arXiv:2301.04384v1 [math.DS] 11 Jan 2023

五维 x平坦双输入控制仿射系统的标准形

F. Nicolau *,** C. Gst¨ottner *** W. Respondek ****

*Quartz EA 7393，ENSEA，法国塞尔吉-蓬图瓦兹 Cedex 95014。
** 巴黎-萨克雷大学、法国国家科学研究中心、CentraleSup´elec、L2S，91190，法国伊韦特河畔吉夫，florentina.nicolau@ensea.fr。
***约翰内斯·开普勒大学自动控制与控制系统技术研究所，奥地利林茨，conrad.gstoettner@jku.at。
****诺曼底大学，鲁昂国立应用科学学院，LMI，76801 鲁夫赖圣艾蒂安，法国，witold.respondek@insa-rouen.fr。

摘要：本文给出了五维平坦双输入控制仿射系统的标准形，这类系统具有仅依赖于状态的平坦输出（我们称之为具有该性质的系统为 x-平坦系统）。我们讨论了五维 x-平坦性与静态和动态反馈线性化之间的关系，并证明，若系统是 x-平坦的，则至多通过对适当选择的控制进行三次延拓，即可使其可线性化。因此，五维 x-平坦系统一般都可以化为标准形，这些标准形推广了布鲁诺夫斯基规范形。若系统至多经过二重延拓即可变为线性系统，则其标准形在结构上与布鲁诺夫斯基形式相似：它们具有一种特殊的三角结构，由一条线性链和一条至多含两个非线性项的非线性链组成。若系统经过三重延拓后变为线性系统，我们不仅得到了三角结构，还得到了非三角结构，并发现了新的有趣现象。

关键词：平坦性、标准形、非线性控制系统、动态线性化。

1. 引言

本文给出了如下形式的平坦控制仿射系统的标准形

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \qquad (1)$$

其中， x 是定义在 $\mathbb{R}^5$ 的开子集 X 上的状态（更一般地，是定义在五维流形 X上的状态）， $u = (u_1, u_2)$是取值于 $\mathbb{R}^2$的控制，且 f、 g_1 和 g_2均为 $\mathcal{C}^\infty$光滑函数。平坦性的概念（见第 2 节）由 Fliess、L´evine、Martin 和 Rouchon 于20世纪90年代引入控制理论（Fliess 等人 [1995],；另见 Isidori 等人 [1986], 、Jakubczyk [1993], 、Aranda-Bricaire 等人 [1995], 、Pomet [1995]），并因其在运动规划和构造性可控性问题中的重要应用而受到广泛关注。可通过可逆静态反馈线性化的系统是平坦的，其标准形已广为人知：它们静态反馈等价于 Brunovsk´y 标准形。一般而言，平坦系统并非静态反馈可线性化，但可视为线性系统的一种推广。具体来说，它们可通过动态、可逆且内生的反馈实现线性化，见 Fliess 等人 [1995], 、Pomet [1995, 1997]。尽管平坦性因其重要应用而备受关注，但为所有平坦系统给出标准形目录的问题仍远未解决（有一些值得注意的例外，例如静态反馈可线性化系统类的标准形 Brunovsk´y[1970], ；具有 $n-1$ 个控制量的控制仿射系统 Charlet 等人 [1989],；双控制量无漂移系统 Martin 和 Rouchon [1994],、Murray [1994], 、Li和 Respondek [2012],通过对恰当选择的控制进行一次或两次延拓而动态可线性化的系统 Nicolau 和 Respondek [2019, 2020],；静态反馈等价于三角形式的系统 Silveira 等人 [2015],、Li 等人 [2016]和 Gst¨ottner 等人 [2021b；具有两个输入和四个状态的控制仿射系统 Pomet [1997]）。

本文旨在给出五维所有x-平坦（即允许平坦输出仅依赖于状态）的双输入控制仿射系统的全部标准形，因此也可视为 Pomet[1997]工作的延续。在双控制、五状态这一最简单情形下解决该问题有几个方面的意义；首先，它为一类定义明确的平坦系统提供了完整分析；其次，它展示了在试图给出一般情形的标准形或刻画平坦性时可能面临的困难。我们将证明，一般而言，五维 x-平坦控制系统可以化为推广 Brunovsk´y 标准形的标准形。事实上，五维 x-平坦控制系统要么是静态反馈可线性化的，要么在对适当选取的某个控制至多进行三次延拓后变为静态反馈可线性化。对于大多数情形，我们得到的标准形在结构上类似于 Brunovsk´y 形式：它们具有特殊的三角结构，由一条线性链和一条至多包含三个非线性项的非线性链组成；此外，我们还遇到了一些新的有趣现象（例如，在某个特殊情形下缺少三角结构）。因此，一个值得注意的观察是，即使在相对较低的维数下，最一般的三角形式也无法涵盖所有 x-平坦系统，而对于所有

⋆ 第二作者获得了奥地利科学基金（FWF）资助，项目编号为 P32151。

可能的情形，确实都存在具有说明性的标准形。我们的结果与 Silveira 和 da Silva [2007],的结果相关；后者给出了具有两个控制且状态数至多为五的控制仿射系统的一种三角形式。正如预期，Silveira 和 da Silva [2007]在五维情形下的三角形式，与本文所给目录中的某一种形式相吻合。

2. 平坦性

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集。固定整数 $l \geq -1$，并记 $U^l = U \times \mathbb{R}^{ml}$ 和 $\bar{u}^l = (u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)})$。对于 $l = -1$，集合 U^{-1} 为空，且 $\bar{u}^{-1}$ 是一个空序列。

定义 1. 系统 Ξ: $\dot{x} = F(x, u)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ x_0 $\bar{u}_0^l \in X \times U^l$ $l \geq$ 在 $(,)$, -1 $\mathcal{O}^l$ m 处是平坦的，对于，如果存在 $(x_0, \bar{u}_0^l)$ 的一个邻域以及光滑函数 $\varphi_i = \varphi_i(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)})$, $1 \leq i \leq m$，它们定义在 $\mathcal{O}^l$ 中，并具有以下性质：存在整数 s 和光滑函数 γ_i, $1 \leq i \leq n$，以及 δ_j, $1 \leq j \leq m$，使得

$$x_i = \gamma_i(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(s-1)}) \text{ and } u_j = \delta_j(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(s)})$$

对于任意满足 $(x(t)\ u(t) \ldots,\ u^{(l)}(t)) \in \mathcal{O}^l$ 的 C^{l+s}-控制 $u(t)$ 及相应的轨迹 $x(t)$，其中 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$，称其为平坦输出。若对于所有 $1 \leq i \leq m$，都有 $\varphi_i = \varphi_i(x)$，则称该系统为 x-平坦。

表达 x 和 u所需的平坦输出各分量的最少导数阶数，称为该平坦输出的微分权重，其形式化定义如下。根据定义，对于 Ξ 的任意平坦输出 φ，存在整数 $s_1, \ldots, s_m$，使得

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \varphi_1^{(s_1-1)}, \ldots, \varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ldots, \varphi_m^{(s_m-1)}) \\ u &= \delta(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \varphi_1^{(s_1)}, \ldots, \varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ldots, \varphi_m^{(s_m)}). \end{aligned} \tag{2}$$

此外，我们可以选取 $(s_1, \ldots, s_m)$、 γ和 δ，使其满足（参见 h Respondek [2003]）：若对于任意其他的 m-元组˜$(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ 及函数 $\tilde{\gamma}$ 和 δ，都有

$$\begin{aligned} x &= \tilde{\gamma}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \varphi_1^{(\tilde{s}_1-1)}, \ldots, \varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ldots, \varphi_m^{(\tilde{s}_m-1)}) \\ u &= \tilde{\delta}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \varphi_1^{(\tilde{s}_1)}, \ldots, \varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ldots, \varphi_m^{(\tilde{s}_m)}), \end{aligned}$$

于是 $s_i \leq \tilde{s}_i$，对于 $1 \leq i \leq m$。我们将 $\sum_{i=1}^m (s_i + 1) = m + \sum_{i=1}^m s_i$ 称为 φ的微分权重。若某个平坦系统的平坦输出的微分权重在该系统的所有平坦输出中最低，则称其为最小平坦输出。我们将平坦系统的微分权重定义为其最小平坦输出的微分权重。微分权重为 $n + m + p$，其中 $p \geq 0$，可将其解释为能够动态线性化该系统的预补偿器的最小维数，我们称之为微分差，参见 Gst¨ottner 等人 [2021a],Gst¨ottner 等人[2021],，简称平坦系统的 ddiff。

˜考虑两个控制仿射系统 Σ 和 Σ，分别由 $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$、 $x \in X$、 $u \in \mathbb{R}^m$ 以及$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i \tilde{g}_i(\tilde{x})$、 $\tilde{x} \in \tilde{X}$、 $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$给出，其中 X ˜ ˜和 X 是 $\mathbb{R}^n$的开子集。若存在一个（局部）微分同胚 $\tilde{x} = \phi(x)$以及形如 $u = \alpha(x) + \beta(x)\tilde{u}$ 的可逆静态反馈变换，将第一个系统˜变换为第二个系统，即满足 $f(\phi(x)) = \partial\phi(x)\,\partial x\,(f(x) + g(x)\alpha(x))$且 $\tilde{g}(\phi(x)) = \partial\phi(x)\,\partial x\ g(x)\beta(x)$，其中 $g = (g_1, \ldots, g_m)$ 和 $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$，则称 Σ 和 Σ局部静态反馈等价。控制仿射系统 Σ 若静态反馈等价于一个线性可控系统 Λ: $\tilde{x} =$，则称其静态反馈可线性化。

$A\tilde{x} + B\tilde{u}$。静态反馈线性化问题由 Jakubczyk 和 Respondek [1980]解决；Hunt 和 Su [1981],也独立得出了以下几何充要条件。定义分布 $\mathcal{D}^{j+1} = \mathcal{D}^j + [f, \mathcal{D}^j]$, 其中$\mathcal{D}^0$ =张成$\{g_1, \ldots, g_m\}$，且 $[f, \mathcal{D}^j] = \{[f, \xi]:$ $\xi \in \mathcal{D}^j\}$。系统 Σ 局部静态反馈可线性化，当且仅当对任意 $j \geq 0$，分布 $\mathcal{D}^j$ 均为常秩、对合，且 $\mathcal{D}^{n-1} = TX$。可反馈线性化的系统静态反馈等价于 Brunovsk´y 标准形 Brunovsk´ 1970 y

$$(Br): \begin{cases} \dot{z}_i^j = z_i^{j+1} \\ \dot{z}_i^{\rho_i} = v_i, \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq m$、 $1 \leq j \leq \rho_i - 1$和 $\sum_{i=1}^m \rho_i = n$，显然是平坦的，且 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = (z_1^1, \ldots, z_m^1)$ 是一个最小平坦输出（微分权重为 $n + m$，即 ddiff$(Br) = 0$）。事实上，描述静态反馈可线性化系统的一种等价方式是：它们是微分权重为 $n + m$的平坦系统，等价地说，ddiff 为 0，参见 Nicolau 和 Respondek 的定理2.2 [2017]。

本文旨在为五维双输入 x平坦控制系统提供标准形。我们将证明，一般而言，五维 x平坦控制系统可以化为一种推广布鲁诺夫斯基´标准形的标准形。具体而言，我们将表明，这些系统要么是静态反馈可线性化的，要么在对某个适当选取的控制进行至多三次延拓后变为静态反馈可线性化的，而这正是最简单的动态反馈。对于那些不是静态反馈可线性化的系统（即微分权重 $n + m$下不平坦的系统），存在最小整数 $0 \leq k \leq n - 1$，使得对于 $\mathcal{D}^k$，可线性化条件（对合性或常秩）不满足（平坦系统总是可达的，因此 $\mathcal{D}^{n-1} = TX$成立）。我们在常秩假设下开展研究（见第3节开头的假设（A））， 因此只可能出现 $\mathcal{D}^k$ 非对合的情形。在讨论标准形时我们将看到，表示第一个非对合分布的整数 k 发挥着重要作用：具体而言，它与控制空间中的平坦性奇异点有关。

3. 主要结果：标准形

我们研究五维中具有以下形式的 x-平坦双输入控制仿射系统:

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x), \tag{3}$$

其中 $x \in X$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，且$u^5 \in \mathbb{R}$ 。全文中我们作如下假设:

假设（A）对于某个 $-1 \leq l \leq 1$，在给定的 $(x_0, \bar{u}_0^l) \in X \times \mathbb{R}^{2(l+1)}$ 的邻域内，涉及的所有秩均为常数。因此，所有结果在 $X \times \mathbb{R}^{2(l+1)}$ 的一个开且稠密的子集上成立，并且在该集合中任意给定点周围局部成立。

以下结果将五维中的 x-平坦性与微分权重联系起来，并通过对适当选择的控制进行延拓，将其与动态反馈线性化联系起来。本文所有结果的证明将在后续发表。

命题1. 以下陈述等价:

(i) Σ在（x_0、 u_0、 $\dot{u}_0$、.....、 $u_0^{(l)}$）处是 x-平坦的。(ii) Σ是 x-平坦的，平坦点为 x_0或（x_0、 u_0）或（x_0、 u_0、 $\dot{u}_0$），且微分权重至多为 $n + m + 3 = 10$，即 ddiff$(\Sigma) \leq 3$。

(iii) 在 x_0附近，存在一个可逆的静态反馈变换 $u=\alpha(x)+\beta(x)\tilde{u}$，将 Σ 化为形式 Σ：$\dot{x}=f(x)+\tilde{u}_1\tilde{g}_1(x)+\tilde{u}_2\tilde{g}_2(x)$，使得延拓后的系统

$$\tilde{\Sigma}^{(p,0)}:\begin{cases}\dot{x} &= \tilde{f}(x)+y_1\tilde{g}_1(x)+v_2\tilde{g}_2(x),\\ \dot{y}_i &= y_{i+1},\quad 1\le i\le p-1,\\ \dot{y}_p &= v_1,\end{cases}$$

对于某个 p，系统在 (x_0,y_0) 附近反馈线性化，且线性化输出仅依赖于 x[1]，并且有 $y_1=\tilde{u}_1$，$v_2=\tilde{u}_2$，$f=f+g\alpha$ 和 $\tilde{g}=g\beta$，其中 $g=(g_1,g_2)$ 且 $\tilde{g}=(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)$。

此外，条目 (ii) 中的 ddiff(Σ) 与条目 (iii) 中的最小整数 p 相同。

满足 (iii) 且具有 $p=0$ 的系统 Σ 就是静态反馈可线性化的。若 Σ 满足 (iii) 且具有 $1\le p\le 3$，则称其为通过可逆的 p 重延拓而动态可线性化。$\tilde{\Sigma}^{(p,0)}$ 确实是先施加可逆静态反馈 $u=\alpha+\beta\tilde{u}$，再将第一个控制延拓 $\tilde{u}_1$ p 次（即 $v_1=\tilde{u}_1^{(p)}$），而不延拓 $\tilde{u}_2$（这也解释了记号 $\tilde{\Sigma}^{(p,0)}$）得到的。因此，任何五维的双输入 x-平坦系统的微分权重至多为 $n+m+3=10$，并且在对适当选取的控制至多进行三次延拓后，即可实现静态反馈线性化。

主要结果由定理 1 和 2 给出，它们为五维平坦双输入控制仿射系统这一类系统提出了若干标准形。对于系统 Σ，它在 x 附近平坦，或在 (x_0,u_0) 附近平坦，或在 $(x_0,u_0,\dot{u}_0)$ 附近平坦，所有标准形均可通过局部静态反馈变换得到

$$z=\phi(x),\qquad u=\alpha(x)+\beta(x)v,$$

且在 $z_0=\phi(x_0)$ 附近平坦，或在 (z_0,v_0) 附近平坦，或在 $(z_0,v_0,\dot{v}_0)$ 附近平坦，其中 $u_0=\alpha(x_0)+\beta(x_0)v_0$ 且 $\dot{u}_0=L_F(\alpha+\beta v_0)(x_0,u_0)+\beta(x_0)\dot{v}_0$，其中 $F=f+gu$。下文中，v_{10}表示 v_0 的第一个分量。对于 $1\le i\le 5$，$\overline{z}_i$表示 $\overline{z}_i=(z_1,z_2,\dots,z_i)$。

定理 1. 以下陈述等价：

(i) Σ 在 x_0 或 (x_0,u_0) 处是 x-平坦的，微分权重至多为 $n+m+2=9$，即 ddiff(Σ) ≤ 2. (ii) Σ 在 x_0附近局部地静态反馈等价于在 $z_0\in\mathbb{R}^n$ 的某个邻域内的以下形式之一

$$NF:\begin{cases}\dot{z}_1=v_1 & \dot{z}_2=z_3,\\ & \dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+b_2(\overline{z}_4)v_1,\\ & \dot{z}_4=a_1(z)+a_2(z)v_1,\\ & \dot{z}_5=v_2,\end{cases}$$

or to

$$NF':\begin{cases}\dot{z}_1=z_2 & \dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+b_2(\overline{z}_4)v_1,\quad b_2(z_0)=0,\\ \dot{z}_2=v_1 & \dot{z}_4=a_1(z)+a_2(z)v_1,\\ & \dot{z}_5=v_2,\end{cases}$$

其中 $\frac{\partial b}{\partial z_4}(z_0,v_{10})\neq 0$ 且 $\frac{\partial a}{\partial z_5}(z_0,v_{10})\neq 0$，这里$b=b_1+b_2v_1$ 和 $a=a_1+a_2v_1$对 NF和NF'均成立；或者等价于

$$NF_7:\begin{cases}\dot{z}_1=z_2 & \dot{z}_4=a_1\\ & \\ \dot{z}_3=v_1\end{cases}(z)+(z_5-z_{50})$$

v_1，$\dot{z}_2=z_3$ $\dot{z}_5=v_2$，其中 $\frac{\partial a_1}{\partial z_5}(z_0)+v_{10}\neq 0$。

[1] 如果 $p\le 2$，则这一情形总是成立，而该条件仅对 $p=3$ 是必需的。

(iii) Σ 在 x_0附近局部静态反馈等价于标准形 NF_1^*- NF_7^* 之一，具体见表 1 中的 NF_1^*-NF_6^*；其中 NF^* 表示 NF或 NF'，而 NF_7^*表示 NF_7。(iv) Σ 要么是静态反馈可线性化的，要么可通过可逆一次延拓实现动态可线性化，或通过可逆二次延拓实现动态可线性化。

标准形 NF和 NF'包含四个非线性项，但我们总能将其中至少两个规范化，分别得到与 NF相关的标准形 NF_1-NF_5之一，或与 NF'相关的标准形 NF_1'-NF_6'之一，见表 1。请注意，不存在与 NF 对应的形式 NF_6，能够采用与导出 NF_6'（对于 NF'）相同的规范化方式。（对于 NF，这样的规范化实际上与 NF_1'静态反馈等价。）与定理 1 的 (iii) 项类似，我们将使用记号 NF_1^*-NF_7^*，其中NF^* 表示 NF或 NF'；形式 NF_7^*指的是定理 1 (ii) 中的NF_7，而 NF_1^*- NF_6^*表示表 1 中的形式。表 1“输入正则性条件”一栏中的条件描述了系统平坦所在的点对 (z_0,v_{10})；请注意，“输入正则性条件”混合了状态与控制，这意味着对于任意 z_0，总有一些控制会破坏平坦性：例如，对于 NF_2^*，我们必须避开 $\frac{\partial a_1}{\partial z_5}(z)+v_1=0$（它在任意给定 z_0的任意邻域内都有解）。对于某些形式，非线性函数还需满足一些条件，例如：

(C1) Σ不具有静态反馈可线性化性（即不满足 Jakubczyk 和 Respondek *[1980]*的条件）。或者

(C2) Σ 不能通过可逆一次延拓实现动态可线性化（即不满足 Nicolau 和 Respondek *[2017]*的条件）。

条件 (C1) 和 (C2) 是结构条件，它们意味着某些分布非 involutivity（见第 2 节）。对于标准形中的非线性函数，非 involutivity 意味着相对于某些变量的导数不恒为零，因此可用不等式表达；从这个意义上说，(C1) 和 (C2) 是正则性条件（因此我们在介绍标准形的表格中称它们为结构正则性条件）。例如，若不对 NF_5假设 (C2)，则可能出现 $\frac{\partial b_2}{\partial z_4}\equiv 0$的情况，这将意味着它在局部静态反馈等价于 NF_1'或 NF_6'。

注意到，$b_2=z_4$ 对于 NF_3 和 NF_4 的归一化不同于 $b_2=z_4-z_{40}$对于 NF_3' 和 NF_4'的归一化。这是因为与 NF' 相关联的函数 b_2 必须满足 $b(z_0)=0$；否则，NF 和 NF' 实际上静态反馈等价（事实上，应用可逆反馈变换 $\tilde{v}_1=b_1+b_2v_1$后，NF'将变为 NF）。对于 NF_7，也有类似的说明。

下面的定理 2 讨论微分权重为 $n+m+3=10$ 的情形，即 ddiff(Σ) $=3$；并且下文第 (ii) 项中出现的非线性函数必须满足一些额外的结构正则性条件：

(C3) Σ 不能通过可逆的二重延拓实现可线性化（即不满足 Nicolau 和 Respondek *[2016a]*, Gst¨ottner 等人 *[2021]*的条件）。

表 1. NF和 NF'的简化（d.w. 表示微分权重）。

ddiff	d.w.	形式	非线性项	输入正则性条件	结构正则性条件
0	$n+m=7$	NF_1, NF_1'	$b_1=z_4$, $b_2\equiv 0$ $a_1=z_5$, $a_2\equiv 0$	- -	- -
1	$n+m+1=8$	NF_2, NF_2'	$b_1=z_4$, $b_2\equiv 0$ $a_1(z)$ 任意，$a_2=z_5$	- $\frac{\partial a_1}{\partial z_5}(z_0)+v_{10}\neq 0$	- -
2	$n+m+2=9$	NF_3, NF_3'	$b_1(\overline{z}_4)$ 任意，$b_2=\begin{cases} z_4, & \text{对于 } NF_3 \\ z_4-z_{40}, & \text{对于 } NF_3' \end{cases}$ $a_1(z)$ 任意，$a_2=z_5$	$\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0)+v_{10}\neq 0$ $\frac{\partial a_1}{\partial z_5}(z_0)+v_{10}\neq 0$	- -
2	$n+m+2=9$	NF_4, NF_4'	$b_1(\overline{z}_4)$ 任意，$b_2=\begin{cases} z_4, & \text{对于 } NF_4 \\ z_4-z_{40}, & \text{对于 } NF_4' \end{cases}$ $a_1=z_5$, $a_2(\overline{z}_4)$ 任意	$\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0)+v_{10}\neq 0$ -	- -
2	$n+m+2=9$	NF_5, NF_5'	$b_1=z_4$, $b_2(\overline{z}_4)$ 任意 $a_1=z_5$, $a_2(\overline{z}_4)$ 任意	- -	(C2) 和 $\frac{\partial b_2}{\partial z_4}(z_0)=0$ -
1	$n+m+1=8$	NF_6' (无对应的 NF_6)	$b_1=z_4$, $b_2\equiv 0$ $a_1=z_5$, $a_2(\overline{z}_4)$ 任意	- -	- (C1)

定理 2. 以下陈述等价：

(i) Σ 在 (x_0,u_0) 或 $(x_0,u_0,\dot{u}_0)$ 处是 x-平坦的，微分权重为 $n+m+3=10$，即 ddiff(Σ) $=3$。(ii) Σ 在 x_0 附近是局部的，在 $z_0\in\mathbb{R}^n$ 的某个邻域内静态反馈等价于以下系统之一

$$NF'':\begin{cases}\dot{z}_1=v_1 & \dot{z}_2=c_1(\overline{z}_3)+c_2(\overline{z}_3)v_1,\\ & \dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+b_2(\overline{z}_4)v_1,\\ & \dot{z}_4=a_1(z)+a_2(z)v_1,\\ & \dot{z}_5=v_2,\end{cases}$$

with $\frac{\partial(c_1+c_2v_{10})}{\partial z_3}(z_0)\neq 0$, $\frac{\partial(b_1+b_2v_{10})}{\partial z_4}(z_0)\neq 0$, ~~$\frac{\partial(a_1+a_2v_{10})}{\partial z_5}$~~$(z_0)\neq 0$，以及函数 a_i,b_i,c_i, $1\leq i\leq 2$，验证满足附加正则性条件从而保证条件（C3）成立，或者

$$NF_{13}:\begin{cases}\dot{z}_1=v_1 & \dot{z}_2=z_3+z_4v_1\\ & \dot{z}_3=a(\overline{z}_4)+(-z_5+b(\overline{z}_4))v_1\\ & \dot{z}_4=z_5+c(\overline{z}_4)v_1\\ & \dot{z}_5=v_2,\end{cases}$$

其中

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z_4}-(\frac{\partial a}{\partial z_3}-\frac{\partial b}{\partial z_4})v_{10}-(\frac{\partial b}{\partial z_3}-\frac{\partial c}{\partial z_4})v_{10}^2-\frac{\partial c}{\partial z_3}v_{10}^3+\dot{v}_{10}\right)(z_0)\neq 0. \quad (4)$$

(iii) Σ 在 x_0附近静态反馈等价于标准形 NF_8''-NF_{12}''或 NF_{13}之一，其中NF_8''-NF_{12}''的详细内容见表 2。

此外，若任一等价项（i）（$\Leftrightarrow$）（ii）或（$\Leftrightarrow$）成立，则该系统可通过可逆的三重延拓实现线性化。

标准形 NF''包含六个非线性项，但我们总能在每个非线性方程中至少将一个非线性项规范化，从而得到下文表 2 中列出的标准形 NF_8''-NF_{12}''。未规范化的非线性项均满足条件（C3）（所有这些项的微分权重均为 $n+m+3=10$）；其中一些可能显式依赖于某些 z，但它们对这些 z变量的导数必须在 z_0处为零（例如，NF_{10}''的函数 b_2）。

4. 标准形讨论

所有标准形在 $z_0\in\mathbb{R}^n$ 附近均有效，而 $z_0\in\mathbb{R}^n$ 可以为零，也可以不为零。因此，它们都可用于任意点（无论该点是否为平衡点）。所有形式和最小 x-平坦输出是相容的，也就是说，对于给定的五维 x-平坦系统 Σ，我们总能同时将 Σ 规范化，并将先验给定的最小平坦输出 φ 规范化：

命题 2. 设 Σ 在 x_0 处平坦（在 (x_0,u_0) 处或在 $(x_0,u_0,\dot{u}_0)$ 处），且 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ 是 Σ的一个最小 x-平坦输出，其微分权重不超过 $n+m+3=10$。那么，Σ在 x_0 附近局部静态反馈等价于形式 NF_1^*-NF_{13}^*之一，其中 NF^*表示 NF、NF'或NF''；对于 NF_1-NF_5、NF_8''-NF_{12}''和NF_{13}，有 $\varphi=(z_1,z_2)$；对于 NF_1'-NF_6'，有 $\varphi=(z_1,z_3)$；对于 NF_7，则有 $\varphi=(z_1,z_4)$。

4.1 标准形讨论 NF_1^*-NF_7^*定理 1 给出的标准形要么是静态反馈可线性化的，等价地说，其微分权重为 $n+m=7$，即 ddiff(Σ) $=0$（形式 NF_1^*）；要么可通过对适当选择的控制进行一重延拓而实现动态可线性化，等价地说，其微分权重为 $n+m+1=8$，即 ddiff(Σ) $=1$（形式 NF_2^*、NF_6'和 NF_7）；要么可通过对适当选择的控制进行二重延拓而实现动态可线性化，等价地说，其微分权重为 $n+m+2=9$，即 ddiff(Σ) $=2$（形式 NF_3^*、NF_4^*和 NF_5^*）。对于静态反馈可线性化系统这一特例，我们得到预期的五维两个 Brunovsk´y 规范形，分别由长度为 (2,3) 的两条独立积分器链组成，对应于 NF_1'；以及长度为 (1,4) 的两条独立积分器链，对应于 NF_1。描述通过一重延拓实现线性化的标准形中存在且仅存在一个非线性项。对应于微分权重 $n+m+2=9$ 的标准形 NF_3^*、NF_4^*和 NF_5^* 至多含有两个非线性项。注意，NF_4^*实际上可能只含有一个非线性项：只有当表达式 $\dot{z}_4$ 中涉及的函数 a_2恒为零时才会如此，即最后两个方程为 $\dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+z_4v_1$（非线性方程）和 $\dot{z}_4=z_5$，其中 NF_4（相应地，为 $\dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+(z_4-z_{40})v_1$ 和 $\dot{z}_4=z_5$，其中 NF_4'）。另一方面，标准形 NF_3^*始终包含两个非线性方程：$\dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+z_4v_1$，其中 NF_3；或 $\dot{z}_3=b_1(\overline{z}_4)+(z_4-z_{40})v_1$，其中 NF_3'；以及 $\dot{z}_4=a_1(z)+z_5v_1$，其中函数 a_1和 b_1 可以是任意函数，尤其是二者都可以恒为零；在后一种情况下，NF_3^*“几乎”是链式形式（实际上，它们是一个线性子系统与四维链式形式的级联）。NF_5^*中的非线性项数量也可能变化。请注意，定理 1 的所有形式 NF_1^*-NF_7^*都具有一种特殊的

表 2. NF''（d.w.（Σ）$= n + m + 3 = 10$和 ddiff（Σ）$= 3$）的简化。

Form	非线性项	输入正则性条件	结构正则性条件
NF''_8	$c_1(\overline{z}_3)$ 任意，$c_2 = z_3$	$\frac{\partial c_1}{\partial z_3}(z_0) + v_{10} \neq 0$	-
	$b_1(\overline{z}_4)$ 任意，$b_2 = z_4$	$\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0) + v_{10} \neq 0$	
	$a_1(z)$ 任意，$a_2 = z_5$	$\frac{\partial a_1}{\partial z_5}(z_0) + v_{10} \neq 0$	
NF''_9	$c_1(\overline{z}_3)$ 任意，$c_2 = z_3$	$\frac{\partial c_1}{\partial z_3}(z_0) + v_{10} \neq 0$	(C3)
	$b_1(\overline{z}_4)$ 任意，$b_2 = z_4$	$\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0) + v_{10} \neq 0$	
	$a_1 = z_5$, $a_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	
NF''_{10}	$c_1(\overline{z}_3)$ 任意，$c_2 = z_3$	$\frac{\partial c_1}{\partial z_3}(z_0) + v_{10} \neq 0$	(C3) 和 $\frac{\partial b_2}{\partial z_4}(z_0) = 0$
	$b_1 = z_4$，$b_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	
	$a_1 = z_5$，$a_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	
NF''_{11}	$c_1 = z_3$，$c_2(\overline{z}_3)$ 任意	-	(C3) 以及 $\frac{\partial c_2}{\partial z_3}(z_0) = 0$
	$b_1(\overline{z}_4)$ 任意，$b_2 = z_4$	$\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0) + v_{10} \neq 0$	
	$a_1 = z_5$，$a_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	
NF''_{12}	$c_1 = z_3$，$c_2(\overline{z}_3)$ 任意	-	(C3) 和 $\frac{\partial c_2}{\partial z_3}(z_0) = 0$
	$b_1 = z_4$, $b_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	$\frac{\partial b_2}{\partial z_4}(z_0) = 0$
	$a_1 = z_5$, $a_2(\overline{z}_4)$ 任意	-	

三角结构。它们是一个 k 维线性系统 $y^{(\rho_1)}{}_1 = v_1$、$y^{(\rho_2)}{}_2 = w_2$ 与一个三角系统的级联，其中 $\rho_1+\rho_2 = k \leq 3$,

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= d_j(y, \overline{z}_{j+1}, v_1), \quad \frac{\partial d_j}{\partial z_{j+1}}(z_0) \neq 0,\ k+1 \leq j \leq 4, \\ \dot{z}_5 &= v_2 \end{aligned} \tag{5}$$

经由 d$w_2 = z_{k+1}$ 线性化，其中 $h_3 = d$是定理1(ii)的d$_4 d = a$；对于 NF_2^* 和 NF_6'，则不存在 d_3。线性 y 子系统的维数始终为 2 或 3。

对于所有不能通过静态反馈线性化的标准形，我们可以立即看出需要对控制进行延拓。事实上，经过对 v_1 进行一次或二次延拓后，它们都能在局部通过静态反馈线性化。定理 1 所述的平坦性在 x_0 附近是局部的；但对于微分权重为 $n + m = 7$ 或 $n + m + 1 = 8$ 的情形（其第一个非对合分布为 $\mathcal{D}^1$），对应于标准形 NF_1^*、NF_6'，平坦性相对于控制 u 是全局的。另一方面，在微分权重为 $n + m + 1 = 8$ 且 $\mathcal{D}^0$ 为非对合分布的情形，以及微分权重为 $n + m + 2 = 9$ 的情形（几乎所有情况）中，预补偿器总会在控制空间中产生奇异性（其取决于状态），因此必须在（x_0，u_0）附近考察平坦性。标准形 NF_5^* 是特殊情形，会呈现一种假奇异性；所谓“假”，是指它看起来像奇异性，实则并非如此。事实上，由 $\partial(b_1+b_2v_{10})/\partial z_4\,(z_0) \neq 0$ 可知，我们应当能够将 b_1 或 b_2 规范化为 z_4，但 $\frac{\partial b_2}{\partial z_4}(z_0) = 0$，因此必有 $\frac{\partial b_1}{\partial z_4}(z_0) \neq 0$，而需要规范化为 z_4 的是函数 b_1（在新坐标中，这给出 $\partial(b_1+b_2v_{10})/\partial z_4\,(z_0) = 1 + \frac{\partial b_2}{\partial z_4}(z_0)\, v_{10} = 1 \neq 0$）。

所有这些形式显然都是平坦的，其中，对于 NF_1-NF_5，$\varphi = (z_1, z_2)$ 是最小平坦输出；对于 NF_1'-NF_6'，$\varphi = (z_1, z_3)$ 是最小平坦输出；对于 NF_7，$\varphi = (z_1, z_4)$ 是最小平坦输出。形式 NF_1^*-NF_7^* 有一项有趣的性质：平坦输出的每个连续时间导数都能提供关于状态 z 的最大可能数量的独立函数（实际上，它们是 x-最大平坦的，形式化定义见 Nicolau 等人 [2014]）。更准确地说，φ_i, $1 \leq i \leq 2$ 的每个连续时间导数都能让我们表示两个新的状态变量（如果尚未求出控制 v_1），或一个新的状态变量（如果 v_1 已经表示出来）。

4.2 标准形 NF''_8-NF''_{12} 的讨论 迄今为止的大多数观察（作为线性子系统与三角子系统级联的三角结构、x-最大平坦性，以及控制空间中涉及控制但不涉及其导数的奇异性）同样适用于定理 2 的形式 NF''_8-NF''_{12}，或可加以调整后应用于这些形式。形式 NF''_8 是与链式形式相容的三角形式；关于其几何刻画，参见 Li 等人 [2016]，和 Silveira 等人 [2015]。形式 NF''_{12} 与 Silveira 和 da Silva [2007] 的形式一致。

4.3 规范形讨论 NF_{13} 与NF''_8-NF''_{12}类似，规范形 NF_{13} 也是微分权重为 $n + m + 3 = 10$的 x-平坦系统，即 ddiff(NF_{13}) $= 3$，其中 $\varphi = (z_1, z_2)$是一个最小平坦输出；通过对v_1进行三重延拓，该系统可动态可线性化，但在结构上却截然不同。首先，它不具有三角结构，而且也不静态反馈等价于另一种具有三角结构的形式。其次，当用平坦输出及其连续导数表示状态和控制变量时，我们有 span $\{\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\,\dot{\varphi}\} \cap \mathrm{span}\,\{\mathrm{d}z\} = \mathrm{span}\,\{\mathrm{d}z_1,\ \mathrm{d}z_2\}$，其中 span $\{\mathrm{d}z\} = \mathrm{span}\,\{\mathrm{d}z_1,\ \ldots,\ \mathrm{d}z_5\}$。因此，我们只能用四个函数 φ_1、φ_2、$\dot{\varphi}_1$、$\dot{\varphi}_2$ 表示两个状态 z_1 和 z_2（此外，还需要 $\ddot{\varphi}$来表示 z_3 和 z_4），这意味着该系统不是x-极大平坦的，见 Nicolau 等人 [2014]。第三，控制空间中的奇异性（由关系式 (4) 描述）的性质也大不相同，因为它涉及输入 v的导数。条件 (4) 是这样一个事实的结果：借助 $\dot{\varphi}_2$和 $\ddot{\varphi}_2$，我们必须同时表示z_3和 z_4，因此 $\mathrm{rk}\left(\partial(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)/\partial(z_3, z_4)\right)(z_0, \overline{v_0, \dot{v}_0}) = 2$。

最后，请注意，NF_{13} 与 Pomet [1997] 的正规形非常相似，后者刻画了具有两个输入的四维控制系统的（x，u）-平坦性：

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \quad \dot{z}_2 = z_4 + z_3 v_1 \\ \dot{z}_3 &= p_0(\overline{z}_3) + z_4 p_1(\overline{z}_3) + (q_0(\overline{z}_3) + z_4 q_1(\overline{z}_3))v_1 \\ \dot{z}_4 &= v_2. \end{aligned} \tag{6}$$

事实上，首先要注意，它们都不是三角形式。其次，对于后者，在满足$\dot{z}_2 = z_4 + z_3 v_1$的坐标中（将 z_3和 z_4互换以得到 NF_{13}），非线性函数关于非线性链的最后一个变量是仿射的（也就是说，对于 (6)，关于 z_4 是仿射的；而对于

，对于 NF_{13}，关于 z_5 是仿射的）。第三，将状态表示为 $\varphi_i^{(j)}$ 的函数时，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$的首个时间导数 $\dot{\varphi}$ 并不只依赖于状态 z。最后，对于这两种形式，控制空间中的奇异性取决于输入的导数。

5. 示例

示例5.1. 考虑以下感应电动机模型：.

$$\begin{aligned} I_d &= U_d \quad \dot{\omega} &&= \mu\psi_d I_q - \tfrac{\tau_L}{J} \\ \dot{I}_q &= U_q \quad \dot{\psi}_d &&= -\eta\psi_d + \eta M I_d \\ &\qquad \dot{\rho} &&= n_p\omega + \tfrac{\eta M I_q}{\psi_d}, \end{aligned}$$

其中，$U_d = u_1, U_q = u_2$ 为输入，i 模型的详细说明见 Chiasson[1998]。一个可能的最小 x-平坦输出为 $\varphi = (\omega, \rho)$，其推导见 Nicolau 和 Respondek [2016b]。此平坦输出与 NF_6'兼容，符合命题 2 的含义。事实上，引入新坐标 $z_1 = \varphi_1 = \omega$, $z_2 = L_f\varphi_1 = \mu\psi_d I_q - \frac{\tau_L}{J}$, $z_3 = \varphi_2 = \rho$, $z_4 = L_f\varphi_2 = n_p\omega + \frac{\eta M I_q}{\psi_d}$，并通过可逆静态反馈引入$v_1 = L_f^2\varphi_1 + u_2 L_{g_2} L_f\varphi_1 = (MI_d - \psi_d)\mu\eta I_q + \mu\psi_d U_q$。于是我们有

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \quad \dot{z}_3 &&= z_4 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \quad \dot{z}_4 &&= a_1(z_1, z_2, z_4, I_d) + \tfrac{J(z_4 - n_p z_1)}{J z_2 + \tau_L} v_1 \\ &\qquad \dot{I}_d &&= U_d. \end{aligned}$$

引入 $z_5 = a_1(z_1, z_2, z_4, I_d)$ 并应用适当的静态反馈，便得到 NF_6'，其中 $a_2(z_4) = {}^{J}_{(z_4 - n_p z_1) J z_2 + \tau_L}$。示例5.2。作为进一步的示例，考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos(\theta_2 - \theta_1)\cos(\theta_1) u_1 \quad \dot{\theta}_1 &&= \sin(\theta_2 - \theta_1) u_1 \\ \dot{y} &= \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_1) u_1 \quad \dot{\theta}_2 &&= \omega_2 \\ &\qquad \dot{\omega}_2 &&= u_2, \end{aligned}$$

对于非完整汽车，该系统描述了运动学，参见例如 Fliess 等人 [1995],以及转向动力学¨与角加速度 $\theta_2 = u_2$。该系统的一个最小 x-平坦输出可取为 $\varphi = (x, y)$。按照命题 2 的意义，该平坦输出与NF_9''相容。为将系统变换为 NF_9''，引入新坐标 $z_1 = \varphi_1 = x$, $z_2 = \varphi_2 = y$ 并令$v_1 = u_1 L_{g_1}\varphi_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1)\cos(\theta_1) u_1$，从而得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \quad \dot{z}_2 &&= \tan(\theta_1) v_1, \\ &\qquad \dot{\theta}_1 &&= \tfrac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\cos(\theta_1)} v_1, \\ &\qquad \dot{\theta}_2 &&= \omega_2, \\ &\qquad \dot{\omega}_2 &&= u_2. \end{aligned}$$

接下来，依次将乘以 v_1 的函数引入为新的状态，即令 $z_3 = \tan(\theta_1)$，然后以类似方式定义 z_4，从而得到 $\dot{z}_2 = z_3 v_1$, $\dot{z}_3 = z_4 v_1, \dot{z}_4 = a_1(z_3, z_4, \omega_2) + a_2(z_3, z_4) v_1$。最后，引入 $z_5 = a_1(z_3, z_4, \omega_2)$ 并应用适当的静态反馈，得到 NF_9'' 中的表示。

参考文献

Aranda-Bricaire, E., Moog, C.H., 和 Pomet, J.B.（1995）。动态反馈线性化的线性代数框架。 *IEEE Trans. Automat. Contr.* 40 1 127 132 , ( ), – 。

Brunovsk´y, P.（1970）。线性可控系统的分类。*Kybernetika*, 3(6), 173–188。Charlet, B., L´evine, J., 和 Marino, R.（1989）。关于动态反馈线性化。 *Systems & Control Letters*, 13(2), 143–151。Chiasson, J.（1998）。感应电动机动态反馈线性化控制的新方法。 *IEEE Trans. Automat. Control* 43 3 391 397 , ( ), – 。

Fliess, M., L´evine, J., Martin, P., 和 Rouchon, P.（1995）。非线性系统的平坦性与缺陷：入门理论及示例。 *Internat. J. Control*, 61(6), 1327–1361。Gst¨ottner, C., Kolar, B., 和 Sch¨oberl, M.（2021a）。通过二维内生动态反馈判定双输入系统可线性化性的有限检验。载于 *2021 European Control Conference (ECC)* 970 977 , –

。Gst¨ottner, C., Kolar, B., 和 Sch¨oberl, M. （ 2021b ）。基于扩展链式形式的平坦三角形式。 *IFAC-PapersOnLine*, 54(9), 245–252。第24届 MTNS 2020。Gst¨ottner, C., Kolar, B., 和 Sch¨oberl, M.（2022）。基于扩展链式形式的结构平坦三角形式。 *Internat. J. Control* 95 5 1144 1163 , ( ),

– 。Gst¨ottner, C., Kolar, B., 和 Sch¨oberl, M. （ 2021 ）。通过二维内生动态反馈实现双输入系统可线性化的充要条件。 *Internat. J. Control* 。

Hunt, L. 和 Su, R.（1981）。非线性时变系统的线性等价系统。 *In Proc. MTNS, Santa Monica, CA*, 119–123。Isidori, A., Moog, C.H., 和 De Luca, A.（1986）。通过动态状态反馈实现完全线性化的充分条件。载于 *Proc. IEEE CDC*, 第25卷，203–208。Jakubczyk, B.（1993）。动态反馈不变量与自由系统。 *In Proc. ECC*, 1510–1513。Jakubczyk, B. 和 Respondek, W.（1980）。关于控制系统的线性化。 *Bull. Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Math.*, 517–522。Li, S., Nicolau, F., 和 Respondek, W.（2016）。静态反馈等价于三角形式的多输入控制仿射系统及其平坦性。 *Internat. J. Control*, 89(1), 1–24。Li, S. 和 Respondek, W.（2012）。双输入无漂移控制系统的平坦输出。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18, 774–798。Martin, P. 和 Rouchon, P.（1994）。反馈线性化与无漂移系统。 *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 7 3 235 254( ), – 。Murray, R.（1994）。一类不可积分布的幂零基及其在非完整系统轨迹生成中的应用。 *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 7 1 58 75( ), – 。Nicolau, F., Li, S., 和 Respondek, W.（2014）。与多链式形式兼容的控制仿射系统及其 x-最大平坦性。载于 *Proc. MTNS*, 303–310。Nicolau, F. 和 Respondek, W.（2016a）。可通过二重延拓线性化的双输入控制仿射系统的平坦性。载于 *IEEE CDC*, 3862–3867。Nicolau, F. 和 Respondek, W.（2016b）。可通过一重延拓线性化的双输入控制仿射系统及其平坦性。*Eur. J. Control*, 28, 20–37。Nicolau, F. 和 Respondek, W.（2017）。可通过一重延拓线性化的多输入控制仿射系统的平坦性。*SIAM J. Control and Optim.*, 55(5), 3171–3203。Nicolau, F. 和 Respondek, W.（2019）。最小微分权重多输入平坦系统的标准形。 *Int. J. Robust Nonlin. Control* 29 10 3139 3162 , ( ),

– 。Nicolau, F. 和 Respondek, W. （ 2020 ）。可通过二重延拓线性化的平坦双输入控制系统的标准形。*IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 5441–5446。Pomet, J.B.（1995）。动态等价与动态线性化的微分几何框架。 *Banach Center Publ. Vol.* , , – *32* 319 339 。Pomet, J.B. （ 1997 ）。关于具有两个输入的四维仿射控制系统的动态反馈线性化。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var* 2 151 230 , , –

。Respondek, W. （ 2003 ）。非线性控制系统的对称性与最小平坦输出。LNCIS 295。Springer, 65–86。Silveira, H. 和 da Silva, P.P.（2007）。具有两个控制量和至多五个状态的平坦非线性系统的三角形式。 *IFAC Proc. Volumes* 40 20 118 123 , ( ),

– 。Silveira, H., Pereira da Silva, P., 和 Rouchon, P. （ 2015 ）。双输入非线性系统的平坦三角形式：充要条件。 *Eur J. Control*, 22, 17–22。