arXiv:2301.04380v1 [math.OA] 11 Jan 2023

半交叉积中具有近似单位的理想

Charalampos Magiatis

2023年1月12日

摘要

我们刻画了具有左（分别为右）近似单位的半交叉积 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的理想。

1 引言与记号

半交叉积是由动力系统构造而成的非自伴算子代数。我们回顾本文将要考虑的半交叉积的构造。设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，且 $\phi\colon X \to X$ 是一个连续真满射（回忆一下，若对每个紧 $K \subseteq X$，映射 ϕ 的逆像 $\phi^{-1}(K)$ 都是紧的，则称 ϕ 为真映射）。称有序对 (X, ϕ) 为一个动力系统。通过定义 $\alpha_n(f) = f\circ\phi^n$，可得到 $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$ 在 $C_0(X)$ 上由等距 $*$-自同构 α_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ 给出的作用。我们将巴拿赫空间 $\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 中的元素写成形式级数 $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} U^n f_n$，其范数定义为 $\|A\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|f_n\|_{C_0(X)}$。$\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 上的乘法定义为

$$(U^n f)(U^m g) = U^{n+m}(\alpha^m(f)g)\ ,$$

并通过线性性和连续性延拓。采用这一乘法，$\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 是一个巴拿赫代数。

巴拿赫代数 $\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 可以忠实地表示为希尔伯特空间上的一个（具体）算子代数。为此，假设 $C_0(X)$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_0$ 上有一个忠实作用。然后，我们可以通过将 $\pi(U^n f)$ 定义为如下形式，在希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ 上定义 $\ell_1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 的一个忠实压缩表示 π

$$\pi(U^n f)(\xi \otimes e_k) = \alpha^k(f)\xi \otimes e_{k+n}\ .$$

半交叉积 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 是在刚才定义的表示中，$\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的像的闭包。为简化记号，我们将 $C_0(X)$ 的元素 $\pi(U^n f)$ $\times_\phi \mathbb{Z}_+$ 记作 $U^n f$。

对于 $A=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}U^nf_n\in\ell^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$，我们称 A 的第 n 个傅里叶系数为 $f_n\equiv E_n(A)$。映射 $E_n:\ \ell^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))\to C_0(X)$ 在 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 的（算子）范数下是压缩映射，因此可延拓为压缩映射 $E_n:C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+\to C_0(X)$。半交叉积 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 的元素 A 为 0，当且仅当对所有 $n\in\mathbb{Z}_+$，$E_n(A)=0$；因此，A 完全由其傅里叶系数确定。我们将 A 记作形式级数 $A=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}U^nf_n$，其中 $f_n=E_n(A)$。但请注意，该级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}U^nf_n$ 通常并不收敛到 A [6, （II.9 p.512]）。k 阶算术平均A 定义为 $\bar{A}_k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}S_l(A)$，其中 $S_l(A)=\sum_{n=0}^{l}U^nf_n$。那么，¯序列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 在范数下收敛于 A [6, （Remark p.524]）。有关半交叉积的更多信息，请参阅[6, 4, 3] 。

设 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 X 的一列闭子集，满足

$$X_{n+1}\cup\phi(X_{n+1})\subseteq X_n\ , \tag{$*$}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。Peters 在[7] 中证明，在附加假设 X 可度量化，且动力系统 (X,ϕ) 不含周期点的条件下，闭双边理想 $\mathcal{I}\subseteq C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 与满足 ($*$) 的闭子集 X 的序列 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 之间存在一一对应。事实上，与序列 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 对应的理想 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{I}=\{A\in C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+:E_n(A)(X_n)=\{0\}\}$。我们将其记作 $\mathcal{I}\sim\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$。此外，在上述假设下，他还刻画了半交叉积 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 的极大理想和素理想。

Donsig、Katavolos 和 Manousos 在 [4] 中刻画了半交叉积 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 的雅各布森根，其中 X 是局部紧可度量空间，且 $\phi:\ X\to X$ 是连续真满射。Andreolas、Anoussis 和作者在 [2] 中刻画了由紧元生成的理想，并在[1] 中刻画了半交叉积 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$的亚紧根和散射根，其中 X 是局部紧豪斯多夫空间，且 $\phi:\ X\to X$ 是同胚。这些理想都具有如下形式$\mathcal{I}\sim\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中闭子集族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$适当。

本文刻画了 $\mathcal{I}\sim\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 具有左（分别为右）近似单位的闭双边理想。因此，在附加假设 X 可度量化且动力系统(X,ϕ)不含周期点的条件下，我们得到了具有左（分别为右）近似单位的理想的完整刻画。

回顾一下，巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的左（分别为右）近似单位是指由 $\mathcal{A}$ 中的元素组成的一个网 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，满足:

1. for some positive number r, $\|u_\lambda\|\le r$ for all $\lambda\in\Lambda$,

2. 在 $\mathcal{A}$的范数拓扑下，对所有 $a\in\mathcal{A}$，均有 $\lim u_\lambda a=a$（分别地，$\lim\ au_\lambda=a$）。

既是 $\mathcal{A}$ 的左近似单位又是右近似单位的网称为 $\mathcal{A}$的近似单位。满足对所有 $\lambda\in\Lambda$ 均有 $\|u_\lambda\|\le 1$ 的左（分别为右）近似单位 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 称为收缩左（分别为右）近似单位。

我们称巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的理想 $\mathcal{I}$ 具有左（分别为右）近似单位，如果它作为一个代数具有左（分别为右）近似单位。

2 具有近似单位的理想

在以下定理中，我们刻画具有右近似单位的理想 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$。

定理 2.1 设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的非零理想。以下条件等价:

1. $\mathcal{I}$ 有右近似单位。
2. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$, $X_n = X_{n+1}$。

证明。我们先证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个具有右近似单位 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的理想。假设存在 $n \in \mathbb{Z}_+$，使得 $X_{n+1} \subsetneq X_n$。令

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_{n+1} \subsetneq X_n\} ,$$

$x_0 \in X_{n_0} \setminus X_{n_0+1}$ 和 $f \in C_0(X)$，使得 $f(x_0) = 1$, $f(X_{n_0+1}) = \{0\}$ 且 $\|f\| = 1$。那么，对于 $A = U^{n_0+1}f$，我们有

$$\|AV_\lambda - A\| \geq \|E_{n_0+1}(AV_\lambda - A)\| = \|fE_0(V_\lambda) - f\| \geq |(fE_0(V_\lambda) - f)(x_0)| = 1 ,$$

对于所有 $\lambda \in \Lambda$，由于 $x_0 \in X_{n_0}$ 和 $E_0(V_\lambda)(X_{n_0}) = 0$，这就产生了矛盾。因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$, $X_n = X_{n+1}$。

对于 (2) $\Rightarrow$ (1)，假设 $X_n = X_{n+1}$ 对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$。由 (∗)，我们得到$\phi(X_0) \subseteq X_0$。我们将证明，如果 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是理想 $C_0(X \setminus X_0)$（属于 $C_0(X)$）的压缩近似单位，那么 $\{U^0u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 就是 $\mathcal{I}$的右近似单位。由于 $\|u_\lambda\| \leq 1$，我们有 $\|U^0u_\lambda\| \leq 1$。

设 $A \in \mathcal{I}$ 和 $\varepsilon > 0$。则存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\|A - \bar{A}_k\| < \frac{\varepsilon}{4} ,$$

其中 $\bar{A}_k$ 是 A的第 k个算术平均。由于 $X_n = X_0$, $E_n(A_k) \in C_0(X\setminus X_0)$，且 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $C_0(X \setminus X_0)$的近似单位，因此存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得

$$\|E_l(\bar{A}_k)u_\lambda - E_l(\bar{A}_k)\| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} ,$$

对所有的 $l \leq k$ 和 $\lambda > \lambda_0$。因此，对于 $\lambda > \lambda_0$，我们得到

$$\begin{aligned}
\|AU^0u_\lambda - A\| &< \|AU^0u_\lambda - \bar{A}_kU^0u_\lambda + \bar{A}_kU^0u_\lambda - \bar{A}_k + \bar{A}_k - A\| \\
&< \|AU^0u_\lambda - \bar{A}_kU^0u_\lambda\| + \|\bar{A}_kU^0u_\lambda - \bar{A}_k\| + \|A - \bar{A}_k\| \\
&< \|\bar{A}_kU^0u_\lambda - \bar{A}_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \|E_l(\bar{A}_k)u_\lambda - E_l(\bar{A}_k)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon ,
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

下述定理刻画了具有左近似单位的理想 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$。

定理 2.2 设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的非零理想。以下条件等价:

1. $\mathcal{I}$ 具有左近似单位。
2. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$, $X_0 \subsetneq X$ 和 $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。
3. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$, $\phi(X \setminus X_1) = X \setminus X_0$ 且 $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) = X_n \setminus X_{n+1}$。

证明。我们首先证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是具有左近似单位 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的理想。

首先我们证明 $X_0 \subsetneq X$。假设 $X_0 = X$。那么，对于所有 $\lambda \in \Lambda$, $E_0(V_\lambda) = 0$, 因此对于每个 $U^n f \in \mathcal{I}$，我们有

$$\|V_\lambda U^n f - U^n f\| \geq \|E_n(V_\lambda U^n f - U^n f)\| = \|E_0(V_\lambda) f - f\| = \|f\| ,$$

对于所有 $\lambda \in \Lambda$，这与假设矛盾。因此 $X_0 \subsetneq X$。

现在我们证明，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$, $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。假设存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\phi^n(X \setminus X_n) \not\subseteq X \setminus X_0$，并令

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \phi^n(X \setminus X_n) \not\subseteq X \setminus X_0\} .$$

那么，存在 $x_0 \in X \setminus X_{n_0}$ 使得 $\phi^{n_0}(x_0) \in X_0$，并且存在一个函数 $f \in C_0(X)$ 使得 $f(x_0) = 1$, $f(X_{n_0}) = \{0\}$，且 $\|f\| = 1$。如果 $A = U^{n_0} f$，我们有 $A \in \mathcal{I}$, $\|A\| = 1$，并且

$$\begin{aligned} \|V_\lambda A - A\| &\geq \|E_{n_0}(V_\lambda A - A)\| \\ &= \|E_0(V_\lambda) \circ \phi^{n_0} f - f\| \\ &\geq |(E_0(V_\lambda) \circ \phi^{n_0} f - f)(x_0)| \\ &= 1 , \end{aligned}$$

对所有 $\lambda \in \Lambda$，由于 $\phi^{n_0}(x_0) \in X_0$ 且 $E_0(V_\lambda)(X_0) = \{0\}$，这就产生了矛盾。因此 $\phi^n(X \setminus X_n) \subseteq X \setminus X_0$。此外，由 (∗) 可得$\phi^n(X_n) \subseteq X_0$，对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，因此

$$X = \phi^n(X) = \phi^n(X_n \cup (X \setminus X_n)) = \phi^n(X_n) \cup \phi^n(X \setminus X_n) \subseteq X_0 \cup \phi^n(X \setminus X_n) .$$

由于 $\phi^n(X \setminus X_n) \subseteq X \setminus X_0$ 且 ϕ 是满射，因此对于所有$n \in \mathbb{Z}_+$, $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。

对于 (2) $\Rightarrow$ (1)，假设对所有$n \in \mathbb{Z}_+$, $X_0 \subsetneq X$ 和 $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。我们将证明，若 $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $C_0(X)$的理想 $C_0(X \setminus X_0)$的压缩近似单位，则 $\{U^0 u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{I}$的左近似单位。由于 $\|u_\lambda\| \leq 1$，我们有 $\|U^0 u_\lambda\| \leq 1$。

设 A 是 $\mathcal{I}$ 和 $\varepsilon > 0$中的一个范数为 $\mathbf{1}$ 的元素。那么存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\|A - \bar{A}_k\| < \frac{\varepsilon}{4} ,$$

其中， A_k 是 A的第 k个算术平均。对于 $l \leq k$，令

$$D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)) = \left\{ x \in X : |E_l(\bar{A}_k)(x)| \geq \frac{\varepsilon}{4(k+1)} \right\} .$$

由于 $A \in \mathcal{I}$，我们有 $E_l(A_k)(X_l) = \{0\}$，因此 $D_\varepsilon(E_l(A_k)) \subseteq X \setminus X_l$。此外，由于 $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们都有$\phi^l(D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k))) \subseteq X \setminus X_0$。而且，集合 $D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k))$是紧的，因此集合 $\phi^l(D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)))$也是紧的。根据乌雷松引理，存在一个范数为一的函数 $v_l \in C_0(X)$，使得

$$v_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \phi^l(D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k))) \\ 0, & x \in X_0 \end{cases} .$$

于是，存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得

$$\|u_\lambda v_l - v_l\| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} ,$$

对于所有 $l \leq k$ 和 $\lambda > \lambda_0$，因此

$$|u_\lambda(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} ,$$

对于所有 $x \in \cup_{l=0}^k \phi^l(D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)))$和 $\lambda > \lambda_0$。因此，若 $x \in \cup_{l=0}^k (D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)))$，则 $\phi^l(x) \in \cup_{l=0}^k \phi^l(D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)))$，因此

$$\|((u_\lambda \circ \phi^l)E_l(\bar{A}_k) - E_l(\bar{A}_k))(x)\| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} ,$$

对所有的 $l \leq k$ 和 $\lambda > \lambda_0$。另一方面，如果 $x \notin \cup_{l=0}^k (D_\varepsilon(E_l(\bar{A}_k)))$，那么

$$|E_l(\bar{A}_k)(x)| < \frac{\varepsilon}{4(k+1)} ,$$

对所有的 $l \leq k$，因此

$$\|((u_\lambda \circ \phi^l)E_l(\bar{A}_k) - E_l(\bar{A}_k))(x)\| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} .$$

由目前为止的讨论可得

$$\begin{aligned} \|U^0 u_\lambda A - A\| &< \|U^0 u_\lambda \bar{A}_k - \bar{A}_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{l=0}^{k} \|(u_\lambda \circ \phi^l)E_l(\bar{A}_k) - E_l(\bar{A}_k)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon , \end{aligned}$$

对所有 $\lambda > \lambda_0$ 均成立。

现在我们证明 (2) $\Rightarrow$ (3)。假设对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。那么 $\phi(X \setminus X_{n+2}) \subseteq X \setminus X_{n+1}$。事实上，若 $x \in X \setminus X_{n+2}$ and$\phi(x) \in X_{n+1}$，则根据 (∗)，有 $\phi^{n+2}(x) \in X_0$，这就产生了矛盾。此外，根据 (∗)，我们知道 $\phi(X_{n+1}) \subseteq X_n$ and 因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) \subseteq X_n \setminus X_{n+1}$。

为了证明对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) = X_n \setminus X_{n+1}$，我们假设存在一个 $n \in \mathbb{Z}_+$，使得 $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) \subsetneq X_n \setminus X_{n+1}$。如果

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) \subsetneq X_n \setminus X_{n+1}\} ,$$

then

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \phi(X_{n_0+1} \cup (X \setminus X_{n_0+1})) \\ &= \phi(X_{n_0+1}) \cup \phi(X \setminus X_{n_0+1}) \\ &\subseteq \phi(X_{n_0+1}) \cup (X \setminus X_{n_0}) \\ &\subsetneq X , \end{aligned}$$

这与 ϕ 是满射相矛盾。因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$， $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) = X_n \setminus X_{n+1}$。

最后，我们证明 (3) $\Rightarrow$ (2)。假设对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$， $\phi(X \setminus X_1) = X \setminus X_0$ 且$\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) = X_n \setminus X_{n+1}$。那么， $X_0 \subsetneq X$。事实上，若$X_0 = X$，则 $\mathcal{I} \equiv \{0\}$，这就产生了矛盾。若 $n > 1$，则有

$$\begin{aligned} \phi(X \setminus X_n) &= \phi\left[(X \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus X_2) \cup \cdots \cup (X_{n-1} \setminus X_n)\right] \\ &= \phi(X \setminus X_1) \cup \phi(X_1 \setminus X_2) \cup \cdots \cup \phi(X_{n-1} \setminus X_n) \\ &= (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus X_1) \cup \cdots \cup (X_{n-2} \setminus X_{n-1}) \\ &= X \setminus X_{n-1} , \end{aligned}$$

因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$， $\phi^n(X \setminus X_n) = X \setminus X_0$。 □

根据定理 2.2，若 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的一个具有左近似单位的理想，则 $X_{n+1} = X_n$ 或 $X_{n+1} \subsetneq X_n$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$均成立。若 $\mathcal{I} \sim\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 且 $X_{n+1} = X_n$对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$均成立，我们记作 $\mathcal{I} \sim \{X_0\}$。我们得到如下刻画。

推论 2.3 设 $\mathcal{I} \sim \{X_0\}$ 是 $C_0(X)\times_\phi\mathbb{Z}_+$ 的非零理想。以下条件等价：

1. $\mathcal{I}$ 有左近似单位。
2. $\phi(X_0) = X_0$ 和 $\phi(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$。

证明。 根据定理 2.2 可得 $\phi(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$。由 (∗) 可得$\phi(X_0) \subseteq X_0$ 且由于 ϕ 是满射，因此得到 $\phi(X_0) = X_0$。 □

在下面的命题中，当 ϕ 是同胚时，对具有左近似单位的 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ $C_0(X)$ $\times_\phi \mathbb{Z}_+$ 理想进行了刻画。

命题 2.4 设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的一个非零理想，其中 ϕ 是同胚。以下条件等价:

1. $\mathcal{I}$ 有左近似单位。

2. 存在 $S, W \subsetneq X$ 使得 S 是闭的，且 $\phi(S) = S$，集合$\phi^{-1}(W)$ $\phi^{-2}(W)$ ... 两两不相交，并且对所有 $k \in \mathbb{Z}$， $\phi^k(W) \cap S = \emptyset$，且

$$X_n = S \cup (\cup_{k=n}^{\infty} \phi^{-k}(W)) \ ,$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$。

证明。 第二个条件蕴含定理 2.2 的第二个条件，因此蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 显然成立。我们将证明蕴含关系 (1)$\Rightarrow$ (2)。

令 $S = \cap_{n=0}^{\infty} X_n$。显然，集合 S 是闭的，并且由 $(*)$ 可得$\phi(S) \subseteq S$。我们将证明 $\phi(S) = S$。假设 $\phi(S) \subsetneq S$。由于 ϕ 是满射，存在 $x \in X \setminus S$ 使得 $\phi(x) \in S$。此外，对所有 $n \geq 1$，都有 $\phi^n(x) \in S$。然而，由于 $x \notin S$，存在 n_0 使得 $x \notin X_{n_0}$，因此根据定理 2.2，$\phi^{n_0}(x) \in X \setminus X_0$，这与 $S \cap (X \setminus X_0) = \emptyset$矛盾。

根据定理2.2， $\phi(X_{n+1} \setminus X_{n+2}) = X_n \setminus X_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，因此$\phi^n(X_n \setminus X_{n+1}) = X_0 \setminus X_1$ 或者等价地 $X_n \setminus X_{n+1} = \phi^{-n}(X_0 \setminus X_1)$，因为 ϕ 是一个同胚。此外，集合 $\phi^{-1}(X_0 \setminus X_1)$ $\phi^{-2}(X_0 \setminus X_1)$ ... 两两不相交。

令 $W = X_0 \setminus X_1$。显然，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$， $\phi^k(W) \cap S = \emptyset$，因为 $\phi(S) = S$且 $\phi(W) \subseteq X \setminus X_0$。此外， $X_0 = S \cup (X_0 \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus X_2) \cup \ldots$，因此

$$X_0 = S \cup (\cup_{k=0}^{\infty} \phi^{-k}(W)) \ .$$

最后，对于所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$X_0 = X_n \cup (\cup_{k=1}^{n} X_{k-1} \setminus X_k) = X_n \cup (\cup_{k=1}^{n} \phi^{-k+1}(W)) = X_n \cup (\cup_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(W)) \ ,$$

因此

$$X_n = X_0 \setminus (\cup_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(W)) = S \cup (\cup_{k=n}^{\infty} \phi^{-k}(W)) \ .$$

□

下述推论刻画了具有近似单位的理想。

推论 2.5 设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的一个非零理想。以下条件等价:

1. $\mathcal{I}$ 具有近似单位。

2. *$X_n = X_{n+1}$, for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and $\phi(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$.*

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 2.1 和推论2.3可立即得出。

我们证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。若 $X_n = X_{n+1}$，由 $(*)$，可得 $\phi(X_0) \subseteq X_0$。由于$\phi(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$ 且 ϕ 是满射，我们有 $\phi(X_0) = X_0$。定理 2.1 和推论2.3 完成证明。 □

注 2.6 若 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 的理想，且具有左（分别为右）近似单位，则它具有压缩左（分别为右）近似单位。此外，半交叉积 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$ 具有压缩近似单位。

设 B 是一个巴拿赫空间， C 是 B的一个子空间。在 B 中于子空间 C 上取值为零的线性泛函集合，称为 C的湮灭子。巴拿赫空间 B 的子空间 C 称为 B 中的 M-理想，若其湮灭子是 B^* 上的投影 P的核，且满足 $\|y\| = \|P(y)\| + \|y - P(y)\|$，对所有 y均成立，其中 B^* 是 B的对偶空间。

Effros 和 Ruan 证明了，含幺算子代数中的 M-理想是具有近似单位的闭双边理想，[5, 定理 2。2]。因此，我们得到关于半交叉积的 M-理想的以下推论。

推论 2.7 设 $\mathcal{I} \sim \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$的非零理想，其中$X$ 是紧的。以下条件等价:

1. $\mathcal{I}$ 是 M-理想。
2. $\mathcal{I}$ 具有近似单位。
3. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$， $X_n = X_{n+1}$，且 $\phi(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$。

参考文献

[1] G. Andreolas、M. Anoussis 和 C. Magiatis，《半交叉积的拓扑根》，Serdica Math. J. 47 (2021), 81–92。[2] G. Andreolas、M. Anoussis 和 C. Magiatis，《半交叉积上的紧乘法算子》，Studia Math，即将发表。[3] K. R. Davidson、A. H. Fuller 和 E. T. A. Kakariadis，《算子代数的半交叉积: 一篇综述》，New York J. Math. 24A (2018), 56–86。[4] A. Donsig、A. Katavolos 和 A. Manoussos，《解析交叉积的雅各布森根》，J. Funct. Anal. 187 (2001), 129–145。[5] E. G. Effros 和 Z-J. Ruan，《关于非自伴算子代数》，Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 915—922。[6] J. Peters，《 C^*代数的半交叉积》，J. Funct. Anal. 59 (1984), 498–534。[7] J. Peters，《某些非自伴算子代数的理想结构》，Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), 333–352。