识别机械 CAD 对象三维点云中的几何基元

Chiara Romanengo [*]、Andrea Raffo [*]、Silvia Biasotti [†] 和 Bianca Falcidieno

意大利国家研究委员会*"E. Magenes"*应用数学与信息技术研究所，*Via de Marini 6，16149*，意大利热那亚。

arXiv:2301.04371v1 [cs.GR] 11 Jan 2023

摘要

本文探讨的问题是如何识别机械 CAD 对象扫描数据所得点云中的简单和复杂几何基元。点的数量庞大、噪声、离群点、缺失或冗余部分以及分布不均，是解决这一问题时需要应对的主要难题。本文提出一种基于霍夫变换的解决方案，能够识别简单和复杂几何基元，并且对噪声、离群点和缺失部分具有鲁棒性。此外，我们还能提取一系列可唯一表征某个基元的几何描述符，并据此将输出整合为最大基元或复合基元，从而减少过分割。本文展示的结果证明了该方法的鲁棒性，以及相较于文献中其他解决方案的竞争力。

关键词：几何基元、点云、机械 CAD 对象、霍夫变换。

1 引言

随着价格实惠的数字扫描设备日益普及——例如近景摄影测量设备和激光扫描仪——点云已成为表示物体曲面的最常见方式之一。在计算机辅助设计领域，这意味着需要利用更高层次的几何基元，从测量数据点中提取信息。例如，识别并重建数字模型十分有用，这样便可从若干基本组件的角度对其进行解释，并通过 CAD 系统轻松操作。点的数量庞大、噪声和离群点的存在、缺失或冗余部分的出现，以及数据分布不均匀，都会严重限制镶嵌（例如网格）在简化形状分析与重建方面的作用；相反，直接分析点云会更加方便 [1]。

许多基元检测方法缺乏对噪声和离群点的鲁棒性，或仅处理网格模型。它们中的大多数只能提取少数几类简单几何基本体，其中最常识别的是平面和圆柱体，而且不考虑更复杂的基本形状，例如旋转曲面或广义圆柱。此外，许多方法倾向于过度分割，因此生成的结果非常零碎，未能将位于同一基元上的非连续点子集聚合起来。最大基元或复合基元的检测（例如由非相邻部分组成的圆柱体，或模式）是另一个尚待解决的问题，目前主要仅针对平面或圆柱体进行研究 [2, 3]。例如，如果管道被另一部分阻断，如图 5(b) 中的块模型所示，传统方法会将管道的两部分识别为两个不同的基元。这一点尤为重要，例如，在分解对应于装配 CAD 模型扫描数据的模式时，因为这有助于识别复合基元和模式 [4]。至于内存使用量和计算复杂度，学习

[*]这些作者对本研究的贡献相同。

[†]通讯作者

方法需要耗费大量精力进行训练，并需要大型标注数据库；另一方面，在一般空间嵌入中直接检测数学基元，通常会受到计算方面的限制，因为随着基元复杂度的增加，自由参数的数量会迅速增长。

本文研究如何识别源自机械 CAD 对象扫描数据的点云中的简单和复杂几何基元。这里的识别是指检测给定点云中的基元，并提取／计算与这些基元相关的最佳（几何）参数。为此，我们采用基于霍夫变换（HT）的方法。霍夫变换能够识别基元函数的多个实例，并通过投票过程增强对噪声和离群点的鲁棒性。霍夫变换最初仅用于图像中的直线 [5], ，随后在多个方向上得到推广和扩展，以处理其他形状；相关方法还采用了用于图像 [6] 或 CAD 对象点云 [7] 的非参数模板族。最近， [8] 提出的扩展版本使霍夫变换能够处理广泛的代数基元。

在本文中，我们将霍夫变换推广到以参数形式表示的曲面基元，这些基元不一定是代数基元。我们的方法专为处理点云而设计，能够处理简单几何基元及一些复杂基元（如广义圆柱、圆锥体、旋转曲面、螺旋曲面等），其中包括最大基元和复合基元。为此，在可行的情况下，我们依据基元的大小及其空间嵌入对检测到的基元进行聚合。我们的策略还减少了输出中的过分割；此外，我们利用 [9] 提出的策略，通过对点云及其子部分进行适当的预处理，降低基于霍夫变换的方法的计算复杂度。实验验证了该方法的鲁棒性和完整性，比较结果也表明，与迄今文献中提出的方法相比，该方法具有竞争力。总之，我们的主要贡献如下：

- 引入了一种对噪声和离群点特别稳健的几何基元识别方法，并且能够识别同一基元的多个实例。
- 除了最常见的几何基元（平面、圆柱体、圆锥体、球面、环面）外，还能提取和识别复杂基元。
- 根据基元的形状、大小和位置对其进行聚合，以检测极大基元和复合基元。
- 在不同数据集上进行了广泛实验，并与当前最先进的方法进行了比较。

本文其余部分的组织结构如下。第2节概述了几何基元检测和基于HT的识别方法的相关工作。第3节简要回顾HT的基本概念。第4节介绍并列出本方法能够识别的几何基元，重点讨论一般圆柱面和圆锥面、旋转曲面、螺旋曲面以及曲线的凸组合等复杂基元。第5节介绍基于HT在点云中识别基元的方法，以及通过聚类技术搜索极大基元和基元之间可能存在的关系。第6节给出本方法识别简单基元和复杂基元的实验结果，并展示定性和定量比较分析。最后对全文进行总结。

2 以往工作

用一组几何组件表示物体，是计算机视觉、计算机图形学和计算机辅助设计领域由来已久的问题。由于我们关注的是制造领域中（简单或复杂）几何基元的识别，因此这里将重点介绍那些具有相同目标的方法。

人们提出了种类繁多的算法，用于将表示 CAD 对象的数字化点云或网格分解为多个区域，这些区域可由属于某些

给定集合的基元近似表示。根据 [10], ，这些方法可分为四类：随机方法、参数空间方法、聚类方法和学习技术。第一类包括 RANSAC 方法[11] 及其优化方法。第二类包括类霍夫投票方法和参数空间聚类，例如 [12]。第三类涵盖所有其他聚类技术，可进一步分为三种主要类型：基元驱动的区域生长，例如 [13]；自动聚类和基于 Lloyd 的算法，例如 [14]；基元无关分割，例如 [15]。最后，随着深度学习技术日益普及，研究人员也提出了适用于多类别基元的监督拟合方法 [16, 17]。关于简单基元检测方法的全面历史分类，读者可参阅 [10]；这超出了本文的讨论范围。

尽管已有大量可用方案，但这一问题远未得到解决；在过去几年中，研究人员提出了新的方法，以解决现有范式的不足，或探索新的发展方向。 [18]介绍了一种近期用于识别几何基元的方法。该方法采用基于曲率的分区方法，将输入三角网格分解为最大的曲面片段；分解过程确保每个分段对应于以下七种曲面不变类之一：平面、球面、圆柱体、旋转曲面、棱柱形、螺旋面和复杂曲面。 [19]对该方法进行了调整，使其能够处理点云。 [20], 提出了一种从制造业中的非结构化点云识别和拟合平面与圆柱体的方法。该方法包括三个连续阶段：点云分割；合并过分割区域并估计曲面参数；提取圆柱体和平面。由于该方法只能处理两种基元类型，因此其适用性受到限制。为应对日益增多的采集数据， [1]引入了一种基于区域生长的系统，用于将大型点云分割为平面区域。其他旨在仅检测特定类型基元的方法包括：处理二次曲面的[21], ；拟合旋转曲面的 [22] ；以及从无方向点云中提取圆柱形状的 [23], 。在深度学习领域，有两种方法在分割和识别问题上展现出良好效果：ParSeNet [24] 和 HPNet[25]。除了性能表现之外，它们最突出的优点是能够在处理更经典的简单几何基本体的同时，处理开放和闭合的样条曲面。近期提出的另一种基于学习的基元拟合方法是 PriFit [26], ，该方法学习将包含各种三维形状类别的点云分解为一组几何基元，例如椭球体和长方体，或者分解为变形平面。然而，监督学习方法在识别几何基元方面具有的天然灵活性也伴随着显著成本：需要拥有规模庞大的带标签训练集，而这类训练集难以收集，从而限制了其当前的应用。

至于利用霍夫变换识别几何基元的方法，直到最近，其适用范围还仅限于平面 [12, 27], 线性子空间的组合 [28], 球面 [29] 和圆柱体[30]；不过，对于圆柱体，在应用霍夫变换之前需要知道其旋转轴。代数函数 [8] 应用方面的最新进展，正推动霍夫变换被更广泛地用于识别更复杂的几何基元族。据我们所知，利用这一思路的方法仅有两种： [31], 提出的方法用于在自由曲面模型中识别椭球； [9], 提出的方法用于在预分割点云中识别球面、（圆柱）圆柱体、（圆）圆锥体和环面，以此作为纠正错误分割的后处理手段。文献 [9] 中的工作还探讨了当点云对应于某个基元的局部曲面片时，如何减少基元表示中的参数数量：在这种情况下，会将点云适当地旋转并平移到一个空间嵌入中，使其能够用标准形式的基元进行拟合。近期，该方法已与其他直接方法和基于学习的方法进行了比较，参见 [32]。然而，用于此项比较的点云既非来自机械 CAD 对象的扫描数据，也不能被视为预分割数据，因此，该基准测试集本身与本文无关。

3 霍夫变换的基本概念

我们分别用 $\mathbb{A}^3_{\mathbf{x}}(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{A}^n_{\mathbf{A}}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的三维仿射空间和 n 维仿射空间，其中 $\mathbf{x} := (x, y, z)$ 和 $\mathbf{A} := (A_1, \ldots, A_n)$ 是不定元向量。给定一个曲面 $\mathcal{S}$

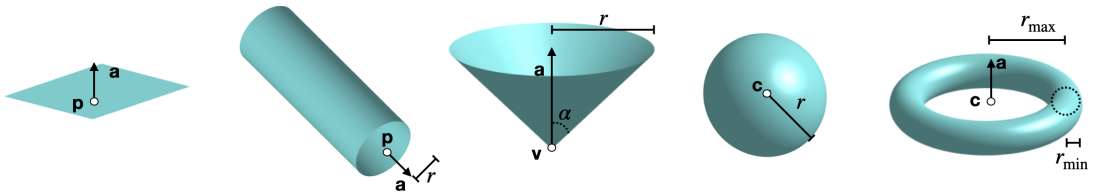


图1：简单几何基本体：平面、圆柱体、圆锥面、球面和环面，以及它们的属性（几何描述符）。

定义为函数 f 的零点集，参数依赖曲面族可由函数 $f_{\mathbf{a}}$ 描述为 $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_{\mathbf{a}} : f_{\mathbf{a}}(x) = 0 \mid \mathbf{a} \in \mathcal{U}\}$，其中 $\mathcal{U}$ 是参数空间 $\mathbb{A}^n_{\mathbf{A}}(\mathbb{R})$ 的开集，且 $\mathbf{a} := (a_1, ..., a_n)$ 是参数向量。于是，给定一个点 $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{x}}(\mathbb{R})$，该点 P 相对于曲面族 $\mathcal{F}$ 的霍夫变换为 $\Gamma_P = \{f_{\mathbf{a}}(P) = 0\} \subset \mathbb{A}^n_{\mathbf{A}}(\mathbb{R})$。对于足够一般的点 $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{x}}(\mathbb{R})$，可知 Γ_P 是 $\mathbb{A}^n_{\mathbf{A}}(\mathbb{R})$ 中的超曲面。若由给定曲面上的 P 变化所生成的超曲面集合 Γ_P 仅交于一点 $\bar{\mathbf{a}} \in \mathcal{U}$，则曲面族 $\mathcal{F}$ 称为霍夫正则；霍夫变换的交点 $\bar{\mathbf{a}}$ Γ_P 唯一确定了最初对点 $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{x}}(\mathbb{R})$ 进行采样所依据的曲面 $\mathcal{S}_{\bar{\mathbf{a}}}$。如果不能保证霍夫变换的正则性，交点问题的解可能不唯一，因此必须从多个可能的参数解中选出一个解。

在离散情形下，霍夫变换框架要解决的问题是：给定由 N 个点 $\mathcal{P}$组成的数据集（其中 $N >> n$），在曲面族 $\mathcal{F}$ 中找出最能逼近特定形状的曲面。确定解（或一个解）的常见策略在 [8], 中提出，它基于所谓的累加器函数；该策略采用投票系统，其中 $\mathcal{P}$中的每个点都会为一个 n 元组$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$投票；得票最多的 n元组对应于最能代表该轮廓的曲面。

传统上，霍夫变换一次处理一种形状，而本文提出的框架可直接应用于包含多种形状的点云。我们考虑的曲面族采用参数形式表示，并假设相对于笛卡尔坐标 x、 y和 z 定义 $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}$ 的方程组，可以通过解析方法求解参数向量$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$的值。关于这一方法在本文中的具体运作方式，第5节将作更详细的说明。

4 复杂几何基元的定义

除了图1中的简单几何基本体（平面、圆柱体、圆锥面、球面和环面）——关于如何在预分割点云中识别它们，请参见 [9] ——本节还介绍一组据我们所知此前从未用于霍夫变换识别的复杂几何基元。

本文通过变量 u 和 v对曲面进行参数化表示。为简便起见，此处部分曲面以其标准形式或相对于某些特定坐标轴的形式给出；不过，只需应用特殊正交群SO(3)的一般变换，即可轻松推广这些方程。

- 一般柱面。圆柱面是由一条方向固定的直线，即母线，沿着一条曲线，即准线移动所形成的曲面。给定一条曲线 $(x(u)\ y(u)\ z(u)) := (f_1(\mathbf{a}\ u)\ f_2(\mathbf{a}\ u)\ f_3(\mathbf{a}\ u))$和一个方向 (l, m, n)，相应圆柱面的参数表示为：

$$\begin{cases} x = f_1(\mathbf{a}, u) + lv \\ y = f_2(\mathbf{a}, u) + mv \\ z = f_3(\mathbf{a}, u) + nv \end{cases}.$$

请注意，一般圆柱面取决于定义母线和准线的参数。可作为准线的曲线种类极为丰富，见 [33]。表1(a)将一条 5–凸性曲线作为准线，其方程可见 [33]。

• 一般圆锥面。圆锥面是由一条直线（即母线）沿一条曲线（即准线）滑动并始终经过一个固定点（即顶点）所形成的曲面。给定一条参数化曲线 $(x(u)\ y(u)\ z(u)) := (f_1(\mathbf{a}\ u)\ f_2(\mathbf{a}\ u)\ f_3(\mathbf{a}\ u))$ 和一个点 $V = (x_V, y_V, z_V)$，相应圆锥面的参数表示为：

$$\begin{cases} x = x_V + (f_1(\mathbf{a}, u) - x_V)v \\ y = y_V + (f_2(\mathbf{a}, u) - y_V)v \\ z = z_V + (f_3(\mathbf{a}, u) - z_V)v \end{cases}.$$

与圆柱体的情况一样，我们可以利用平面曲线字典来创建圆锥面族。因此，一般圆锥面取决于定义曲线的参数以及顶点的各个分量。表 1(b) 展示了由 5–凸性曲线生成的圆锥面。

• 旋转曲面。通过将一族曲线绕旋转轴旋转，可以创建一族旋转曲面。例如，给定一族平面曲线 $(x(u)\ y(u)\ z(u)) := (f_1(\mathbf{a}\ u)\ 0, f_2(\mathbf{a}\ u))$ 和 z–轴，可得参数方程

$$\begin{cases} x = f_1(\mathbf{a}, u)\cos v \\ y = f_1(\mathbf{a}, u)\sin v \\ z = f_2(\mathbf{a}, u) \end{cases}.$$

最著名的例子之一是环面；另一个例子是椭球体，它们由椭圆绕其一条主轴旋转而成。表 1(c) 展示了将曲线 $(x(u)\ y(u)\ z(u)) := (au,\ 0,\ b/u^5)$ 绕 z–轴旋转所得到的曲面。

• 螺旋曲面。表 1(d) 展示了一族通过修改圆柱体参数化方式得到的方程。具体而言，此处半径 R 在 $[R_1, R_2]$ 之间变化，其中 $R_1 > 0$ 通过余弦函数变化；当半径固定时，输出曲面的斜率由 $z(u,\ v)$ 中的参数控制。请注意，半径变化也可以适用于其他形状（例如三角波函数）。

• 曲线的凸组合。通过考虑一对参数化曲线 $(f_1(\mathbf{a}\ u)\ f_2(\mathbf{a}\ u)\ f_3(\mathbf{a}\ u))$ 和 $(g_1(\mathbf{b}\ u)\ g_2(\mathbf{b}\ u)\ g_3(\mathbf{b}\ u))$ 的凸组合，可以定义曲面基元。这一族具有以下参数方程：

$$\begin{cases} x = vf_1(\mathbf{a}, u) + (1-v)g_1(\mathbf{b}, u) \\ y = vf_2(\mathbf{a}, u) + (1-v)g_2(\mathbf{b}, u) \\ z = vf_3(\mathbf{a}, u) + (1-v)g_3(\mathbf{b}, u) \end{cases},$$

其中 $v \in [0, 1]$。请注意，基元参数化取决于定义这对曲线的相同参数，即$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$。一个平面示例是圆环，即由两个同心圆围成的区域。通过切割并弯折环形带，可以得到螺旋带；这相当于对两条斜率相同但半径不同的螺旋线进行凸组合。表 1(e) 给出了螺旋带的示例。

使用标准形式可以减少识别过程中的未知参数数量。举一个实际例子，族

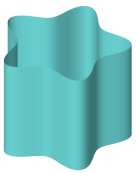
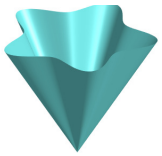
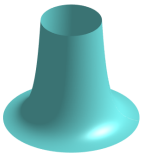
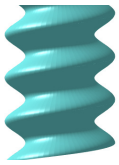
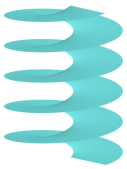
$$\begin{cases} x = a_1\cos(u) + b_1\sin(u) + c_1v + d_1 \\ y = a_2\cos(u) + b_2\sin(u) + c_2v + d_2 \\ z = a_3\cos(u) + b_3\sin(u) + c_3v + d_3 \end{cases},$$

包含（圆）圆柱体；它有 12 个未知参数，在投票过程中使用时，无论在计算还是内存方面都难以处理。进一步假设圆柱体可以经过旋转和平移，使其旋转轴与 $z-$ 轴对齐并以原点为中心，那么在圆柱体为圆柱体的情况下，参数数量便会减少到 1 个，即唯一的半径：

$$\begin{cases} x = r\cos(u) \\ y = r\sin(u) \\ z = v \end{cases}.$$

文献 [9]，提出了一种从点云出发自动获得标准形式的策略，并且可以自然地将其扩展到复杂基元。

表 1：一些复杂几何基元的参数表示。

(a) 广义 圆柱体	(b) 广义 cone	(c) 曲面 旋转	(d) 螺旋 曲面	(e) 螺旋 带状 区域
				
$\begin{cases} x = \frac{a\text{余弦 } u}{1+b\cos(5u)} \\ y = \frac{a\sin u}{1+b\cos(5u)} \\ z = v \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{av\cos u}{1+b\cos(5u)} \\ y = \frac{av\sin u}{1+b\cos(5u)} \\ z = Av + B \end{cases}$	$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = au\sin v \\ z = \frac{b}{u^5} \end{cases}$	$\begin{cases} x = R(u)\cos v \\ y = R(u)\text{ 正弦 } v \\ z = k_1(u + nv) + k_2 \end{cases}$，其中 $R(u) := R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2}(\cos u + 1)$，$n \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = R(u)\cos v \\ y = R(u)\sin v \\ z = v \end{cases}$，其中 R(u):=au+(1-u)b

5 使用霍夫变换识别几何基元

本节介绍一种通过霍夫变换技术，利用几何基元识别输入点云 $\mathcal{P}$ 的方法。该方法主要包含以下步骤：首先对点云进行预处理，随后迭代执行识别步骤和分割阶段，最后应用聚类技术，发现几何基元或其部分之间的几何关系。图2展示了该处理流程的示意图。

5.1 点云预处理

首先，将输入点云 $\mathcal{P}$ 平移，使其重心位于笛卡尔坐标系的原点。然后，估算输入点处的法向量。文献中有多种法向量估算方法；一般而言，我们希望采用适合处理含噪输入的方法。

就我们的目的而言，法向量的方向并不重要，因为我们只关心将获得最多投票的法向方向与z轴对齐。因此，我们可以采用 [9]，中提出的方法，通过投票过程估算法向量。为方便起见，当 $\mathcal{P}$ 干净时，我们也可以考虑 [34]，中介绍的方法，该方法可在 MATLAB 中通过 pcnormals 函数使用；对于 $\mathcal{P}$ 中的每个输入点，该方法会选取 $\mathcal{P}$ 中距离该输入点最近的 k 个点，然后使用主成分分析（PCA）估算法向量。请注意，这不一定会生成方向一致的法向量；不过，这对我们的处理流程并无影响，因为我们关注的不是法向量的方向一致性，而是（估算得到的）法向量的指向。

随后旋转点云，使（刚刚估算出的）法向量中获得最多投票的方向与 $z-$ 轴重合。这一步至关重要，原因有多方面。首先，我们的字典包含一些基元，它们在标准形式下的轴与 $z-$ 轴重合。此外，这一处理对于初步检验标准形式的基元是否存在也是必要的（即中心或顶点位于笛卡尔坐标轴的原点，且法向量或主轴与 z 轴对齐），从而减少霍夫变换需要估算的参数数量。

最后，将 $\mathcal{P}$ 缩放为一个单位立方体，以限制大多数参数的变化范围。

5.2 识别步骤

经过预处理后， $\mathcal{P}$ 成为基于HT的识别步骤的输入。由于 $\mathcal{P}$ 可能包含同一原始类型的不同实例以及不同类型的基元，因此必须调整标准HT 程序，以处理这些情况。该步骤可概括如下：

- 选择一个或多个基元族。用户可以选择用于识别的基元族；在默认配置下，算法会逐一测试简单几何基本体的存在性。通过研究$\mathcal{P}$ 的几何属性，并将其与所选基元族的几何特征（例如包围盒、半径、对角线长度）相关联，可以初始化参数空间中的一个区域T 。区域T 被离散化为多个单元，这些单元通过其中心坐标进行唯一标识。随后，以矩阵的离散形式初始化累加器函数 H。矩阵条目与上一步执行的离散化中的单元一一对应。

- 累加器函数的估计。每当点的霍夫变换与相应单元相交时，累加器函数 H 中的一个条目就增加 1。检查霍夫变换是否与某些单元相交以及相交位置的方法，取决于曲面族是以隐式形式还是参数形式描述的。在我们的案例中，曲面以参数形式表示；我们将 [35] 中为曲线设计的方法改用于曲面。具体而言，如果定义该族的方程组 $f_{\mathbf{a}}$ 能够针对未知参数 $\mathbf{a}$进行解析求解，我们就利用定义系数的矩阵的 Moore-Penrose 伪逆 [36] ，自动计算 Γ_P 的一个样本。相交情况的判定可转化为 Γ_P 的样本点各分量与单元端点坐标之间的不等式。

- 候选拟合基元的选择。必须识别累加器函数 H 峰值对应的单元。当假定点集合表示单个曲面轮廓时，传统的霍夫变换公式旨在找到累加器函数 H的最大值；当曲面族不满足霍夫正则条件时，可能存在多个最大值。另一方面，如果点云由不同的基元组成， H 中的不同峰值表示可能适合不同部分的候选基元。为了选择这些峰值，我们观察到，与基元形状相对应的累加器函数峰值相较于其邻近值明显突出，并表现为孤立峰值。形式上，我们通过识别具有较高拓扑持久性[1]的峰值来实现。在我们的实现中，通过采用 [39]提出的持久极大值算法，自动识别与基元相对应的峰值，具体做法是保留持久性高于 H最大值 10% 的局部极大值。极大值所在单元的中心坐标对应于可能识别出的曲面基元的参数。

[1]拓扑持久性的概念由 [37] 引入，用于对过滤 f 中的点进行编码和简化：根据其在过滤中的生命周期或持久性，将其归类为特征或噪声。实际上，给定一对点 p 和 q，其持久性定义为 $f(p) - f(q)$。点的配对是根据它们之间的拓扑连接定义的；有关拓扑持久性和显著性的详情，请参阅 [37, 38]。在我们的案例中，定义域由 T 的网格表示，累加器函数 H 充当过滤，而我们只关注 H 的峰值。

• 近似精度评估。为了衡量特定基元的识别精度，我们选择输入点集合 $\mathcal{X}$ 中与该基元的距离小于给定阈值的点，并通过 k近邻算法研究其密度（例如，参见 [40]）。如果 $\mathcal{X}$ 是稀疏的，则将识别出的基元视为假阳性；否则，对于每个稠密子集$\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$，我们将平均拟合误差（MFE）定义为：

$$E(\mathcal{X}_i, \mathcal{P}) := \frac{1}{|\mathcal{X}_i|} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} d(\mathbf{x}, \mathcal{P})/l_i, \tag{1}$$

其中， $\mathcal{P}$ 是当前基元， d 是欧氏距离， l_i 是包含 $\mathcal{X}_i$的轴对齐包围盒的对角线。当所选基元族无法拟合点云的任何部分时，可能会发生什么？有两种可能：

– 累加器函数恒为零，因此其持久性为零；由此，候选拟合基元的选择会返回空解。– 累加器函数 H 没有显著峰值，导致出现假阳性；通过研究拟合点的稀疏性即可识别这些假阳性。

给定一组稠密点 $\mathcal{X}_i$ 和两个候选基元$\mathcal{P}_{i,\ 1}$ 与$\mathcal{P}_{i,\ 2}$，我们首先计算每个基元与 $\mathcal{X}_i$之间的拟合误差 $E(\mathcal{X}_i,\ \mathcal{P}_{i,\ 1})$和 $E_i(\mathcal{X}_i,\ \mathcal{P}_{i,\ 2})$；保留误差最小的基元。

每识别出一个基元，就会从 $\mathcal{P}$ 中剔除 $\mathcal{P}$ 中距离已识别基元小于阈值 ε 的点。根据基元类型， ε 的值通常为 $\mathcal{P}$ 最小包围盒对角线长度的 1% 到 3%。

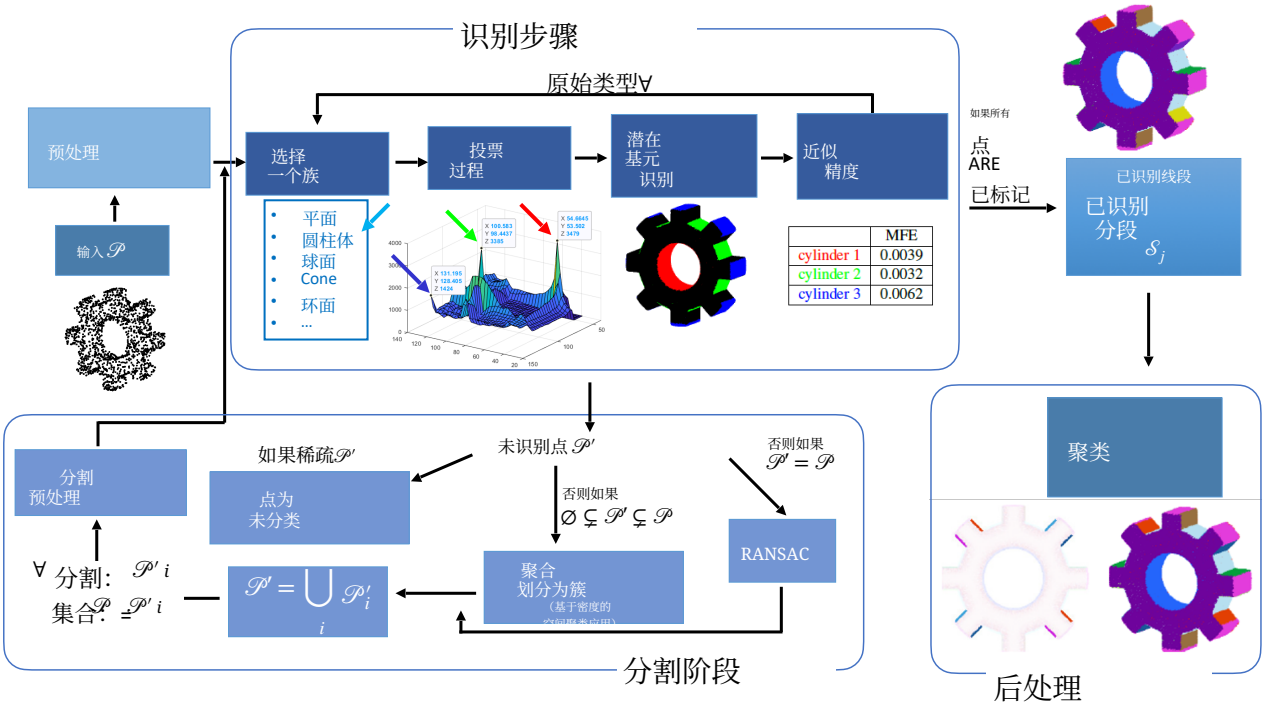


图2：该方法的处理流程。

该算法会返回几何基元的参数、由这些基元拟合的相应点，以及未被任何基元拟合的点集合，记为 $\mathcal{P}'$。请注意，如果多个几何基元都可能拟合点云中的同一区域，我们会选择拟合精度最低的那个（即 MFE 最低的那个）。

5.3 分割阶段

该算法根据得到的 $\mathcal{P}'$ 选择下一步操作：

- 如果 $\mathcal{P}'$ 稀疏，则其点会被标记为未分类。
- 如果 $\emptyset \subsetneq \mathcal{P}' \subsetneq \mathcal{P}$，即 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{P}$的真非空子集，我们就通过将 $\mathcal{P}'$中的点聚合成簇 $\mathcal{P}'_j$来继续处理，其中 $j = 1$、.....、 $N_{簇}$；我们采用基于密度的空间聚类应用（含噪声）（DBSCAN）方法 [41], ，该方法将彼此邻近的点归为一组，并将低密度区域中孤立的点标记为离群点。该方法需要两个参数：第一个是用作密度区域半径的阈值，第二个表示形成稠密区域所需的最少点数。随后，只要还能识别出某些几何基元，就对每个簇 $\mathcal{P}'_j$ 迭代执行第5.2节中的识别步骤。在开始新一轮识别之前，我们会对每个簇 $\mathcal{P}'_j$进行预处理；此处采用的预处理不同于对整个点云 $\mathcal{P}$所采用的预处理：我们利用 [9]中提出的策略来估计其标准形式，从而减少新一轮识别步骤中需要估计的参数数量。具体而言，该策略通过投票过程计算簇 $\mathcal{P}'_j$ 中各点的法向量，并利用针对每种基元类型专门制定的不同几何规则，估计顶点或中心的位置以及对称轴的方向。为降低参数空间的尺寸，会将顶点和中心平移至坐标系原点，同时将对称轴与$z - axis$对齐。随后，该方法会自动对（球面、圆柱面、圆锥面或环面）簇进行居中和定向，使其能够与标准形式的基元拟合。如果识别步骤涉及复杂基元，则可自然扩展 [9] 中提出的策略，因为这类基元具有对称轴，可通过点的法向量以类似方式估计。
- 在某些步骤中，可能无法识别出任何基元。这可能发生在两种情况下：（i）将我们的算法应用于不含任何标准形式基元的输入点云时；或（ii）某个聚类的标准位置估计失败时 $\mathcal{P}'_j$ ——因为$\mathcal{P}'_j$ 包含多个基元。在这两种情况下，我们都会对模型进行过度分割：在实验中，鉴于 RANSAC 算法的高效性以及其倾向于过度分割点云的特点，我们采用了 [11], 提出的 RANSAC 算法（例如，参见 [15]）；不过，我们会通过新一轮识别步骤来估计基元类型和几何参数，因为投票过程已证明对点云伪影具有更强的鲁棒性。

此步骤最后会根据算法前序步骤中施加的逆平移、旋转和缩放，对霍夫变换得到的参数进行变换。该过程的结果是将输入点云 $\mathcal{P}$ 分解为若干子集，称为表面片段 ，或简称分段，使得同一分段中的点都能由同一个基元很好地近似。我们将这些最终分段记为 $\mathcal{S}_j$。

5.4 基于几何关系的分段关联

将输入点云分解为分段 $\mathcal{S}_j$ 后，应用聚类技术来揭示几何关系。此步骤的目标是找到在基于HT的识别过程中未能自动检测到的极大基元，检测基元模式，或关联基元（或其部分），即使它们不属于同一基元。更具体地说，我们根据基元的位置、方向和尺寸来建立关联，如 [9]中对简单几何基本体的描述：只有当分段属于同一基元时，才将其合并；否则，我们只识别可能有用的关系，例如在加工阶段（如工艺规划、机械加工）中。以下是一些示例：

- 可根据半径和旋转轴，将从圆柱体采样得到的分段关联起来。例如，可以检查这些分段是否源自

完全相同的基元形状，即是否全部从具有特定半径和旋转轴的圆柱体采样得到（例如图5中的红色分段）；是否具有相同的半径且旋转轴彼此平行（例如图8中的黑色分段）；是否半径相同，但旋转轴不同，甚至不平行。

- 从螺旋曲面采样得到的分段可以根据其参数 R_1、R_2 和 n、 k_1、 k_2 以及方向——或此类几何描述符的组合进行关联。
- 从 n凸性圆柱体采样得到的分段可以根据其参数 a 和 b、凸性的数量 n以及母线的方向——或此类几何描述符的组合进行关联。

为了进行分段关联，采用一种众所周知的（层次）聚类策略——完全连接法——因为它能够抑制链式效应。

5.5 示例

图2以图形方式展示了我们方法的处理流程。算法的主要步骤与一个表示齿轮的点云示例相关联。

在对点云进行预处理后，我们从识别步骤的第一轮开始——其目标是识别规范位置中的基元。然而，为了清晰起见，图示仅聚焦于圆柱体的识别。具体而言，选定圆柱体族后，便计算相应的累加器函数；该函数呈现出三个峰值，表明存在三个潜在解：以红色、绿色和蓝色突出显示的三个圆柱体。这类基元的近似精度低于1%。

由于部分分段（非轴对齐平面分段）不处于规范位置，其上的点在识别步骤的第一轮中无法被识别。相反，这些点会被收集到 $\mathcal{P}'$ 中，并在分割阶段聚合成密集簇；随后，针对每个簇单独进行新一轮识别步骤，并将其识别为平面线段。然而，由于这些分段是单独研究的，我们会丢失一些几何信息。接着，我们利用霍夫变换提供的几何描述符进行聚类，以识别出位于同一参数平面上的若干平面线段。

最终结果是将对象分割为 17 个分段。值得一提的是，该方法能够将一些非相邻部分归为一组，因为它们在规范位置上属于同一基元——例如两个外部圆柱体，以及组成四对的轴对齐平面。然而，对于不处于规范位置的基元，则需要基于聚类进行后处理。

5.6 计算复杂度

在预处理步骤中，我们的方法包括估算法向量，并确定获得最多投票的法向量；具体实现方式在 [34] 中有所说明——适用于干净的点云——而在 [9] 中有所说明——适用于存在点云伪影的情况。有关该估算的计算复杂度的详细分析，请参阅相应论文。

嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面基元的霍夫变换表述，自然扩展了 $\mathbb{R}^2$ 中平面曲线的表述。在本文提出的处理流程中，对于每个点云 $\mathcal{P}$（包括初始点云以及后续迭代中的单个簇），我们每次考虑一种不同类型的几何基元，并据此应用霍夫变换；因此，参数空间的尺寸会随所考虑的基元类型而相应变化。感兴趣区域的量化和参数空间的尺寸决定了累加器函数的大小，并主导霍夫变换的内存使用量和计算复杂度；因此，必须平衡每个参数的采样数及其参数数量。为降低计算成本，我们将基元置于其（估计的）标准位置，这样参数数量不会超过 3，详见 [9]；此外，自适应方法

还可用于进一步加快搜索速度（例如， [42]）。基于HT的识别步骤的总体计算复杂度为 $\mathcal{O}(ML)$，其中 M 表示参数空间的单元数， L 表示计算霍夫变换累加函数时所用的点数（这些点来自初始点云或后续迭代中得到的某个簇）。更准确地说：

- 在第一次迭代中，霍夫变换应用于整个输入点云。假设用于识别的基元族数量为 K ，且 $\mathcal{P}$ 中的点数为 N，则第一次迭代的总体复杂度为 $\mathcal{O}(N\sum_{k=1}^{K} M_k)$，其中 M_k 是第 k 种原始类型的参数空间尺寸。

- 在后续步骤中，基于HT的识别方法会应用于每个聚类 $\mathcal{P}'_j$ ，计算成本相应为 $\mathcal{O}(\sum_{j=1}^{N_{\text{簇}}} N_j \sum_{k=1}^{K} M_k)$，其中 N_j 表示聚类 $\mathcal{P}'_j$ 中的点数，而 $N_{\text{簇}}$表示簇的数量。

请注意，由于识别步骤针对每种基元类型独立执行，因此该任务易于并行。对于同一轮迭代中得到的点簇，同样如此。

最后，凝聚层次聚类方法在朴素实现中需要 $\mathcal{O}(N_{\text{seg}}^3)$ 次运算，其中 N_{seg} 表示输出分割中的分段数；例如，参见 [43]。对于完全链接聚类，可以采用更高效的实现，例如 [44], 中提出的方法，其计算成本为 $\mathcal{O}(N^2{}_{\text{分段}})$。尽管不相似度矩阵的构建成本为 $\mathcal{O}(N_{\text{seg}}^2)$，但要注意，每个矩阵元素都是独立计算的；因此，这项任务同样易于并行。

6 实验结果

本节展示使用我们的方法获得的结果。具体而言，第6.1.1节展示了一些仅包含简单几何基本体的机械物体点云，而第6.1.2节给出了一些包含复杂基元的示例。在第6.1.3节中，我们展示一些含噪点云，以证明处理流程的鲁棒性。在所有情况下，只要可能，我们都会展示所选点云中的极大基元。最后，第6.2节提供了定性和定量比较分析。

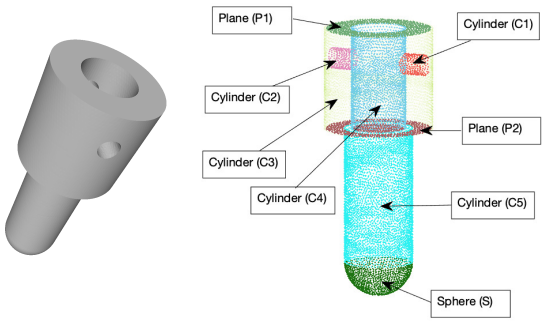
6.1 总体分析

6.1.1 简单几何基本体

作为合理性检查，我们首先将方法应用于来自 [45], 的两个模型。之所以选择它们，是因为它们包含所有简单几何基本体——平面、球面、圆柱体、圆锥面和环面——且有真实值可供参考。图3给出了第一个示例。该点云对应于原始三角网格的顶点集合，被分解为8个曲面片段：5个圆柱体、2个平面和1个球面。通过将霍夫变换得出的参数与数据库中的参数进行比较，可以证明我们的方法具有很高的精度。在第二个示例中（见图4），相应的点云被细分为9个曲面基元：4个圆柱体、1个环面、3个轴对齐平面和1个圆锥面。同样，我们能够识别出所有基元，其参数与数据集提供的参数相比误差很小。

图 5(a-b) 展示了可以分割为完整几何基元的点云，无需进一步进行聚合。第一个示例如图 5(a) 所示，由 11 个分段组成——3 个圆柱体和 8 个平面——展示了我们的方法在检测相交圆柱体方面的稳健性；这些圆柱体在此处的排列方式类似于施泰因梅茨立体。每个完整几何基元都以特定颜色表示，并会被自动检测出来。图 5(b) 展示的另一个点云包含 5 个分段：2 个环面、1 个圆柱体和 2 个轴对齐平面。与前一个案例一样，基于HT的识别成功检测出了所有基元，包括由非相邻部分组成的基元。

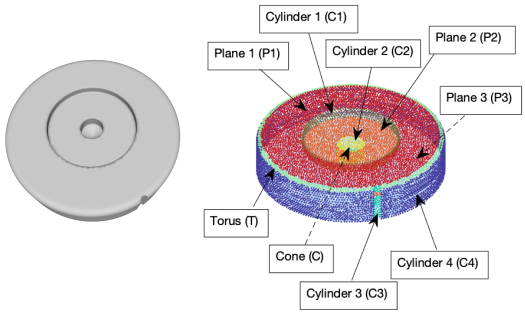
图（6-9）展示了经过 HT 方法处理后，再由层次聚类进行后处理的分段。在图6(b)中，输入点云首先被分割为20



方程	code	真实值	HT参数
$x^2+y^2=r^2$	C1	$r=1.50$	$r=1.50$
	C2	$r=8.00$	$r=8.00$
	C3	$r=4.00$	$r=4.00$
	C4	$r=1.50$	$r=1.50$
	C5	$r=5.00$	$r=5.00$
$z=k$	P1	$k=20.00$	$k=20.00$
	P2	$k=35.00$	$k=35.00$
$x^2+y^2+z^2=r^2$	S	$r=5.00$	$r=5.05$

(a) (b) (c)

图3：在（a）中，展示了 [45] 基准测试集中的一个机械 CAD 模型；在（b）中，其三角网格的顶点被分解为 8 个表面片段；在（c）中，对每个基元，将 HT 参数与数据库提供的参数进行比较



方程	code	真实值	霍夫变换参数
$x^2+y^2=r^2$	C1	$r=15.01$	$r=15.01$
	C2	$r=3.97$	$r=3.97$
	C3	$r=1.28$	$r=1.26$
	C4	$r=29.25$	$r=29.25$
$z=k$	P1	$k=12.00$	$k=12.00$
	P2	$k=9.08$	$k=9.08$
	P3	$k=0.00$	$k=0.00$
$(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2-r^2=0$	T	$R=27.25$	$R=27.25$
		$r=2.00$	$r=2.00$
$x^2+y^2+a(z-b)^2=0$	C	$a=-2.77$	$a=-2.81$
		$b=2.19$	$b=2.22$

(a) (b) (c)

图 4：(a) 中为基准测试集 [45] 中的一个机械 CAD 模型；(b) 中为其三角网格的顶点，分解为 9 个表面片段；(c) 中将每个基元的霍夫变换参数与数据库提供的参数进行比较

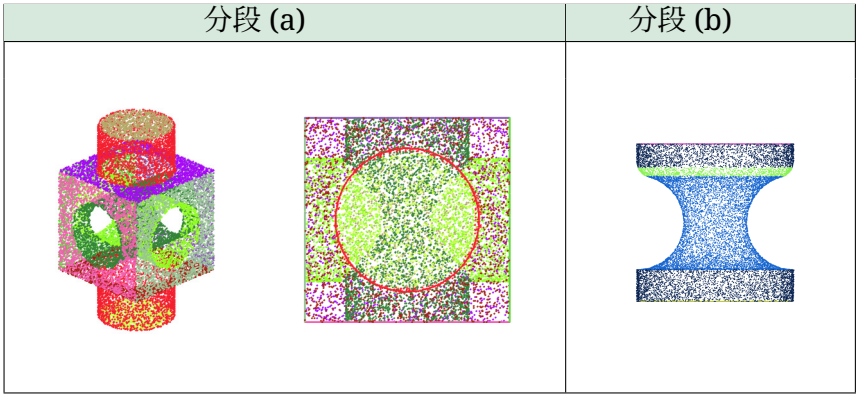


图5：仅包含简单几何基本体的计算机辅助设计点云的识别。在这些情况下，识别极大片段无需应用任何聚类算法。

个曲面基元，并通过基于 HT 的识别算法识别出来（圆柱体和平面）；随后，通过比较能够唯一表征这些基元的几何描述符，将它们关联起来。正如预期，没有发现位于同一曲面上的基元对。尽管原始模型存在瑕疵（见图6(a)），我们仍能正确识别重复基元，此处表现为半径相等的圆柱体。图6(c)突出显示了通过关联圆柱体识别出的相似性：浅蓝色为4个，红色为3个，紫色为2个，黄色为2个。

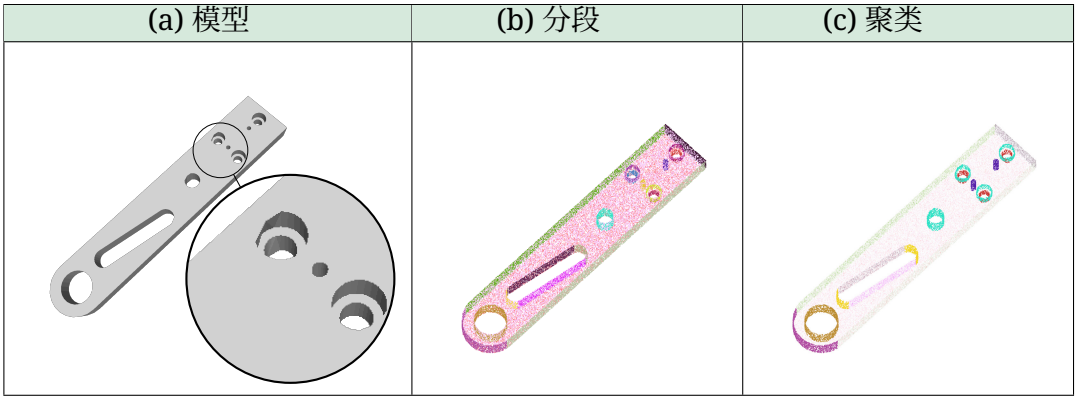


图6：一个连杆臂。(a) 展示了原始模型及其放大图，放大图揭示了一些瑕疵。(b) 展示了霍夫变换识别出的分段，不同颜色代表不同分段。(c) 突出了圆柱体，其中可以看出，有些分段经过平移后位于同一基元上。

图7通过考察一个包含更多分段的点云增加了难度，其中一些分段质量较低，例如图7(a)中标出的小孔。在此示例中，霍夫变换算法识别出的几何基元包括圆柱体、圆锥体和平面。分割结果包含28个表面片段，见图7(b)。请注意，中心孔上有一些凹槽，即原始CAD模型中并不存在的表面细节，因此我们将其识别为圆柱体，而霍夫变换能够忽略这些浅凹槽。最后进行聚类，便可识别出经过平移的重复基元。图7(c)展示了6个圆柱孔（绿色）之间以及另外6个圆柱分段（黄色）之间的相似性。

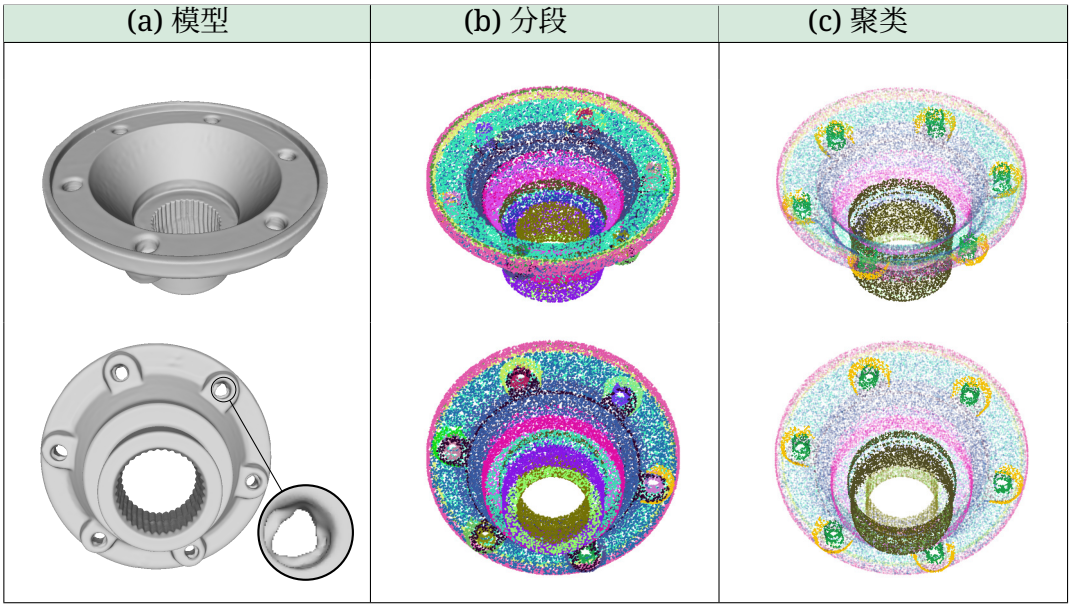


图7：一个曲轴箱。(a) 展示原始模型。 (b) 展示通过HT方法找到的表面片段，(c) 则展示基元关联的结果，其目标是识别经过平移变换后仍为同一基元的对象。不同的行对应不同的视角。

图8(a)展示了另一个齿轮示例。这里提取出的几何基元总数为68个：19个圆柱体、2个圆锥体和47个平面，其中5个为轴对齐平面。结果如图8(b)所示。正如原始模型所示，在这个 NuGear 组件的原型版本中，圆柱体大致由一系列平面基元近似表示；在这个具体案例中，

我们拟合一个圆柱体，而不是许多平面，因为前者能描述更大的区域，同时不会显著增加误差。此处的聚类识别出12个圆柱孔之间的相似性（允许平移），以及2个外部圆柱体之间的相似性；而由非轴对齐平面识别出的表面片段则没有成对归组，这是因为齿倾角使它们无法对齐。图8(c)展示了这一结果：孔以黑色标示，外部圆柱体以黄色标示。

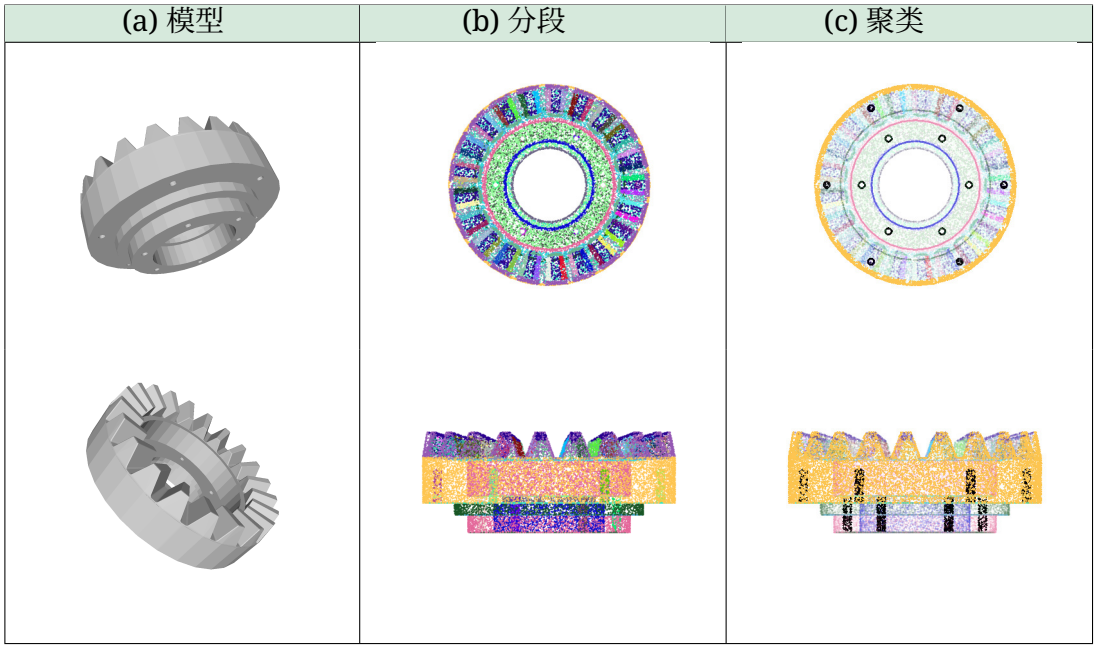


图8：NuGear组件的原型，由 STAM S.r.l.（意大利热那亚）提供。(a)展示原始模型。(b)展示通过HT方法得到的点簇分解结果。(c)展示额外的聚类关联过程的输出，突出显示了12个圆柱孔（黑色）之间以及两个圆柱体（黄色）之间的相似性。

最后，图9(a)展示了另一种机械零件。输入点云的基于HT的分解由50个表面片段组成，这些片段均为环面、圆柱体和平面，见图9(b)。聚类方法能够识别8个红色圆柱孔之间以及2个蓝色圆柱分段之间的相似性（允许平移），见图9(c)。最后，两个环面被合并，因为经过旋转平移后，它们位于同一表面基元上。

表2总结了本节处理的各点云的特征，以及在其上识别出的所有简单基元的平均拟合误差。

表2：第6.1.1节所有模型的 MFES 统计数据。根据定义，MFE 已归一化，因此我们可以得出结论，简单基元拟合的最大误差为 4。48%，这对应于图7曲轴箱中的噪声孔洞。

模型	# 个点	# 个线段	最小值(E_i)	平均值(E_i)	最大值(E_i)
图3	15，216	8	0.0006	0.0021	0.0046
图4	15，022	9	0.0008	0.0029	0.0051
图5(a)	25，000	11	0.0009	0.0024	0.0056
图5(b)	25，000	5	0.0004	0.0031	0.0059
图6(b)	50，000	20	0.0004	0.0098	0.0300
图7(b)	50，000	28	0.0013	0.0107	0.0448
图 8(b)	50，000	68	0.0006	0.0053	0.0178
图 9(b)	50，000	50	0.0008	0.0035	0.0057

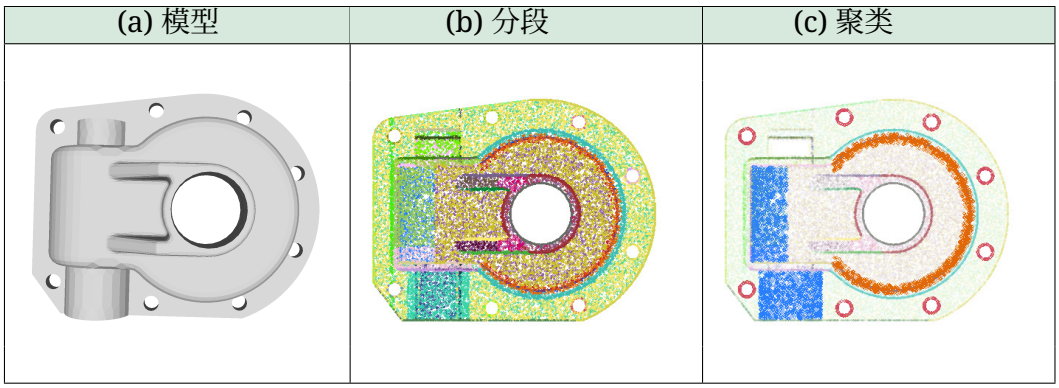


图9：一个机械零件。(a) 显示原始模型；(b) 显示通过霍夫变换对相应点云进行分解所得到的分段。(c) 为聚类过程的结果：红色的8个圆柱孔具有很高的相似性，彼此至多相差一个平移；蓝色的2个圆柱分段也具有相同特性；橙色的2个环面则表明它们至多相差一个旋转平移，且属于同一基元。

6.1.2 复杂几何基元

正如预期的那样，除了第6.1.1节展示的简单基元之外，我们的方法还可以识别其他基元。这里展示了我们在实验中识别出的一些复杂基元。

第一个示例如图10(a)所示，其中包含一个椭球；我们的方法只需在参数空间中增加一个参数，便可轻松识别它。此外，点云还可划分为4个平面、1个环面和1个圆柱体。在图10(b)的点云中，我们能够正确地将黄色分段识别为表1(c)中的旋转曲面；其余点则分割为2个圆柱体和2个平面。在图10(c)所示的点云中，我们将金色部分识别为广义圆锥，而蓝色和绿色分段则拟合为广义圆柱：三者具有相同的准线，即一条 5–凸性曲线。这个点云最后被分割为7个簇。

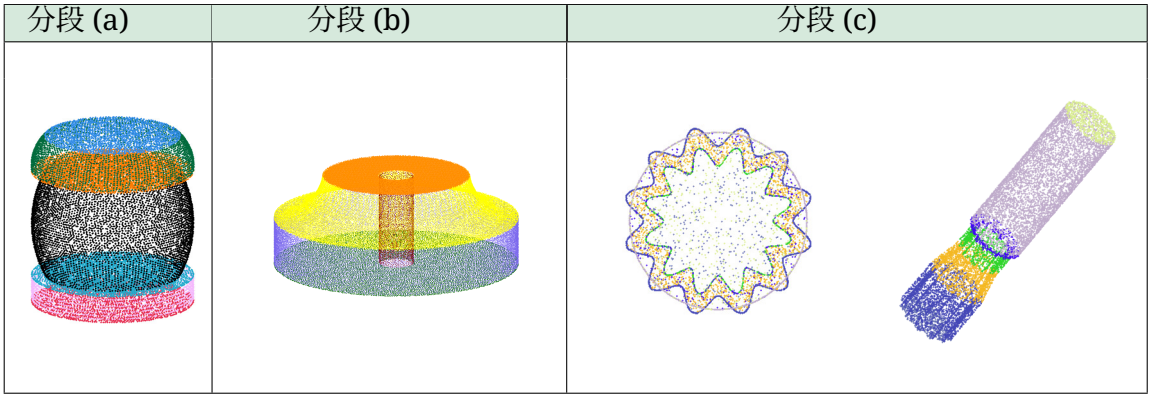


图10：识别 CAD 点云中的复杂几何基元。在这些情况下，无需应用任何聚类算法即可识别它们。

图11(a)展示了一个机械零件，它可以准确地描述为：将一部分螺旋曲面（如表1(d)所示）与一对平面以及一对螺旋线的凸组合（见表1(e)）结合起来。由此将点云分割为6个基元，如图11(b)所示。随后，聚类技术将其中两个基元归为一组，因为这两条螺旋条带的方程仅相差一个平移，如图11(c)所示。

表3列出了本节所处理的每个点云的主要特征，以及其中识别出的所有简单基元和复杂基元的平均拟合误差。

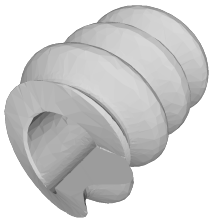
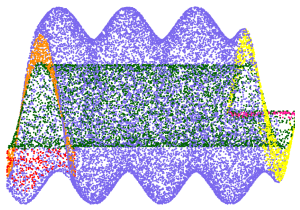
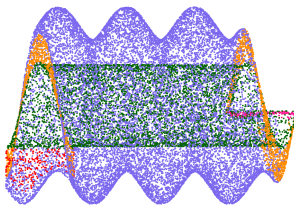
(a) 模型	(b) 分段	(c) 聚类
		

图11：一个螺旋状零件。对原始模型（a）进行采样。（b）展示了通过霍夫变换检测到的曲面基元，并以不同颜色标示：一个螺旋曲面（紫色）、两个平面（红色和洋红色），以及两条螺旋条带（橙色和黄色）。虽然它们中任意两个都不位于同一个参数化曲面上，但如（c）所示，这两条螺旋条带的方程仅相差一个平移。

表3：第6.1.2节所有模型的 MFE 统计数据。由于 MFE 按定义已归一化，因此可以得出结论：简单基元拟合的最大误差为 1，54%，对应图11中的螺旋曲面。

模型	# 点	# 线段数	最小值(E_i)	平均值(E_i)	最大值(E_i)
图10(a)	25，524	7	0.0009	0.0042	0.0063
图 10(b)	67，777	5	0.0006	0.0031	0.0071
图 10(c)	25，000	7	0.0020	0.0053	0.0081
图 11(b)	25,000	6	0.0033	0.0086	0.0154

6.1.3 处理流程的鲁棒性

正如图6和图7的示例所示，霍夫变换（HT）的使用自然地形成了一种鲁棒的数学曲面识别方法；这些示例中的对象均带有杂散部分。

在图12的点云中，霍夫变换识别正确地识别出与中央部分拟合的圆柱体，且未受凸起字母的负面影响——原始模型见图12(a)。该点云被分解为38个分段：23个轴线各异的圆柱体、10个平面、4个圆锥体，以及1个环面；该环面自动识别出带有“GRAYLOC”字样的圆柱体顶部和底部（见图12(b)）。采用层次聚类技术后，我们可以将以下对象归为一组：8个灰色圆柱孔（允许旋转平移）；8个紫色圆柱分段；2个蓝绿色圆柱体；3个紫罗兰色圆柱体；2个橙色圆锥体（允许反射）；2个黑色圆锥体（允许反射）。此外，主体中央部分（顶部和底部由竖直圆锥体、圆柱体和环面识别）以及侧孔处的细微制造瑕疵，并未妨碍聚类技术恰当地关联相应分段，也能正确处理旋转和反射。不过，并非所有部分都能识别：图12(b)中的黑点对应于无法用现有任何几何基元拟合的点，因为它们源自连接定义更明确分段的不规则元素。由于平均拟合误差较高，我们将这些点标记为“未分割”。

图 13 展示了将我们的方法应用于原始数据时的鲁棒性的进一步证明，表4则对其进行了定量分析。在此示例中，我们通过添加均值为零、标准差分别为 0.01、0.05、0.10 和 0.20 的高斯噪声，对图 5(b) 中的点云进行扰动。第一行展示了在每种噪声水平下，被归类为噪声的点（黑色）以及我们的方法在同一图像中找到的分段。第二行仅显示符合已识别基元的点，从而得到去噪分段。表4对噪声鲁棒性进行了定量研究：其中将原始点云中获得的参数与在

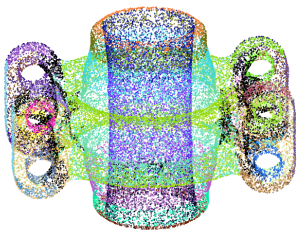
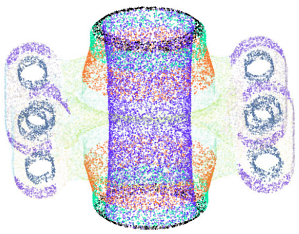
(a) 模型	(b) 分段	(c) 聚类
		

图12：一个夹钳连接器。(a) 中为原始模型。(b) 中为 HT 程序将相应点云分解为 38 个分段的结果。(c) 中为通过聚类得到的最终分组，包含 6 个基元簇（此处，单独的分段簇为透明显示）。

受扰动点云中找到的参数进行了比较。

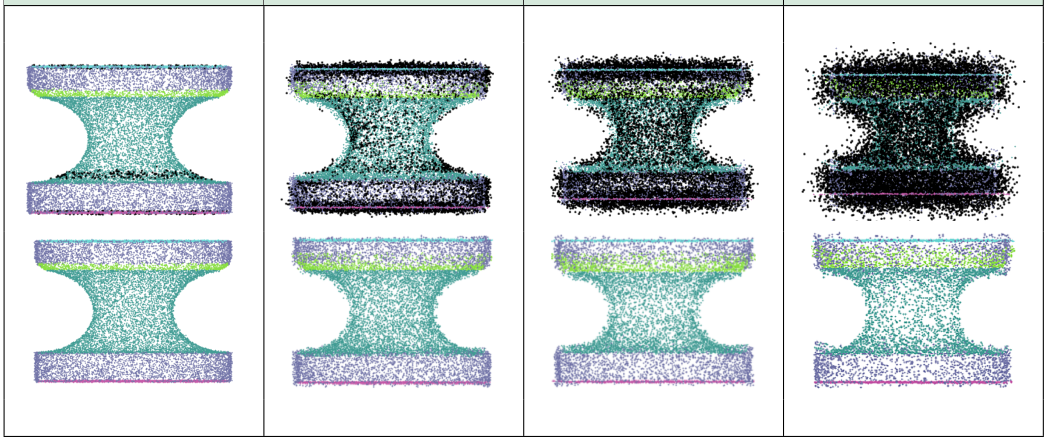
$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.10$	$\sigma = 0.20$
			

图 13：通过添加均值为零、标准差分别为 0.01、0.05、0.10 和 0.20 的高斯噪声，对图 5(b) 中的点云进行了扰动。第一行将识别为噪声的点（黑色）叠加在我们的方法得到的最终分段上；第二行展示了与所发现基元相拟合的点，并给出去噪分割结果。

6.2 比较分析

我们在此将本方法与其他方法进行两项比较，这些方法都依赖于估计给定输入点的法向量。

图14所示的第一项分析仅为视觉分析。由于某些方法缺少可免费下载的实现，因此确实无法以定量方式呈现此项比较，只能进行定性比较。该分析将我们的方法与基于 RANSAC 的方法、 [11], 中的补片聚合方法，以及两种近期的深度学习架构进行比较：ParSeNet [24] 和 HPNet [25]。在此比较中，我们重点考察了仅呈现简单基元的模型，以展示即使在这些模型上，我们的方法也表现出色；另一方面，处理更复杂基元的能力无疑是我们方法的额外优势。与 [15], 类似，我们使用不同颜色表示不同的基元类型：平面为红色，圆柱体为绿色，圆锥体为蓝色，环面为黑色，（开放和闭合）B样条为粉色，未分割部分为黄色。对于图14(a)中的块体这类简单模型，所有方法都能提供不错的分解结果，不过 RANSAC 会误分类某些基元，而深度学习框架则因表面法向量估计不准确而遇到问题：误分类点的位置证实了这一判断，这些点大多仅分布在

表4：图 5(b) 中的原始点云与图 13 中受扰动版本的参数比较。

分割	原始	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.10$	$\sigma = 0.20$
平面 1	$k = -1.28$	$k = -1.28$	$k = -1.29$	$k = -1.28$	$k = -1.31$
平面 2	$k = 1.28$	$k = 1.28$	$k = 1.28$	$k = 1.28$	$k = 1.26$
圆柱体	$r = 1.80$	$r = 1.79$	$r = 1.78$	$r = 1.79$	$r = 1.78$
环面 1	$R = 1.49$ $r = 0.72$	$R = 1.49$ $r = 0.73$	$R = 1.47$ $r = 0.70$	$R = 1.48$ $r = 0.67$	$R = 1.56$ $r = 0.74$
环面 2	$R = 1.05$ $r = 0.79$	$R = 1.09$ $r = 0.78$	$R = 1.02$ $r = 0.78$	$R = 1.17$ $r = 0.74$	$R = 1.13$ $r = 0.80$

尖锐边缘处。对此，值得注意的是，考虑到这些网络是在干净数据上训练的，法向量越准确，最终分割就越精确。在我们的方法中，投票过程使其能够抵御可能出现的扰动。对于其余更复杂的模型，我们的方法优于其他方法。在图 14(b)中，只有我们的方法能够正确识别环面的部分区域；这些区域被 Le 和 Duan [15] 误分类，并被 RANSAC 部分未分割；ParSeNet 和 HPNet 能够发现环面的存在，但由于法线估计不准确，所得分割在尖锐边缘处不可靠。图14(c-d)显示，RANSAC 倾向于对复杂模型进行过度分割和误分类。虽然 Le 和 Duan [15]取得了显著改进的结果，但其算法漏掉了一个细圆柱体（见图14(c)），也漏掉了两个模型中的所有环面。由于这两个对象是由低质量扫描仪采集的，相应的点云（和网格）受到点云伪影的影响，进而导致法线估计误差进一步增大。所得分割结果不可靠，且大多对应于样条曲线分段。如前所述，请注意，这两种架构是在 ABC 数据集上训练的，该数据集未考虑数据中存在噪声或其他类型扰动的情况。然而，由于缺乏足够丰富的扫描 CAD 对象基准测试集，目前无法进行新的训练。

为定量分析处理流程的鲁棒性，我们将其性能与三种最先进方法进行比较。这些方法的实现均由其作者免费公开：一种基于基元生长（PG）框架的直接方法 [18], ，经调整后可处理点云，具体如 [19], 所述；以及上一轮比较中的两种基于学习的方法：ParSeNet（PN）和 HPNet（HN）。我们在整个 Fit4CAD 基准测试集 [19], 上开展研究，该基准测试集包含由简单几何基本体定义的 CAD 点云。此外，Fit4CAD 还包含一组选自 [45], 的、经过验证且具有实际意义的模型，这些模型已从网格转换为点云。图 15 总结了各方法在测试集上的性能，采用的分类指标包括：Sørensen-Dice 指数（DSC）、阳性预测值（PPV）、真正例率（TPR）、阴性预测值（NPV）、真阴性率（TNR）和准确率（ACC）。对于给定的点云，基准测试集通过将真实值中的每个点云分段与分割方法返回的重叠度最高的分段进行比较来计算这些指标，然后对该点云包含的所有分段取平均值。请注意，对于真实值中的某个点云分段，该分段内的点为正例，而分段外的点为负例。我们得出以下结论：

- 基于学习的方法表现出极高的真负率（TNRs）——换句话说，它们预测为阴性的点几乎总是真阴性。另一方面，这些方法的阴性预测值（NPV）则更容易受到影响：虽然 ParSeNet 的变异性最大、四分位数最低，但两种方法都受到离群点的严重影响——部分点云的这一指标低于 0。2。阴性预测值低意味着被预测为阴性的点中有相当一部分是假阴性（例如，这种情况在严重过度分割的模型中很常见）。在此情况下，这些方法受到点云密度低以及可能存在点云伪影（例如缺失数据）的影响。

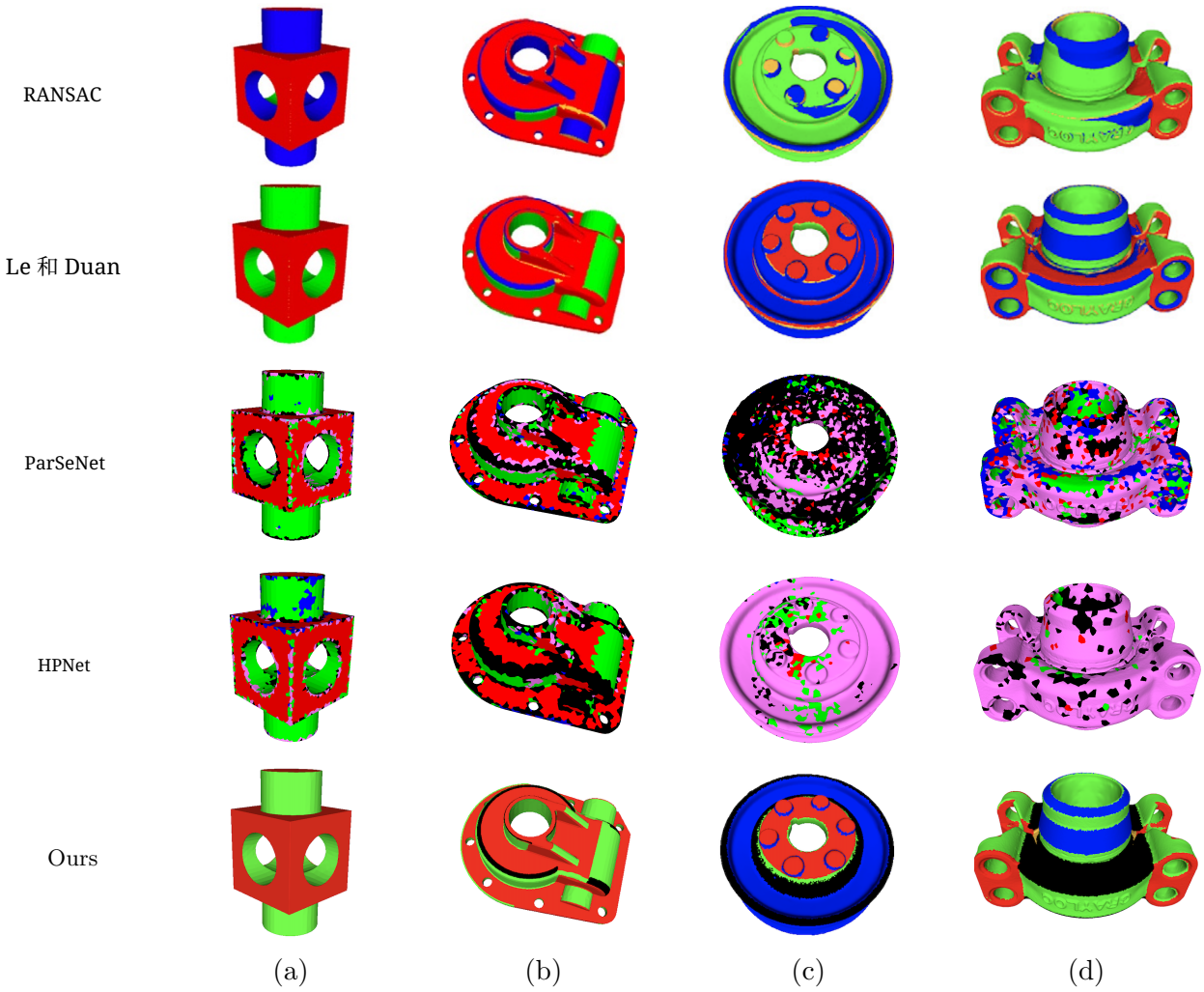


图14：基元类型识别：比较我们的方法、基于 RANSAC 的分割 [11], 和 [15] 中的方法。不同颜色对应不同的基元类型：平面（红色）、圆柱体（绿色）、圆锥体（蓝色）、环面（黑色）、样条曲线（粉色）、未分割（黄色）。

- 就真正例率（TPR）而言，我们的方法显著优于竞争方法，也就是说，在正例中，我们正确（正向）预测所占的比例与竞争方法相近。至于阳性预测值（PPV），差异则较小。

- 就准确率而言，四种方法均取得了较高的分数，其中直接方法最不容易受到离群点的影响；然而，这项指标并不完全可靠，因为这是一个天然类别不平衡的二元分类问题。Dice 相似系数（DSC）提供了更可靠的衡量方式。就 DSC 而言，我们的方法明显优于其他方法。直观来说，DSC 越高，分割方法返回的分段就越准确——相对于真实值中与之重叠最多的分段而言；换句话说，DSC 会大幅惩罚欠分割和过分割。

关于执行时间，我们的基于霍夫变换的方法和基元生长方法均在配备英特尔酷睿 i9 处理器（3.6 GHz）和 Windows 10 操作系统的台式电脑上运行。每个模型的平均执行时间分别为：PG 方法 286.0 秒，我们的处理流程 50.7 秒。ParSeNet 和 HPNet 在配备 NVIDIA-SMI 460.32.03 与 CUDA 11.2 的 Google Colab Pro 上运行。就平均执行时间而言，ParSeNet 需要 5 秒，而 HPNet 需要 257.1 秒（应用法向量预处理时）。

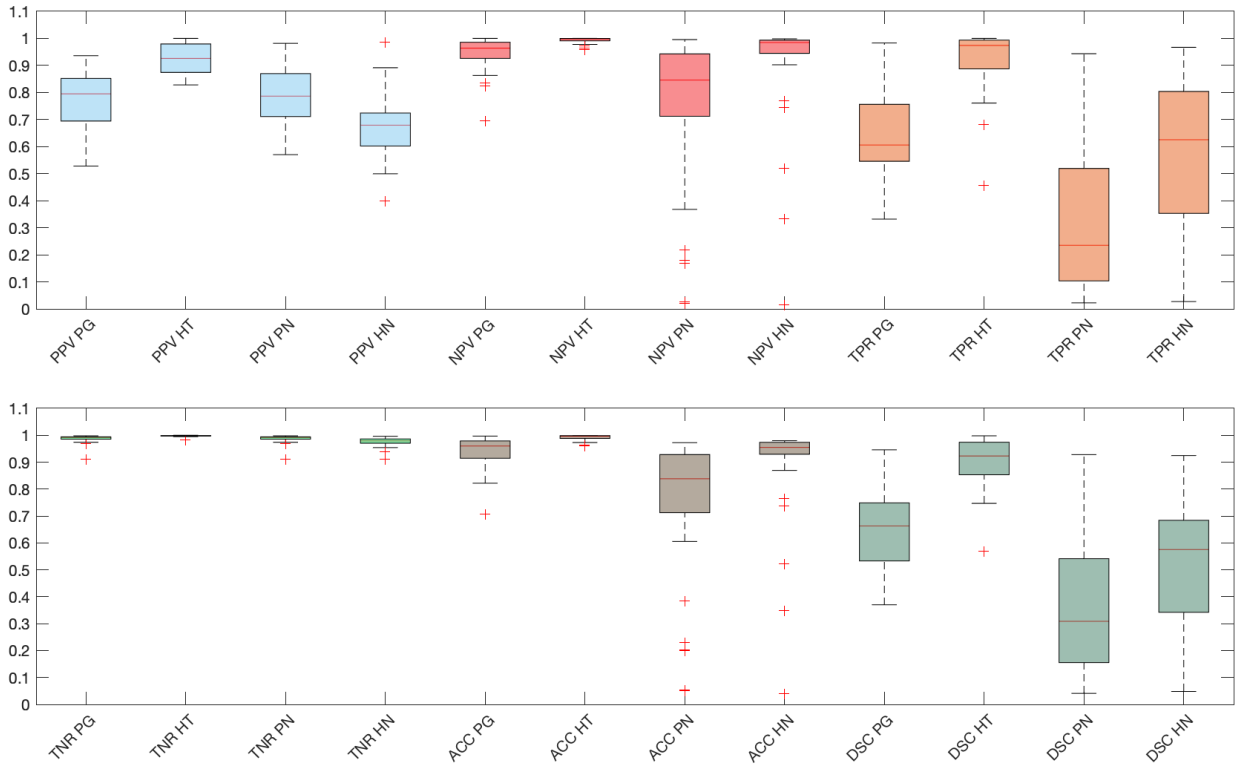


图 15：我们的方法（霍夫变换）与另外三种方法的比较：基元生长方法（PG）、ParSeNet（PN）和 HPNet（HN）。分析基于 Fit4CAD 基准测试集 [19]。

7 结论

为了解决点云中简单基元和复杂基元的识别问题，我们适时扩展了可应用霍夫变换技术的几何基元族。霍夫变换天然具有较强的抗噪声和抗离群点能力，并能识别同一基元的多个实例。得益于对点云及其子部分进行适当的预处理，我们能够限制表示基元所需的参数数量，从而降低霍夫变换计算的计算复杂度。此外，显式提取与位置无关的基元参数，并采用层次聚类策略，使我们能够识别极大基元和复合基元，从而减少输出中的过分割。事实上，与基于样条的基元不同，我们的策略适用于基元相似性推理，并能够找到极大基元。

尽管近年来学习方法表现出色，但当模型包含复杂的基元组合时（例如图14(c,d)中的示例），直接方法的表现更好，而我们的方法也极具竞争力。此外，我们的方法已在完整的基准测试集上得到验证，与其他方法相比，结果表明它表现最佳。

目前，我们处理流程的主要局限在于使用了数学表示需要大量参数的几何基元，即使是其标准形式也不例外。虽然理论上可行，但这确实会使执行时间呈指数级增长，导致算法在实践中无法应用。图16展示了一个具有启发性的例子：点云中包含由样条曲面生成的分段。虽然我们的方法无法处理样条曲面，但能够识别出点云中的某些部分并非源自我们所支持的任何基元。图16第一行显示真实分割标注，第二行显示我们得到的分割结果：黑点对应未被识别为简单几何基本体的点；由于平均拟合误差较高，这些点被标记为“未分割”。请注意，为了便于观察，样条曲线分段经过了欠采样，但是

只有在对点云进行分割之后，才会执行这一处理。相反，能够识别样条曲线的方法往往会为每个分段赋予一个标签，如图14所示。

作为未来的工作，我们正在考虑采用其他策略来降低基于HT的识别步骤的计算成本。事实上，可以通过采用一种细化策略进一步优化参数空间的尺寸；该策略仅在相关的关注区域内离散化参数空间。另一个可能的研究方向是探讨我们的方法是否适用于不可定向曲面。事实上，由于我们使用的数据集仅包含具有可定向曲面的物体，因此目前我们只将该方法应用于这类物体。然而，从理论上讲，只要文献中存在这类物体的方程，且方程组能够针对参数求解（如莫比乌斯带的情况），我们的方法也可以应用于具有不可定向曲面的物体。这里的挑战在于研究一种预处理技术，将点云平移和/或旋转至该类曲面的标准形式。例如，对于莫比乌斯带，如何估计其对称轴，以便放置点云，使我们能够用标准形式的基元对其进行拟合。

关于流程自动化，我们可以利用基于曲率的表征对输入点云中的点进行预分类，例如 [46] 提出的局部表面变化，或 [18] 用于 ISO GPS分割的形状指数和弯曲度。将点按类型聚合后，我们可以进一步使用拟合方法对这些区域进行拆分或合并，也可以只考虑合适的基元子集，即与识别出的点类型相兼容的基元，例如平面、圆柱面、球面等。

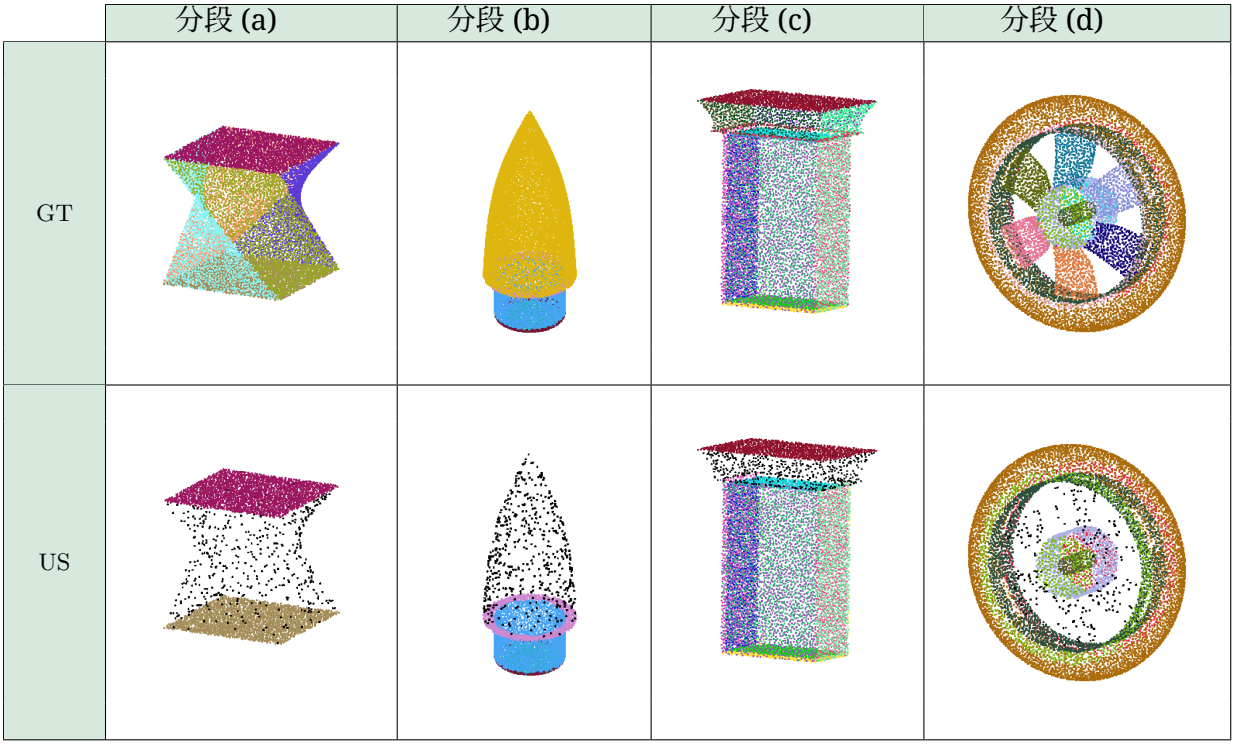


图16：ABC 数据集 [45] 中的四个模型，包含样条曲线分段：真实值（GT）分割与我们对简单几何基本体（US）的识别结果对比。为使正确识别的基元更加清晰可见，第二行以较低的点密度显示被分类为样条曲线的分段。

致谢

这项工作是在 CNR 的研究活动 DIT.AD004.100、DIT.AD021.080.001 和 DIT.AD021.125 中开展的。

作者感谢 AIM@SHAPE 联盟提供的 VVS 形状存储库（http://visionair. ge.imati.cnr.it），以及来自 RISC Software GmbH（奥地利林茨）的 Alexander Leutgeb 博士，感谢他们为本文提供所使用的模型。

参考文献

[1] F. Poux, C. Mattes, Z. Selman, L. Kobbelt，用于分割大型点云的自动区域生长系统，《Automation in Construction》138 (2022) 104250。doi: 10.1016/j.autcon.2022.104250。[2] Y. Li, X. Wu, Y. Chrysathou, A. Sharf, D. Cohen-Or，GlobFit：通过发现全局关系一致地拟合基元，《ACM Transactions on Graphics》30 (4)。doi:10.1145/2010324.1964947。[3] A. Monszpart, N. Mellado, G. J. Brostow, N. J. Mitra，Rapter：通过规则排列的平面重建人造场景，《ACM Trans. Graph.》34 (4)。doi:10.1145/2766995。[4] K. Lupinetti, J.-P. Pernot, M. Monti, F. Giannini，基于内容的 CAD 装配模型检索：综述与未来挑战，计算机辅助设计113 (2019) 62–81。doi: 10.1016/j.cad.2019.03.005。[5] P. V. C. Hough，用于识别复杂模式的方法与装置，美国专利 3,069,654 (1962年)。[6] D. H. Ballard，将霍夫变换推广至任意形状检测，《Pattern Recognition》13 (2) (1981) 111–122。doi:10.1016/0031-3203(81)90009-1。[7] O. J. Woodford, M. Pham, A. Maki, F. Perbet, B. Stenger，为三维形状识别与配准消除霍夫变换的模糊性，《International Journal of Computer Vision》106 (3) (2014) 332–341。doi:10.1007/s11263-013-0623-2。[8] M. C. Beltrametti, L. Robbiano，霍夫变换的代数方法，《Journal of Algebra》37 (2012) 669–681。doi:10.1016/j.jalgebra.2012.09.012。[9] A. Raffo, C. Romanengo, B. Falcidieno, S. Biasotti，使用局部投票程序拟合并识别分割后的三维点云中的几何基元，《Computer Aided Geometric Design》97。doi:10.1016/j.cagd.2022.102123。[10] A. Kaiser, J. A. Ybanez Zepeda, T. Boubekeur，采集的三维数据中简单几何基本体检测方法综述，《Computer Graphics Forum》38 (1) (2019) 167–196。doi:10.1111/cgf.13451。[11] R. Schnabel, R. Wahl, R. Klein，用于点云形状检测的高效 RANSAC，《Computer Graphics Forum》26 (2) (2007) 214–226。doi:10.1111/j.1467-8659.2007.01016.x。[12] F. A. Limberger, M. M. Oliveira，无组织点云中平面区域的实时检测，《Pattern Recognition》48 (6) (2015) 2043–2053。doi:10.1016/j.patcog.2014.12.020。[13] M. Attene, G. Patan`e，点采样曲面的层次结构恢复，《Computer Graphics Forum》29 (6) (2010) 1905–1920。doi:10.1111/j.1467-8659.2010.01658.x。[14] D.-M. Yan, W. Wang, Y. Liu, Z. Yang，通过二次曲面拟合进行变分网格分割，计算机辅助设计44 (11) (2012) 1072–1082。doi:10.1016/j.cad.2012.04.005。[15] T. Le, Y. Duan，一种基于基本体的机械 CAD 模型三维分割算法，《Computer Aided Geometric Design》52-53 (2017) 231–246，《Geometric Modeling and Processing 2017》。doi:10.1016/j.cagd.2017.02.009。

[16] L. Li, M. Sung, A. Dubrovina, L. Yi, L. J. Guibas，三维点云几何基元的监督拟合，载于：论文集—IEEE计算机学会计算机视觉与模式识别会议，2019，页码2652–2660。doi:10.1109/CVPR.2019.00276。[17] M. A. Uy, Y.-Y. Chang, M. Sung, P. Goel, J. G. Lambourne, T. Birdal, L. J. Guibas，Point2cyl：从点云逆向重建三维物体为拉伸圆柱体，载于：IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，2022，页码11850–11860。[18] Y. Qie, L. Qiao, N. Anwer，利用离散曲率与共形几何增强不变类划分，计算机辅助设计133。doi:10.1016/j.cad.2020.102985。[19] C. Romanengo, A. Raffo, Y. Qie, N. Anwer, B. Falcidieno，Fit4CAD：用于在 CAD 对象中拟合简单几何基元的点云基准测试集，《计算机与图形学》102 (2022) 133–143。doi:10.1016/j.cag.2021.09.013。[20] V. Markovic, Z. Jakovljevic, I. Budak，从非结构化点云中自动识别圆柱体和平面，《视觉计算机》(2021) 1–24。[21] T. Birdal, B. Busam, N. Navab, S. Ilic, P. Sturm，使用新型最小二次曲面拟合进行点云通用基元检测，IEEE模式分析与机器智能汇刊42 (6) (2020) 1333–1347。doi:10.1109/TPAMI.2019.2900309。[22] C. Liu, W. Hu，旋转曲面的实时几何拟合与位姿估计，《Pattern Recognition》85 (2019) 90–108。doi:10.1016/j.patcog.2018.08.002。[23] F. Bergamasco, M. Pistellato, A. Albarelli, A. Torsello，将无方向点云中的圆柱体提取视为聚类问题，《Pattern Recognition》107 (2020) 107443。doi:https: // doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107443。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320320302466[24] G. Sharma, D. Liu, S. Maji, E. Kalogerakis, S. Chaudhuri, R. M˘ech，ParSeNet：三维点云参数曲面拟合网络，载于：计算机视觉—ECCV 2020：第16届欧洲计算机视觉会议，英国格拉斯哥，2020年8月23日至28日，论文集，第VII部分，施普林格出版社，柏林，海德堡，2020，页码261–276。doi:10.1007/978-3-030-58571-6_16。[25] S. Yan, Z. Yang, C. Ma, H. Huang, E. Vouga, Q. Huang，HPNet：使用混合表示进行深度基元分割，载于：IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV）论文集，2021，页码2753–2762。doi:10.1109/ICCV48922.2021.00275。[26] G. Sharma, B. Dash, A. RoyChowdhury, M. Gadelha, M. Loizou, L. Cao, R. Wang, E. G. Learned-Miller, S. Maji, E. Kalogerakis，PriFit：学习拟合基元以改进少样本点云分割，《Computer Graphics Forum》doi:10.1111/cgf.14601。[27] D. Borrmann, J. Elseberg, K. Lingemann, A. N¨uchter，用于点云平面检测的三维霍夫变换：综述与一种新的累加器设计，《三维研究》2 (2)。doi: 10.1007/3DRes.02(2011)3。[28] L. A. Fernandes, M. M. Oliveira，无序多维数据子空间检测的通用框架，《Pattern Recognition》45 (9) (2012) 3566–3579。doi:10.1016/j.patcog.2012.02.033。[29]M. Camurri, R. Vezzani, R. Cucchiara，基于点云的三维霍夫变换球体识别，《机器视觉与应用》25 (7) (2014) 1877–1891。doi:10.1007/s00138-014-0640-3。[30] T. Rabbani Shah, F. van den Heuvel，用于点云圆柱体自动检测的高效霍夫变换，载于：G. Vosselman, C. Brenner（编），ISPRS激光扫描2005，ISPRS工作组，2005，页码60–65。

[31] M. C. Beltrametti, J. R. Sendra, J. Sendra, 霍夫变换框架中的 Moore–Penrose 方法，《应用数学与计算》375 (2020) 125083。doi: 10.1016/j.amc.2020.125083。[32] C. Romanengo, A. Raffo, S. Biasotti, B. Falcidieno, V. Fotis, I. Romanelis, E. Psatha, K. Mous- takas, I. Sipiran, Q.-T. Nguyen, C.-B. Chu, K.-N. Nguyen-Ngoc, D.-K. Vo, T.-A. To, N.-T. Nguyen, N.-Q. Le-Pham, H.-D. Nguyen, M.-T. Tran, Y. Qie, N. Anwer, SHREC 2022：点云上简单几何基元的拟合与识别，《计算机与图形学》107 (2022) 32–49。doi:https://doi.org/10.1016/j.cag.2022.07.004。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097849322001224[33] E. V. Shikin，《曲线手册与图谱》，CRC出版社，1995。[34] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, W. Stuetzle，基于无组织点的曲面重建，载于：第19届计算机图形学与交互技术年度会议论文集，SIGGRAPH '92，计算机协会，纽约，美国纽约州，1992，第71–78页。doi:10.1145/133994.134011。URL https://doi.org/10.1145/133994.134011[35] C. Romanengo, E. Brunetto, S. Biasotti, C. E. Catalano, B. Falcidieno，曲线组合所表示的图案或符号的识别、建模与交互式操作，载于：S. Biasotti, R. Pintus, S. Berretti（编），意大利分会会议2020——计算机图形学智能工具与应用，STAG 2020，意大利虚拟会议，2020年11月12—13日，欧洲图形学协会，2020，第27–35页。doi:10.2312/stag.20201237。[36] R. Penrose，关于线性矩阵方程的最佳近似解，《剑桥哲学学会数学学报》52 (1) (1956) 17–19。[37] Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian，拓扑持久性与简化，《离散计算几何》28 (4) (2002) 511–533。doi:10.1007/s00454-002-2885-2。[38] H. Doraiswamy, N. Shivashankar, V. Natarajan, Y. Wang，拓扑显著性，《计算机与图形学》37 (7) (2013) 787–799。doi:10.1016/j.cag.2013.04.009。[39] S. Biasotti, A. Cerri, S. Pittaluga, D. Sobrero, M. Spagnuolo，利用持久极大值追踪降雨场的演变，载于：《计算机图形学智能工具与应用会议论文集》，2016，第29–37页。doi:10.2312/stag.20161361。[40] J. H. Friedman, J. L. Bentley, R. A. Finkel，一种以对数期望时间寻找最佳匹配的算法，《ACM数学软件汇刊》3 (3) (1977) 209–226。doi: 10.1145/355744.355745。[41] M. Ester, H. P. Kriegel, J. Sander, X. Xu，一种用于在含噪声的大型空间数据库中发现簇的基于密度的算法，载于： 2nd 国际知识发现与数据挖掘会议，AAAI出版社，1996，第226–231页。[42] H. Li, M. A. Lavin, R. J. Le Master，快速霍夫变换：一种分层方法，《计算机视觉、图形学与图像处理》36 (2) (1986) 139–161。doi:10.1016/0734-189X(86) 90073-3。[43] W. Day, H. Edelsbrunner，凝聚层次聚类方法的高效算法，《分类学杂志》1 (1) (1984) 7–24。doi:10.1007/BF01890115。[44] D. Defays，一种用于全连接法的高效算法，《计算机杂志》20 (4) (1977) 364–366。doi:10.1093/comjnl/20.4.364。

[45] S. Koch, A. Matveev, Z. Jiang, F. Williams, A. Artemov, E. Burnaev, M. Alexa, D. Zorin, D. Panozzo，ABC：用于几何深度学习的大型 CAD 模型数据集，载于：IEEE 计算机视觉与模式识别会议（CVPR），2019。doi:10.1109/CVPR. 2019.00983。

[46] M. Pauly, M. Gross, L. P. Kobbelt，《点采样曲面的高效简化》，载于：IEEE 可视化会议，2002，2002，第 163–170 页。doi:10.1109/VISUAL.2002.1183771。