-1}{2n}-(\frac{n}{2})\epsilon$）。$y'$ 右侧的任何位置都不可行，并且在 x' 下，有 $\frac{n}{2}+2$ 个代理人的报告（包括 $x'_{\frac{n}{2}}$）位于设施左侧。因此，代理人 $\frac{n}{2}$ 只能通过将其报告更改为 $(\frac{n+1}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon,\ 1]$ 中的某个点来影响设施位置，从而使设施移动到可行区间的最左端点，即 $\frac{n-2}{2n}-(\frac{n}{2}-1)\epsilon$。这会降低其效用，因为 $x_{\frac{n}{2}}<\frac{n-1}{2n}$。接下来考虑代理人 $\frac{n}{2}+1$（报告 $x'_{\frac{n}{2}+1}=0$），其报告只能使设施在可行区间 $[\frac{1}{2}-(\frac{n}{2})\epsilon,\ \frac{n+2}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon]$ 内改变位置。由于 $x_{\frac{n}{2}+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，最优选择是让设施位于 $y'=\frac{n+2}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon$，这可通过报告 $x'_{\frac{n}{2}+1}=0$ 实现。最后，考虑代理人 $\frac{n}{2}+2,\ \ldots\ldots,\ n$。与子情形 1a 类似，代理人 $\frac{n}{2}+2$ 通过报告位置 $x''_{\frac{n}{2}+2}=x'_{\frac{n}{2}+2}-\epsilon_1$（其中 $\epsilon_1<\epsilon$），可以使其效用提高严格小于 ϵ。若 $\epsilon_1\geq\epsilon$，设施将被放置在 $\frac{n+4}{2n}+(\frac{n}{2}-2)\epsilon$，从而降低该代理人的效用。代理人 $i\in\{\frac{n}{2}+3,\ldots,n\}$ 只能使设施位于 $[\frac{i-1}{n}+(i-1)\epsilon、\ \frac{i+1}{n}+(i-2)\epsilon]$ 中的某个位置。由于对于所有 $i\in\{\frac{n}{2}+2,\ldots,n\}$，$x_i>\frac{2i-1}{2n}$，这会降低效用。由于没有任何单个代理人能够通过更改报告使其效用提高超过 ϵ，因此 x' 是一个纯 ϵ-Nash 均衡，所以此子情形下存在这样的均衡。

子情形 1bii：在此子情形中，我们考虑 $x_{\frac{n}{2}+1}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$。我们声称，$x'=(\frac{1}{2n}-\epsilon,\frac{3}{2n}-2\epsilon,\ldots,\frac{n-1}{2n}-(\frac{n}{2})\epsilon,\frac{n+1}{2n}+(\frac{n}{2})\epsilon,\frac{n+3}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon,\ldots,1-\frac{1}{2n}+\epsilon)$ 是一个纯 Nash ϵ- 均衡。此时，设施被放置在最优区间的最左端点，即 $\frac{1}{2}-(\frac{n}{2})\epsilon$。按照子情形 1bi 中相同的推理，很容易看出，代理人 $1,\ldots,\frac{n}{2}$ 以及代理人 $\frac{n}{2}+2,\ldots,n$ 无法通过虚报使其效用提高超过 ϵ。在此子情形中，能够通过略微向右虚报使效用提高不到 ϵ 的是代理人 $\frac{n}{2}$，而不是代理人$\frac{n}{2}+2$。此外，与子情形 1bi 中一样，代理人 $\frac{n}{2}+1$ 只能将设施的位置改变到可行区间 $[\frac{1}{2}-(\frac{n}{2})\epsilon,\frac{n+2}{2n}+(\frac{n}{2}-1)\epsilon]$ 内；但由于我们有 $x_{\frac{n}{2}+1}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，其最优设施位置$\frac{1}{2}-(\frac{n}{2})\epsilon$ 可通过报告 $x'_{\frac{n}{2}+1}=\frac{n+1}{2n}+(\frac{n}{2})\epsilon$ 实现。

子情形 1c：提醒我们考虑这样的子情形：对于所有 $i\in\{1,\ldots,\frac{n}{2}\}$，$x_i<\frac{2i-1}{2n}$；对于所有 $i\in\{\frac{n}{2}+1,\ldots,n\}$，$x_i>\frac{2i-1}{2n}$。在此子情形下，我们断言位置配置 $x'=(x'_1,\ldots,x'_n)=(\frac{1}{2n}-\epsilon,\frac{3}{2n}-2\epsilon,\ldots,\frac{n-1}{2n}-(\frac{n}{2})\epsilon,1,\ldots,1)$ 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。此时，设施位于$\frac{1}{2}-(\frac{n}{2})\epsilon$。运用与第一个子情形相同的论证可知，报告位置为 $x'_1=\frac{1}{2n}-\epsilon,x'_2=\frac{3}{2n}-2\epsilon,\ldots,x'_{\frac{n}{2}-1}=\frac{n-3}{2n}-(\frac{n}{2}-1)\epsilon$ 的代理人 $1,\ldots,\frac{n}{2}-1$ 没有改变报告的激励。报告位置为 $x'_{\frac{n}{2}}=\frac{n-1}{2n}-(\frac{n}{2})\epsilon$ 的代理人 $\frac{n}{2}$ 可以通过将报告改为 $x''_{\frac{n}{2}}=x'_{\frac{n}{2}}+\epsilon_1$ 来提高效用，但提高幅度严格小于 ϵ，其中 $\epsilon_1<\epsilon$。与

子情形 1a 中类似，若 $\epsilon_1 \geq \epsilon$，则设施位于 $\frac{n-2}{2n} - (\frac{n}{2} - 1)\epsilon$，从而降低该代理人的效用。在 x' 下将位置报告为 1 的代理人 $\frac{n}{2} + 1, \ldots, n$，只能通过将报告改为 $(\frac{n-1}{2n} - (\frac{n}{2})\epsilon, \frac{n+1}{2n} - (\frac{n}{2})\epsilon)$ 中的位置，才能将设施移动到 $(\frac{1}{2} - (\frac{n}{2})\epsilon, \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - (\frac{n}{2})\epsilon)$ 中的位置。[11] 然而，由于 $x_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, x_n > \frac{n+1}{2n}$，这会导致他们的效用降低。我们已经证明，在 x' 下，任何单个代理人都无法通过改变报告使其效用增加超过 ϵ，因此 x' 是一个 ϵ-Nash 均衡。通过穷举情形，我们已经证明，若 n 为偶数，则在 f^*_{2IFS} 下总是存在纯 ϵ-Nash 均衡。

情形 2（n 为奇数）：通过与 n 为偶数的情形相同的推理，我们可以看出，如果对于任意 $i \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2},\}$，$x_i \geq \frac{2i-1}{2n}$，则存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。具体而言，令 $j = \arg\min_{i \in [\frac{n-1}{2}]} \{x_i \geq \frac{2i-1}{2n}\}$，则当 $j = 1$时，纯 ϵ-Nash 均衡为 $x' = (1, \ldots, 1)$；当 $j > 1$时，则为$x' = (\frac{1}{2n} - \epsilon, \ldots, {}^{2}{}_{(j-1)_{2n}}{}^{-1} - (j-1)\epsilon, 1, \ldots, 1)$。此外，对称地推理可知，如果对于任意 $i \in \{\frac{n+3}{2}, \ldots, n\}$，$x_i \leq \frac{2i-1}{2n}$，则存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。剩下需要考虑的是如下情形：对于所有 $i \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$，$x_i < \frac{2i-1}{2n}$；对于所有 $i \in \{\frac{n+3}{2}, \ldots, n\}$，$x_i > \frac{2i-1}{2n}$（且 $x_{\frac{n+1}{2}}$ 可以取任意值）。

子情形 2a：这里我们考虑 $x_{\frac{n+1}{2}} \geq \frac{1}{2}$ 的子情形。我们声称，$x' = (\frac{1}{2n} - \epsilon, \frac{3}{2n} - 2\epsilon, \ldots, \frac{n-2}{2n} - (\frac{n-1}{2})\epsilon, 1, \frac{n+2}{2n} + (\frac{n+3}{2})\epsilon, \ldots, 1 - \frac{1}{2n} + \epsilon)$ 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。此处，可行代理人位置的区间为 $[\frac{n-1}{2n} - (\frac{n-1}{2})\epsilon, \frac{n+1}{2n} + (\frac{n+3}{2})\epsilon]$，设施设在该区间的最左端点，即 $y' = \frac{n-1}{2n} - (\frac{n-1}{2})\epsilon$，因为区间右侧有多数代理人。代理人 1 的任何虚报都会使设施被设在区间 $[0, \frac{1}{n} - 2\epsilon]$ 内，从而降低其效用，因为 $x_1 < \frac{1}{2n}$。代理人 $i \in \{2, \ldots, \frac{n-3}{2}\}$ 只能使设施被设在 $[\frac{i-1}{n} - (i-1)\epsilon, \frac{i}{n} - (i+1)\epsilon]$ 内，这会降低其效用。通过对称论证可知，代理人 $\frac{n+5}{2}, \ldots, n$ 无法通过虚报提高其效用。代理人 $\frac{n-1}{2}$（报告为 $x'_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n-2}{2n} - (\frac{n-1}{2})\epsilon$）可以通过将报告改为 $x''_{\underline{n-1}} = x'_{\underline{n-1}} + \epsilon_1$ 来提高效用，但提高幅度严格小于 ϵ，其中 $\epsilon_1 < \epsilon$。与子情形 1a 类似，如果 $\epsilon_1 \geq \epsilon$，该代理人的效用将会降低。由于在 x' 下设施取最左侧的可行点，代理人 $\frac{n+3}{2}$ 只能通过虚报，使设施位置变为最右侧的可行点（位于 $\frac{n+3}{2n} + (\frac{n+5}{2})\epsilon$），方法是让设施位置左侧出现多数代理人。这会降低该代理人的效用。最后，很容易看出，代理人 $\frac{n+1}{2}$ 无法通过虚报提高其效用：x' 下的不可行区域是由其他代理人的报告决定的，因此代理人 $\frac{n+1}{2}$ 无法使设施被设在可行区间之外。由于 $x_{\frac{n+1}{2}} \geq \frac{1}{2}$，该区间的最左端点是其在所有可能报告中最优的设施选址。因此，x' 是一个纯 ϵ-Nash 均衡，因为没有代理人能通过虚报将其效用提高超过 ϵ，由此该子情形下存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。

子情形 2b：在此子情形中，$x_{\frac{n+1}{2}} < \frac{1}{2}$（对于所有 $i \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$，$x_i < \frac{2i-1}{2n}$，以及对于所有 $i \in \{\frac{n+3}{2}, \ldots, n\}$ 2 $x' = \frac{1}{2n} - \epsilon\ \frac{3}{2n} -$，$x_i > \frac{2i-1}{2n}$）。通过采用与子情形 a 中相同的对称论证，$2\epsilon \ldots \overline{\quad} \overline{\quad} \epsilon\ 0\ \overline{\quad} \overline{\quad} \epsilon \ldots$（，，，$\frac{n-2}{2n} - (\frac{n-1}{2})$，，$\frac{n+2}{2n} + (\frac{n+3}{2})$，，$\overline{\quad}\ \epsilon\ 1 - \frac{1}{2n} + \epsilon$）是一个纯 ϵ-Nash 均衡，其中设施位于 $\frac{n+1}{2n} + (\frac{n+3}{2})$。

在此证明中，我们为每种可能的位置配置都给出了一个纯 ϵ-Nash 均衡，因此通过穷举情形，对于 f^*_{2IFS}，ϵ-纯纳什均衡总是存在的。 □

[11] 我们注意到 $\sum_i x'_i < \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{4}(\frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n}) = \frac{5n}{8} - 1$，这小于 $\frac{n}{2}$ 当且仅当 $n = 2$。然而，如果 $n = 2$，显然 x' 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。

D 定理 5 的证明

定理 5. 对任意 $\epsilon > 0$， f^*_{2UFS} 总存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。

证明。在定理 4 的证明中，我们将所有可能的代理人位置配置分为若干子情形，并为每个子情形提供了一个纯 ϵ-Nash 均衡。我们声称，对于每个子情形，我们在定理 4 的证明中描述的纯 ϵ-Nash 均衡对于f^*_{2UFS}而言也是一个 ϵ-Nash 均衡。首先，我们指出，每个给定的纯 ϵ-Nash 均衡在 f^*_{2UFS}下都有相同的设施选址。这是因为每个纯 ϵ-Nash 均衡中，都有 n代理人报告 n个不同的位置；多个代理人报告 0 或 1 的均衡除外。在这些均衡下，设施位于可行区间最右端（分别为最左端），因此改为采用 2–UFS 约束不会影响设施选址。

通过简单的逐案分析可知，对于定理 4 的证明中所述的每个纯 ϵ-Nash 均衡 x'，在 f^*_{2UFS}下，任何代理人改变其报告，都无法使其效用提高超过 ϵ。同样的论证也完全适用于 f^*_{2UFS}以及 2–UFS 的约束，即使考虑代理人可以将报告改为与另一代理人的报告相同的位置（从而扩大报告位置周围的“不可行”区间）。直观来说：如果代理人 i 将报告从 x'_i改为这样的位置，要么会使设施移至靠近 x'_i 的某个位置，而该位置因此变得可行；要么会将设施“推向” x_i（例如，在 x' 下设施取最左侧的可行位置，而代理人 i 将其报告从 $x'_i = 1$改为设施左侧最右边的报告位置）。因此，在 f^*_{2UFS} 下，每一种可能的代理人位置配置都存在一个纯 ϵ-Nash 均衡。 □

E 定理 9 的证明

定理 9。 对于 f^*_{2IFS}和 f^*_{2UFS}，取极限 $\epsilon \to 0$时， ϵ-稳定性价格至多为 2 .

证明。我们通过逐一考察定理 4 证明中的各个子情形来证明此定理；该证明给出了针对位置配置类型，在纯 ϵ-纳什均衡下的设施选址。对于每个子情形，我们考察代理人如实报告时最优设施位置所对应的功利主义福利，与给定的 ϵ-均衡设施位置所对应的功利主义福利之间的福利比率。我们给出使该福利比率最大化的代理人位置，并计算该比率，以证明其上界为 2。虽然证明是针对 f^*_{2IFS}给出的，但对于 f^*_{2UFS}也完全适用，因为 f^*_{2IFS}的纯 ϵ-纳什均衡集合中的结果也都是 f^*_{2UFS}的均衡。

我们首先注意到， f^*_{2IFS}不能将设施放置在 $(0, \frac{1}{2n})$ 内，因为这意味着设施左侧没有代理人，但此时将设施放置在 0 会带来严格更高的功利主义福利。还要注意，如果 $f^*_{2IFS}(x) = 0$，那么福利比率为 1，因为 $x' = (1, \ldots, 1)$ 是一个纯 ϵ-Nash 均衡。

情形 1（n 为偶数）：

子情形 1a：这里我们假设，对于某个 $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$，有 $x_i \geq \frac{2i-1}{2n}$。令 $j = \arg\min_{i \in [\frac{n}{2}]}\{x_i \geq \frac{2i-1}{2n}\}$。另外，假设在位置配置的对称侧，不存在等价的 $k \in \{\frac{n}{2}+1, \ldots, n\}$，使得 $x_k \leq \frac{2k-1}{2n}$且 $k > n - j + 1$；否则，我们就可以“翻转”该配置，并考虑更小的 j。如定理 4 的证明所述，存在一个纯

ϵ-Nash 均衡，其中设施位于 $\frac{j-1}{n} - (j-1)\epsilon$。取极限 $\epsilon \to 0$，此处的福利比率为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - f^*_{2IFS}(x)|}{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \frac{j-1}{n}|}.$$

将 $x_1 = 0$和 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$设为相应值，可使分子最大化；其余代理人$x_2 \dots x_n$位于此设施选址的右侧。在我们的 ϵ-Nash 均衡选址下，设施位于代理人 x_{j-1}和 x_j之间，因此，为了使福利比率最大化，我们令代理人位置 $x_2 \dots x_{j-1}$尽可能靠右（同时满足约束 $j = \arg\min_{i \in [\frac{n}{2}]}\{x_i \geq \frac{2i-1}{2n}\}$）。因此，对于某个足够小的 $\delta > 0$，我们有 $x_2, \dots, x_{j-1} = \frac{3}{2n} - \delta, \dots, \frac{2j-3}{2n} - (j-2)\delta$。根据最初的假设，我们还令 $x_n \dots x_{n-j+2} = \frac{2n-1}{2n} + \delta, \dots, {}^{2}{}_{2n}{}^{-1} + (j-1)\delta$，取不违反假设的最小值（取最小值可使关于这些位置的福利比率最大化）。最后，我们将$x_j \dots x_{n-j+1}$的值尽可能减小至$\frac{2j-1}{2n}, \dots, \frac{2j-1}{2n} + (n-2j+2)\delta$。因此，在使我们的 ϵ-Nash 均衡下福利比率最大化的位置配置中，对应于 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n} + (\frac{1}{n} + \dots + \frac{j-2}{n}) + (n-2j+2)(\frac{j-1}{n}) + (\frac{n-1}{n} + \dots + \frac{n-j+1}{n}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{(j-1)(j-2)}{2n} + \frac{2(n-2j+2)(j-1)}{2n} + \frac{(j-1)(2n-j)}{2n} \\
&= \frac{-4j^2 + 4nj + 6j - 4n - 1}{2n},
\end{aligned}$$

并且（取 $\epsilon \to 0$）对应于 $f^*_{2IFS}(x') = \frac{j-1}{n} + (j-1)\epsilon$的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{j-1}{n} + (\frac{2j-5}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}) + (\frac{2n-4j+5}{2n} + \dots + \frac{2n-j}{2n}) \\
&= \frac{4j-4}{4n} + \frac{(j-2)(2j-4)}{4n} + \frac{(j-1)(4n-5j+5)}{4n} \\
&= \frac{-3j^2 + 4jn + 6j - 4n - 1}{4n}.
\end{aligned}$$

将这些项相除，得到福利比率的最大值为

$$\frac{8nj + 12j - 8j^2 - 8n - 1}{4nj + 6j - 3j^2 - 4n - 1} = 2 - \frac{2j^2 - 1}{-3j^2 + 4jn + 6j - 4n - 1}.$$

$-3j^2 + 4jn + 6j - 4n - 1$对 j的导数为 $4n + 6 - 6j$，对于所有 $j \in [1, \frac{n}{2}]$均为正，因此它关于 j单调递增，并在$j = 1$处取得受约束的最小值。由于 $-3j^2 + 4jn + 6j - 4n - 1$在 $j = 1$处为正，我们可以看出，分数 $\frac{2j^2-1}{-3j^2+4jn+6j-4n-1}$对于所有 n和 $j \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$均为正。因此，在这个子情形中，对于所有偶数 $n \geq 2$和 $j \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$，最大福利比率的上界为 2。

子情形 1b：这里我们假设，对于 $i \in \{\frac{n}{2}+2, \dots, n\}$，$x_i > \frac{2i-1}{2n}$。我们还假设，对于 $x_i < \frac{2i-1}{2n}$ $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$，否则最大福利比率已在子情形 1a 中涵盖。对于这组均衡，我们有 $f^*_{2IFS}(x') \in ({}^{x}{}_{\frac{n}{2}}, {}^{x}{}_{\frac{n}{2}+2})$，因此与前一个子情形一样，我们注意到，以下代理人位置可使福利比率最大化： $x_1 = 0$ (这会导致

$f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$，使分子最大化），$x_2$，.....，$x_{\frac{n}{2}} = \frac{3}{2n} - \delta$，.....，$\frac{n-1}{2n} - (\frac{n}{2} - 1)\delta$(使分子最大化并使分母最小化)，以及 $x_{\frac{n}{2}+2}$，.....，$x_n = \frac{n+3}{2n} + (\frac{n}{2} - 1)\delta$，.....，$\frac{2n-1}{2n} + \delta$(因为从分子和分母中减去相同的量会使比率增大)，其中 $\delta > 0$ 足够小。证明分为两个进一步的子情形，具体取决于 $x_{\frac{n}{2}+1}$ 的位置。

子情形 1bi：在此子情形中，我们假设 $x_{\frac{n}{2}+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$，根据定理 4 的证明，我们知道存在一个纯 ϵ-Nash 均衡，在该均衡下，f^*_{2IFS}将设施[12]放置在 $\frac{n+2}{2n} + (\frac{n}{2} - 1)\delta$。为了最大化福利比率，我们将 $x_{\frac{n}{2}+1}$尽可能向右放置于 $x_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \delta$。令 $\delta \to 0$，与 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$对应的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n} + (\frac{2}{2n} + \cdots + \frac{n-2}{2n}) + \frac{1}{2} + (\frac{n+2}{2n} + \cdots + \frac{2n-2}{2n}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{n-2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3(n-2)}{8} \\
&= \frac{2n^2 - 2n + 2}{4n},
\end{aligned}$$

与 $f^*_{2IFS}(x') = \frac{n+2}{2n} + (\frac{n}{2} - 1)\delta$对应的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{n+2}{2n} + (\frac{n-1}{2n} + \cdots + \frac{3}{2n}) + \frac{1}{2n} + (\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{n-3}{2n}) \\
&= \frac{n+2}{2n} + \frac{(n-2)(n+2)}{8n} + \frac{1}{2n} + \frac{(n-2)^2}{8n} \\
&= \frac{n^2 + 6}{4n}.
\end{aligned}$$

将这两个福利值相除，得到最大福利比率 $\frac{2n^2-n+2}{n^2+6}$；对于所有偶数 $n \geq 2$，该比率的上界为 2。

子情形 1bii：在此子情形中，我们有 $x_{\frac{n}{2}+1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$，且均衡设施位置为$f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2} - (\frac{n}{2})\delta$。为使福利比率最大，我们取 $x_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$；并且注意到，取 $\delta \to 0$时，这与引理 8 的证明中的位置配置相同（福利比率为$2 - \frac{6n}{2n^2+n+2}$）。因此可见，在此子情形中，对于所有偶数 $n \geq 2$，最大福利比率的上界为 2。

子情形 1c：在此子情形中，对于所有 $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$，我们有 $x_i < \frac{2i-1}{2n}$；对于所有 $i \in \{\frac{n}{2} + 1, \ldots, n\}$，我们有 $x_i > \frac{2i-1}{2n}$；均衡设施位置为 $\frac{1}{2} - (\frac{n}{2})\delta$。在这些约束下，使福利比率最大的代理人位置与子情形 1bii 中的相同，只是$x_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \delta$。取 $\delta \to 0$后，我们得到相同的福利比率；对于所有偶数 $n \geq 2$，其上界为 2。

子情形 **2** n 1 $x_i \geq \frac{2i-1}{2n}$ $i \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$ $j = \min_{i \in [\frac{n-1}{2}]} \{x_i \geq \frac{2i-1}{2n}\}$（为奇数）：与子情形 a 类似，我们假设对于某个，并令 arg min，由此得到均衡设施位置 $\frac{j-1}{n}$。我们再次假设，在位置配置的对称侧，不存在等价的 $k \in \{\frac{n+3}{2}, \ldots, n\}$ 使得 $x_k \leq \frac{2k-1}{2n}$且 $k > n - j + 1$。子情形 1a 中相同的位置配置可应用于奇数 n，并且也使奇数 n的福利比率达到最大。因此，在此子情形中，对于所有偶数 $n \geq 2$，最大福利比率的上界为 2。

[12]虽然定理 4 的证明以 ϵ 表示设施位置，但为保持证明中的一致性，我们在此证明中使用 δ。当我们取极限 $\delta \to 0$ 时，两者没有区别。

子情形 **2** $x_i < \frac{2i-1}{2n}$ $i \in \{1,\ldots,\frac{n-1}{2}\}$ $x_i > \frac{2i-1}{2n}$ $i \in$a: $\{\frac{n+3}{2},\ldots,n\}$ $x_{\frac{n+1}{2}} \geq \frac{1}{2}$ 4, ϵ 在此子情形中，对于所有 以及对于所有 。此外，。如定理 的证明所示，存在一个纯 -Nash 均衡，其中设施位于 $\frac{n-1}{2n} - (\frac{n-1}{2})\delta$，介于代理人位置 $x_{\frac{n-1}{2}}$和 $x_{\frac{n+1}{2}}$之间。因此，为使福利比率最大，我们令 $x_1 = 0, x_2, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}} = \frac{3}{2n} - \delta, \ldots, \frac{n-2}{2n} - (\frac{n-3}{2})\delta, x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}$，以及 $x_{\frac{n+3}{2}}, \ldots, x_n = \frac{n+2}{2n} + (\frac{n-1}{2})\delta, \ldots, \frac{2n-1}{2n} + \delta$，从而得到 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$。取极限 $\delta \to 0$，与 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$对应的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n} + (\frac{2}{2n} + \cdots + \frac{n-3}{2n}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + (\frac{n+1}{2n} + \cdots + \frac{2n-2}{2n}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{(n-3)(n-1)}{8n} + \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} \\
&= \frac{2n^2 - 2n + 2}{4n},
\end{aligned}$$

而与 $f^*_{2IFS}(x') = \frac{n-1}{2n} - (\frac{n-1}{2})\delta$相对应的功利主义福利为

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{2n} + (\frac{n-4}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n} + (\frac{3}{2n} + \cdots + \frac{n}{2n}) \\
&= \frac{4n}{8n} + \frac{(n-3)^2}{8n} + \frac{(n-1)(n+3)}{8n} \\
&= \frac{n^2+3}{4n}.
\end{aligned}$$

将这些福利相除，得到最大福利比率 $\frac{2n^2-2n+3}{n^2+3}$；对于所有奇数 $n \geq 3$，该比率的上界为 2。

子情形 2b：在此子情形中，对于所有 $i \in \{1,\ldots,\frac{n-1}{2}\}$，我们仍有 $x_i < \frac{2i-1}{2n}$；对于所有 $i \in \{\frac{n+3}{2},\ldots,n\}$，我们仍有 $x_i > \frac{2i-1}{2n}$。然而现在我们有 $x_{\frac{n+1}{2}} < \frac{1}{2}$，且均衡设施位置为 $\frac{n+1}{2n} + (\frac{n+3}{2n})\delta$。为使福利比率最大，我们令 $x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2} - \delta$，并将其余代理人位置设为与子情形 2a 中相同。取极限 $\delta \to 0$后，显然，与 $f^*_{2IFS}(x) = \frac{1}{2n}$相对应的功利主义福利与子情形 2a 中相同，取值为 $\frac{2n^2-2n+2}{4n}$。此外，与 $f^*_{2IFS}(x') = \frac{n+1}{2n} + (\frac{n+3}{2n})\delta$相对应的功利主义福利也与子情形 2a 中相同。原因是，此子情形与子情形 2a 之间唯一的区别，在于均衡设施位置从 $\frac{n-1}{2n} - (\frac{n-1}{2})\delta$变为 $\frac{n+1}{2n} + (\frac{n+3}{2n})\delta$。由于$\delta \to 0$，设施与 $x_{\frac{n+1}{2}}$之间的距离保持不变，而位于 $x_{\frac{n+3}{2}}$、.....、 x_n的代理人损失的效用，恰好由位于 x_1、.....、 $x_{\frac{n-1}{2}}$的代理人获得的效用所抵消。因此，在此子情形中，最大福利比率同样为 $\frac{2n^2-2n+3}{n^2+3}$；对于所有奇数$n \geq 3$，该比率的上界为 2。

通过穷举情形，我们已证明，对于 f^*_{2IFS}，对每个代理人位置配置，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，都存在一个纯 ϵ-Nash 均衡，对应于一种设施位置；当代理人如实报告时，该位置至少能达到一半的功利主义福利（即福利比率的上界为 2）。换言之，对于 f^*_{2IFS}，当 $\epsilon \to 0$ 时， ϵ-稳定性价格至多为 2。 □

F 引理1的证明

引理1. 考虑任意代理人位置配置 x。对于每个 2–IFS/UFS 随机化机制，若其在 0 和 1 之间的设施选址上赋予正支撑，则存在一个2–IFS/UFS 随机化机制，仅在 0 或 1 处的设施选址上赋予正支撑，并且能使每个代理人的期望效用至少不低于前者。

证明。考虑任意位置配置 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，并假设对于该配置，某个（2–IFS/UFS）机制以概率 p 将设施设置在位置 $c \in (0, 1)$。如果该机制改为以概率 cp 将设施设置在位置 1，并以概率 $p - cp$ 将设施设置在位置 0，则每位代理人与设施之间的期望距离都会增加。这是因为对于任意 $x_i \le c$,

$$\begin{aligned} cp(1 - x_i) + (p - cp)x_i &= px_i - 2cpx_i + cp \\ &= cp + px_i(1 - c) - cpx_i \\ &\ge cp - cpx_i \\ &\ge p(c - x_i), \end{aligned}$$

并且对于任意 $x_j > c$,

$$\begin{aligned} cp(1 - x_j) + (p - cp)x_j &= px_j + cp(1 - x_j) - cpx_j \\ &\ge px_j - cpx_j \\ &\ge p(x_j - c). \end{aligned}$$

因此，这一修改后的机制同样满足 2–IFS/UFS，并且与原机制相比，使每位代理人的效用弱增加。通过反复应用这一修改，任何在 0 和 1 之间的某个位置上分配正概率的 2–IFS/UFS 机制，都可以修改为一个仅在位置 0 和 1 上分配正概率的 2–IFS/UFS 机制。

□

G 定理10的证明

定理 10. 机制 2 满足 2–UFS。

证明。考虑位于 x_i 的一个由 $|S|$ 代理人组成的联盟，并假设 $[0, \frac{1}{2}]$ 中有 n_1 个代理人，$(\frac{1}{2}, 1]$ 中有 n_2 个代理人。设施的期望距离为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(d(y, x_i)) &= \frac{2n_1n_2 + n_2^2}{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2}x_i + \frac{n_1^2 + 2n_1n_2}{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2}(1 - x_i) \\ &= \frac{n_1^2 + 2n_1n_2}{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2} + x_i\left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1n_2}\right). \end{aligned}$$

由于对称性，只需考虑 $x_i \in [0, \frac{1}{2}]$；又由于 $\mathbb{E}(d(y, x_i))$ 是 x 的线性函数，我们进一步将注意力限制在 $x_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ 上。

当 $x_i = \frac{1}{2}$、 $\mathbb{E}(d(y, x_i)) = \frac{1}{2}$，因此对于在 $\frac{1}{2}$ 处的任意代理人联盟， 2–UFS 均得到满足。当 $x_i = 0$时，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(d(y, x_i)) &= \frac{n_1^2 + 2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2 + 4n_1 n_2} \\
&= \frac{n_1(2n_1^2 + 6n_1 n_2 + 4n_2^2)}{2(n_1^2 + n_2^2 + 4n_1 n_2)(n_1 + n_2)} \\
&> \frac{n_1(n_1^2 + 4n_1 n_2 + n_2^2)}{2(n_1^2 + n_2^2 + 4n_1 n_2)(n_1 + n_2)} \\
&= \frac{n_1}{2(n_1 + n_2)} \\
&\geq \frac{|S|}{2n}.
\end{aligned}$$

因此，机制 2 满足 2–UFS。 □

H 引理 2 的证明

引理 2。2-IFS 随机化机制在所有满足期望个体公平份额为 2-IFS 的随机化机制中是最优的。

证明。我们首先通过分类讨论证明该机制满足期望个体公平份额为 2-IFS。回顾一下，对于 OFLP，使功利主义福利最大化的解会将设施设在 0 或 1 的位置。

情形 1（$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}$）

在此情形下，设施位于 0 和 1 时的功利主义福利相同，因此以 $\frac{1}{2}$的概率将设施设在任一位置都是最优的。该机制也满足期望个体公平份额为 2-IFS，因为任一代理人与设施之间的期望距离为 $\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}(1 - x_i)$ $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2n}$ 。

情形 2 ($\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{n}{2}$)

在此情形下，最优设施位置为 0。显然，当 $x_1 \geq \frac{1}{2n}$ 时，以概率 1 将设施设置在 0 处是最优的，并且满足 2-IFS，因此我们考虑 $x_1 < \frac{1}{2n}$ 的子情形。

我们首先证明，在此情形下该机制满足 2-IFS。x_1 与设施之间的期望距离为

$$\begin{aligned}
&\frac{2n - 1 - 2nx_1}{2n(1 - 2x_1)} x_1 + \frac{1 - 2nx_1}{2n(1 - 2x_1)}(1 - x_1) \\
&= \frac{2nx_1 - x_1 - 2nx_1^2 + 1 - x_1 - 2nx_1 + 2nx_1^2}{2n(1 - 2x_1)} \\
&= \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

因此，对于代理人 $x_2, \ldots, x_n$，满足 2-IFS，因为 $\alpha \leq \frac{1}{2}$。

现在我们证明，在这种情况下，该机制在所有满足期望个体公平份额为 2-IFS 的随机化机制中是最优的。根据引理1，只需考虑只能将设施设置在 0 或 1 处的机制。

现在考虑 2-IFS 随机化机制。如果 α 增大，功利主义福利就会降低；如果 α 减小，则会违反 x_1 的 2–IFS，因此 $\alpha = \frac{1-2nx_1}{2n(1-2x_1)}$ 是最优的，因此该机制在期望个体公平份额为 2-IFS 的约束下~~是最优的~~。

情况3（$\sum_{i=1}^n x_i > \frac{n}{2}$）
此情形与情形 2 相似且对称。 □

I 定理 11 的证明

定理 11. 2-IFS 随机化机制的近似比为 $\frac{12}{11} \approx 1.091$。

证明。只需考虑 $\sum_{i=1}^n x_i > \frac{n}{2}$ 和 $x_1 < \frac{1}{2n}$ 的情形，因为 $\sum_{i=1}^n x_i > \frac{n}{2}$ 的情形与之对称；对于 $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2}$，以及 $\sum_{i=1}^n x_i > \frac{n}{2}$ 和 $x_1 \geq \frac{1}{2n}$ 的情形，该机制均为最优。

该机制的近似比为

$$\begin{aligned}
\max_{x\in X^n}\left\{\frac{\phi^*(x)}{\phi_{2IFS}(x)}\right\} &= \max_{x\in X^n} \frac{\sum_i x_i}{(1-\alpha)\sum_i x_i + \alpha\sum_i(1-x_i)} \\
&= \max_{x\in X^n} \frac{\sum_i x_i}{\frac{2n-1-2nx_1}{2n(1-2x_1)}\sum_i x_i + \frac{1-2nx_1}{2n(1-2x_1)}\sum_i(1-x_i)} \\
&= \max_{x\in X^n} \frac{\sum_i x_i}{\frac{1-2nx_1}{2(1-2x_1)} + \frac{n-1}{n(1-2x_1)}\sum_i x_i} \\
&= \max_{x\in X^n} \frac{1}{\frac{1-2nx_1}{2(1-2x_1)\sum_i x_i} + \frac{n-1}{n(1-2x_1)}} \\
&= \max_{x_1\in[0,\frac{1}{2n})} \frac{1}{\frac{1-2nx_1}{2(1-2x_1)(n-1+x_1)} + \frac{n-1}{n(1-2x_1)}} \\
&= \max_{x_1\in[0,\frac{1}{2n})} \frac{2n(1-2x_1)(n-1+x_1)}{n-2n^2x_1+2(n-1)(n-1+x_1)}.
\end{aligned}$$

在倒数第二行中，我们代入 $x_2, \ldots, x_n = 1$，因为该比值随$\sum_i x_i$单调递增。通过一些优化规划可知，当 $n \geq 3$时，该比值在$x_1 = 0$时达到最大值。将 $x_1 = 0$ 代入该比值可得

$$\frac{2n^2-2n}{2n^2-3n+2},$$

其导数为 $-\frac{2(n^2-4n+2)}{(2n^2-3n+2)^2}$。因此，我们看到该比值在$x = 2+\sqrt{2}$处达到极大值，且在此点之后单调递减。对于整数 $n \geq 3$，该比值在 $n = 3$ 或 $n = 4$时达到最大值，并且这两个点对应的比值均为 $\frac{12}{11} \approx 1.091$。

现在我们考虑 $n = 2$（以及 $x_1 < \frac{1}{4}$）的情况。此时比率变为

$$\begin{aligned}
\max_{x_1\in[0,\frac{1}{4})} \frac{2-2x_1-4x_1^2}{2-3x_1} &= \frac{1}{9}(22-4\sqrt{10}) \\
&\approx 1.039.
\end{aligned}$$

因此，当 $x_1 = 0$ 且 $n = 3$ 或 $n = 4$ 时，该机制的福利比率达到最大值，为 $\frac{12}{11} \approx 1.091$。 □

J 引理3的证明

引理 2. 2-UFS 随机化机制在所有满足 2–期望一致公平份额的随机化机制中是最优的。

证明. 与引理 2 的证明类似，我们按情形证明这一结论。

情形 1 ($\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i = \frac{n}{2}$)

当 $\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i = \frac{n}{2}$ 时，位置 0 和 1 的设施位置在最大化功利主义福利方面并列，因此以概率 $_1 \ _2$ 将设施放置在任一位置都是最优的。该机制也满足 2–期望一致公平份额，因为任一代理人到设施的期望距离为$\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}(1 - x_i) = \frac{1}{2}$。

情形 2 ($\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i > \frac{n}{2}$)

注意，在此情况下，最优设施位置为 0。我们首先证明，在这种情况下，该机制满足 2–UFS。对于位于 $x_i < \frac{1}{2}$ 的代理人组 S_i，设施的期望距离为

$$\begin{aligned} \alpha(1 - x_i) + x_i(1 - \alpha) &\geq \alpha_i(1 - x_i) + x_i(1 - \alpha_i) \\ &= \frac{|S_i| - 2nx_i}{2n(1 - 2x_i)}(1 - x_i) + \frac{2n - 2nx_i - |S_i|}{2n(1 - 2x_i)}x_i \\ &= \frac{|S_i|(1 - 2x_i)}{2n(1 - 2x_i)} = \frac{|S_i|}{2n}. \end{aligned}$$

令 $|S_i| = n$，我们还可得出 $\alpha \leq \frac{1}{2}$，因此，对于位于 $x_j \geq \frac{1}{2}$ 的任意代理人组，均满足 2–UFS。

现在证明，在这种情况下，该机制在所有满足期望 2-UFS 的随机化机制中最优。根据引理1，只需考虑只能将设施设置在 0 或 1 的机制。现在，在 2–UFS 随机化机制下，增大 α 会降低功利主义福利，而减小 α 则会违反某个代理人组的 2–UFS。因此，该机制在期望 2–UFS 这一约束下是最优的。

情况3（$\sum_{i=1}^{m} |S_i| x_i < \frac{n}{2}$）

此情形与情形 2 类似且对称。 □

K 定理12的证明

定理 12. 2-UFS 随机化机制的近似比为 $_2 \ _7(1 + 2\sqrt{2})$ ≈1.09384。 –

证明。不失一般性，假设 $\sum_{i=1}^{n} > \frac{n}{2}$。令 j 为与 α 对应的代理人组的索引（即 $\alpha_j = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$）。

该机制的近似比为

$$\begin{aligned}
\max_{x\in X^n}\left\{\frac{\phi^*(x)}{\phi_{2UFS}(x)}\right\} &= \max_{x\in X^n}\frac{\sum_i x_i}{(1-\alpha)\sum_i x_i+\alpha\sum_i(1-x_i)}\\
&= \max_{x\in X^n}\frac{\sum_i x_i}{\frac{2n-|S_j|-2nx_j}{2n(1-2x_j)}\sum_i x_i+\frac{|S_j|-2nx_j}{2n(1-2x_j)}\sum_i(1-x_i)}\\
&= \max_{x\in X^n}\frac{\sum_i x_i}{\frac{|S_j|-2nx_j}{2(1-2x_j)}+\frac{n-|S_j|}{n(1-2x_j)}\sum_i x_i}\\
&= \max_{x\in X^n}\frac{1}{\frac{|S_j|-2nx_j}{2(1-2x_j)\sum_i x_i}+\frac{n-|S_j|}{n(1-2x_j)}}\\
&= \max_{\substack{x_j\in[0,\frac{1}{2})\\ |S_j|\in\{1,\dots,n-1\}}}\frac{1}{\frac{|S_j|-2nx_j}{2(1-2x_j)(n-|S_j|+|S_j|x_j)}+\frac{n-|S_j|}{n(1-2x_j)}}\\
&= \max_{\substack{x_j\in[0,\frac{1}{2})\\ |S_j|\in\{1,\dots,n-1\}}}\frac{2n(1-2x_j)(n-|S_j|+|S_j|x_j)}{n|S_j|-2n^2x_j+2(n-|S_j|)(n-|S_j|+|S_j|x_j)}\\
&= \max_{\substack{x_j\in[0,\frac{1}{2})\\ r\in(0,1)}}\frac{2(1-2x_j)(1-r+rx_j)}{r-2x_j+2(1-r)(1-r+rx_j)}.
\end{aligned}$$

其中 $r=\frac{|S_j|}{n}$。通过优化规划可知，该比值在 $r=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$和 $x_j=0$处达到最大值，最大值为 $2+2\sqrt{2}$。 □

引理5及引理5的证明

这里我们引入一个辅助引理，该引理将在定理 13 的证明中用到。

引理5。$(I-B_i)$的交集非空。

证明。我们考虑两种情形：
情形 1：每个开区间 $B_i, i\in[m]$ 都完全包含在区间 $I=[0,1]$ 中。因此，区间 I 的边界点不属于每个 B_i，故 $\{0,1\}\in\cap_{i=1}^m(I-B_i)$。
情形 2：存在一个开区间，其不完全包含在区间 I 内。假设点 $x_1, x_2, ..., x_m$ 从左到右排列，令 k 为满足 B_k 不完全包含在 I 内的最小索引。因此，要么 $0\in B_k$，要么 $1\in B_k$。端点 0 和 1 不可能都在 B_k 中，因为在这种情况下 $|B_k|=\frac{|S_k|}{n}>1$。设 $0\in B_k$ 且 $1\notin B_k$，即 $1\in(I-B_k)$。现在，如果对每个 $i\in[m]$，都有 $1\in(I-B_i)$，则引理陈述成立。现在假设存在一个开区间 B_j，使得 $1\notin(I-B_j)$，即 $1\in B_j$。不失一般性，令 j 为上述陈述成立时的最大索引。我们考虑两个子情形：

情况2a： $B_k\cap B_j$ 不是空集。在这种情况下，$[0,1]\subseteq B_k\cup B_j$ 和 $\frac{|S_k|}{n}+\frac{|S_j|}{n}>1$，这是不可能的。

情况 2b： $B_k\cap B_j$ 是一个空集。我们考虑集合 $A:=I-(B_k\cup B_j)$，并讨论两种情况：

- $A \subseteq \cup_{i=k+1}^{j-1} B_i$：在这种情况下，$[0,1] \subseteq \cup_{i=1}^{m} B_i$ 和 $\sum_{i=1}^{m} \frac{|S_i|}{n} > 1$，这是不可能的。

- $A \nsubseteq \cup_{i=k+1}^{j-1} B_i$。因此，存在 $y \in A$ 使得 $y \notin \cup_{i=k+1}^{j-1} B_i$。根据 A的定义，$y \notin (B_k \cup B_j)$。对于每个 $1 \leq i \leq k-1$，$B_i \subset B_k$ 成立，因为 i 是其对应区间包含点 0 的最小索引。类似地，对于每个$j+1 \leq i \leq m$，我们有 $B_i \subset B_j$。因此，对于每个 $i \in [m]$，$y \notin B_i$ 成立，即对于每个 $i \in [m]$，$y \in (I - B_i)$，且 $y \in \cap_{i=1}^{m} (I - B_i)$。

□

M 定理 13 的证明

定理 13。总是存在一个 2-PF 解。

证明。假设我们有 m 个不同的代理人位置，即 m 个代理人组。我们通过对群组数量进行归纳法来证明该定理。当所有代理人都位于同一位置时，即 $m = 1$，我们可以将设施 y 分配在最远的边界点上。这显然满足 2-PF。现在，假设对于任意满足 $k \leq m$ 的 k 个代理人组，都存在一个 2-PF 解，并将此结论推广到 $k = m + 1$。

假设我们有 $m+1$ 组代理人分别位于点 $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$，且这些点按 $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{m+1}$的顺序排列。令 S_i 表示位于 c_i处的代理人组。我们在每个中心 c_i周围设置一个长度为$\frac{|S_i|}{n}$ 的开区间B_i。为证明该定理，我们考虑几种情形。

情形 1（任意两个区间之间均无重叠，即 $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$）。在引理5中，我们已证明$(I - B_i)$的交集非空，因此存在一个点$y$，位于每个区间 B_i之外，可将设施设置在该点处。这里我们将 r定义为中心 c_i和 c_j之间的距离。如果 $r = 0$，则满足 2-PF，因为我们有 $d(y, c_i) \geq \frac{|S_i|}{2n}$。否则，由于所有区间互不相交，$r$ 大于区间 B_i 和 B_j的“半径”之和，因此 $\frac{|S_i|}{2n} + \frac{|S_j|}{2n} - r < 0$。因此，

$$d(y, c_k) \geq \frac{|S_i|}{2n} + \frac{|S_j|}{2n} - r \quad \text{for } k = i, j,$$

因此，y 满足 2-PF 不等式。

情形 2（至少存在两个重叠区间，即 $\exists$ i、$j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ 满足 $B_i \cap B_j \neq \emptyset$）。

情况2a（存在一个区间包含在另一个区间内，即 $\exists$ i、$j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ 满足 $B_i \subseteq B_j$）。不失一般性，我们假设 $B_2 \subseteq B_1$。现在，我们将所有代理人放在 c_2，并将 c_1 一起放在 c_1。我们设置一个以 c_1 为中心、长度为$\frac{|S_1|}{n} + \frac{|S_2|}{n}$ 的新区间 B'，其长度是 B_1 和 B_2 长度之和。现在，我们有 m 个新的代理人组，分别位于中心 c_1、c_3、.....、c_{m+1}。根据归纳法，存在一个 2-PF 解 y。我们声称，对于位于 c_1、c_2、.....、c_{m+1} 的 $m+1$ 个代理人组，y 也是一个 2-PF 解。由于 y 是位于 c_1、c_3、.....、c_{m+1} 的 m 个代理人组的 2-PF 解，y 位于每个区间之外，因此满足 $r = 0$ 的 2-PF 不等式。

由于 y 在区间 B'之外，y 在区间 B_1 和 B_2之外，因此我们有$d(y, c_1) \geq \frac{|S_1|}{2n}$且 $d(y, c_2) \geq \frac{|S_2|}{2n}$。因此，$y$满足关于 $r = 0$的 2-PF 不等式。现在我们令 r为两个中心 c_1 和 c_2 之间的距离（即 $r = c_2 - c_1$）。由于 y 在区间之外

B' 我们有 $d(y, c_1) \geq \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} \geq \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r$，因此 c_1 满足 PF不等式。为证明位于 c_2 的代理人也满足 PF不等式，我们考虑两种子情形:

- 情形 2ai（区间 B_2 不包含中心 c_1 （见图 4））。我们将 $a := (c_2 - c_1) - \frac{|S_2|}{2n}$ 记为 c_1 到 B_2左边界的距离，将 $b := \frac{|S_2|}{n}$ 记为 B_2 的长度，并将 $c := c_1 + \frac{|S_1|}{2n} - c_2 - \frac{|S_2|}{2n}$ 记为 B_1 和 B_2的右边界之间的距离。在这种情况下，我们有

$$\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r = a + b + c + \frac{b}{2} - a - \frac{b}{2} = b + c. \tag{1}$$

由于 y 位于区间 B'之外，因此有 $d(y, c_2) \geq b + c$，根据（1），$d(y, c_2) \geq \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r$，因此满足 2-PF 不等式。

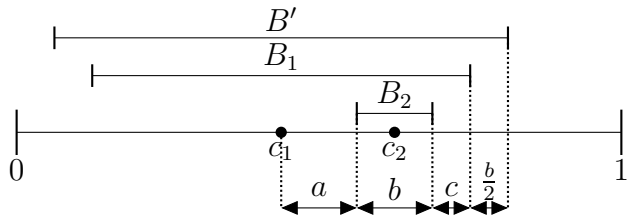


图 4: B_1 和 B' 是分别以 c_1 为中心的开区间，B_2 是以 c_2为中心的开区间。变量 a、b和 c 表示区间边界与中心之间的距离。

- 情形 2aii（区间 B_2 包含中心 c_1 （见图 5））。在这种情况下，范围 r 小于长度 B_2。我们记 $a := c_2 - c_1$ 为两个中心之间的距离，$b := \frac{|S_2|}{n}$ 为 B_2 的长度，$c := c_1 + \frac{|S_1|}{2n} - c_2 - \frac{|S_2|}{2n}$ 为 B_1 和 B_2的右边界之间的距离。我们有

$$\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r = a + \frac{b}{2} + c + \frac{b}{2} - a = b + c. \tag{2}$$

由于 y 位于区间 B'之外，我们有 $d(y, c_2) \geq b + c$，根据 (2)，$d(y, c_2) \geq \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r$，因此满足 2-PF 不等式。

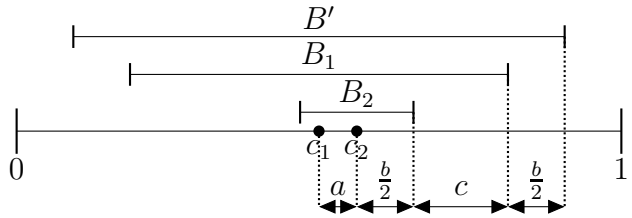


图 5: B_1 和 B' 是以 c_1 和 B_2 为中心的开区间，c_2是以 a为中心的开区间。变量 b、c 和 表示区间边界与中心之间的距离。

情形 2b（存在两个重叠区间，即 $\exists\, i,j \in \{1,2,\ldots,m+1\}$，使得 $B_i \cap B_j \neq \emptyset$，但它们彼此不包含。）不失一般性，假设 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$。考虑连接 B_1的左边界与区间 B_2的右边界的线段，并将该线段的中点记为 $c_1' := \frac{1}{2}(c_1 - \frac{|S_1|}{2n} + c_2 + \frac{|S_2|}{2n})$。我们将位于 c_1和 c_2处的所有代理人移至点 c_1'，并设置一个以 c_1' 为中心、长度为 $\frac{|S_1|}{n} + \frac{|S_2|}{n}$ 的新区间 B'；其长度等于 B_1 和 B_2的长度之和。与前一个子情形类似，根据归纳假设，对于放置在 $c_1', c_3, ..., c_m, c_{m+1}$处的新的 m 个代理人组，存在一个 2-PF 解 y。现在我们声称，y同样是 $c_1, c_2, ..., c_{m+1}$ 的 2-PF 解。由于 y 位于区间 B'之外，y也位于区间 B_1和 B_2之外，因此 $d(y, c_1) \geq \frac{|S_1|}{2n}$，且 $d(y, c_2) \geq \frac{|S_2|}{2n}$。因此，$y$满足 $r = 0$的 2-PF 不等式。现在我们令 r 为两个中心 c_1和 c_2 之间的距离（即，$r = c_2 - c_1$），并根据区间的交集是否也包含一个中心，考虑 3 种情形。在每种情形中，我们证明 $\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r$ 等于 B_1 与 B_2 的交集长度，我们将其记为 $|intersection|$（因此满足 2-PF 不等式）。

• 情况 2bi（B_1 与 B_2 的交集不包含中心 c_1 和 c_2（见图 6））。我们将 a : $= c_2 - \frac{|S_2|}{2n} - c_1$ 记为 c_1 与 B_2的左边界之间的距离，将$b := c_1 + \frac{|S_1|}{2n} -$ （$c_2 - \frac{|S_2|}{2n}$）记为交集长度，并将 $c := c_2 - \frac{|S_1|}{2n} - c_1$ 记为 c_2 与 B_1的右边界之间的距离。此处交集长度为$\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r = a + b + b + c - a - b - c = b$。由于 y 位于区间 B'之外，因此它也位于区间 B_1 和 B_2之外。我们有 d（y, c_i） $\geq \frac{|S_i|}{2n} \geq b = \frac{|S_1|}{2} + \frac{|S_2|}{2} - r$，因此满足 2-PF。

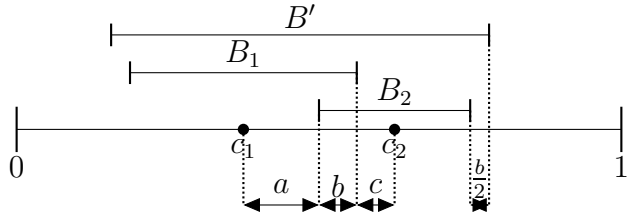


图 6： B_1、 B_2 和 B' 是分别以 c_1、 c_2 和 c' 为中心的开区间。术语 a、 b和 c 表示区间边界与中心之间的距离。

• 情形2bii（B_1 与 B_2 的交集包含中心 c_1 和 c_2 中的一个（见图 7））。不失一般性，假设被包含的中心是 c_2 a = $c_2 - \frac{|S_2|}{2n} - c_1$ c_1 B_2 b = $\frac{|S_2|}{2n}$ 。我们将：记为 与 的左边界之间的距离，将： 记为从 c_2 到 B_2的某个端点的距离，并将 $c := c_2 - \frac{|S_1|}{2n} - c_1$ 记为 c_2 与 B_1的右边界之间的距离。这里交集的长度为 $\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r = a + b + c + b - a - b = b + c$。

由于 y 位于 B_1 外部，我们有

$$d(y, c_1) \geq \frac{|S_1|}{2n} = a + b + c \geq b + c$$
$$= \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r.$$

现在我们证明 $d(y, c_2)$ 满足 2-PF 不等式。回顾一下， B' 是一个区间，其中心位于 B_1 的左边界与 B_2 的右边界的中点，半径为 $\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n}$。此外， y 位于 B' 外部，因此 B_2 的右边界与 B' 的右边界相距 $\frac{b+c}{2}$。因此我们有

$$d(y, c_2) \geq \frac{|S_2|}{2n} + \frac{b+c}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b+c}{2}$$

此外，由于 $b \geq c$，我们有

$$b + \frac{b+c}{2} \geq b + c = \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r.$$

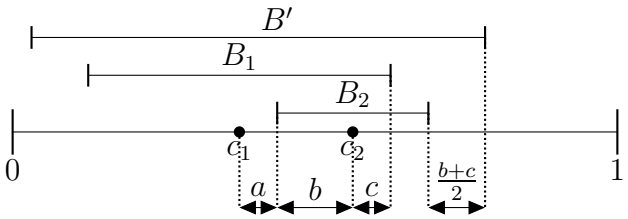


图 7： B_1、 B_2 和 B' 分别是以 c_1、 c_2 和 c' 为中心的开区间。术语 a、 b 和 c 表示区间边界与中心之间的距离。

• 情形 2biii（ B_1 与 B_2 的交集同时包含中心 c_1 和 c_2 （见图 8））。我们将 $a := c_2 - \frac{|S_2|}{2n} - c_1$ 记为 c_1 与 B_2 左边界之间的距离，将 $b := c_2 - c_1$ 记为两个中心之间的距离，并将 $c := c_2 - \frac{|S_1|}{2n} - c_1$ 记为 c_2 与 B_1 右边界之间的距离。交集长度为 $\frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r = b + c + b + a - b = a + b + c$。在这种情况下，2($b + c$) 是区间 B_1 的长度，2($a + b$) 是区间 B_2 的长度。由于区间 B_1 和 B_2 互不包含，因此我们有 $b + c > a$ 和 $a + b > c$ （见图 8）。与之前一样， B' 是一个区间，其中心位于 B_1 的左边界与 B_2 的右边界的中点，长度为 $\frac{|S_1|}{n} + \frac{|S_2|}{n}$；而 y 位于该区间之外，因此每个区间 B_1 和 B_2 的边界与 B' 的边界之间的距离均为 $\frac{a+b+c}{2}$。因此我们有

$$\begin{aligned} d(y, c_1) &\geq b + c + \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq b + c + a = \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r. \end{aligned}$$

同样，我们可以证明 y 满足以 c_2 为中心的 2-PF 不等式。

$$\begin{aligned} d(y, c_2) &\geq a + b + \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq a + b + c = \frac{|S_1|}{2n} + \frac{|S_2|}{2n} - r. \end{aligned}$$

因此， y 的设施选址满足 2-PF 不等式。

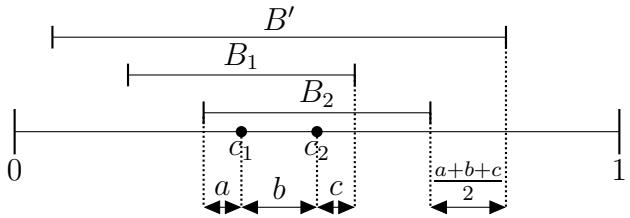


图 8： B_1、 B_2 和 B' 分别是以 c_1、 c_2 和 c' 为中心的开区间。术语 a、 b和 c 表示区间边界与中心之间的距离。

通过穷举情形，我们证明了归纳命题，因此始终存在满足 2-PF 的设施选址。

□

N 定理 14 的证明

定理 14。在混合模型下，H-UFS 解始终存在。

证明。令 n_C 表示经典代理人的数量，令 n_O 表示厌恶型代理人的数量（使得 $n_C + n_O = n$）。考虑一个任意的代理人位置配置，其中有 m 个不同的经典型代理人位置 x_1、.....、 x_m，并假设这些位置按 $x_1 \leq \ldots x_m$的顺序排列。我们首先关注与经典代理人的距离约束相关的可行设施位置区域。对于 $i \in [m]$，令 S_{C_i} 表示位于位置 x_i的经典代理人群组，并构造一个以 x_i 为中心、半径为 $1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}$ 的闭区间： $B_i = \{z|d(z, x_i) \leq 1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}\}$。根据定义，闭区间 $\cap_{i\in[m]} B_i$ 的交集表示与经典代理人的距离约束相关的（连续）可行设施位置区域。根据 [Aziz 等人，2022a], ，我们知道该区域非空。

我们通过迭代地将代理人位置配置 $\cap_{i\in[m]} B_i$ 变换为所有经典代理人都位于 0 或 1 的配置，并证明每次变换都不会增加可行区域长度，从而证明可行区域的长度至少为 $\frac{n-n_C}{n}$。对于每个球 B_i，都存在一个（可能为空的）左侧不可行点区间 L_i 和一个（可能为空的）右侧不可行点区间 R_i，使得 $B_i = [0, 1] - L_i - R_i$。如果 $x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) > 0$，我们将左侧不可行点区间记为$L_i = [0, x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}))$；否则记为 $L_i = \emptyset$。类似地，如果 $1 - \frac{|S_{C_i}|}{n})$ $, 1]$，我们将右侧不可行点区间记为 $R_i = (x_i +$。因此，所有左侧不可行区间的并集为 $\cup_{i\in[m]} L_i = [0, \max^{i\in[m]} x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}))$（如果存在非空的 L_i），否则为空。所有右侧不可行区间的并集为 $\cup_{i\in[m]} R_i = (\min_{i\in[m]} x_i + (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}), 1]$（如果存在非空的 R_i），否则为空。因此，可行区域的长度为

$$\min\left\{\min_{i\in[m]}\left\{x_i + (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n})\right\}, 1\right\} - \max\left\{0, \max_{i\in[m]}\left\{x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n})\right\}\right\}.$$

根据对称性，不失一般性地假设

$$\min_{i\in[m]}\left\{x_i + (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n})\right\} \leq 1.$$

我们考虑以下变换。令 j 对应于右侧不可行区间最大的代理人位置，即

$$j := \arg\min_{i\in[m]} \left\{ x_i + (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\},$$

且我们有 $x_j < 1$。若 $x_j > 0$，则将位于 x_j 的所有代理人移动到 0。我们证明，这种变换会使可行区域长度弱减小：在 $\min_{i\in[m]} \left\{ x_i + (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\}$ 中，x_i 减小至 0，而 $|S_{C_i}|$ 弱增加（如果 0 处原本已有代理人，则会严格增加）。此外，除非被移动的代理人组原本对应于最大值，否则 $\max_{i\in[m]} \left\{ x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\}$ 项不受影响；若对应于最大值，则 x_i 项至多减少移动的距离，而随着 $|S_{C_i}|$ 弱增加，$(1 - \frac{|S_{C_i}|}{n})$ 项弱减小。因此，这种变换会使可行区域长度弱减小。现在，具有最大右侧不可行区间的代理人位置为 0，因此我们的可行区域长度为

$$(1 - \frac{|S_{C_{j'}}|}{n}) - \max\left\{ 0, \max_{i\in[m]} \left\{ x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\} \right\},$$

其中 j' 对应于位置 $x_{j'} = 0$。如果最大左侧不可行区间的右边界 $\max_{i\in[m]} \left\{ x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\}$ 对应于位于 $x_{j'} = 0$ 的代理人，那么该边界至多为 0，且可行区域长度为 $(1 - \frac{|S_{C_{j'}}|}{n})$，至少为 $\frac{n-n_C}{n}$。现在我们假设情况并非如此。

我们有

$$\max_{i\in[m]} \left\{ x_i - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\} \le \max_{i\in[m]} \left\{ 1 - (1 - \frac{|S_{C_i}|}{n}) \right\},$$

因此，可行区域长度至少为

$$(1 - \frac{|S_{C_{j'}}|}{n}) - \max\left\{ 0, \max_{i\in[m]} \left\{ \frac{|S_{C_i}|}{n} \right\} \right\}.$$

由于 $\arg\max_{i\in[m]} \left\{ \frac{|S_{C_i}|}{n} \right\} \neq j'$，可行区域长度至少为

$$1 - \frac{|S_{C_{j'}}| + |S_{C_k}|}{n} \ge \frac{n - n_C}{n}$$

其中 $k \neq j'$。

我们现在知道，与经典代理人对应的（连续）可行区域长度至少为 $\frac{n-n_C}{n} = \frac{n_O}{n}$。接下来考虑厌恶型代理人。假设我们在每个位置相同的厌恶型代理人群组周围构造一个半径为 $\frac{|S_{O_i}|}{2n}$ 的开区间。这些开区间内的任何位置都不可行。区间长度之和为 $\frac{n_O}{n}$，因此，采用与命题 2 的证明中类似的论证，我们可以看出，始终存在一个同时满足经典代理人和厌恶型代理人的距离不等式的可行解。 □