arXiv:2301.04376v1 [math.OC] 11 Jan 2023

分布式不完全信息聚合博弈的贝叶斯纳什均衡求解

Hanzheng Zhang[†‡], Guanpu Chen[§], Huashu Qin[†]

摘要

本文研究不完全信息聚合博弈中的分布式贝叶斯纳什均衡（BNE）求解问题，该博弈是贝叶斯博弈和确定性聚合博弈的推广。我们处理分布式不完全信息情形下的聚合函数。由于可行策略是无穷维函数，且属于非紧集，类型的连续性给均衡求解带来了障碍。为此，我们对连续类型进行离散化，并证明所得离散化模型的均衡是一个 ϵ-BNE。在此基础上，我们提出一种用于求解 ϵ-BNE的分布式算法，并进一步证明其收敛性。

Keyw词：聚合博弈、贝叶斯博弈、均衡近似、分布式算法

1 引言

近年来，多智能体决策与控制的分布式设计日益重要，针对各种博弈也提出了许多分布式算法 [4, 10, 13, 19]。聚合博弈作为非合作分布式博弈，受到了广泛研究。在聚合博弈中，每个参与者的成本函数取决于其自身行动以及所有参与者所采取决策的总体量，该总体量通过网络通信获得。 [10] 针对聚合博弈提出了分布式同步和异步算法，并分析了这些算法的收敛性； [13] 则考虑了聚合博弈中的耦合约束，并为广义纳什均衡提出了一种分布式连续时间算法。此外， [19] 提出了一种利用内接多面体估计局部集合约束的分布式逼近算法。

考虑到现实中的不确定性，存在各种不完全信息模型，其中贝叶斯博弈是最重要的模型之一，应用范围也十分广泛 [1, 3, 5, 11]。在贝叶斯博弈中，参与者无法获知其他参与者的完整特征，这些特征称为类型，并服从某种分布。每个参与者都知道自己的类型，并且可以获取所有类型的分布 [8]。由于应用广泛，贝叶斯纳什均衡（BNE）的存在性与计算是研究各种贝叶斯博弈的基础问题。为此，许多研究通过固定类型并将博弈转化为确定性博弈，探讨了离散类型博弈的贝叶斯纳什均衡 [1, 2], 。除集中式模型外，也有许多关于分布式贝叶斯博弈的研究 [1, 12], , 其中参与者依据本地信息和邻居节点的信息做出决策。

然而，前述大多数研究都聚焦于离散类型贝叶斯博弈。事实上，连续类型贝叶斯博弈也广泛存在于工程学、经济学等诸多领域 [5, 11]。类型的连续性给贝叶斯纳什均衡的求解与验证带来了挑战。具体而言，在这类博弈中，可行策略是无穷维函数，因此其集合并不紧 [6, 15]。由于缺乏紧性，我们无法应用不动点定理来证明贝叶斯纳什均衡的存在，更不用说求解贝叶斯纳什均衡了。幸运的是，许多先驱者已尝试研究此类连续类型情形下贝叶斯纳什均衡的存在性，并设计其计算方法。例如， [15] 借助等度连续收益和绝对连续信息分析了贝叶斯纳什均衡的存在性

*本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：62173250）资助。

†中国科学院数学与系统科学研究院系统与控制重点实验室，中国北京（zhang- hanzheng@amss.ac.cn, qin@iss.ac.cn）。

‡中国科学院大学数学科学学院，中国北京。§京东探索研究院，中国北京（chengp@amss.ac.cn）。

而 [14] 研究了最佳响应等度连续的情形。随后， [6] 给出了等度连续性的一个等价条件，并提出了一种逼近算法。此外， [18] 将贝叶斯纳什均衡视为变分不等式的解，并给出了贝叶斯纳什均衡存在的一个充分条件； [7] 则在策略形式为先验知识的情况下，提出了两种基于变分不等式的算法。

因此，值得研究如何利用贝叶斯方案分析不完全信息聚合博弈，因为它可以被视为确定性聚合博弈 [10, 13, 19] 和贝叶斯博弈 [6, 8, 15]的推广。然而，连续类型贝叶斯聚合博弈比确定性聚合博弈和离散类型贝叶斯博弈更具挑战性。一方面，在不完全信息模型中，由于策略是随机变量（即类型）的函数，而策略的总体量也是如此，因此聚合函数也应是随机变量的函数；而现有的确定性情形聚合函数 [10, 13, 19] 无法应用于不完全信息情形。另一方面，为了以分布式方式求解连续类型贝叶斯纳什均衡，我们需要一种有效方法，将无限维贝叶斯纳什均衡求解问题转化为有限维问题，同时还要便于分布式设计。

具体而言，本文研究如何在分布式聚合博弈中求解连续类型贝叶斯纳什均衡，其中每个参与者都有自己的类型，该类型服从某个联合分布，并根据自身类型、本地信息以及所有参与者决策的总体量作出决策。参与者通过时变图交换信息并估计总体量。其挑战在于如何处理不完全信息下的聚合函数，以及如何在这一连续类型模型中求解贝叶斯纳什均衡。本文的贡献总结如下。

- 我们研究一种具有连续类型的分布式聚合贝叶斯博弈，其中每个参与者都可以获取自身类型和总体量。此类广义模型既可视为多人贝叶斯博弈 [6, 8, 15] （如果每个参与者都能获取所有参与者的策略），也可视为确定性聚合博弈 [10, 13, 19] （通过消除不确定性得到）。此外，我们关注参与者采用非单值函数作为策略时的不完全信息聚合函数；当类型为确定性时，该函数可转化为策略平均值 [10]。

- 我们通过对连续类型进行离散化，提出一种贝叶斯纳什均衡逼近方法。通过建立离散化模型，我们证明，所推导模型的贝叶斯纳什均衡是连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡。与现有的连续类型贝叶斯博弈方法 [6, 9] 相比，我们的方法不仅给出了显式误差界，还提供了超越启发式方法的实用实现方案 [7]。

- 基于离散化，我们提出一种基于梯度下降的分布式算法，用于求解离散化模型的贝叶斯纳什均衡，即原连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡。此外，我们利用李雅普诺夫理论证明，所提出的算法生成的序列收敛于原连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡。

本文结构安排如下。第 2 节总结预备知识。第 3 节对问题进行建模。第 4 节提出一种离散化方法，用于生成 ϵ-贝叶斯纳什均衡；第 5 节给出一种用于求解所得近似贝叶斯纳什均衡的分布式算法，并分析该算法的收敛性。第 6 节通过数值仿真进行说明。最后，第 7 节总结全文。

2 预备知识

2.1 符号说明

用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实欧几里得空间，其测度记为 μ。 $B(a,\varepsilon)$ 是一个以 a 为中心、半径为 $\epsilon > 0$ 的球。记 $col(x_1,\dots,x_n) = (x_1^T,\dots,x_n^T)^T$，并令 $1_n \in \mathbb{R}$ 表示所有元素均为 1 的列向量。对于整数 $n > 0$，记作 $[n] = \{1,\dots,n\}$。对于列向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$，$\langle x, y\rangle$ 表示内积， $\|\cdot\|$ 表示 2-范数。对于矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其第 i 行、第 j 列的元素记为 $[W]_{ij}$, $i, j \in [n]$。若一个函数在其定义域内除有限个点外均连续，则称其为分段连续函数。对于 $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$，定义一个向量，其元素为 $\boldsymbol{x}$，但 i 除外，记作 $x_{-i} = (x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n)$。对于 $\boldsymbol{s} = x_1 \times \cdots \times x_n$，其曲面微分记为 $d\boldsymbol{s}$。

2.2 凸分析

若集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2 \in C, \forall z_1, z_2 \in C$ 且 $0 \leq \lambda \leq 1$，则称其为凸集。对于闭凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$，定义投影映射 Π_C: $\mathbb{R}^n \to C$ 为 $\Pi_C(x) = \arg\min_{y \in C} \|x-y\|$，且满足 $\langle x - \Pi_C(x)\ \Pi_C(x)\ - y\rangle \geq 0, \forall y \in C$。若函数 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(<)\ \leq \lambda f(x_1)\ + (1-\lambda)f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 且 $\lambda \in (0,1)$，则称其为（严格）凸函数。

对于凸可微函数 f， f在点 x处的梯度记为 ∇f，满足 $f(y)\ \geq f(x)+\langle y-x, \nabla f(x)\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n$。对于凸可微函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$，将 $\nabla_i f$记为 f关于 x_i的微分。如果 f是（严格）凸函数，则 f的梯度满足 $\langle \nabla f(x)\ - \nabla f(y)\ x-y\rangle\ (>)\ \geq 0$。

2.3 贝叶斯博弈

考虑一个记为 $G = (I, \{X_i\}_{i\in I}, \boldsymbol{\Theta}, P(\cdot)\ \{f_i\}_{i\in I})$ 的贝叶斯博弈，其参与者集合为 $I = [n]$。其中，参与者 i 的可行行动集为 $X_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$，成本函数为 $f_i(x_i, x_{-i}, \theta_i)$。对于 $i \in I$，参与者 i 的不完全信息称为类型，记为 $\theta_i \in \Theta_i \subseteq \mathbb{R}$；而 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \boldsymbol{\Theta}$ 是一个从概率空间 $(\Omega\ \mathcal{B}, P)$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的随机变量。将 P 的密度函数记为 p，其边际密度为 $p_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} p(\theta_i, \theta_{-i}) d\theta_{-i}$，条件概率密度为$p_i(\theta_{-i}|\theta_i) = p(\theta_i, \theta_{-i})/p_i(\theta_i)$， $i \in [n]$。全文中，我们用 $\boldsymbol{\theta}$ 表示一个从 $(\Omega\ \mathcal{B}, P)$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的随机变量，或根据上下文表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个确定性元素。

此处，每个参与者 $i \in I$ 只知道自己的类型，而不知道对手的类型。与贝叶斯博弈 [8],一样，联合分布 P 属于公共信息。参与者 i 的成本函数定义为 f_i: $\boldsymbol{X} \times \Theta_i \to \mathbb{R}$，它取决于所有参与者的行动以及参与者 i的类型。每个参与者采用一个策略 σ_i，即从其类型集 Θ_i 映射到其行动集 X_i的可测函数；当参与者 i 收到类型 $\theta_i \in \Theta_i$ 时， $\sigma_i(\theta_i)$表示其采取的行动。将参与者 i 的可能策略集记为 Σ_i。定义由函数 β: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ 构成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_i$，其内积为 $\langle \sigma, \sigma' \rangle_{\mathcal{H}_i} = \int_{\theta_i \in \Theta_i} \langle \sigma_i, \sigma_i' \rangle\ p_i(\theta_i) d\theta_i,\ \sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_i, i \in I$. 因此，策略集 Σ_i 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_i$的子集。

2.4 图论

无向图 $\mathcal{G}$由 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 定义，其中 $\mathcal{V} = [n]$是节点集， $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$是边集。如果 $(j,i) \in \mathcal{E}$，则节点 j是节点 i的邻居节点，因此节点 i是节点 j的邻居节点。取 $(i,i) \in \mathcal{E}$。从 i_1到 i_k的 $\mathcal{G}$中的路径，是节点的交替序列 $i_1 e_1 i_2 \cdots i_{k-1} e_{k-1} i_k$，满足对于 $j \in [k-1]$， $e_j = (i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{E}$。$[W]_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$是邻接矩阵，若 $(j,i) \in \mathcal{E}$，则 $[W]_{ij} > 0$；否则为 $[W]_{ij} = 0$。如果对于任意一对节点 $i, j \in \mathcal{G}$， $\mathcal{G}$ 中都存在一条从 i 到 j 的路径，则 $\mathcal{G}$是连通的。

3 问题表述

考虑一个不完全信息聚合博弈，记为 $(I, \{X_i\}_{i\in I}, \boldsymbol{\Theta}, P, \{f_i\}_{i\in I})$。每个参与者 $i \in I = [n]$ 都有其类型 $\theta_i \in \Theta_i \subseteq \mathbb{R}$、可行行动集 $X_i \subseteq \mathbb{R}^m$和成本函数 $f_i(x_i, \tilde{x}, \theta_i)$，其中类型 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ 服从分布 $P(\boldsymbol{\theta})$，其密度为 $p(\boldsymbol{\theta})$，而 $\tilde{x}$是所有参与者决策的总体量。类型集 Θ_i 是紧的，且不失一般性，取 $\Theta_i = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$。参与者 i采用策略 σ_i，这是一个从其类型集 Θ_i 到其行动集 X_i的可测函数。也就是说，当类型为 $\theta_i \in \Theta_i$时，参与者 i 将采取 $\sigma_i(\theta_i) \in X_i$ 作为其行动。将参与者 i 的策略集记为 Σ_i。

与确定性博弈不同，在不完全信息情形下，考虑参与者将类型的非单值函数作为策略的聚合函数，这意味着总体量应当是类型的函数。这里，聚合函数如下所示。

$$\bar{\sigma}(\tilde{\theta}) = \int_{\sum_{i=1}^n \theta_i = n\tilde{\theta}} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i(\theta_i)}{n} \bar{p}(\theta_1, \ldots, \theta_n | \tilde{\theta}) d\boldsymbol{s}, \tag{1}$$

~其中 $\boldsymbol{s} = \theta_1 \times \cdots \times \theta_n$, $\theta = (\theta_1 + \cdots + \theta_n)/n$ 是服从该分布的随机变量

$$\bar{P}(\tilde{\theta}) = \int_{\sum_{i=1}^n \theta_i = n\tilde{\theta}} p(\theta_1, \ldots, \theta_n) d\boldsymbol{s},$$

˜其密度函数为 $\bar{p}(\theta)$，条件概率密度函数为

$$\bar{p}(\tilde{\theta}|\theta_i) = \int_{\sum_{j\neq i}\theta_j = n\tilde{\theta}-\theta_i} p(\theta_i, \theta_{-i})/p_i(\theta_i) ds_{-i}.$$

注意到， $\bar{\sigma}$ 关于 σ_1，$\ldots$，σ_n是线性函数，记为 $H(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$。

˜注 1 聚合函数 (1) 可视为参与者策略的平均值， θ 为平均类型。当模型是确定性的，即 $|\Theta| = \{\theta_0\}$ 和 $P(\theta_0) = 1$时，聚合函数 (1) 就变为参与者策略的简单平均值，如 [10, 19]所示。

利用上述聚合函数，参与者 i 的目标是最小化以下关于 f_i的条件期望

$$\begin{aligned} U_i(\sigma_i, \bar{\sigma}, \theta_i) &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f_i(\sigma_i(\theta_i), \bar{\sigma}(\tilde{\theta}), \theta_i)\bar{p}(\tilde{\theta}|\theta_i) d\tilde{\theta} \\ &= \int_{\Theta_{-i}} f_i(\sigma_i(\theta_i), H(\sigma_i(\theta_i), \sigma_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i) p_i(\theta_{-i}|\theta_i) d\theta_{-i}. \end{aligned}$$

因此，我们也可以将 $U_i(\sigma_i, \bar{\sigma}, \theta_i)$视为 $J_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i)$。将其梯度记为

$$F_i(\sigma_i, \bar{\sigma}, \theta_i) = \nabla_i J_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i).$$

接下来给出贝叶斯纳什均衡的概念。

定义 1 一个　　策略组合（$\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$）是贝叶斯纳什均衡（贝叶斯纳什均衡），若对于任意 $\sigma_i \in \Sigma_i, i \in I$，

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*, \theta_i) \leq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*, \theta_i), \text{ for a.e. } \theta_i \in \Theta_i.$$

我们对聚合博弈 G 作出如下假设。

假设2 考虑不完全信息聚合博弈 G。对于 $i \in I$，

（i）行动集 X_i 非空、凸且紧；（ii）分布 P 是无原子的，即对于任意给定的 $\zeta \in \Theta$， $P(\theta = \zeta) = 0$ 。此外，测度$\mu(\{\theta_i \in \Theta_i | p_i(\theta_i) > 0\}) = \mu(\Theta_i)$；（iii）成本函数 $f_i(x_i, \tilde{x}, \theta_i)$ 关于 $x_i \in X_i$ 严格凸，且对于每个 $x_i, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$，关于 $\theta_i \in \Theta_i$ 是 L_θ-利普希茨连续的；（iv）对于每个 $\sigma_j \in \Sigma_j$ 和 $\theta_i \in \Theta_i$，$j \in I$，期望 U_i 都有定义；其梯度 F_i 对于任意 $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ 和 $\theta_i \in \Theta_i$，关于 $x_i \in X_i$ 是 D-利普希茨连续的；对于任意 $\sigma_i \in \Sigma_i$ 和 $\theta_i \in \Theta_i$，关于 $\bar{\sigma}$是 L_u-利普希茨连续的。

假设2广泛应用于聚合博弈和贝叶斯博弈的研究中 [6, 7, 10, 15]。假设2(ii)中的无原子性质是贝叶斯博弈中的常见假设 [6, 14, 15], ，而测度条件可通过移除 $\{\theta_i \in \Theta_i, \exists \varepsilon > 0, p_i(\theta_i') > 0, \forall \theta_i' \in B(\theta_i, \varepsilon)\}$ 中的类型来保证。

模型中的参与者会随时间进行局部交互，以估计总体量，这些交互由时变图建模 $\mathcal{G}(t)$。在时刻 t，参与者通过 $\mathcal{G}(t)$ 与当前邻居节点交换对总体量的估计，该过程满足以下假设。

假设3 图序列 $\mathcal{G}(t)$ 是一致联合强连通的，即存在一个整数 $\mathcal{B} > 0$，使得 $\cup_{k=t}^{t+\mathcal{B}} \mathcal{G}(k)$ 是强连通的，且其邻接矩阵 $W(t)$ 满足 $[W(t)]_{ij} > \eta, \eta > 0$ 和 $\sum_{i=1}^n [W(t)]_{ij} = \sum_{j=1}^n [W(t)]_{ij} = 1$。

假设3适用于多种网络，并确保其连通性，这一点在 [10] 中也有所应用。基于假设3，我们得到以下结果 [10, 16]。

引理1 记从时刻 s 到 $k > s$ 的转移矩阵 $\Phi(k, s)$ 为 $\Phi(k, s) = W(k)W(k-1)\cdots W(s)$，其中 $0 \leq s < k$。根据假设2(v)，

(a) 对所有 $s \geq 0$， $\lim_{k\to\infty} \Phi(k, s) = \frac{1}{n} 1 1^T$。

(b) 对所有 $k \geq s \geq 0$、 i 和 $j \in I$， $|[\Phi(k,s)]_{ij} - 1/n| \leq \Gamma\beta^{k-s}$，其中 $\Gamma = (1-\eta/(4N^2))^{1/\mathcal{B}}$ 且 $\beta = (1-\eta/(4N^2))^{1/\mathcal{B}}$。

变分不等式 [7, 18], 可保证贝叶斯纳什均衡的存在性，概述如下。

引理2 在假设2下，博弈 G存在唯一的贝叶斯纳什均衡。

基于现有的丁香五月在此基础上，我们的目标是求解所提模型的贝叶斯纳什均衡，概述如下 .

问题 求解不完全信息聚合博弈 $G = (I, \{X_i\}_{i\in I}, \boldsymbol{\Theta}, P, \{f_i\}_{i\in I})$的贝叶斯纳什均衡，且采用分布式方式。

在贝叶斯博弈中，类型的连续性给求解贝叶斯纳什均衡带来了障碍。正如里斯引理所示[17], ，任意无限维赋范空间都包含一个单位向量序列 $\{x_n\}$，其中 $\|x_n - x_m\| > \alpha$ 对任意 $0 < \alpha < 1$ 和 $n \neq m$均成立。于是，位于无限维空间 $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$中的策略集 $\boldsymbol{\Sigma}$ 并非紧集，这给计算带来了困难。目前已有一些尝试用于求解连续类型贝叶斯纳什均衡。例如， [7] 考虑了策略形式属于先验知识的情形，但这些形式通常不可得；而 [6] 则利用多项式近似来估计贝叶斯纳什均衡，且不产生估计误差。此外， [9] 在离散行动贝叶斯博弈中采用了启发式近似，但其方法属于NP难问题，且不适用于连续行动博弈。因此，由于直接求解贝叶斯纳什均衡较为困难，我们引入以下概念。

定义 2 记 $EU(\sigma_i, \bar{\sigma}) = \int_{\Theta_i} U_i(\sigma_i, \bar{\sigma}, \theta_i) p_i(\theta_i) d\theta_i$. 对于任意 $\epsilon > 0$，策略组合 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = (\hat{\sigma}_1^*, \ldots, \hat{\sigma}_n^*)$ 是 G 的 ϵ-贝叶斯纳什均衡（ϵ-BNE），若对任意 $\sigma_i \in \Sigma_i$, $i \in I$,

$$EU(\sigma_i, H(\sigma_i, \hat{\sigma}_{-i}^*) \geq EU(\hat{\sigma}_i^*, H(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*)).$$

为克服寻求贝叶斯纳什均衡时遇到的上述瓶颈，我们将在下一节提出一种离散化方法，将无限维问题转化为有限维问题。

4 离散化

本节将介绍一种离散化方法，并展示该方法在近似连续类型模型 G 的最佳响应和贝叶斯纳什均衡方面的有效性。

对于每个参与者 i，我们从 Θ_i 中选取 N 个点 θ_i^k，使其满足

$$P_i(\theta_i^k) = \frac{k}{N},\ k \in [N].$$

将对应的离散类型集记为 $\hat{\Theta}_i$。定义 $\theta_i^0 = \underline{\theta}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \hat{\Theta}_1 \times \cdots \times \hat{\Theta}_n$。在离散化模型中，我们将区间 $(\theta_i^{k-1}, \theta_i^k]$ 内的所有类型视为 θ_i^k，于是离散类型 $\boldsymbol{\theta}$ 遵循以下联合分布

$$\hat{P}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N^n},\ \boldsymbol{\theta} \in \hat{\boldsymbol{\Theta}}. \tag{2}$$

相应地，边际分布 $\hat{P}_i(\theta_i) = \sum_{\theta_i \in \hat{\Theta}_i} \hat{P}(\theta_i, \theta_{-i})$ 以及条件分布 $\hat{P}_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \hat{P}(\theta_i, \theta_{-i}) / \hat{P}_i(\theta_i)$。

由于假设2(ii)指出 $\mu(\{\theta_i \in \Theta_i | p_i(\theta_i) > 0\}) = \mu(\Theta_i)$，相邻离散点之间的间隔 $\theta_i^k - \theta_i^{k-1}$ 会随着 N 趋于无穷而趋于 0。由于我们用 θ_i^k 表示区间 $(\theta_i^k, \theta_i^{k-1}]$，因此选择尽可能短的区间长度，这可以有效减小误差。此外，我们的设计适用于分布式算法，而选择其他离散点则会在参与者更新策略时带来额外的计算。

基于上述离散化，在该模型其中，策略被限制为 N 维向量。将 G 中参与者 i 的策略集记为 $\hat{\Sigma}_i$。因此，离散化策略的总体量为

$$\hat{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}) = \sum_{\sum_{i=1}^n \theta_i = n\tilde{\theta}, \theta_i \in \hat{\Theta}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i(\theta_i)}{n} \hat{\tilde{P}}(\theta_1, \ldots, \theta_n | \tilde{\theta}),$$

其中， $\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i/n$ 服从以下离散分布

$$\hat{\tilde{P}}(\tilde{\theta}) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} \theta_i = n\tilde{\theta}, \theta_i \in \hat{\Theta}_i} \frac{1}{N^n},$$

$\hat{}$ $\tilde{}$ $\hat{}$的条件概率为 $P(\cdot|\theta)$。由于 P是离散分布，聚合函数可写为 $\hat{}\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} h_i(\hat{}\sigma_i)$, 其中 h_i 是一个从 $\hat{}\ \Sigma_i$ 映射到 $\mathbb{R}^{nNm}$的线性函数。对于 $\hat{}\sigma_{-i} \in \hat{}\Sigma_{-i}$，记 $h_{-i}(\hat{}\sigma_{-i}) = \sum_{j \neq i} h_j(\hat{}\sigma_j)$，则 $\hat{}G$ 中 i 的成本期望为

$$\hat{U}_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\bar{\sigma}}, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \hat{\Theta}_{-i}} f_i(\hat{\sigma}_i(\theta_i), h_i(\hat{\sigma}_i(\theta_i)) + h_{-i}(\hat{\sigma}_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i) \hat{P}_i(\theta_{-i}|\theta_i),\ \theta_i \in \hat{\Theta}_i.$$

与连续类型模型 G类似，$\hat{}U_i$ 也可视为 $\hat{}\ J_i(\hat{}\sigma_i, \hat{}\sigma_{-i}, \theta_i)$。记参与者 i 关于 $\hat{}\sigma_{-i} \in \hat{}\Sigma_{-i}$ 在 $\hat{}G$ 中的最佳响应策略为 $\hat{}\ \sigma_{i*}^N$，它满足对任意 $\theta_i \in \hat{}\Theta_i$,

$$\hat{\sigma}_{i*}^N = \arg \min_{\hat{\sigma}(\theta_i) \in X_i} \hat{J}_i(\sigma_i, \hat{\sigma}_{-i}, \theta_i).$$

将 $\hat{}G$ 中的最佳响应集合记为 $BR_i^N(\hat{}\sigma_{-i})$。然后，我们定义 $\hat{}\ G$ 的以下最佳响应和均衡。

定义3 策略对 $(\hat{}\sigma_1^*, \ldots, \hat{}\sigma_n^*)$ 是 $\hat{}G$ 的贝叶斯纳什均衡，或 $\hat{}G$ 的 DBNE(N)，当且仅当

$$\hat{\sigma}_i^* \in BR_i^N(\hat{\sigma}_{-i}^*).$$

DBNE 的存在性可由变分不等式 [7, 18] 或布劳威尔不动点定理 [6, 15]，保证，概述如下。

Lem理 3 在假设2下，离散化模型 $\hat{}_G$ 存在唯一的 DBNE(N) .

为了用离散化模型 $\hat{}G$ 中的策略近似连续类型模型 G 中的策略，我们将策略的定义域从 $\hat{}\ \Theta_i$ 扩展到 Θ_i，并将 $\hat{}G$ 在类型 $\theta_i \in (\theta_i^{k-1}, \theta_i^k]$ 处的策略定义为

$$\hat{\sigma}_i(\theta_i) = \hat{\sigma}_i(\theta_i^k).$$

$\hat{}$将 $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\theta} | n\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i, \theta_i \in \Theta_i\} = \{\tilde{\theta}^1, \ldots, \tilde{\theta}^S\}$、 $S \leq nN$ 和 $\tilde{\theta}^0 = \underline{\theta}$ 记为。对于 $\hat{}\sigma_i \in \Sigma_i$、 $i \in I$，它们在离散化模型 G 和连续类型模型 G 中的总体量满足

$$\bar{\sigma}(\tilde{\theta}) = \hat{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}^k),\ \tilde{\theta} \in (\tilde{\theta}^{k-1}, \tilde{\theta}^k].$$

通过这一扩展，为方便起见，我们将离散化策略的 $\hat{}\bar{\sigma}$ 记为 $\bar{\sigma}$ 。

然后，我们在 G中估计最佳响应。实际上，最佳响应 $\hat{}\sigma_{i*}$ 需要对 Σ_{-i}中的任意策略 $\hat{}$作出响应，而非对 $\Sigma_{-i} \subseteq \Sigma_{-i}$中的策略作出响应。为此，我们相对于$\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ 修改最佳响应 $\hat{}\sigma_{i*}$ 如下。对于 $\theta_i^k \in \hat{}\Theta_i$,

$$\hat{\sigma}_{i*}(\theta_i^k) = \arg \min_{\hat{\sigma}_i(\theta_i) \in X_i} \int_{\Theta_{-i}} f_i(\hat{\sigma}(\theta_i^k), H(\hat{\sigma}_i(\theta_i^k), \sigma_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i^k) \frac{\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k} p(\theta_i, \theta_{-i}) d\theta_i}{\hat{P}_i(\theta_i^k)} d\theta_{-i}.$$

$\hat{}$ 以下引理说明了离散化模型 G 与连续类型模型 G中的最佳响应之间的关系。

引理 4 对于给定的 $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$，如果 G 在 $BR_i^N(\sigma_{-i})$ 中的所有最佳响应都是分段连续的，那么随着 N 趋于无穷大，$\hat{}G$ 中 $BR_i^N(\sigma_{-i})$ 的最佳响应几乎必然是 G 的最佳响应。具体而言，对于任意 $\hat{}\sigma_{i*}^N \in BR_i^N(\sigma_{-i})$，存在 $\sigma_{l*} \in BR_i(\sigma_{-i})$，使得

$$\lim_{N \to \infty} \quad \hat{}\sigma_{i*}^N(\theta_i) = \sigma_{i*}(\theta_i), \text{ 对于几乎处处的 } \theta_i \in \Theta_i.$$

证明。根据洛必达法则，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\int_{\theta_i^{r-1}}^{\theta_i^k} p(\theta_i,\theta_{-i})}{\int_{\theta_i^{r-1}}^{\theta_i^k} p_i(\theta_i)d\theta_i}=\frac{p(\theta_i^k,\theta_{-i})}{p_i(\theta_i^k)}=p_i(\theta_{-i}|\theta_i^k).$$

因此，对于任意的 $\hat{}\sigma_{i*}\in BR_i^N(\sigma_{-i})$ 和 $\theta_i\in\hat{}\Theta_i$，存在一个策略 $\sigma_{i*}\in BR_i(\sigma_{-i})$，使得当 N 趋于无穷时，$\hat{}\sigma_{i*}^N(\theta_i)\to\sigma_{i*}$。由于 σ_{i*}是分段连续的，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于除有限个点以外的任意 $\theta_i\in\Theta_i$，$\theta_i'\in B(\theta_i,\delta)\cap\Theta_i$，$|\sigma_{i*}(\theta_i)-\sigma_{i*}(\theta_i')|<\varepsilon$。令 $\varepsilon=\max_k\{\theta_i^k-\theta_i^{k-1}\}$，于是

$$\int_{\Theta_i}|\hat{\sigma}_{i*}^N(\theta_i)-\sigma_{i*}(\theta_i)|^2d\theta_i\le\sum_{i=1}^N\varepsilon^2(\theta_i^k-\theta_i^{k-1})=\varepsilon^2(\overline{\theta}-\underline{\theta}).$$

当 N 趋于无穷时，ε 趋于 0，因此，对于几乎所有 $\theta_i\in\Theta_i$，$\hat{}\sigma_{i*}^N$ 是 σ_{i*}。 □

$\hat{}$ 引理 4 表明，参与者可以利用由 G 得出的最佳响应来估计 G中的最佳响应 $\hat{}$。也就是说，参与者愿意采用 G中的最佳响应，因此这些最佳响应构成一个 $\hat{}$ 离散贝叶斯纳什均衡。然后，我们给出由 G 推导出的离散贝叶斯纳什均衡与 G的贝叶斯纳什均衡之间的关系。

在下一个定理中，我们证明，$\hat{}G$ 的 DBNE(N) 是 G 的 ϵ-贝叶斯纳什均衡。此外，与启发式近似 [6, 7, 9]相比，我们还给出了该近似的显式误差界。

定理5 设 $(\sigma_1^*,\dots,\sigma_n^*)$ 为连续类型模型 G 的贝叶斯纳什均衡。在假设2(i)、(ii) 和 (iv) 下，离散化模型 $\hat{}G$ 的 DBNE $(\hat{}\sigma_1^*,\dots,\hat{}\sigma_n^*)$ 是一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡，其中 $\epsilon=O(\max_{i\in I}\max^{k\in[N]}(\theta_i^k-\theta_i^{k-1}))$。

证明。由于 $f_i,|f_i(x_i,x_{-i},\theta_i)-f_i(x_i,x_{-i},\theta_i')|\le L_\theta\|\theta_i-\theta_i'\|$ 关于 $x_i\in X_i,x_{-i}\in X_{-i},\theta_i,\theta_i'\in\Theta_i$ 满足利普希茨连续性。记 $EU_i(\sigma_i,\bar{\sigma})=\int_{\Theta_i}f_i(\sigma_i,\bar{\sigma},\theta_i)p_i(\theta_i)d\theta_i$ 和 $E\hat{}U_i=\sum_{\hat{\Theta}_i}f_i(\hat{}\sigma_i,\bar{\sigma},\theta_i)\hat{}P_i(\theta_i)$。那么对于任意 $\hat{}\sigma_i\in\Sigma_i$ 和 $\hat{}\sigma_{-i}\in\hat{}\sigma_{-i}$,

$$\begin{aligned}EU_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma})=&\sum_{k=1}^N\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k}U_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma},\theta_i)p_i(\theta_i)d\theta_i\\=&\sum_{k=1}^N\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k}(U_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma},\theta_i)-U_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma},\theta_i^k)+U_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma},\theta_i^k))p_i(\theta_i)d\theta_i\\\le&E\hat{U}_i(\hat{\sigma}_i,\bar{\sigma})+L(\overline{\theta}-\underline{\theta})\epsilon_0.\end{aligned}\tag{3}$$

记 ar　　离散贝叶斯纳什均衡的聚合量为 $\hat{}\bar{\sigma}^*$。根据离散贝叶斯纳什均衡的定义，对于任意 $\theta_i\in\hat{}\Theta_i$ 和 $\hat{}\sigma_i\in\hat{}\sigma_i$，

$$\hat{U}_i(\hat{\sigma}_i^*,\hat{\bar{\sigma}}^*,\theta_i)\le\hat{U}_i(\hat{\sigma}_i,h_i(\hat{\sigma}_i)+h_{-i}(\hat{\bar{\sigma}}_{-i}^*),\theta_i).\tag{4}$$

然后，我们将离散化模型中的离散贝叶斯纳什均衡转换为连续类型模型中的均衡。根据假设2(ii)，分布 P 连续，因此 p 在 Θ上是 L_p-利普希茨连续的。因此，对于任意 $\theta_i\in(\theta_i^{k-1},\theta_i^k],k\in[N]$,

$$\begin{aligned}&\left|p(\theta_i,\theta_{-i})-\frac{1}{\theta_i^k-\theta_i^{k-1}}\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k}p(\theta_i',\theta_{-i})d\theta_i'\right|\\\le&\frac{1}{\theta_i^k-\theta_i^{k-1}}\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k}|p(\theta_i,\theta_{-i}),p(\theta_i',\theta_{-i})|d\theta_i'\le L_p\epsilon_0.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $\sigma_i \in \Sigma_i$ 和 $k \in [N]$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k} \int_{\Theta_{-i}} f_i(\sigma_i(\theta_i), H(\sigma_i(\theta_i), \hat{\tilde{\sigma}}^*_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i^k) p(\theta_i, \theta_{-i}) d\theta_i d\theta_{-i} \\
\geq &\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k} \int_{\Theta_{-i}} f_i(\sigma_i(\theta_i), H(\sigma_i(\theta_i), \hat{\tilde{\sigma}}^*_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i^k) \frac{\int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k} p(\theta_i', \theta_{-i}) d\theta_i'}{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}} d\theta_i d\theta_{-i} \\
&- ML_p(\theta_i^k - \theta_i^{k-1}) \mu(\Theta_{-i}) \epsilon_0 \\
= &\hat{U}_i(\sigma_i, H(\sigma_i, \hat{\tilde{\sigma}}^*_{-i}), \theta_i^k) \hat{P}_i(\theta_i^k) - ML_p(\theta_i^k - \theta_i^{k-1}) \mu(\Theta_{-i}) \epsilon_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

由 (4) 和 (5)，对于任意 $\sigma_i \in \Sigma_i$,

$$\begin{aligned}
E\hat{U}_i(\hat{\sigma}_i^*, \hat{\tilde{\sigma}}^*) \leq &\sum_{i=1}^{N} \int_{\theta_i^{k-1}}^{\theta_i^k} \int_{\Theta_{-i}} (f_i(\sigma_i(\theta_i), H(\sigma_i(\theta_i), \hat{\tilde{\sigma}}^*_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i^k) p(\theta_i, \theta_{-i}) d\theta_i d\theta_{-i} \\
&+ ML_p(\theta_i^k - \theta_i^{k-1}) \mu(\Theta_{-i}) \epsilon_0) \\
= &EU(\sigma_i, \hat{\tilde{\sigma}}^*) + ML_p \mu(\boldsymbol{\Theta}) \epsilon_0.
\end{aligned} \tag{6}$$

定义 $C = ML_p \mu(\boldsymbol{\Theta}) + L_\theta$。结合 (3) 和 (6)，对于任意 $\sigma_i \in \Sigma_i$,

$$EU(\hat{\sigma}_i^*, \hat{\tilde{\sigma}}^*) \leq E\hat{U}(\hat{\sigma}_i^*, \hat{\tilde{\sigma}}^*) + L_\theta \epsilon_0 \leq EU_i(\sigma_i, H(\sigma_i, \hat{\tilde{\sigma}}^*_{-i})) + C\epsilon_0,$$

这意味着该离散贝叶斯纳什均衡是一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡，其 $\epsilon = C\epsilon_0$。 □

5 分布式算法

ˆ 本节提出针对离散化模型 G 的贝叶斯纳什均衡的分布式算法，即连续类型模型 G 的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡。

在时刻 t，参与者 i 根据邻居的近似值估计总体量，如下所示:

$$u_i^t = \sum_{j=1}^{n} [W(t)]_{ij} v_j^t, \tag{7}$$

其中， v_j^t 是参与者 j 在时刻 t对总体量的近似。由于存在不确定性，我们也可以将 $u_i^t(\tilde{\theta})$视为一个从ˆ $\tilde{\Theta}$ 映射到 $\mathbb{R}^m$的函数，其中 $\tilde{\theta}$ 服从第4节中定义的离散分布ˆ$\bar{P}$。然后，参与者 i 计算其次梯度:

$$g_i^t = (F_i(\sigma_i^t, u_i^t, \theta_i^1), \ldots, F_i(\sigma_i^t, u_i^t, \theta_i^N))/N, \tag{8}$$

其中， $F_i(\sigma_i^t, u_i^t, \theta_i^k)$ ($k \in [N]$)已在第3节中定义。上述步骤总结如下。

算法1 连续类型贝叶斯博弈的 ϵ-贝叶斯纳什均衡算法

˜初始化：对于 $i \in I$：取 $\sigma_i(0) \in \Sigma_i$，并令 $v_i(0) = h_i(\sigma_i(0))$。离散化：对于 $i \in I$，从类型集 Θ_i 中取 N 个离散点，如式(2)所示。迭代直至 $t \geq T$:

通信与更新：参与者 i 根据式（7）评估邻居 $u_i(t)$ 的总体量，并根据式（8）评估梯度 g_i^t，然后更新 $\sigma_i(t)$ 及其观测值 $v_i(t)$，具体如下:

$$\sigma_i^{t+1} = \Pi_i(\sigma_i^t - \alpha(t) g_i^t),$$

$$v_i^{t+1} = u_i^t - h_i(\sigma_i^t) + h_i(\sigma_i^{t+1}).$$

算法1中采用的步长 $\alpha(t)$满足

(a) $\alpha(t)$ 是一个正的非增序列。(b) $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t)$ $=\infty, \sum_{t=0}^{\infty}\alpha^2(t) < \infty$。

因此，我们给出本文的以下主要结果，以证明算法1收敛到一个ϵ-贝叶斯纳什均衡，或具有显式误差界 ϵ 的 DBNE(N)。

定理6 在假设2和3成立的条件下，算法1生成一个收敛到$\hat{}G$的离散贝叶斯纳什均衡的序列，该均衡是 G的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡，其 $\epsilon = O(\max_{i\in I}\max^{k\in[N]}(\theta_i^k - \theta_i^{k-1}))$。

证明。将估计值 v_i^t的平均值定义为 $\bar{v}^t = \sum_{i=1}^n v_i^t/n$。首先，我们通过对 t使用归纳法证明 $\bar{v}^t = \sum_{i=1}^n h_i(\sigma_i^t)$ $/n$。

对于 $t = 0$，上述关系显然成立。由于邻接矩阵的列和为1，假设该关系对 $t-1$成立，作为归纳步骤，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n v_i^t =& \sum_{i=1}^n (u_i^{t-1} + h_i(\sigma_i^t) - h_i(\sigma_i^{t-1})) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n [W(t-1)]_{ij} v_i^{t-1} + h_i(\sigma_i^t) - h_i(\sigma_i^{t-1})\right) \\ =& \sum_{i=1}^n (v_i^{t-1} + h_i(\sigma_i^t) - h_i(\sigma_i^{t-1})) = \sum_{i=1}^n h_i(\sigma_i^t).\end{aligned}$$

因此，对于所有 $t \geq 0$， $\bar{v}^t = \sum_{i=1}^n h_i(\sigma_i^t)/n$ 均成立。

其次，我们建立估计值 u_i^t 与平均值 $\bar{v}^t$ 之间的关系。根据 v_i^t 的更新规则，对于 $t \geq 1$,

$$u_i^t = \sum_{j=1}^n [\Phi(t,0)]_{ij} v_j^0 + \sum_{r=1}^t \sum_{j=1}^n [\Phi(t,r)]_{ij} (h_i(\sigma_j^r) - h_i(\sigma_j^{r-1})). \tag{9}$$

然后，对于 $t \geq 1$， $\bar{v}^t$ 可以重构为

$$\bar{v}^t = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n v_j^0 + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^t (\sum_{j=1}^n (h_i(\sigma_j^r) - h_i(\sigma_j^{r-1}))). \tag{10}$$

由于 h_i 是线性的，存在一个常数 $C > 0$，使得对于 $i \in I$， h_i 是 C-利普希茨连续的。根据投影的性质，对于 $\sigma_i^t \in \hat{}\Sigma_i$， $\|\Pi_{\hat{\Sigma}_i}(\sigma_i^t - \alpha(t)g_i^t) - \sigma_i^t\| \leq \alpha(t)\|g_i^t\| \leq \alpha(t)D$。结合式 (9) 和 (10)，根据引理1，对于 $t \geq 1$,

$$\|u_i^t - \bar{v}^t\| \leq \Gamma\beta^t R_0 + C\Gamma D\sum_{r=1}^t \beta^{t-r}\alpha(r),$$

其中 $R_0 = \sum_{j=0}^n v_j^0$。由于 $\alpha(t)$ 单调不增，

$$\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t)\|v_i^t - \bar{v}^t\| \leq \Gamma\frac{1}{1-\beta}R_0\alpha(0) + C\Gamma D\frac{1}{1-\beta}\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^2(t). \tag{11}$$

因为 步长 $\alpha(t)$ 满足 $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t) = \infty$ 且 $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^2(t) < \infty$, $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t)\|v_i^t - \bar{v}^t\| < \infty$。

第三，我们给出收敛结果。根据 σ_i^t 的更新规则，

$$\|\sigma_i^{t+1} - \hat{\sigma}_i^*\| = \|\Pi_{\hat{\Sigma}_i}(\sigma_i^t - \alpha(t)g_i^t) - \hat{\sigma}_i^*\| \leq \|\sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^* - \alpha(t)(g_i^t + g_i^*)\|$$

其中 $g_i^* = col(F_i(\hat{}\sigma_i^*, \hat{}\bar{\sigma}^*, \theta_i^1)\ldots, F_i(\hat{}\sigma_i^*, \hat{}\bar{\sigma}^*, \theta_i^N))$。然后

$$\|\sigma_i^{t+1} - \hat{\sigma}_i^*\|^2 \leq \|\sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^*\|^2 + \alpha^2(t)\|g_i^t - g_i^*\|^2 - 2\alpha(t)\left\langle g_i^t - g_i^*, \sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^*\right\rangle \tag{12}$$

为了证明 σ_i^t收敛到 $\hat{}\sigma_i^*$，我们需要证明 $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t)\|\sigma_i^t - \sigma_i^*\| < \infty$。由于 $\|g_i^t\| \leq \sqrt{N}D$和$\|g_i^*\| \leq \sqrt{N}D$,

$$\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^2(t)\|g_i^t - g_i^*\| < \infty.$$

根据次梯度的性质，对于 $\theta_i^k \in \hat{\Theta}_i$,

$$N\left\langle g_i^t, \sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^* \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \left\langle F_i(\sigma_i^t, u_i^t, \theta_i^k) - F_i(\hat{\sigma}_i^*, \hat{\sigma}^*, \theta_i^k), \sigma_i^t(\theta_i^k) - \hat{\sigma}_i^*(\theta_i^k) \right\rangle$$

由于 F 是利普希茨连续的,

$$F_i(\sigma_i^t, u_i^t, \theta_i^k) - F_i(\sigma_i^t, \bar{v}^t, \theta_i^k)\| \leq L_u \|u_i^t(\theta_i^k) - \bar{v}^t(\theta_i^k)\|,$$

其中， $u_i^t(\theta_i^k)$ 和 $\bar{v}^t(\theta_i^k)$ 分别表示总体量 $u_i^t(\tilde{\theta}|\theta_i^k)$ 和 $\bar{v}^t(\tilde{\theta}|\theta_i^k)$，且 $\tilde{\theta} \in \{\sum_{i=1}^n \theta_i/n,\ \theta_i = \theta_i^k, \theta_{-i} \in \Theta_{-i}\}$，满足 $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^N \|u(\theta_i^k)\|^2$ 对于 $i \in I$ 和 $u = u_i^t$， $\bar{v}^t$。于是

$$\begin{aligned} & N\left\langle g_i^t - g_i^*, \sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^* \right\rangle \\ \leq & \sum_{k=1}^{N} \left\langle F_i(\sigma_i^t, \bar{v}^t, \theta_i^k) - F_i(\hat{\sigma}_i^*, \hat{\sigma}^*, \theta_i^k), \sigma_i^t(\theta_i^k) - \hat{\sigma}_i^*(\theta_i^k) \right\rangle + \sqrt{N} L_u \|u_i^t - \bar{v}^t\|. \end{aligned}$$

记 $EF_i(\sigma_i, \bar{\sigma}) = \sum_{k=1}^N F(\sigma_i, \bar{\sigma}, \theta_i^k)$，其中 $\sigma \in \hat{\mathbf{\Sigma}}$， $\bar{\sigma}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的总体量，而 $E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}) = col(EF_1(\sigma_1, \bar{\sigma}), \ldots, EF_n(\sigma_n, \bar{\sigma}))$。由 f_i 的严格凸性可知， EU_i 是严格凸的，因此,

$$\left\langle E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^t, H(\boldsymbol{\sigma}^t)) - E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^*, H(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*)), \boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \right\rangle < 0.$$

结合式（11）， $\sum_{i=1}^n \|\sigma_i^t - \hat{\sigma}_i^*\|^2 = \|\boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\|^2$ 收敛。此外,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) \left\langle E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^t, H(\boldsymbol{\sigma}^t)) - E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^*, H(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*)), \boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \right\rangle \leq \infty.$$

由于 $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) = \infty$，存在一个子序列 $\{t_l\}$，使得

$$\lim_{l \to \infty} \left\langle E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^t, H(\boldsymbol{\sigma}^t)) - E\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}^*, H(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*)), \boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \right\rangle = 0.$$

由于 f_i的严格凸性， $E\boldsymbol{F}$严格单调，因此 $\lim_{l \to \infty} \|\boldsymbol{\sigma}^{t_l} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\| = 0$。由于 $\|\boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\|$收敛,

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{\sigma}^t - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\| = 0.$$

因此，证明完毕。 □

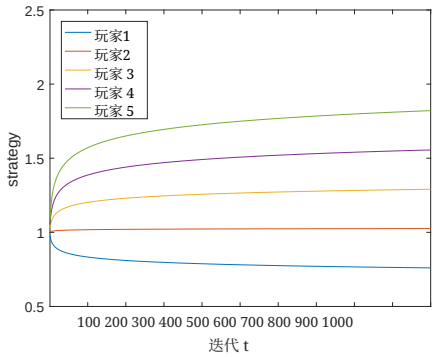
6 数值仿真

本节通过数值仿真说明算法1在聚合型贝叶斯博弈中的有效性。

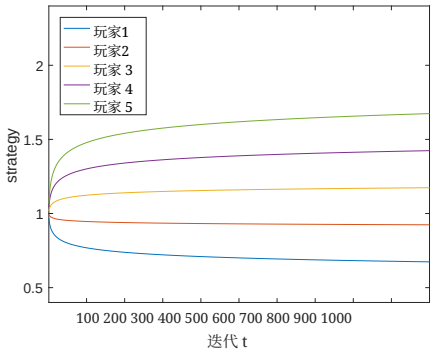
考虑由 5 家竞争性企业参与、生产某种商品的纳什-古诺博弈。企业在博弈中面临不确定性，这些不确定性与类型有关， $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_5) \in [0,1]^5$ 和 $\theta_1, \ldots, \theta_5$ 分别相互独立且服从 $[0,1]$, 上的均匀分布。对于企业 i， $i \in \{1, \ldots, 5\}$，其可行行动集为 $X_i = [0, 20]$，成本函数为 $f_i(x_i, \tilde{x}, \theta_i) = (\tilde{x} + 1200 - 20(i-1)) x_i + \theta_i x_i^2$，其中 $\tilde{x}$ 是行动的总体量。由于类型存在不确定性， i 采用策略 σ_i，这意味着当其接收到类型 $\theta_i \in [1,2]$时，会将 $\sigma_i(\theta_i) \in X_i = [0,5]$ 作为其生产的商品数量。成本的期望和聚合函数的定义见第 3 节。企业通过时变图 $\mathcal{G}(t)$交换各自的总体量，该图为随机生成。

首先，我们证明算法1的收敛性。图1展示了在 $N = 200$ 下特定类型 $\theta_i = 1.3$、1.7 时不同参与者的策略轨迹。可以看出，生成的策略会收敛。

接下来，我们验证离散化的有效性。图2展示了离散点数量分别为 $N = 50$、100、160、200、250 时玩家 3 的策略轨迹。我们可以发现， $\sigma_3^t(1.3)$ 和 $\sigma_1^t(1.7)$ 的极限点收敛。由于误差 ϵ 随着 N 趋于无穷而趋于 0，我们认为所得近似值接近真实均衡。

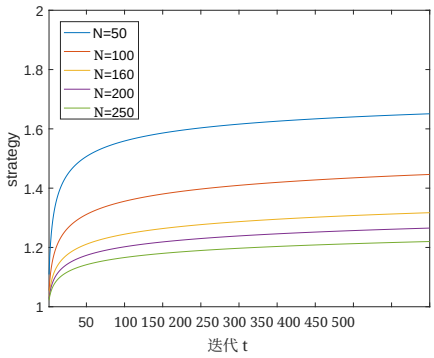


(a) $\theta_i = 1.3$

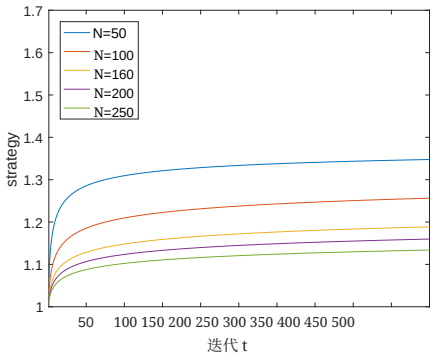


(b) $\theta_i = 1.7$

图 1：参与者在 $\theta_i = 1.3$、1.7 且 $N = 200$ 时的策略。



(a) $\theta_1 = 1.3$



(b) $\theta_1 = 1.7$

图 2：在 $\theta_1 = 1.3$、1.7 时玩家 3 的策略（对应不同的 N）。

7 结论

本文研究了一种聚合贝叶斯博弈，它是多人贝叶斯博弈和确定性聚合博弈的推广。我们处理了不完全信息情形下的聚合函数。为突破求解贝叶斯纳什均衡的障碍，我们提出了一种离散化方法，并证明所生成离散化模型的离散贝叶斯纳什均衡是连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡，且具有显式误差界。在此基础上，我们为离散化模型的离散贝叶斯纳什均衡（即连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡）提出了一种分布式算法，并证明该算法收敛到连续类型模型的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡。

参考文献

[1] K. Akkarajitsakul, E. Hossain, and D. Niyato, 不确定条件下无线网络中的分布式资源分配及贝叶斯博弈的应用, IEEE Communications Magazine, 49(2011), pp. 120–127.[2] U. Bhaskar, Y. Cheng, Y. K. Ko, and C. Swamy, 贝叶斯零和博弈与网络路由博弈中信号传递的难度结果, 收录于 2016 年 ACM 经济学与计算会议论文集, 2016, pp. 479–496.[3] G. Chen, K. Cao, and Y. Hong, 通过知识迁移学习贝叶斯博弈中的隐式信息, Control Theory and Technology, 18 (2020), pp. 315–323.

[4] G. Chen, Y. Ming, Y. Hong and P. Yi, 具有不确定耦合约束的 ϵ-广义纳什均衡分布式算法, Automatica, 123 (2021), pp. 109313.[5] M. Grosshans, C. Sawade, M. Brückner, and T. Scheffer, 用于对抗性回归问题的贝叶斯博弈, 收录于国际机器学习会议, PMLR, pp. 55–63.
[6] S. Guo, H. Xu, and L. Zhang, 连续类型空间和行动空间博弈中连续贝叶斯纳什均衡的存在性与近似, SIAM Journal on Optimization, 31 (2021), pp. 2481– 2507.[7] W. Guo, M. I. Jordan, and T. Lin, 贝叶斯回归博弈的变分不等式方法, 收录于 2021 年第 60 届 IEEE 决策与控制会议 (CDC), IEEE, pp. 795–802.[8] J. C. Harsanyi, 由“贝叶斯”参与者进行的不完全信息博弈，第一至三部分，第一部分：基本模型, Management Science, 14 (1967), pp. 159–182.[9] L. Huang and Q. Zhu, 离散化下无限贝叶斯博弈中贝叶斯纳什均衡的收敛性, (2021), https://arxiv.org/abs/2102.12059.[10] J. Koshal, A. Nedić, and U. V. Shanbhag, 图上聚合博弈的分布式算法, Operations Research, 64 (2016), pp. 680–704.
[11] V. Krishna, 拍卖理论, Academic Press, 2009.[12] V. Krishnamurthy,and H. V. Poor, 多智能体信号处理中的社会学习与贝叶斯博弈：局部和全局决策者如何互动？ IEEE Signal Processing Magazine, 30 (2013), pp. 43–57.[13] S. Liang, P. Yi, and Y. Hong, 具有耦合约束的聚合博弈分布式纳什均衡寻求, Automatica, 85 (2017), pp. 179–185.[14] A. Meirowitz, 非有限类型空间和行动空间贝叶斯博弈均衡的存在性, Economics Letters, 78 (2003), pp. 213–218.
[15] P. R. Milgrom and R. J. Weber, 不完全信息博弈的分布策略, Mathematics of Operations Research, 10 (1985), pp. 619–632.[16] A. Nedić, A. Ozdaglar, and P. A. Parrilo, 多智能体网络中的约束一致性与优化, IEEE Transactions on Automatic Control, 55 (2010), pp. 922-938.
[17] B. Rynne and M. A. Youngson, 线性泛函分析, Springer Science & Business Media, 2007.
[18] T. Ui, 贝叶斯纳什均衡与变分不等式, Journal of Mathematical Economics, 63 (2016), pp. 139–146.[19] G. Xu, G. Chen, H. Qi, and Y. Hong, 分布式聚合博弈纳什均衡近似的高效算法, IEEE Transactions on Cybernetics, (2022), pp. 1–13.