arXiv:2301.04390v1 [math.NT] 11 Jan 2023

特征和与ζ和的典型大小是 $o(\sqrt{x})$

ADAM J HARPER

Abstract. 我们猜想性地证明了狄利克雷特征矩 $\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q}$ 的最佳上界，其中 r 是一个大素数，$1 \le x \le r$，且 $0 \le q \le 1$ 为实数。特别地，如果 x 和 r/x 都随 r 趋于无穷，那么 $\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)| = o(\sqrt{x})$，因此和 $\sum_{n\le x}\chi(n)$ 通常表现出“优于平方根抵消”的性质。我们还证明了ζ和的矩 $\frac{1}{T}\int_0^T|\sum_{n\le x}n^{it}|^{2q}dt$ 具有类似的优于平方根的上界；狄利克雷θ函数 $\theta(1,\chi)$ 的矩；以及和 $\sum_{n\le x}h(n)\chi(n)$ 的矩，其中 $h(n)$ 是任意适当有界的乘性函数（例如莫比乌斯函数 $\mu(n)$）。

证明依赖于随机乘性函数低阶矩中类似的、优于平方根抵消的现象。其中一个重要环节，是重新组织随机情形中的条件化论证，从而只需对少量相当短的素数和进行“条件化”。随后产生的条件化量可以用扭曲二阶矩很好地近似；对于特征和与ζ和而言，这些扭曲二阶矩的行为与随机情形中的相同。

1. Introduction

本文关注如下这类和的大小：

$$\sum_{n\le x} n^{it} \quad \text{and} \quad \sum_{n\le x}\chi(n),$$

其中，$t \in \mathbb{R}$ 且 $\chi(n)$ 是模大素数 r 的非主狄利克雷特征。这些ζ和与特征和是解析数论中研究最为广泛的对象之一。我们希望证明，在 x尽可能宽广的范围内，这些和中的各项之间存在显著的抵消。此外，我们还希望理解这种抵消的程度。

根据周期性，我们可以将特征和的研究范围限定为 $x \le r$。如果 t 很大且 $x \ge t$，那么标准的傅里叶分析（例如参见 Ivi´c [13], 的引理 1.2）表明 $\sum_{x<n\le 2x} n^{it} = \int_x^{2x} w^{it}dw + O(1) = (2x)^{1+it}_{1+it} - x^{1+it} + O(1)$。~~因此，我们~~同样可以将 ζ和的研究范围限定为 $x \le |t|$。

日期：2023年1月11日。本项工作始于作者于2017年春季学期驻留在加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所期间；当时作者建立了定理 1 的一个较弱版本（该研究所由美国国家科学基金会 DMS-1440140 号拨款支持）。本项工作还得到英国工程与自然科学研究委员会 [拨款 EP/V055755/1] 的部分资助。

对于特征和，经典的 P´olya–Vinogradov 不等式断言，我们总有 $|\sum_{n\le x}\chi(n)| \ll \sqrt{r}\log r$。只有当 x 大于约 $\sqrt{r}\log r$时，这个界才是非平凡的；而对于模素数特征标，只要满足 $x \ge r^{1/4+o(1)}$，Burgess 界就给出非平凡界 $o(x)$。例如，参见 Montgomery 和 Vaughan 的第 9.4 章 [23]。假设广义黎曼猜想，Montgomery 和 Vaughan [21] 将 P´olya–Vinogradov 不等式改进为 $|\sum_{n\le x}\chi(n)| \ll \sqrt{r}\log\log r$；随后 Granville 和 Soundararajan [7] 证明，只要 $(\log x)/\log\log r \to \infty$as $r\to\infty$，就有 $\sum_{n\le x}\chi(n) = o(x)$。他们还证明，对于特征和而言，要使其始终为 $o(x)$（对所有此类 x 以及所有非主特征）， x 的这一范围是最佳可能的。

T转而考察平均结果，对于任意 $x < r$，我们都有简单的低阶矩估计 es

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2 = \lfloor x\rfloor, \quad \text{and} \quad \frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \le x^q \quad \forall\, 0\le q\le 1.$$

这里的第一个结论是狄利克雷特征的正交性的直接推论，第二个结论则可由第一个结论利用 H¨older 不等式推出。或许令人意外的是，对于特征和的低阶矩（即 $0\le q\le 1$），这些直接的估计似乎仍基本上是已知的最佳上界。稍微不那么直接地，我们有

$$\frac{1}{r-2}\sum_{\chi\ne\chi_0 \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \ll_q r^q \quad \forall q>0,$$

这可由 Montgomery 和 Vaughan 的定理 1 [22] 推出（他们实际证明的上界中，固定和 $\sum_{n\le x}\chi(n)$ 被 $M(\chi) := \max_x|\sum_{n\le x}\chi(n)|$ 替代）。关于 x 较小时高阶矩的若干更强上界，另见 Cochrane 和 Zheng [4], 、Granville 和 Soundararajan [7], 以及 Kerr [14], 。请注意，在 Montgomery 和 Vaughan 的结果 [22] 中，当 q 和 x 较大时，必须排除主特征 χ_0 （否则它会产生较大的贡献 $\asymp x^{2q}/r$）；但在第一个结论中，只要 $x\le 0.99r$，例如，其贡献 $\lfloor x\rfloor^2/(r-1)$ 与$\lfloor x\rfloor$相比并不显著。

自然会想知道，是否通常（例如，对正比例的特征 $\chi \bmod r$）都呈现平方根级别的行为 $\sum_{n\le x}\chi(n) \asymp \sqrt{x}$，从而低阶矩是否确实为 $\asymp x^q$ 还是不是[1]。结合 Cauchy–Schwarz 不等式与前述估计，对任意 $x\le 0.99r$，我们得到

$$\frac{1}{r-2}\sum_{\chi\ne\chi_0 \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \ge \frac{(\frac{1}{r-2}\sum_{\chi\ne\chi_0 \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2)^2}{\frac{1}{r-2}\sum_{\chi\ne\chi_0 \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2(2-q)}} \gg_q \frac{x^2}{r^{2-q}} \quad \forall\, 0\le q\le 1.$$

特别地，对于任意固定的小 $\alpha>0$ 以及所有 $\alpha r\le x\le 0.99r$，现在我们确实得到 $\frac{1}{r-2}\sum_{\chi\ne\chi_0 \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \asymp_{\alpha,\ q} x^q$ 对所有 $0\le q\le 1$都成立。由于二阶

[1]有关这一问题的明确讨论，参见 MathOverflow 帖子：http://mathoverflow.net/questions/129264/short-character-sums-averaged-on-the-characte 关于这一问题的具体讨论。

矩是第一矩的平方，因此，另一个标准的柯西–施瓦茨论证（通常称为帕利–齐格蒙德不等式）表明，当 $\alpha r \le x \le 0.99r$ 时，对于正比例的模 r 特征，有 $|\sum_{n\le x}\chi(n)| \gg_\alpha \sqrt{x}$。但当 $x = o(r)$ 时，下界 $\frac{x^2}{r^{2-q}}$ 与 x^q 不匹配，而 $\sum_{n\le x}\chi(n)$ 的典型大小仍不清楚。（注意，视 x 的大小而定，可以通过适当应用 Hölder 不等式，而非柯西–施瓦茨不等式，并使用例如 [4, 7, 14] 的高阶矩界，而不是 Montgomery 和 Vaughan 的结果 [22]，大幅改进“简单”下界 $\frac{x^2}{r^{2-q}}$。另见 La Bret`eche、Munsch 和 Tenenbaum [3] 的第 1.5 节。不过，这仍无法在一般情况下得到匹配的下界 x^q。）

对于ζ和 $\sum_{n\le x} n^{it}$，不难证明，对所有充分大的 $x \le t$，都有 $|\sum_{n\le x} n^{it}| \ll \sqrt{t}\log t$，尽管与特征和的类似波利亚–维诺格拉多夫不等式相比，这个估计似乎远没有那么广为人知。参见 Montgomery [20], 的第 7.6 章，以及 Fujii、Gallagher 和 Montgomery [5] 的论文。维诺格拉多夫–科罗博夫方法给出非平凡估计 $o(x)$，条件是当 $|t| \to \infty$ 时，$(\log x)/\log^{2/3}|t| \to \infty$；例如参见 Ivić c [13] 的第 6 章。在广泛范围内获得 x 的界，对于当 $\Re(s)$ 接近 1 时估计黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 尤为重要，并会影响素数分布。当 $\Re(s) = 1/2$ 时，在较有限的 x 范围内取得更大的节省则很重要。当前最先进的成果来自 Bourgain [2] 的近期工作。有些令人意外的是，Montgomery 和 Vaughan [21] 以及 Granville 和 Soundararajan [7] 关于特征和的精确条件结果的类似版本，似乎尚未针对ζ和明确推导出来。不过，通过调整他们的方法，并以 $\zeta(s)$ 的近似函数方程（特别是该方程意味着，对所有充分大的 $x \le t$，有 $|\sum_{n\le x} n^{it}| \asymp \sqrt{t}|\sum_{t/(2\pi x)<n\le t/\pi}\frac{1}{n^{1+it}} + O(\frac{x}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}})|$）替代特征和的波利亚傅里叶展开式，可以推导出各种此类结果。

关于平均结果，Montgomery 和 Vaughan 的一个著名均值定理（例如参见 Ivi´c [13] 的定理 5.2）断言，对于任意复数 a_n，我们有

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\le x} a_n n^{it}|^2 dt = \sum_{n\le x}|a_n|^2(1+O(\frac{n}{T})).$$

因此，如果 T 很大且 $1 \le x \le T$，那么 $\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\le x} n^{it}|^2 dt \ll x$；由 H¨older 不等式可得，对所有 $0 \le q \le 1$，都有 $\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\le x} n^{it}|^{2q} dt \ll x^q$。此外，若 $T/2 \le t \le T$，例如，那么我们可以利用近似函数方程推导出 $|\sum_{n\le x} n^{it}| \ll \sqrt{T}|\sum_{T/(2\pi x)<n\le T/\pi}\frac{1}{n^{1+it}}| + \sqrt{T}$。对任意 $q \in \mathbb{N}$，我们有 $(\sum_{T/(2\pi x)<n\le T/\pi}\frac{1}{n^{1+it}})^q = \sum_{n\le (T/\pi)^q} \frac{c_x}{,T,q(n)\ n^{1+it}}$，其中某些系数 $c_{x,T,q}(n)$ 由 q 次约数函数 $d_q(n)$ 控制，因此均值定理给出

$$\frac{2}{T}\int_{T/2}^T |\sum_{n\le x} n^{it}|^{2q} dt \ll_q T^q + T^q \sum_{n\le (T/\pi)^q} d_q(n)^2(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{nT}) \ll_q T^q \quad \forall\, q \in \mathbb{N}.$$

由 H¨older 不等式，我们进而得到对所有 $q > 0$ 都成立的这一界，这是 Montgomery 和 Vaughan 关于特征和的矩界 [22] 的一个部分类比（其中 x 固定，而不是对 x 取内层最大值）。我们指出，尽管这里对 $T/2 \le t \le T$ 的限制可以大幅放宽，但若在所有满足 q 且 x 很大的 $0 \le t \le T$ 上积分，就无法得到这样的界，因为较小的 t 会带来很大的贡献（这类似于主特征 χ_0 的贡献；计算特征和的高阶矩时应排除主特征）。

现在，若 $x \le cT$ 对某个合适的小常数 $c > 0$ 成立，那么 Montgomery 和 Vaughan 均值定理也立即推出 $\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} |\sum_{n\le x} n^{it}|^2 dt = \lfloor x \rfloor + O(x^2/T) \ll x$（经过更多推导，还可以证明这对所有 $1 \le x \le T$ 都成立）。因此，与特征和的情形类似，Cauchy–Schwarz 不等式推出，对所有 $1 \le x \le T$ 和 $0 \le q \le 1$，都有 $\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} |\sum_{n\le x} n^{it}|^{2q} dt \ll_q x^2/T^{2-q}$。特别地，若 $x \asymp T$，那么这些矩为 $\asymp x^q$；但当 $x = o(T)$ 时，低阶矩的真实量级仍不清楚。另请参阅 La Bret`eche、Munsch 和 Tenenbaum [3] 的第 1.5 节，其中讨论了矩的下界。

研究 $\sum_{n\le x} \chi(n)$ 或 $\sum_{n\le x} n^{it}$ 行为的一种方法，是考虑一个适当的随机模型。令 $(f(p))_{p\text{ 素数}}$ 构成一列独立随机变量，每个变量都服从复单位圆上的均匀分布。然后，我们定义一个 Steinhaus 随机乘法函数 $f(n)$，令 $f(n) := \prod_{p^a \| n} f(p)^a$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。Steinhaus 随机乘法函数已被广泛用于模拟随机选取的狄利克雷特征 $\chi(n)$ 或“连续特征” n^{it}：例如，参见 Granville 和 Soundararajan [7] 以及 Lamzouri [15]，的论文。Helson [12] 根据与经典傅里叶分析中狄利克雷核的一阶矩的粗略类比，猜想应有 $\mathbb{E}|\sum_{n\le x} f(n)| = o(\sqrt{x})$，当 $x \to \infty$ 时成立。鉴于振荡数论和通常遵循平方根（而非大于平方根）抵消的一般观点，这一猜想颇令人意外，其他作者也提出了各种反猜想。相关讨论和参考文献见 [11] 的引言。然而，作者 [11] 最近证明了 Helson 猜想，事实上还证明了

$$\mathbb{E}|\sum_{n\le x} f(n)|^{2q} \asymp \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log x}}\right)^q \tag{1.1}$$

对于所有充分大的 x 和所有 $0 \le q \le 1$，均一致成立。这引出了一个问题：对于特征和ζ和，我们是否应当在某个范围内期待优于平方根抵消的结果——该范围的 x 是否远小于导子？还是说，随机乘法模型根本无法反映这些问题中的算术真相?

1.1. 结果陈述。我们的主要结果为特征和ζ和确立了（1.1）中上界部分的自然类比。

定理 1. 设 r 是一个大素数。则对任意 $1 \le x \le r$ 和任意$0 \le q \le 1$，我们有

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \ll \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log(10L)}}\right)^q,$$

其中 $L = L_r := \min\{x, r/x\}$。

定理2. 设 T 是一个较大的实数。则对任意 $1 \le x \le T$ 和任意$0 \le q \le 1$，我们有

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\le x} n^{it}|^{2q}dt \ll \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log(10L_T)}}\right)^q,$$

其中 $L_T := \min\{x, T/x\}$。

特别地，对于任意固定的 $0 < q < 1$ 和任意 $x = x(r)$，若 x 和 r/x 都随 r趋于无穷大，则我们有$\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \ll x^q/(\log\log(10L))^{q/2} = o(x^q)$。

我们将在下文第1.2节详细讨论证明。这里需要指出，特征和与ζ和的行为存在一种众所周知的“对称性”，例如，$\frac{1}{\sqrt{x}}|\sum_{n\le x}\chi(n)| \approx \sqrt{\frac{x}{r}}|\sum_{n\le r/x}\chi(n)|$（粗略地说）。参见 Granville 和 Soundararajan [7] 的第10节。这种对称性有时称为“傅里叶翻转”，它体现在相应 L函数的（近似）函数方程中，也体现在长和$\sum_{n\le x}\chi(n)\sum_{n\le x} n^{it}$ 具有非常规整的结构这一事实中，其中 x与导子同阶（即分别与 r 或 $|t|$同阶）。鉴于长度为 x 和 r/x的特征和之间，以及长度为 x 和$|t|/x$的ζ和之间存在这种对称性，定理1和定理2中出现的量 $\log\log(10L_r)$ 和 $\log\log(10L_T)$，是对（1.1）中 $\log\log x$ 节省因子的自然替代。

定理1和定理2中界的形式乍看之下可能有些奇怪，或许还可以改进。在大多数数论情形中，如果取得了某种节省，人们通常期望至少能节省一个对数的幂次。但事实上，似乎可以合理地猜想定理1和定理2是尖锐的（前提是定理1中 $x \le 0.99r$，比如说，这样我们就避开了周期性平凡地导致大量额外抵消的点[2]）。请注意，在（1.1）的概率情形中，我们已经得到了数量级结果，而不只是一个上界。

导致定理1和定理2的方法，或许能在 $x \le e^{\log^c r}$ 和 $x \le e^{\log^c T}$时（例如对某个较小的 $c > 0$）给出相匹配的下界，尽管

[2]对于非主特征 χ，如果 $0.99r < x \le r$，我们可以观察到 $\sum_{n\le x}\chi(n) = -\sum_{x<n\le r}\chi(n) = -\sum_{1\le n<r-x}\chi(r-n) = -\chi(-1)\sum_{1\le n<r-x}\chi(n)$，然后对这些和应用定理 1 即可。

作者尚未核查所有细节。（参见第1.2节中关于定理1和定理2证明的讨论。要以类似方式得到下界，就需要比较条件二阶矩和四阶矩，而不能仅仅使用 H¨older 不等式转而处理条件二阶矩；同时，证明中的参数 $\log P$ 应保持与 $\log x$ 同量级，以防条件四阶矩受到大于 P 的素数影响而发散。这似乎对应于诸如 $x \le e^{\log^c r}$ 和$x \le e^{\log^c T}$这样的条件。）通过“对称性”，当 x 分别接近 r和 T时，这也应当导出下界。对于一般的 x 和 $q < 1$，这些矩的现有最佳下界与我们的上界似乎相差若干个 $\log L$ 的幂（例如参见 La Bret`eche、Munsch 和 Tenenbaum [3]的第1.5节）；要证明定理1和定理2是尖锐的，仍是一个富有挑战性且颇有趣的开放问题。正如我们将在下文讨论推论2时所述，当 $x \approx \sqrt{r}$ （例如）时，定理1的相匹配下界将产生一些重要的推论。

定理 1 意味着，对于大多数特征 $\chi \bmod r$，我们有 $|\sum_{n\le x}\chi(n)| \ll \sqrt{x}\,(\log\log(10L))^{1/4}$。只要 L 足够大，这就“优于平方根抵消”。下面的推论是 Harper [11] 在随机乘法情形下推论2的特征和版本，它使这一观察更加精确。

推论1。设 r 是一个大素数。对于任意 $1 \le x \le r$ 和任意 $\lambda \ge 2$，以下结论一致成立：

$$\frac{1}{r-1}\#\{\chi \bmod r : |\sum_{n\le x}\chi(n)| \ge \lambda \frac{\sqrt{x}}{(\log\log(10L))^{1/4}}\} \ll \frac{\min\{\log\lambda, \sqrt{\log\log(10L)}\}}{\lambda^2},$$

其中 $L = \min\{x, r/x\}$。

推论1可由定理 1 推出，其中 q 根据 λ 适当选取。完整（简短）的论证见下文第4节。如有需要，也可以用定理2推出关于ζ和的类似推论。

考虑特征和 $\sum_{n\le x}\chi(n)$ 的诸多动机之一，是它们与狄利克雷θ函数 $\theta(s,\chi)$ 的联系。回想一下，每当 $\Re(s) > 0$ 时，我们定义

$$\theta(s,\chi) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-\pi n^2 s/r} & \text{if } \chi \text{ is even,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-\pi n^2 s/r} & \text{if } \chi \text{ is odd.} \end{cases}$$

（这些定义与有时给出的定义相差一个因子 2，但这对我们这里的目的并不重要。）θ 函数出现在自守形式理论中，也是经典证明 Dirichlet L-函数函数方程的重要工具。参见 Montgomery 和 Vaughan [23] 第 10.1 章。

近几年，一系列论文研究了 $\theta(1,\chi)$ 的矩，其中 χ 遍历偶（非主）特征或奇特征。例如，对于每个固定的 $q \in \mathbb{N}$，Munsch 和 Shparlinski [25] 证明了 $2q$ 阶矩的猜想最优下界，即

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\substack{\chi \bmod r,\\ \chi \text{ even},\\ \chi\neq\chi_0}} |\theta(1,\chi)|^{2q} \gg_q r^{q/2}\log^{(q-1)^2} r, \qquad \frac{1}{r-1}\sum_{\substack{\chi \bmod r,\\ \chi \text{ odd}}} |\theta(1,\chi)|^{2q} \gg_q r^{3q/2}\log^{(q-1)^2} r.$$

Munsch [24] 在广义黎曼猜想成立的假设下，为狄利克雷 L函数证明了几乎最优的上界（与预期结果相比多损失一个 $\log^{\epsilon} r$ 因子），同样是在 $q \in \mathbb{N}$ 时。这类估计的一个应用是推导 $\theta(1,\chi)$ 的非零性结果，这也是 Louboutin [17]猜想研究的主题。因此，Louboutin [16],以及 Louboutin 和 Munsch [18], 通过计算并比较二阶矩与四阶矩，证明了对于模素数 r的奇特征，有 $\theta(1,\chi) \neq 0$，且此类特征有 $\gg r/\log r$ 个；对于偶特征，有 $\theta(1,\chi) \neq 0$，且此类特征有 $\gg r/\log r$ 个。最近，La Bret`eche、Munsch 和 Tenenbaum [3] 将来自 G´al 和的权重引入这类论证，并证明对于模素数 r的偶特征，有 $\theta(1,\chi) \neq 0$，且此类特征有 $\gg r/\log^{\delta+o(1)} r$ 个，其中常数 $\delta \approx 0.086$是显式给出的。另请参阅 Bengoechea [1]以及 Guo 和 Peng [8], 的工作，他们运用伽罗瓦理论技巧推导出，对于几乎所有 χ，都有 $\theta(1,\chi) \neq 0$；但模数 r仅限于素数的某些稀疏子集。

利用我们的方法，可以证明:

推论2。设 r 是一个大素数。对任意 $0 \le q \le 1$，一致地有

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\substack{\chi \bmod r,\\ \chi \text{ even}}} |\theta(1,\chi)|^{2q} \ll \left(\frac{\sqrt{r}}{1+(1-q)\sqrt{\log\log r}}\right)^q,$$

and

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\substack{\chi \bmod r,\\ \chi \text{ odd}}} |\theta(1,\chi)|^{2q} \ll \left(\frac{r^{3/2}}{1+(1-q)\sqrt{\log\log r}}\right)^q.$$

由于对偶特征有 $\theta(1,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-\pi n^2/r} \approx \sum_{n\le\sqrt{r}}\chi(n)$，而对奇特征有$\theta(1,\chi) \approx \sum_{n\le\sqrt{r}} n\chi(n) \approx \sqrt{r}\sum_{n\le\sqrt{r}}\chi(n)$，因此可以看出，推论2应当可以从定理 1 相当直接地推出。完整证明见下文第4节，该证明只需用到分部求和。

与定理1和定理2类似，我们有理由猜想，推论2中的矩应当也有相匹配的下界。若能对任意固定的 $0 < q < 1$ 证明这一点，那么（由于低阶矩随指数 q 成比例增长，而高阶矩对 $\log r$ 的指数呈二次依赖），再借助 Hölder 不等式进行另一种标准的 Paley–Zygmund型论证，对比

两个低阶矩的上界和下界，就能立即推出，对于正比例的 χ， $\theta(1,\chi) \neq 0$。

我们也对定理1和定理2的变体非常感兴趣，这些变体中的求和对象更加特殊。对于这类和的二阶矩，其均值估计恰好完全相同 $\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r} |\sum_{n\leq x} a_n\chi(n)|^2 = \lfloor x\rfloor$ (其中 $x < r$) 和 $\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\leq x} a_n n^{it}|^2 dt = \lfloor x\rfloor + O(\frac{x^2}{T})$，适用于任意绝对值为 1 的复系数 a_n。在这种一般性下，我们无法寻求定理1和定理2的类似结果，因为对于一般的模为1的系数序列 a_n，其各阶矩的量级为 x^q（例如，对于独立均匀随机 a_n，这可由 Khintchine 不等式等标准矩结果推出）。但是，如果我们以不会过多破坏乘法结构的方式调整这些和，事实证明，定理1和定理2所示的优于平方根的界仍然成立。因此，我们有：

定理3。设 r 为一个大素数。则对于任意 $1 \leq x \leq r$、任意 $0 \leq q \leq 1$，以及任意在素数上的绝对值为1且在素数幂上的绝对值至多为1的乘性函数 $h(n)$，一致地有

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r} |\sum_{n\leq x} h(n)\chi(n)|^{2q} \ll \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log(10L)}}\right)^q,$$

其中 $L = L_r := \min\{x, r/x\}$。

$h(n)$的大小条件在这里可以稍作调整，但当前的表述已经允许包含诸如M¨obius函数 $\mu(n)$这样的重要例子。关键在于， $h(n)$的乘法结构使我们能够调整定理1的证明，从而证明$\sum_{n\leq x} h(n)\chi(n)$的矩表现得类似于扭曲随机乘法和$\sum_{n\leq x} h(n)f(n)$的矩。而且，由于在素数上， $h(p)f(p)$在复单位圆上再次相互独立且均匀分布（这里使用了 $h(p)$的模为1性质），因此它们与未扭曲的矩本质上相同。更多细节请参见第4节。对于$\sum_{n\leq x} h(n)n^{it}$，也可以证明类似的结果。

与和式 $\sum_{n\leq x}\chi(n)$ 和 $\sum_{n\leq x} n^{it}$ 不同，在存在一般乘性扭曲 $h(n)$ 时，并不存在对称性或“傅里叶翻转”。因此，尽管定理1和定理2中出现 L_r, L_T 很自然，而且人们会猜想这些界是尖锐的，但对于许多 $h(n)$，定理3很可能可以加强，将 $\log\log(10L)$ 替换为 $\log\log(10x)$。同样，对于 $\sum_{n\leq x} h(n)\chi(n)$ 和 $\sum_{n\leq x} h(n)n^{it}$ 而言，将范围限制为 $x \leq r$ 或 $x \leq T$ 似乎不再自然。事实上，若取 $h(n)$ 为 Steinhaus 随机乘法函数，则 (1.1) 表明，对于任意大的 x

以及大素数 r，我们有

$$\mathbb{E}\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}h(n)\chi(n)|^{2q}=\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}\mathbb{E}|\sum_{n\le x}h(n)\chi(n)|^{2q}\asymp\left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log x}}\right)^{q},$$

因为对于任意给定的狄利克雷特征 χ， $h(n)\chi(n)$ 也将是一个 Steinhaus 随机乘法函数[3] 。因此，对于 $h(n)$ 的大多数实现，我们必然有更强的界 $\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}h(n)\chi(n)|^{2q}\ll(\sqrt[x]{1+(1-q)\log\log x})^{q}$。

特别是，我们可以回到莫比乌斯函数的情形。人们往往会从各种意义上认为 $\mu(n)$ 看起来“随机”，而 Gorodet- sky 在最近的一篇论文中 [6] 从特征和的角度探讨了这一点。基于函数域的考量，他最终猜想，对于所有自然数指数 $q<\log r$，矩 $\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)|^{2q}$ 应渐近等于相应的随机乘性矩，其中 x 和 r 趋于无穷大。同样，如今似乎可以合理地猜想，对于所有 $0\le q\le 1$ 以及任意固定的 $A>0$, 我们都有

$$\frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r}|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)|^{2q}\ll(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log x}})^{q}\quad\forall\, x\le r^{A},$$

and

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\sum_{n\le x}\mu(n)n^{it}|^{2q}dt\ll(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log x}})^{q}\quad\forall\, x\le T^{A}.\tag{1.2}$$

这个猜想似乎值得进一步研究，因为若它成立，将带来重要的算术后果。利用 Perron公式的标准论证可得

$$\left|\sum_{x<n\le x+y}\mu(n)\right|\approx\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-i(x/y)}^{i(x/y)}(\sum_{n\le 2x}\frac{\mu(n)}{n^{s}})\frac{x^{s}((1+y/x)^{s}-1)}{s}ds\right|\lesssim\frac{y}{x}\int_{-x/y}^{x/y}|\sum_{n\le 2x}\frac{\mu(n)}{n^{it}}|dt,$$

因此，若（1.2）成立，就能给出一个界 $|\sum_{x<n\le x+y}\mu(n)|\lesssim\sqrt{x}(\log\log x)^{1/4}$，例如当 $y\le x^{1-\epsilon}$ 时成立。由此我们便可推得，在所有长度为 $y\gg\sqrt{x}(\log\log x)^{1/4}$ 的短区间内，莫比乌斯函数的求和存在抵消。在这类问题中，突破平方根区间障碍，甚至达到这一界限，都是尚未解决的重要问题。例如，参见 Matom¨aki 和 Radziwi l l [19]，近期出色的研究；其中（以及其他许多结果）证明，对于一个较大的常数 C, 在长度为 $C\sqrt{x}$ 的区间内，存在取正值和负值的莫比乌斯函数（严格来说，是与之密切相关的刘维尔函数）。

[3]严格来说， $h(n)\chi(n)$将是限制在不被 r整除的数上的 Steinhaus 随机乘法函数，因此我们将有 $\mathbb{E}|\sum_{n\le x}h(n)\chi(n)|^{2q}=\mathbb{E}|\sum_{n\le x}h(n)-h(r)\sum_{n\le x/r}h(n)|^{2q}$。不过，很容易验证它也满足界（1.1）；例如，只需对 Harper [11] 的证明稍作修改（只需改变对应于素数 r 的一个欧拉乘积因子），或者直接使用闵可夫斯基不等式（当 $1/2\le q\le 1$时）和 H¨older不等式。

1.2. 证明思路。第 2 节和第 3 节将用于证明定理 1。这里我们试图解释论证中的主要步骤，并说明其动机。

全文中，r 将是定理 1 中所述的一个大素数模数，我们用 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}$ 表示对模 r 的所有狄利克雷特征取平均。因此，若 $W(\chi)$ 是任意函数，则 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} W := \frac{1}{r-1}\sum_{\chi \bmod r} W(\chi)$。采用这种记号既是为了简化表达，也为了强调本文论证与随机乘性函数情形下论证之间的联系。

作者论文 [11]的引言中详细概述了估计式 (1.1) 对于 $\mathbb{E}|\sum_{n\le x} f(n)|^{2q}$ 的证明。该证明的第一阶段包括证明

$$\mathbb{E}|\sum_{n\le x} f(n)|^{2q} \approx x^q \mathbb{E}\left(\frac{1}{\log x}\int_{-1/2}^{1/2} |F(1/2+it)|^2 dt\right)^q,$$

其中 $F(s) := \prod_{p\le x}(1-f(p)p^{-s})^{-1}$ 是一个合适的随机欧拉乘积。第二阶段是利用临界乘性混沌概率理论中的思想，证明 $\mathbb{E}(\frac{1}{\log x}\int_{-1/2}^{1/2}|F(1/2+it)|^2 dt)^q \approx (\frac{1+1-q^{-1}}{()\sqrt{\log\log x}})^q$。为证明定理 1，我们将重新改造随机乘性函数证明的第一阶段，大致证明

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} \ll x^q \mathbb{E}\left(\frac{1}{\log P}\int_{-1/2}^{1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt\right)^q, \tag{1.3}$$

其中 $F_{\text{随机}P}(s) := \prod_{p\le P}(1-f(p)p^{-s})^{-1}$，这里的参数 $P = P(r,x)$ 取适当值。注意，左边是我们的特征平均，但我们将证明它可以用右边真正随机的量的期望来界定。因此，我们不需要重新处理随机乘性函数证明的第二阶段，因为一旦建立了类似于 (1.3) 的界，就可以直接应用这个结论。

在 [11], 中，为了建立 $\mathbb{E}|\sum_{n\le x} f(n)|^{2q}$ 与随机欧拉乘积之间的联系，需要先对所有“小”素数 p 处的值 $f(p)$ 进行条件化（即固定这些值），然后应用 H¨older 不等式与条件二阶矩进行比较。我们现在回顾这一论证；为简单起见，只讨论 $\sum_{n\le x, P(n)>\sqrt{x}} f(n)$，即对最大素因子 $P(n)$ 大于 $\sqrt{x}$ 的那些数求和所得的子和。

根据乘法性，我们可以写为 $\sum_{n\le x,P(n)>\sqrt{x}} f(n) = \sum_{\sqrt{x}<p\le x} f(p)\sum_{m\le x/p} f(m)$，并注意到在内层求和中有 $m \le x/p < \sqrt{x}$，因此这些值完全由 $\tilde{}(f(p))_{p\le\sqrt{x}}$ 决定。于是，若令 $\mathbb{E}$ 表示在给定 $(f(p))_{p\le\sqrt{x}}$ 的取值条件下的条件期望（即将这些值视为固定值，并令 $(f(p))_{p>\sqrt{x}}$ 保持随机时的期望，因此任意量的条件期望都是.....的函数）

值 $(f(p))_{p\leq\sqrt{x}}$，我们得到

$$\tilde{\mathbb{E}}\left|\sum_{n\leq x,P(n)>\sqrt{x}}f(n)\right|^2=\sum_{\sqrt{x}<p,q\leq x}\tilde{\mathbb{E}}\left(f(p)(\sum_{m\leq x/p}f(m))\overline{f(q)}(\sum_{m\leq x/q}\overline{f(m)})\right)=\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left|\sum_{m\leq x/p}f(m)\right|^2,$$

因为 $(f(p))_{p>\sqrt{x}}$ 仍然相互独立且均值为零。但根据条件期望的塔式性质（在本例中，这实际上就是富比尼定理，将多重“积分” $\mathbb{E}$ 拆分为分别对应于 $(f(p))_{p\leq\sqrt{x}}$ 和 $(f(p))_{p>\sqrt{x}}$ 的积分），我们可以写成 $\mathbb{E}|\sum_{n\leq x,\ P(n)>\sqrt{x}}f(n)|^{2q}=\mathbb{E}\tilde{\mathbb{E}}|\sum_{n\leq x,\ P(n)>\sqrt{x}}f(n)|^{2q}$。因此，对条件期望 $\mathbb{E}$ 应用 H¨older 不等式，可得

$$\mathbb{E}\left|\sum_{n\leq x,P(n)>\sqrt{x}}f(n)\right|^{2q}\leq\mathbb{E}\left(\tilde{\mathbb{E}}\left|\sum_{n\leq x,P(n)>\sqrt{x}}f(n)\right|^2\right)^q=\mathbb{E}\left(\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left|\sum_{m\leq x/p}f(m)\right|^2\right)^q.$$

到此为止，我们可以进行一些平滑处理，并使用适当形式的帕塞瓦尔恒等式，将右侧与类似于 $\mathbb{E}(\frac{1}{\log x}\int_{-1/2}^{1/2}|F(1/2+it)|^2dt)^q$ 的欧拉乘积平均联系起来。因子 $\frac{1}{\log x}$ 反映了区间 $(\sqrt{x},x]$ 上素数的密度。

为了证明定理 1，我们必须找到上述过程的一个变体，使其能够适用于特征平均，并最终得到 (1.3)。这之所以困难，有两个相关原因：对特征 $\chi \bmod r$ 取平均时，不同素数 p 处的值 $\chi(p)$ 并非真正彼此独立；而且，由于特征只有 $r-1$ 个，我们无法指望 $\chi(n)$ 的行为在随机侧概率远小于 $1/(r-1)$ 的事件上，真正类似于随机模型 $f(n)$。特别是，如果我们尝试对过多素数 p 处的值 $\chi(p)$ 进行条件化（固定），那么通常满足所指定值 $\chi(p)$ 的特征要么不存在，要么恰好只有一个；因此，我们无法指望对这类配置进行条件化后，所得结果能与随机乘法情形中的计算相匹配。

为了使特征平均与涉及随机乘性函数的期望相匹配，我们必须将讨论限制在各种 $\chi(p)$ 中适当次数的多项式表达式上。事实上，若 $p_1,...,p_k,p_{k+1},...,p_l$ 是任意（不一定互不相同的）素数，且 $\prod_{j=1}^k p_j,\prod_{j=k+1}^l p_j<r$，则有一个严格等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{j=1}^k\chi(p_j)\prod_{j=k+1}^l\overline{\chi(p_j)}&=\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\chi(\prod_{j=1}^k p_j)\overline{\chi(\prod_{j=k+1}^l p_j)}=\mathbf{1}_{\prod_{j=1}^k p_j\equiv\prod_{j=k+1}^l p_j \bmod r}\\&=\mathbf{1}_{\prod_{j=1}^k p_j=\prod_{j=k+1}^l p_j}=\mathbb{E}\prod_{j=1}^k f(p_j)\prod_{j=k+1}^l\overline{f(p_j)}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

这里我们用到了狄利克雷特征的正交性；对 $\prod_{j=1}^{k} p_j$ 和 $\prod_{j=k+1}^{l} p_j$ 的大小限制（这对于将模 r 的同余式关键地替换为等式至关重要）；最后还用到了 Steinhaus 随机乘法函数的正交性性质 $\mathbb{E} f(n)\overline{f(m)} = \mathbf{1}_{n=m}$。

为了利用 (1.4)，关键的观察是，在随机乘性一侧，为了完成整个论证，我们其实并不需要对所有 $f(p)_{p\le\sqrt{x}}$ 的精确取值进行条件化。由于最终我们只需将 $\sum_{\sqrt{x}<p\le x} |\sum_{m\le x/p} f(m)|^2$ 控制在类似 $^1\log x \int_{-1/2}^{1/2} |F(1/2+it)|^2 dt$ 的量级，如果我们对 $f(p)$ 的某些信息进行条件化，只要这些信息足以大致确定 $\int_{-1/2}^{1/2} |F(1/2+it)|^2 dt$ 的值，证明也可以非常相似地进行。对于每个 t，$|F(1/2+it)|$ 的值都是形如 $\Re \sum_{p\le\sqrt{x}} {}^{f(p)}\overline{p^{1/2+it}}$ 的素数和的指数。此外，当 t 的变化幅度小于 $1/\log x$（比如说）时，这类素数和通常变化不大，因为当 t 的变化幅度远小于 $1/\log p$ 时，$p^{it} = e^{it\log p}$ 的变化也不大。因此，如果我们在上述描述中用较粗条件化替换 $\mathbb{E}$，只对某个 t 取值网格上、间距约为 $1/\log x$ 的 $\Re \sum_{p\le\sqrt{x}} {}^{f(p)}\overline{p^{1/2+it}}$ 的取值进行条件化（事实上，我们只需以 $O(1)$ 的精度知道 $\Re \sum_{p\le\sqrt{x}} {}^{f(p)}\overline{p^{1/2+it}}$），这应当足以确定 q 次幂内部的相关信息，使我们最终仍能得到一个大致形如 $\mathbb{E}(\ {}^1\log x \int_{-1/2}^{1/2} |F(1/2+it)|^2 dt)^q$ 的整体上界。

现在转到特征和，类似地，我们可以通过写成$\mathbb{E}|\sum_{n\le x, P(n)>\sqrt{x}} f(n)|^{2\tilde{q}}$，将其拆分为$\mathbb{E}|\sum_{n\le x, P(n)>\sqrt{x}} f(n)|^{2q} = \mathbb{E}\mathbb{E}|\sum_{n\le x, P(n)>\sqrt{x}} f(n)|^{2q}$，大致上相当于

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q} = \sum_{\mathbf{j}} \mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathbf{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q},$$

其中 $G_{\mathbf{j}}(\chi)$是满足$\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}}(\chi) \equiv 1$ 的函数，它们近似选出所有满足以下条件的特征：对于这些特征，类似 $\Re \sum_{p\le\sqrt{x}} {}^{\chi(p)}\overline{p^{1/2+it}}$ 的和具有给定的一组取值。我们可以像之前处理$\tilde{\mathbb{E}}|\sum_{n\le x, P(n)>\sqrt{x}} f(n)|^{2q}$那样，对这里的每个内层平均值 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathbf{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q}$ 应用 H¨older 不等式，最终需要处理类似 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathbf{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2$的量。此外，如果这些函数 $G_{\mathbf{j}}$ 足够良好，我们或许可以用 $\chi(p)$中的多项式来逼近 $G_{\mathbf{j}}(\chi)$，此时便可能可以调用 (1.4)，将 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathbf{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2$ 替换为 $\mathbb{E} G_{\mathbf{j}}(f)|\sum_{n\le x} f(n)|^2$。这相当准确地概述了定理 1 证明的整体思路，因此，一项关键工具将是一组良好的函数，它们构成光滑单位分解；随后，我们可以通过取适当的乘积（对应于网中的所有不同 t 值）最终构造出乘子 $G_{\mathbf{j}}$。技术性表述见第 2.1 节中的逼近结果 1。

但有一个重要问题必须解决。请注意，前一段中没有出现导子r，而且我们还看不出定理 1 中的量 $\log\log(10L_r)$ 如何会取代 $\log\log x$ 出现。关键在于，在 (1.4) 中，我们

必须确保展开所有项后，素数的乘积小于 r。关于我们将用来比较 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathfrak{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2$ 与 $\mathbb{E}G_{\mathfrak{j}}(f)|\sum_{n\le x}f(n)|^2$ 的精确表述，参见第 2.2 节中的命题 1 和命题 2。这里至关重要的是，所涉及的素数和 $\Re\sum_{p\le P}\frac{\chi_{(p)}}{p^{1/2+it}}$ 的求和范围延伸至 P，其中某个 P 相较于 r/x 足够小。事实上，对于长度为 P 的素数和，我们应当使用一个由 t 个值组成的网格，间距约为 $1/\log P$，因此会有大约 $\log P$ 个不同的和。对于其中每一个，在应用泰勒定理展开其对$G_{\mathfrak{j}}(\chi)$ 的贡献时，必须展开到 $\log^{O(1)} P$ 次，才能达到适当的精度。由于平方 $|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2$ 也会产生项 $\chi(n)\,\chi(m)$，其中 n、m 的大小都不超过 x，因此必须有 $xP^{\log^{O(1)}P} < r$，才能使特征和与随机乘性函数的表达式相匹配。

特别是，除非 x 相对于 r 足够小，否则我们无法在此使用 $P=\sqrt{x}$。P 可取的最大值大致是 $e^{\log^{c}(r/x)}$，其中 c 是适当的常数。由于我们还希望 $P<x$（将不涉及 $\sum_{n\le x}\chi(n)$ 的素数 $>x$ 求和纳入条件化并无意义），一个合理的选择最终是 $P\approx\exp\{\log^{1/6}L_r\}$。幸运的是，在求上界时（但求下界时不行），我们可以自由选择“条件化”中涉及的素数范围。（这一观察实际上也能简化纯随机情形 [11] 中的上界论证。与其像那里那样，根据最大素因子 $P(n)$ 的大小，将 $\sum_{n\le x}f(n)$ 拆分成若干子和，然后对所有稍小的素数进行条件化，我们不妨直接对完整的和，以某个适当选定的点之前的所有素数进行条件化。）随着 P 变小，我们最终利用乘法混沌结果所能获得的节省幅度（$\sqrt[1+\frac{1}{q}]{\log\log P}$）^{q}也会减小；不过，由于 $\log\log P$ 变化极其缓慢，我们可以相当大幅度地调整 P，而最终界限仍不会有明显变化。特别要注意，尽管我们的选择 $P\approx\exp\{\log^{1/6}L_r\}$（必然）远小于 $L_r^{\frac{1}{1}}$，但仍有 $\log\log P\asymp\log\log L_r$，因此在定理 1 中，我们得到了所需因子 $\sqrt[1+\frac{1}{q}]{\log\log(10L)}$。

在第 3.1–3.3 节中，我们沿着上述思路实施论证，成功地将所有形如 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} G_{\mathfrak{j}}(\chi)|\sum_{n\le x}\chi(n)|^2$ 的项替换为 $\mathbb{E}G_{\mathfrak{j}}(f)|\sum_{n\le x}f(n)|^2$，从而转入纯随机情形。然而，由于这是在较粗条件化的框架下完成的，我们还需进一步确认，所得的随机乘性函数表达式确实仍可用类似 $\mathbb{E}(\frac{1}{\log P}\int_{-1/2}^{1/2}|F_{\mathrm{rand}P}(1/2+it)|^2dt)^q$ 的量来界定。起初，可以采用类似的平滑和帕塞瓦尔过程，如最初在 [11]，（见第 2.3 节，其中我们回顾了狄利克雷级数的一个帕塞瓦尔恒等式版本）以及下文第 3.4 节所做的那样。这使我们转向随机欧拉乘积，但在 q 次幂外侧出现的是对 $\mathfrak{j}$ 的（加权）求和，而非“真正的”期望 $\mathbb{E}$；此外，内侧还带有一些额外的平均

（权重为 $G_{\mathfrak{j}}(f)$），位于 q 次幂内侧。由于每一项 $G_{\mathfrak{j}}(f)$ 只包含关于 $\Re \sum_{p \le P} \frac{f_{(p)}}{p^{1/2+it}}$ 在一组网格点 t处的信息，而非关于所有 $-1/2 \le t \le 1/2$或所有 $t \in \mathbb{R}$的信息，我们希望将研究限制在这些 t处的欧拉乘积上。不过，只要这些 t 网格点彼此足够接近（间距略小于 $1/\log P$），就可以通过简单的均方论证实现这一点。

最后，我们必须验证，使用 $G_{\mathfrak{j}}(f)$ 加权，能够为所有和 $\Re \sum_{p \le P} \frac{f_{(p)}}{p^{1/2+it}}$ 提供足够的信息；这样，即使在 q 次幂内部额外进行这一步平均，我们最终得到的仍大致是 $\mathbb{E}(\frac{1}{\log P} \int_{-1/2}^{1/2} |F_{\mathrm{rand}P}(1/2+it)|^2 dt)^q$（或者确切地说，是将积分替换为对离散点求和后得到的形式）。只要在构造 $G_{\mathfrak{j}}(\cdot)$ 背后的光滑函数时，按照 P 正确选取参数（这也正是上述讨论中必须将泰勒展开做到 $\log^{O(1)} P$ 次的根本原因），那么事实证明，对 $G_{\mathfrak{j}}(f)$ 取平均，确实会将所有和 $\Re \sum_{p \le P} \frac{f_{(p)}}{p^{1/2+it}}$ 限制在依赖于 $\mathfrak{j}$ 的预期区间内。因此，对 $\mathfrak{j}$ 求加权外和，实质上起到了与真正的期望相同的作用，我们确实得到了（离散化版本的）$\mathbb{E}(\frac{1}{\log P} \int_{-1/2}^{1/2} |F_{\mathrm{rand}P}(1/2+it)|^2 dt)^q$。这一论证在第 3.5–3.6 节中完成，所用的是逼近结果 1 中函数的性质，以及第 2.4 节介绍的乘性混沌结果。

2. Preparations

2.1. 光滑单位分解。如引言中所述，我们将使用的一项重要工具，是一组性质相当良好的函数，可用于近似检测涉及 $\chi(p)$ 的各种和的取值，从而在主要证明中模拟条件化过程。这类构造在现代分析和数论中相当标准，证明下述结果并不困难。

逼近结果 1. 设 $N \in \mathbb{N}$ 很大，$\delta > 0$ 很小。存在函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（依赖于 δ）以及 $g_{N+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（依赖于 δ 和 N），使得若对所有整数 $|j| \le N$ 定义 $g_j(x) = g(x-j)$，则有以下性质：

(i) $\sum_{|j| \le N} g_j(x) + g_{N+1}(x) = 1$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立；(ii) $g(x) \ge 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立，并且当 $|x| > 1$时，$g(x) \le \delta$ 成立；(iii) $g_{N+1}(x) \ge 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立，并且当 $|x| \le N$时，$g_{N+1}(x) \le \delta$ 成立；(iv) 对所有 $l \in \mathbb{N}$ 和所有 $x \in \mathbb{R}$，我们有导数估计 $|\frac{d^l}{dx^l} g(x)| \le \pi^{1}{}_{(l+1)}(\frac{2\pi}{\delta})^{l+1}$。

逼近结果 1 的证明。我们的构造是 Harper 的逼近结果 1 的证明的一个小变体 [9]（其中有 $R = 0$ ）。因此，我们只概述主要步骤。

令 $b(x)$ 为一个 Beurling–Selberg 函数，它是示性函数 $\mathbf{1}_{|x|\le 1/2}$ 的上界函数，且其傅里叶变换的支集包含于 $[-1/\delta, 1/\delta]$。关于这类上界函数的背景知识，参见 Vaaler 的论文 [26] 。因此，对所有 $x \in \mathbb{R}$，我们有 $b(x) \ge \mathbf{1}_{|x|\le 1/2}$；并且 $\int_{-\infty}^{\infty} b(x)dx = 1+\delta$；以及对所有 $x \in \mathbb{R}$，有 $b(x) = \int_{-1/\delta}^{1/\delta} \widehat{b}(t)e^{2\pi i x t}dt$，其中 $|\widehat{b}(t)| = |\int b(x)e^{-2\pi i x t}dx| \le 1+\delta$。

我们将 $g(x)$ 定义为 b 的卷积，即

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|u|\le 1/2}\frac{b(x-u)}{1+\delta}du = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|x-u|\le 1/2}\frac{b(u)}{1+\delta}du.$$

由于 $b(x)$ 非负，因此显然 $g(x)$ 非负。关于 (ii) 和 (iv) 中 $g(x)$ 的其他断言，证明与 Harper [9] 中完全相同。

现在根据 g 和 g_j 的定义，和 $\sum_{|j|\le N} g_j(x)$ 为

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{|j|\le N} \mathbf{1}_{|x-j-u|\le 1/2}\frac{b(u)}{1+\delta}du = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|x-u|\le N+1/2}\frac{b(u)}{1+\delta}du$$

对所有实数 x 都成立。因此，我们总有 $\sum_{|j|\le N} g_j(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(u)}{1+\delta}du = 1$，此外，$1 - \sum_{|j|\le N} g_j(x)$ 等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|x-u|>N+1/2}\frac{b(u)}{1+\delta}du = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|x-u|>N+1/2}\frac{b(u)-\mathbf{1}_{|u|\le 1/2}}{1+\delta}du + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{|x-u|>N+1/2}\frac{\mathbf{1}_{|u|\le 1/2}}{1+\delta}du.$$

当 $|x| \le N$ 时，这里的第二个积分为零，因此

$$1 - \sum_{|j|\le N} g_j(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|b(u)-\mathbf{1}_{|u|\le 1/2}|}{1+\delta}du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(u)-\mathbf{1}_{|u|\le 1/2}}{1+\delta}du = \frac{\delta}{1+\delta} \le \delta.$$

因此，只需对所有 $x \in \mathbb{R}$ 令 $g_{N+1}(x) := 1 - \sum_{|j|\le N} g_j(x)$，逼近结果 1 中的第一和第三个结论便可得出。□

2.2. 均值估计。引入逼近结果 1 中的逼近函数后，我们的论证需要计算涉及这些函数的各种特征平均值。为此，一个基本工具是下面这个界，它是对适当长度的特征和的一种相当标准的偶数阶矩估计。

引理 1（偶数阶矩估计）。设 $x \ge 1$，且 $(c(n))_{n\le x}$ 为任意复数。设 $\mathcal{P}$ 为任意有限素数集，$\mathcal{Q}$ 为由 $\mathcal{P}$ 的某些元素及 $\mathcal{P}$ 中元素的平方组成的任意（非空）集合，并记 $U := \max\{q \in \mathcal{Q}\}$。最后，令 $Q(\chi) := \sum_{q\in\mathcal{Q}} a(q)\chi(q)\sqrt{q}$，其中 $a(q)$ 为任意复数。

那么，对于满足 $xU^k < r$ 的任意自然数 k，我们有

$$\mathbb{E}^{char}\left|\sum_{n\le x} c(n)\chi(n)\right|^2 |Q(\chi)|^{2k} \ll \left(\sum_{n\le x} \tilde{d}(n)|c(n)|^2\right)\cdot (k!)\left(2\sum_{q\in\mathcal{Q}} \frac{v_q|a(q)|^2}{q}\right)^k,$$

其中 $\tilde{d}(n) := \sum_{d|n} \mathbf{1}_{p|d\Rightarrow p\in\mathcal{P}}$，且 v_q 在 q 为素数时取 1，在 q 为素数的平方时取 6。

引理 1 的证明。这是特征和版本的 Harper 引理 2；Harper 的结果研究的是 t-平均 $\sum_{n\le x} c(n)n^{-it}$ 和 $\sum_{q\in\mathcal{Q}} \frac{a\ (q)}{\overline{q^{1/2+it}}}$。证明方法与该结果相同（事实上稍微简单一些，因为对于狄利克雷特征，正交性是精确的，而非近似的）。□

利用泰勒展开和引理 1，我们可以推出以下关键命题。该命题保证（只要我们充分控制各个参数的大小），涉及函数 g_j 的特征平均会与涉及随机乘性函数的相应平均表现相同。

命题 1（特征表现得像随机模型）。设函数 g_j 及其相关参数 N、δ 如逼近结果 1 中所述。假设 $x \ge 1$，并令 $(c(n))_{n\le x}$ 为绝对值为 ≤ 1 的任意复数。此外，设 P 足够大，并令 $Y \in \mathbb{N}$ 满足 $xP^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} < r$。令 $f(n)$ 表示一个 Steinhaus 随机乘法函数。

那么，对于任意索引 $-N \le j(1)\ j(2) \dots, j(Y) \le N+1$，以及任意由绝对值为 ≤ 1 的复数组成的序列 $(a_1(p))_{p\le P}$、$(a_1(p^2))_{p\le P}$、…、$(a_Y(p))_{p\le P}$、$(a_Y(p^2))_{p\le P}$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{char}\prod_{i=1}^{Y} g_{j(i)}\Big(\Re\Big(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)\chi(p)}{\sqrt{p}} + \frac{a_i(p^2)\chi(p^2)}{p}\Big)\Big)\left|\sum_{n\le x} c(n)\chi(n)\right|^2\\ =\ &\mathbb{E}\prod_{i=1}^{Y} g_{j(i)}\Big(\Re\Big(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)f(p)}{\sqrt{p}} + \frac{a_i(p^2)f(p^2)}{p}\Big)\Big)\left|\sum_{n\le x} c(n)f(n)\right|^2 + O\left(\frac{x}{(N\log P)^{Y(1/\delta)^2}}\right).\end{aligned}$$

命题 1 的证明。利用逼近结果 1 中的性质 (iv)，对于任意阈值 $2S \in 2\mathbb{N}$，我们可以写成 $g_j(x) = \tilde{g}_j(x) + r_j(x)$，其中 $\tilde{g}_j(\cdot)$ 是次数为 $2S-1$ 的多项式（即 $g_j(x)$ 在零点处的 $2S-1$ 阶泰勒多项式），并且 $|r_j(x)| \le \frac{|x|^{2S}}{(2S)!}\sup_{|y|\le|x|}|\frac{d^{2S}}{dy^{2S}}g_j(y)| \ll \frac{N|2\pi x/\delta|^{2S}}{\delta S\ 2S}$ $()!$。（注意，此处的因子 N 是为了考虑 $g_j(y) = g_{N+1}(y) = 1 - \sum_{|i|\le N} g_i(y)$ 的情况。）首先，我们考察“主项” $\tilde{g}_j(\cdot)$ 对命题左端的贡献。若 $xP^{4SY} < r$，展开所有多项式并将平方项展开后可得

that

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{i=1}^{Y}\tilde{g}_{j(i)}(\Re(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)\chi(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_i(p^2)\chi(p^2)}{p}))\left|\sum_{n\le x}c(n)\chi(n)\right|^2$$
$$=\ \mathbb{E}\prod_{i=1}^{Y}\tilde{g}_{j(i)}(\Re(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)f(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_i(p^2)f(p^2)}{p}))\left|\sum_{n\le x}c(n)f(n)\right|^2,$$

因为若 $1\le U,V<r$，则有等式 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\chi(U)\overline{\chi(V)}=\mathbf{1}_{U=V}=\mathbb{E}f(U)\overline{f(V)}$。（注意，在随机乘法函数一侧，对于所有自然数 U,V，都有 $\mathbb{E}f(U)\overline{f(V)}=\mathbf{1}_{U=V}$；但在特征一侧，需要限制 $1\le U,V<r$，才能将模 r 的同余提升为等式。）

接下来，按照出现余数的最小指标 i 分类，我们看到命题 1 左侧所有余数 $r_{j(i)}(\cdot)$ 的贡献为

$$\ll\ \mathbb{E}^{\mathrm{char}}\sum_{i=1}^{Y}\frac{N|2\pi/\delta|^{2S}}{\delta S(2S)!}|\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)\chi(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_i(p^2)\chi(p^2)}{p}|^{2S}\cdot$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{i-1}\left(1+O(\frac{N|2\pi/\delta|^{2S}}{\delta S(2S)!}|\sum_{p\le P}\frac{a_l(p)\chi(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_l(p^2)\chi(p^2)}{p}|^{2S})\right)\left|\sum_{n\le x}c(n)\chi(n)\right|^2.$$

这里我们用到了事实 $|\tilde{g}_{j(l)}(x)|\le|g_{j(l)}(x)|+|r_{j(l)}(x)|\le 1+O(\frac{N|2\pi x/\delta|^{2S}}{\delta S\ 2S}()!)$。再次使用引理 1 和条件 $xP^{4SY}<r$，并利用界 $(jS)!\ll\sqrt{jS}(jS/e)^{jS}$ 以及 $(2S)!\ge(2S/e)^{2S}$ 来处理该引理产生的阶乘，我们发现这全部为

$$\ll\ \left(\sum_{n\le x}\tilde{d}(n)|c(n)|^2\right)\cdot\sum_{i=1}^{Y}\frac{N|2\pi/\delta|^{2S}}{\delta S(2S)!}\left(\sqrt{iS}(\frac{iS}{e})^S(2\log\log P+O(1))^S\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{i-1}\left(1+O\left(\frac{N|2\pi/\delta|^{2S}}{\delta S(2S)!}(\frac{iS}{e})^S(2\log\log P+O(1))^S\right)\right)$$
$$\ll\ x\log P\cdot\sum_{i=1}^{Y}\frac{N}{\delta}\sqrt{\frac{i}{S}}(\frac{e(\pi/\delta)^2i(2\log\log P+O(1))}{S})^S\cdot$$
$$\cdot\left(1+O\left(\frac{N}{\delta S}(\frac{e(\pi/\delta)^2i(2\log\log P+O(1))}{S})^S\right)\right)^{i-1}.$$

这里我们还用到了假设 $|c(n)|\le 1$ 和 $|a_i(p)|,|a_i(p^2)|\le 1$，这些假设特别意味着 $2\sum_{p\le P}(\frac{|a_i(p)|^2+6|a_i(p^2)|^2}{p})\le 2\sum_{p\le P}\frac{1}{p}+O(1)=2\log\log P+O(1)$。命题 1 右侧余项 $r_{j(i)}(\cdot)$ 的贡献也有相同的整体上界，因为 $\mathbb{E}|\sum_{n\le x}c(n)f(n)|^2|Q(f)|^{2k}$ 也有相同的上界

与引理 1 中的特征平均相同（事实上，在引理中的大小条件下，这个量再次恰好等于$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x}c(n)\chi(n)|^2|Q(\chi)|^{2k}$）。

现在，若设 $S = 100Y\lfloor(1/\delta)^2\log(N\log P)\rfloor$，那么根据我们的假设 $xP^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} < r$，条件 $xP^{4SY} < r$ 即得到满足。采用这一选择后，所有余项产生的误差项为

$$\ll x\log P\cdot\sum_{i=1}^{Y}\frac{N}{\delta}\sqrt{\frac{i}{S}}0.6^S\left(1+O(\frac{N}{\delta S}0.6^S)\right)^{i-1} \ll x\log P\cdot NY\cdot 0.6^S \ll \frac{x}{(N\log P)^{Y(1/\delta)^2}},$$

正如所需。 □

在命题 1 中取 $x = 1$ 和 $c(1) = 1$，即可得到以下重要特例。

命题 2. 设函数 g_j 及其对应参数 N、δ 如逼近结果 1 中所述。假设 P 足够大，并令 $Y \in \mathbb{N}$ 满足 $P^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} < r$。令 $f(n)$ 表示一个 Steinhaus 随机乘法函数。

那么，对于任意指标 $-N \le j(1)\ j(2)\ ...,j(Y) \le N+1$，以及任意复数序列 $(a_1(p))_{p\le P}$、$(a_1(p^2))_{p\le P}$、...、$(a_Y(p))_{p\le P}$、$(a_Y(p^2))_{p\le P}$，其绝对值为 ≤ 1，我们有

$$\mathbb{E}^{char}\prod_{i=1}^{Y}g_{j(i)}(\Re(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)\chi(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_i(p^2)\chi(p^2)}{p})) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{Y}g_{j(i)}(\Re(\sum_{p\le P}\frac{a_i(p)f(p)}{\sqrt{p}}+\frac{a_i(p^2)f(p^2)}{p}))+ +O\left(\frac{1}{(N\log P)^{Y(1/\delta)^2}}\right).$$

2.3. 狄利克雷级数的帕塞瓦尔恒等式。与定理 1 的随机类比证明一样，我们需要以下狄利克雷级数的帕塞瓦尔恒等式版本。

调和分析结果 1（参见 Montgomery 和 Vaughan [23] 第 5.1 节中的 (5.26)）。设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是任意复数序列，并令 $A(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 表示相应的狄利克雷级数，σ_c 表示其收敛横坐标。那么对于任意$\sigma > \max\{0,\sigma_c\}$，我们有

$$\int_0^{\infty}\frac{|\sum_{n\le x}a_n|^2}{x^{1+2\sigma}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{A(\sigma+it)}{\sigma+it}\right|^2 dt.$$

我们将在论证中的某个阶段运用调和分析结果 1；在此之前，我们已经利用命题 1 和命题 2，将研究特征平均转变为研究随机乘性函数 $f(n)$ 的问题。因此，我们可以令 a_n 取作限制在 P-光滑数 n 上的 $f(n)$ 的值（其中 P 是某个参数），并令 $A(s)$ 为对应于 $f(n)$、定义在所有 P- 光滑数上的部分欧拉乘积，这与 [11] 中的随机情形类似。注意，我们无法以这种方式继续进行

直接处理模 r 的狄利克雷特征，因为我们将无法对欧拉乘积中对应于那些 $n > r$ 的项保持足够的控制。

2.4. 随机欧拉乘积。我们所需的最后一个关键工具，也是我们希望在定理中确立优于平方根抵消的结果的根本来源，是对随机欧拉乘积短区间积分的低阶矩给出的上界。这建立在临界乘性混沌概率理论的思想之上。回想一下，$(f(p))_{p\text{ 素数}}$ 构成一列在复单位圆上均匀分布的独立随机变量；对于任意大的量 P 以及任意满足 $\Re(s) > 0$ 的复数 s，令 $F_{\mathrm{rand}P}(s) := \prod_{p\le P}(1 - {}^{f_{(p)}}p^{s})^{-1}$。

乘法混沌结果 1（参见 Harper 的第4节 [11]）。对所有充分大的P和 $2/3 \le q \le 1$, 一致地有

$$\mathbb{E}\Big(\int_{-1/2}^{1/2} |F_P^{rand}(1/2+it)|^2 dt\Big)^q \ll \left(\frac{\log P}{1+(1-q)\sqrt{\log\log P}}\right)^q.$$

这在 [11] 的第4节中得到证明（参见其中定理 1 上界的证明），只是记号略有不同：来自 [11] 的乘积 $F_0(1/2+it)$ 对应于 $F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)$，其中 P 替换为 $x^{1/e}$。

虽然读者完全可以在此将乘法混沌结果 1视为一个黑箱，但值得指出的是，这个界相当微妙。通过使用 H¨older 不等式与 $q = 1$ 情形进行比较，并应用标准的欧拉乘积计算，可以立即得到上界 $\ll (\log P)^q$。要在分母中获得关键的节省因子 $1+(1-q)\sqrt{\log\log P}$，则需要仔细分析 $F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)$ 的各种子乘积的行为。Harper [11] 在第 5.2 节还证明了乘法混沌结果 1中的上界是紧的，但我们在此既不需要，也无法利用这一点。

处理特征和时，我们无法像在真正的随机乘法情形中那样，执行如此精确而完整的“条件化”过程，因此采用离散和而非积分平均 $\int_{-1/2}^{1/2}$ 来进行论证会更直接（尽管并非绝对必要）。现在，我们推导出乘法混沌结果 1的一个离散版本，以配合这一证明结构。

引理 2. 对于任意大的 P，我们有

$$\mathbb{E}\sum_{|k|\le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} |F_P^{rand}(1/2+i\frac{k}{\log^{1.01} P}+it) - F_P^{rand}(1/2+i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 dt \ll \log^{0.99} P.$$

引理 2 的证明。由于我们有 $F_{\mathrm{rand}P}(s) = \sum_{n=1,\ n\text{ 是 }P\text{ 平滑的}}^{\infty} f(n)\,n^{s}$，其中 $f(n)$ 是一个 Steinhaus 随机乘法函数，通过均方计算可知左端

引理 2 中的是

$$= \sum_{|k| \le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} \mathbb{E} \Big| \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{1/2+i\frac{k}{\log^{1.01} P}}} (n^{-it} - 1)|^2 dt$$

$$= \sum_{|k| \le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}}^{\infty} \frac{|n^{-it} - 1|^2}{n} dt.$$

这里有 $|n^{-it} - 1| \ll \min\{|t| \log n, 1\} \le \min\{\log n, \log^{1.01} P, 1\}$。因此，对于那些 $n \le P^{\log\log P}$，级数的贡献为 $\ll (\log\log P)^2 \log^{0.02} P \sum_{n=1}^{\infty}$，其中 n 是 P光滑的 $\frac{1}{n}$；又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是 P光滑的 $= \prod_{p \le P} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \ll \log P$，所以这整体为 $\ll (\log\log P)^2 \log^{0.98} P$。对于那些 $n > P^{\log\log P}$的项（其中我们使用平凡上界$|n^{-it} - 1| \ll 1$），其对级数的贡献同样足够小，即

$$\ll e^{-\log\log P} \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}}^{\infty} \frac{1}{n^{1-1/\log P}} = e^{-\log\log P} \prod_{p \le P} (1 - \frac{1}{p^{1-1/\log P}})^{-1} \ll e^{-\log\log P} \log P = 1.$$

□

乘性混沌结果 2。对所有足够大的 P和 $2/3 \le q \le 1$一致地，有

$$\mathbb{E}(\frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le (\log^{1.01} P)/2} |F_P^{rand}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q \ll \left(\frac{\log P}{1 + (1-q)\sqrt{\log\log P}} \right)^q.$$

乘性混沌结果 2 的证明。要从乘性混沌结果 1 推出这一结论，只需证明以下量的一个合适上界

$$\mathbb{E}(\sum_{|k| \le (\log^{1.01} P)/2} \int_{-1/(2\log^{1.01} P)}^{1/(2\log^{1.01} P)} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P} + it) - F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 dt)^q.$$

但利用 H¨older 不等式将 q阶矩与一阶矩进行比较，可知该量至多为

$$\left(\mathbb{E} \sum_{|k| \le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P} + it) - F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 dt \right)^q,$$

利用引理 2，我们可以对其给出合适的上界。 □

3. Proof of Theorem 1

3.1. 符号与设定。我们可以只考虑范围 $2/3 \le q \le 1$，因为如果 q较小，就可以使用霍尔德不等式，将 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n \le x} \chi(n)|^{2q}$ 上界为 $(\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n \le x} \chi(n)|^{4/3})^{3q/2}$，并调用 $q = 2/3$ 情形。

回顾 $L := \min\{x, r/x\}$，我们可以假设它足够大，否则定理显然成立。我们有一个参数 P 可供使用，必须将其选得在双对数尺度上与 L 相当，但（事实证明）在对数尺度上略小于 L 。事实上，只要 P 约为 $\exp\{\log^{1/6} L\}$ 就足够了；（出于一些很次要的技术原因）我们实际会选择小于 $\exp\{\log^{1/6} L\}$ 的最大数 P，使得 $\log^{0.01} P$ 为整数。因此，我们有 $\log P \asymp \log^{1/6} L$ 且 $\log\log P \asymp \log\log L$；要证明定理 1，只需证明

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\le x} \chi(n)|^{2q} \ll \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log P}}\right)^q. \tag{3.1}$$

我们令 $M := 2\log^{1.02} P$，记作（注意，根据我们对 P 的选择，这是一个整数），并对每个满足 $|k| \le M$ 的整数 k 以及每个模 r 的特征 χ，令 $S_k(\chi) := \Re \sum_{p\le P} (\frac{\chi(p)}{p^{1/2+ik/\log^{1.01} P}} + \chi_0(p)\frac{p^{2ik/\log^{1.01} P}}{2p^{1+2ik/}})$。这些就是我们将在下一小节中据以“条件化”的素数和。

最后，回顾一下，在逼近结果 1 中，我们需要设定两个参数 N、δ，以构造形成光滑单位分解的函数 $g_j(\cdot)$。我们将在证明末尾确定它们的最终取值，不过结果表明，“精度”参数 δ 可以取为 $\log P$ 的某个适当负幂，而“范围”参数 N （对此我们有很大的灵活性）可以取为 $\log\log P$ 的某个适当倍数。

3.2. 条件化论证。首先，令 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子，并按惯例设 $\Psi(x,y) := \#\{n \le x : n \text{ is } y\text{光滑}\} = \#\{n \le x : P(n) \le y\}$。于是有

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\le x, P(n)\le x^{1/\log\log x}} \chi(n)|^{2q} \le \left(\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\le x, P(n)\le x^{1/\log\log x}} \chi(n)|^2\right)^q = \Psi(x, x^{1/\log\log x})^q,$$

根据 H¨older 不等式和狄利克雷特征的正交性。利用标准的光滑数估计（例如参见 Montgomery 和 Vaughan 的定理 7.6 [23], ），该式为 $\ll (x(\log x)^{-c_{\log\log\log x}})^q$，这是定理 1 中可忽略的贡献。

因此，只需对 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\le x,\ P(n)>x^{1/\log\log x}} \chi(n)|^{2q}$ 给出界。在该论证的随机版本中，我们通过对所有“小”素数 p 上 $f(p)$ 的取值进行条件化来推进。现在，我们尝试将这一过程应用于特征和，按照所有和 $S_k(\chi)$ 的取值对平均值 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}$ 进行拆分。因此，回想一下，逼近结果 1 中的 g_j 构成了一个单位分解，我们可以将其改写为

$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x,\ P(n)>x^{1/\log\log x}}\chi(n)|^{2q}$
as

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{i=-M}^{M}\Big(\sum_{j=-N}^{N+1}g_j(S_i(\chi))\Big)\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2q}$$

$$=\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1}\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{i=-M}^{M}g_{j(i)}(S_i(\chi))\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2q}$$

$$=\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1}\sigma(\mathbf{j})\mathbb{E}^{\mathbf{j}}\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2q},$$

其中，对于外层求和中的任意 $(2M+1)$-向量 $\mathbf{j}$，我们定义 $\sigma(\mathbf{j}):=\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{i=-M}^{M}g_{j(i)}(S_i(\chi))$，并且对于所有函数 $W(\chi)$，定义 $\mathbb{E}^{\mathbf{j}}W:=\sigma(\mathbf{j})^{-1}\mathbb{E}^{\mathrm{char}}W\prod_{i=-M}^{M}g_{j(i)}(S_i(\chi))$。这就是我们特征和版本的条件期望。特别地，对于常函数 1，根据定义，对于向量 $\mathbf{j}$ 的所有取值，我们都有 $\mathbb{E}^{\mathbf{j}}1=1$。因此，对 $\mathbb{E}^{\mathbf{j}}$ 应用 H¨older 不等式，最终可得

$$\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2q}\le\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1}\sigma(\mathbf{j})\left(\mathbb{E}^{\mathbf{j}}\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2}\right)^{q}.$$

3.3. 转向随机情形。此时，我们可以利用命题 1 和命题 2，从研究 $\sigma(\mathbf{j})$ 和 $\mathbb{E}^{\mathbf{j}}\Big|\sum_{P\ n\ >x^{1/}}^{n\le x\ ,\ }{}_{()\log\log\ x}\chi(n)\Big|$ 转向研究涉及随机乘性函数的对应量。其实，在论证如

此早的阶段进行这一步并非必要，但及早处理可以简化分析中的若干步骤，并最终使我们能够在达到可应用乘性混沌结果的阶段时证明 (3.1)。

利用命题 1 及 $Y=2M+1$，只要我们对 N、δ 的选择最终满足 $xP^{400((2M+1)/\delta)^2\log(N\log P)}<r$，我们就有

$$\mathbb{E}^{\mathbf{j}}\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}\chi(n)\Big|^{2}=\frac{1}{\sigma(\mathbf{j})}\left(\mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M}g_{j(i)}(S_i(f))\Big|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}}f(n)\Big|^{2}+O\left(\frac{x}{(N\log P)^{(2M+1)(1/\delta)^2}}\right)\right).$$

现在注意到 $\sum_{\mathbf{j}}\sigma(\mathbf{j})=\mathbb{E}^{\mathrm{char}}\prod_{i=-M}^{M}(\sum_{j=-N}^{N+1}g_j(S_i(\chi)))=\mathbb{E}^{\mathrm{char}}1=1$。因此，对 $\sum_{\mathbf{j}}$ 应用 H¨older 不等式，可知命题 1 中所有“大 O”项对 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x,P(n)>x^{1/\log\log x}}\chi(n)|^{2q}$ 的总贡献为

$$\ll\left(\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1}\sigma(\mathbf{j})\cdot\frac{1}{\sigma(\mathbf{j})}\frac{x}{(N\log P)^{(2M+1)(1/\delta)^2}}\right)^{q}=\left(x(\frac{(2N+2)}{(N\log P)^{(1/\delta)^2}})^{2M+1}\right)^{q}.$$

对于 (3.1) 而言，这可以忽略不计。

接下来，若对所有 $(2M+1)$ 维向量 $\mathbf{j}$ 定义 $\sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) := \mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))$，其中 f 是 Steinhaus 随机乘法函数，则利用命题 2 可得 $\sigma(\mathbf{j})^{1-q} \ll \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})^{1-q} + (\frac{1}{(N\log P)^{(2M+1)(1/\delta)^2}})^{1-q}$。~~因此我们有~~

$$\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1} \sigma(\mathbf{j})\left(\frac{1}{\sigma(\mathbf{j})}\mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q$$

$$\ll \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})\left(\frac{1}{\sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})}\mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q +$$

$$+(\frac{1}{(N\log P)^{(2M+1)(1/\delta)^2}})^{1-q}\sum_{\mathbf{j}}\left(\mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q.$$

再次对关于 $\mathbf{j}$ 的求和应用 H¨older 不等式，并再次注意到 g_j 形成单位分解，可知此处最后一行是

$$\ll (\frac{1}{(N\log P)^{(2M+1)(1/\delta)^2}})^{1-q}\cdot((2N+2)^{2M+1})^{1-q}\cdot\left(\sum_{\mathbf{j}}\mathbb{E}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q$$

$$= \left((\frac{(2N+2)}{(N\log P)^{(1/\delta)^2}})^{2M+1}\right)^{1-q}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q.$$

这显然是 $\le e^{-(1-q)\log_{\log P} x^q}$，例如，这对 (3.1) 是可以接受的。

总之，若现在对所有随机变量 W 定义 $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}}W := \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})^{-1}\mathbb{E}W\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))$，那么要证明定理 1，我们还需证明

$$\sum_{-N\le j(-M),\dots,j(0),\dots,j(M)\le N+1} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})\left(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}}\left|\sum_{\substack{n\le x,\\ P(n)>x^{1/\log\log x}}} f(n)\right|^2\right)^q \ll \left(\frac{x}{1+(1-q)\sqrt{\log\log P}}\right)^q. \tag{3.2}$$

注意，我们现在已经不再提及狄利克雷特征，而（3.2）则纯粹是关于随机乘性函数的陈述。

3.4. 转向欧拉乘积。下一步，我们将从 (3.2) 左侧仍包含 $f(n)$ 求和的表达式，转向含有欧拉乘积的表达式。这部分论证与 Harper [11], 第 2.4 节中相应的工作非常相似，不过并不完全相同，因为此处我们设置“条件化”的方式（使用光滑单位分解）必然有所不同。

首先（也是关键的一点），由于 $f(p)$ 是相互独立的零均值随机变量，而定义 $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}}$ 中的各种表达式 $\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))$ 只涉及 $p \le P$ 的 $f(p)$（而不涉及 $p > P$ 的），展开平方后可得

$$\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \Bigg(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \Bigg| \sum_{\substack{n \le x, \\ P(n) > x^{1/\log\log x}}} f(n) \Bigg|^2 \Bigg)^q = \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \Bigg(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{\substack{m \le x, \\ P(m) > x^{1/\log\log x}, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \Bigg| \sum_{\substack{n \le x/m, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Bigg|^2 \Bigg)^q.$$

这里我们隐含地用到了 $P < x^{1/\log\log x}$ 这一事实。

令 $X = e^{\sqrt{\log x}}$，并将条件 $P(m) > x^{1/\log_{\log x} x}$ 替换为较弱的条件 $m > x^{1/\log\log x}$（用于得到上界），再引入一个积分，以在 $1/X$ 的尺度上进行平滑，我们发现方括号中的项为

$$\begin{aligned} &\ll \Bigg(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \frac{X}{m} \int_m^{m(1+1/X)} \Big| \sum_{\substack{n \le x/t, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Big|^2 dt \Bigg)^q \\ &\quad + \Bigg(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \frac{X}{m} \int_m^{m(1+1/X)} \Big| \sum_{\substack{x/t < n \le x/m, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Big|^2 dt \Bigg)^q. \end{aligned} \tag{3.3}$$

现在再次注意到 $\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) = \mathbb{E} \prod_{i=-M}^{M} (\sum_{j=-N}^{N+1} g_j(S_i(f))) = \mathbb{E}1 = 1$。因此，对关于 $\mathbf{j}$ 的求和应用 H¨older 不等式，式 (3.3) 中第二个方括号对 (3.2) 的总贡献为

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \Bigg(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \frac{X}{m} \int_m^{m(1+1/X)} \Big| \sum_{\substack{x/t < n \le x/m, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Big|^2 dt \Bigg)^q \\ &\le \Bigg(\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \frac{X}{m} \int_m^{m(1+1/X)} \Big| \sum_{\substack{x/t < n \le x/m, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Big|^2 dt \Bigg)^q. \end{aligned}$$

但回顾所有量的定义，再利用随机乘性函数的正交性，我们看到这与下式相同

$$\Bigg(\mathbb{E} \sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} \frac{X}{m} \int_m^{m(1+1/X)} \Big| \sum_{\substack{x/t < n \le x/m, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n) \Big|^2 dt \Bigg)^q \ll \Bigg(\sum_{\substack{x^{1/\log\log x} < m \le x, \\ p|m \Rightarrow p > P}} (1 + \frac{x}{mX}) \Bigg)^q.$$

应用标准筛法界（例如 Montgomery 和 Vaughan 的定理 3.6 [23]）来检测条件 $p|m \Rightarrow p > P$，可得该量为 $\ll (x^{\text{对数}\, P})^q$，这对我们来说已经绰绰有余。

与此同时，(3.2) 中来自 (3.3) 第一项括号的总贡献为

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \left(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{x^{1/\log\log x}}^{x} \Big| \sum_{\substack{n\le x/t,\\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n)|^2 \sum_{\substack{t/(1+1/X)<m\le t,\\ p|m\Rightarrow p>P}} \frac{X}{m} dt \right)^q \\ &\ll \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\frac{1}{\log P})^q \left(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{x^{1/\log\log x}}^{x} \Big| \sum_{\substack{n\le x/t,\\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n)|^2 dt \right)^q \\ &= \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\frac{x}{\log P})^q \left(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{1}^{x^{1-1/\log\log x}} \Big| \sum_{\substack{n\le z,\\ n \text{ is } P \text{ smooth}}} f(n)|^2 \frac{dz}{z^2} \right)^q. \end{aligned}$$

这里，第二行是再次对关于 m 的求和应用标准筛法界得到的，最后一个等号则由代换 $z = x/t$ 得出。利用调和分析结果 1，我们推得这全部

$$\ll (\frac{x}{\log P})^q \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2}{|1/2+it|^2} dt)^q, \tag{3.4}$$

其中 $F_{\text{随机}P}(s) := \prod_{p\le P}(1 - {}^{f_{(p)}}p^s)^{-1} = \sum^{\infty}{}_{n=1,\ n\ \text{是}\ P\text{光滑}} {}^{f(n)}n^s$ 是与定义在 P-光滑数上的随机乘性函数 $f(n)$ 相对应的欧拉乘积。

由于我们将范围限制在 $2/3 \le q \le 1$ 内，可以将 (3.4) 中的积分拆分为长度为 1 的子区间，并得到一个上界

$$\begin{aligned} &\le (\frac{x}{\log P})^q \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \sum_{v=-\infty}^{\infty} (\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{v-1/2}^{v+1/2} \frac{|F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2}{|1/2+it|^2} dt)^q \\ &\ll (\frac{x}{\log P})^q \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|v|+1)^{4/3}} \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{v-1/2}^{v+1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt)^q. \end{aligned}$$

例如，那些满足 $|v| > \log^{0.01} P$ 的项在此处显然只产生可忽略的贡献。事实上，再次利用霍尔德不等式，它们的贡献为

$$\begin{aligned} &\le (\frac{x}{\log P})^q \sum_{|v|>\log^{0.01} P} \frac{1}{(|v|+1)^{4/3}} (\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{v-1/2}^{v+1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt)^q \\ &= (\frac{x}{\log P})^q \sum_{|v|>\log^{0.01} P} \frac{1}{(|v|+1)^{4/3}} (\mathbb{E} \int_{v-1/2}^{v+1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt)^q, \end{aligned}$$

随机乘性函数的正交性意味着这等于

$$= (\frac{x}{\log P})^q \sum_{|v|>\log^{0.01} P} \frac{1}{(|v|+1)^{4/3}} (\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ is } P \text{ smooth}}}^{\infty} \frac{1}{n})^q \ll (\frac{x}{\log P})^q \frac{1}{\log^{1/300} P} \log^q P,$$

这对于定理 1 是可以接受的。

为完成该定理的证明，根据 (3.2) 和 (3.4)，现在只需证明对所有 $|v| \leq \log^{0.01} P$ 都一致成立：

$$\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{v-1/2}^{v+1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt)^q \ll \left(\frac{\log P}{1+(1-q)\sqrt{\log\log P}} \right)^q. \quad (3.5)$$

3.5. 加强条件化。现在我们开始证明 (3.5)。为简化记号，我们将只写出 $v = 0$ 情形的细节。所有其他 $|v| \leq \log^{0.01} P$ 情形的处理都完全类似[4]。

首先，由于我们的“条件期望” $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\,\mathrm{rand}}$ 包含了关于所有和式 $S_k(f)$ 的信息，这些和式对应于离散点 $t = {}^{k}\!/_{\log^{1.01} P}$，因此我们需要将~~(3.5)~~中的积分转化为离散化形式。于是有

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \int_{-1/2}^{1/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+it)|^2 dt)^q \\ \ll &\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \sum_{|k| \leq \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} |F_P^{\mathrm{rand}}(\frac{1}{2} + i\frac{k}{\log^{1.01} P} + it) - F_P^{\mathrm{rand}}(\frac{1}{2} + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 dt)^q \\ &+ \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \leq (\log^{1.01} P)/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q. \end{aligned}$$

再次对关于 $\mathbf{j}$ 的求和应用 H¨older 不等式，可知这里第一行等于

$$\leq \left(\mathbb{E} \sum_{|k| \leq \frac{\log^{1.01} P}{2}} \int_{-\frac{1}{2\log^{1.01} P}}^{\frac{1}{2\log^{1.01} P}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P} + it) - F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 dt \right)^q,$$

根据第 2.4 节的引理 2，这为 $\ll \log^{0.99q} P$。对于 (3.5) 而言，这完全可以接受，因此还需处理第二行中的离散和。

此外，为了帮助我们根据逼近结果 1 设置“范围”参数 N，很快也需要对 $|F_P^{\mathrm{rand}}(~~1/2+it~~ {}^{k}\!/_{\log^{1.01} P})|$ 作一些大小限制。因此，我们来定义这个（随机）“坏集”

$$\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} : |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+i\frac{k}{\log^{1.01} P})| \geq \log^{1.1} P \quad \text{or} \quad |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+i\frac{k}{\log^{1.01} P})| \leq \frac{1}{\log^{1.1} P}\},$$

[4]注意，我们在 $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\,\mathrm{rand}}$ 中的“条件化”是针对所有 $|k| \leq M = 2\log^{1.02} P$ 对应的 $S_k(f)$，其虚部为 $\leq {}^{M}\!/_{\log^{1.01} P} = 2\log^{0.01} P$；这包含了（并略有余量）我们在 (3.5) 中必须处理的整个范围 $|v| \leq \log^{0.01} P$。另请注意，由于我们假设 $\log^{0.01} P$ 是整数，$v, k' \in \mathbb{Z}$ 时的点 $i(v + {}^{k'}\!/_{\log^{1.01} P})$ 具有所需形式 $i\,{}^{k}\!/_{\log^{1.01} P}$，其~~中 $k \in \mathbb{Z}$~~；这些点出现在 $S_k(f)$ 中。

也就是说。根据 $k \in \mathcal{T}$ 是否成立，将关于 $|k| \le (\log^{1.01} P)/2$ 的和拆开，并像之前（多次）一样使用 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le (\log^{1.01} P)/2} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q \\
\le\ &\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{\substack{|k| \le (\log^{1.01} P)/2, \\ k \notin \mathcal{T}}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q + \\
&+ \left(\frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le (\log^{1.01} P)/2} \mathbb{E}\mathbf{1}_{k \in \mathcal{T}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 \right)^q .
\end{aligned}$$

在最后一行，$\mathbb{E}\mathbf{1}_{k\in\mathcal{T}}|F_P^{\mathrm{rand}}\ 1/2 + i\frac{k}{^{1.01}P}\ |^2 \quad {}^{1.1}P\ {}^{-0.2}\mathbb{E}|F_P \quad 1/2 + i\frac{k}{^{1.01}P}\ |^{2.2} + \ \frac{1}{^{1.1}P}\ ^2$ (log) 至多为 (log)rand(log) (log)（例如）。关于随机欧拉乘积矩的标准结果（例如参见 [10] 的欧拉乘积结果 1）表明，$(\log^{1.1} P)^{-0.2}\mathbb{E}|F_{\mathrm{rand}P}(1/2 + i\ \ {}^{k}\log^{1.01} P)|^{2.2} \ll (\log^{1.1} P)^{-0.2}\log^{1.21} P = \log^{0.99} P$，因此我们得到对 (3.5) 的另一个完全可以接受的贡献 $\ll \log^{0.99q} P$。

现在，引入函数 $g_{j(i)}$ （在 $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}}$ 和 $\sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})$ 的定义中）的目的是近似地局部化和 $S_i(f)$ 的取值。在此阶段，我们将用精确版本取代这种近似局部化，以期最终建立与乘性混沌结果 2 的联系。因此，求和 $k \notin \mathcal{T}$ 对 (3.5) 的贡献为

$$\begin{aligned}
\le\ &\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{\substack{|k| \le (\log^{1.01} P)/2, \\ k \notin \mathcal{T}}} \mathbf{1}_{|S_k(f) - j(k)| \le 1} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q + \\
&+ \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le (\log^{1.01} P)/2} \mathbf{1}_{|S_k(f) - j(k)| > 1}\mathbf{1}_{k \notin \mathcal{T}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q .
\end{aligned}$$

再次对第二行中关于 j 的求和应用 H¨older 不等式，并回顾 $\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}}$ 和 $\sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j})$ 的定义，我们可以将该行的上界写为

$$(\frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbb{E} \prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f)) \cdot \mathbf{1}_{|S_k(f) - j(k)| > 1}\mathbf{1}_{k \notin \mathcal{T}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q .$$

现在，当 $-N \le j(k) \le N$ 时，由逼近结果 1 的性质 (ii)，我们有 $g_{j(k)}(S_k(f)) \cdot \mathbf{1}_{|S_k(f)} {}_{-j(k)|>1} \le \delta$。此外，若 $k \notin \mathcal{T}$，则 $|S_k(f)| = |\log\ |F\mathrm{r},$ 且 $_P(1/2 + i\ \ {}^{k}\log^{1.01} P)|| + O$ (1) $\le 1.1 \log\log\ P + O(1)$。那么，只要我们取 $N \ge 1.2 \log\log\ P$（比如），当 $j(k) = N + 1$ 时，由逼近结果 1 的性质 (iii)，我们有 $g_{j(k)}(S_k(f)) \cdot \mathbf{1}_{k \notin \mathcal{T}} \le \delta$。所以无论如何，我们都有 $\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f)) \cdot \mathbf{1}_{|S_k(f) - j(k)|>1}\mathbf{1}_{k\notin\mathcal{T}} \le \delta \prod_{i \ne k} g_{j(i)}(S_i(f))$，接着若对 $i \ne k$ 的所有可能取值 $j(i)$ 求和，就得到 $\delta \prod_{i\ne k} \sum_{-N \le j(i) \le N+1} g_{j(i)}(S_i(f)) = \delta$。因此，上面的第二行是

most

$$(\frac{\delta}{\log^{1.01} P} \sum_{|k| \le \frac{\log^{1.01} P}{2}} \sum_{-N \le j(k) \le N+1} \mathbb{E}|F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2)^q \ll (\delta N \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ is } P \text{ smooth}}}^{\infty} \frac{1}{n})^q \ll (\delta N \log P)^q.$$

只要 $\delta \le {}_{N\surd}{}^{1}{}_{\log\log P}$，这个界对 (3.5) 就是可接受的。

3.6. C结论。最后，为了证明 (3.5)（在 $v = 0$ 的情形下），还需证明 th at

$$\sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) \left(\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{\substack{|k| \le (\log^{1.01} P)/2, \\ k \notin \mathcal{T}}} \mathbf{1}_{|S_k(f) - j(k)| \le 1} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2 + i\frac{k}{\log^{1.01} P})|^2 \right)^q \ll \left(\frac{\log P}{1 + (1-q)\sqrt{\log\log P}} \right)^q.$$

现在回想一下，对于所有 k 以及随机乘性函数 $f(n)$ 的所有实现，$|F_P^{\mathrm{rand}}($ $1/2 + i$ ${}^{k}{}_{\text{对数}^{1.01}\, P})| = \exp\{-\Re \overline{\sum_{p \le P} \log(1 -}$ ${}^{f_{(p)}\, p^{1/2+i}}$ ${}^{k}{}_{\text{对数}^{1.01}\, P})}\} \asymp \overline{\exp\{S_k(f)}$ }。我们进行这些推导的目的，是使得现在对 k 求和时，唯一有贡献的 k 值满足 S_k $(f) \in [j(k) - 1, j(k) + 1]$。还要注意，如果 $k \notin \mathcal{T}$，则必有 $|S_k(f)| \le 1.1 \log\log$ $P + O(1)$，由此可知左边为

$$\ll \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\mathbb{E}^{\mathbf{j},\mathrm{rand}} \frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{\substack{|k| \le (\log^{1.01} P)/2, \\ |j(k)| \le 1.1 \log\log P + O(1)}} e^{2j(k)})^q$$

$$= \sum_{\mathbf{j}} \sigma^{\mathrm{rand}}(\mathbf{j}) (\frac{1}{\log^{1.01} P} \sum_{\substack{|k| \le (\log^{1.01} P)/2, \\ |j(k)| \le 1.1 \log\log P + O(1)}} e^{2j(k)})^q.$$

这里，方括号内的量是关于 j 的确定性函数，剩余的随机性只出现在乘子 σ^{rand}(j) 中，也就是对 j 进行外层“平均”时。因此，这与乘性混沌结果 2 中所界定的量的结构已经非常接近；在那里，所有平均 $\mathbb{E}$ 都发生在 q 次幂之外。

事实上，回顾 σ^{rand}(j) 的定义，我们可以将这里的和改写为

$$\mathbb{E}\sum_{\mathbf{j}}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))(\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{\substack{|k|\le(\log^{1.01}P)/2,\\ |j(k)|\le 1.1\log\log P+O(1)}} e^{2j(k)})^q$$

$$\ll \mathbb{E}\sum_{\mathbf{j}}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))(\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{\substack{|k|\le(\log^{1.01}P)/2,\\ |j(k)|\le 1.1\log\log P+O(1)}} |F_P^{\mathrm{rand}}(1/2+i\frac{k}{\log^{1.01}P})|^2)^q +$$

$$+\mathbb{E}\sum_{\mathbf{j}}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))(\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{\substack{|k|\le(\log^{1.01}P)/2,\\ |j(k)|\le 1.1\log\log P+O(1)}} \mathbf{1}_{|S_k(f)-j(k)|>1}\log^{2.2}P)^q.$$

并且，由于 $\sum_{\mathbf{j}}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f)) \equiv 1$，右侧第一行至多为$\mathbb{E}(\frac{1}{\text{对数}^{1.01}P}\sum_{|k|\le(\text{对数}^{1.01}P)/2}|F_{\text{随机}P}(1/2+i\frac{k}{\text{对数}^{1.01}P})|^2)^q$，根据乘性混沌结果 2，这就是 $\ll\left(\frac{\text{对数}1+1-q}{\sqrt{\text{对数}\,\text{对数}\,P}}\right)^q$。

与此同时，最后再应用一次 H¨older 不等式（同时对期望和关于 j 的求和应用），并利用逼近结果 1 的性质 (ii) 和 (iii)（如第 3.5 节所示）推得 $g_{j(k)}(S_k(f))\mathbf{1}_{|j(k)|\le 1.1\,\text{对数}\,\text{对数}\,P+O(1)}\mathbf{1}_{|S_k(f)-j(k)|>1} \le \delta$，可知第二行是

$$\le \left(\mathbb{E}\sum_{\mathbf{j}}\prod_{i=-M}^{M} g_{j(i)}(S_i(f))\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{\substack{|k|\le(\log^{1.01}P)/2,\\ |j(k)|\le 1.1\log\log P+O(1)}} \mathbf{1}_{|S_k(f)-j(k)|>1}\log^{2.2}P\right)^q$$

$$\le \left(\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{|k|\le(\log^{1.01}P)/2}\log^{2.2}P\cdot\mathbb{E}\sum_{\mathbf{j}}\delta\prod_{i\ne k} g_{j(i)}(S_i(f))\right)^q.$$

由于函数 g_j 构成一个单位分解，这就足够了

$$\le \left(\frac{1}{\log^{1.01}P}\sum_{|k|\le(\log^{1.01}P)/2}\log^{2.2}P\cdot\delta\sum_{-N\le j(k)\le N+1}1\right)^q \ll (\delta N\log^{2.2}P)^q,$$

只要 $\delta \le \frac{1}{N\sqrt{\text{对数}^{1.2}P\,\text{对数的对数}\,P}}$，这对于 (3.5) ~~就是可以接受的~~。

最后，我们只需确认能够为参数 N,δ 选取合适的值。在第3.3节中，我们需要满足 $xP^{400}((2M+1)/\delta)^2\log(N\log P) < r$，以便应用命题 1。回想 $M=2\log^{1.02}P$，可知只要 $P^{6499}(\log^{2.04}P)(1/\delta)^2\log(N\log P) < r/x$，即可满足这一条件，例如如此。在第 3.5 节中，我们需要$N \ge 1.2\log\log P$以及 $\delta \le \frac{1}{N\sqrt{\log\log P}}$，而现在我们有更严格的条件 $\delta \le \frac{1}{N\sqrt{\log^{1.2}P\log\log P}}$。

因此，例如取 $N = \lceil 1.2\log\log P\rceil$ 以及 ~~$\delta =$~~ $\frac{1}{\log^{1.3} P}$，只要 $\frac{P^{6500/(\log^{4.64} P)}}{\log\log P} < r/x$，所有条件便都能满足。对于我们选择的$P$，这一条件确实成立；它略小于 $\exp\{\log^{1/6} L\}$。□

4. Proofs of the other Theorems and Corollaries

4.1. 定理2的证明。最简洁的做法是令 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个固定的非负函数，该函数具有 $\geq \mathbf{1}_{[0,1]}$，且其傅里叶变换 $\widehat{\Phi}$ 的支集包含于$[-1/2\pi, 1/2\pi]$。例如，可以取 $\Phi(x)$ 为一个 Beurling–Selberg 函数，如 Vaaler 的论文 [26]中所述。于是，若记 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}} W(t)$ 为连续平均值 $\frac{1}{T\widehat{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t/T) W(t) dt$，我们有

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\sum_{n\leq x} n^{it}|^{2q} dt \leq \widehat{\Phi}(0)\mathbb{E}^{\mathrm{cont}} |\sum_{n\leq x} n^{it}|^{2q} \ll \mathbb{E}^{\mathrm{cont}} |\sum_{n\leq x} n^{it}|^{2q},$$

因此，只需证明所声称的关于 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}} |\sum_{n\leq x} n^{it}|^{2q}$的定理 2 的界。

引入 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}}$ 的原因在于，我们有 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}} 1 = \frac{1}{T\widehat{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t/T) dt = \frac{1}{\widehat{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)\, du = 1$，而关键的是，对于所有自然数 $1 \leq U, V < T$，都有 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}} U^{it} V^{it} = \frac{1}{T\widehat{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t/T) e^{-it\log(V/U)} dt = \widehat{\Phi}((T/2\pi)\log(V/U)) = \mathbf{1}_{U=V}$。（如果直接使用$\frac{1}{T}\int_0^T$，这里就会出现误差项，而非精确等式。）这些性质与我们在定理 1 的证明中对特征平均 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}$ 得到的性质相同。特别地，将 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}$ 替换为 $\mathbb{E}^{\mathrm{cont}}$、将 $\chi(n)$ 替换为 n^{it}，并将各种条件$xU^k, xP^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} P^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} < r$替换为相应的显然类似条件$xU^k, xP^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} P^{400(Y/\delta)^2\log(N\log P)} < T$后，引理 1 以及命题 1 和命题 2 的类似结论仍然成立。这意味着我们可以重复第 3.1–3.3 节中的论证，只需将 $L = \min\{x, r/x\}$ 替换为 $L_T := \min\{x, T/x\}$，并将 $S_k(\chi)$ 替换为 $\Re \sum_{p\leq P}(\frac{p^{it}}{p^{1/2+ik/\log^{1.01} P}} + \frac{p^{2it}}{2p^{1+2ik/}} \log^{1.01} P)$。在第 3.3 节末尾，定理 2 的证明便归结为：证明随机乘性函数满足界 (3.2)，而我们已在第 3.4–3.6 节中证明了完全相同的界。□

4.2. 推论1的证明。这是定理 1 与马尔可夫不等式的直接推论。

因此，对于任意 $0 \leq q \leq 1$，推论1中的左边为

$$\leq \frac{\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\leq x} \chi(n)|^{2q}}{(\lambda \frac{\sqrt{x}}{(\log\log(10L))^{1/4}})^{2q}}.$$

如果 $\lambda \geq e^{\sqrt{\log\log(10L)}}$，那么只需取 $q = 1$，并利用事实 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}} |\sum_{n\leq x} \chi(n)|^2 \leq x$，即可得到所需的界。

对于较小的 λ，若令 $q=1-\delta$，其中 $0<\delta\le 1$，并应用定理 1，可得

$$\frac{\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le x}\chi(n)|^{2q}}{(\lambda\frac{\sqrt{x}}{(\log\log(10L))^{1/4}})^{2q}}\ll\frac{1}{\lambda^2}\frac{\lambda^{2\delta}(\log\log(10L))^{q/2}}{(1+\delta\sqrt{\log\log(10L)})^q}\le\frac{1}{\lambda^2}\frac{\lambda^{2\delta}}{\delta}=\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\frac{e^{2\delta\log\lambda}}{\delta\log\lambda}.$$

取 $\delta=\frac{1}{2\log\lambda}$，即可得到所声称的上界。 □

4.3. 推论2的证明。照例，只需在 $2/3\le q\le 1$ 时证明推论2；当 q 较小时，我们可以利用霍尔德不等式与$q=2/3$ 情形进行比较。

若 χ 是模 r 的偶狄利克雷特征，则根据 θ 函数的定义并利用分部求和，我们有

$$\begin{aligned}\theta(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-\pi n^2/r} &= \sum_{n\le\sqrt{r\log r}}\chi(n)e^{-\pi n^2/r}+O(1)\\ &= \sum_{n\le\sqrt{r\log r}}\chi(n)\int_n^{\sqrt{r\log r}}\frac{2\pi u}{r}e^{-\pi u^2/r}du+O(1)\\ &= \int_1^{\sqrt{r\log r}}\frac{2\pi u}{r}e^{-\pi u^2/r}\sum_{n\le u}\chi(n)du+O(1).\end{aligned}$$

注意到 $\int_1^{\sqrt{r\log r}}\frac{2\pi u}{r}e^{-\pi u^2/r}du\asymp 1$，并对关于 u 的积分应用霍尔德不等式（此处我们利用 $2q\ge 1$ 这一事实），可推出对每个偶 χ，我们都有

$$|\theta(1,\chi)|^{2q}\ll\int_1^{\sqrt{r\log r}}\frac{2\pi u}{r}e^{-\pi u^2/r}|\sum_{n\le u}\chi(n)|^{2q}du+1.$$

此积分中来自 $1\le u\le r^{1/4}$ 的部分显然为 $\ll\int_1^{r^{1/4}}\frac{u}{r}u^{2q}du\ll 1$，可以忽略。在剩余范围 $r^{1/4}\le u\le\sqrt{r\log r}$ 上，定理 1 蕴含 $\mathbb{E}^{\mathrm{char}}|\sum_{n\le u}\chi(n)|^{2q}\ll(\frac{u}{1+(1-q)\sqrt{\log\log r}})^q$，从而得到一个可接受的贡献

$$\ll(\frac{1}{1+(1-q)\sqrt{\log\log r}})^q\int_{r^{1/4}}^{\sqrt{r\log r}}\frac{u}{r}e^{-\pi u^2/r}u^q du\ll(\frac{\sqrt{r}}{1+(1-q)\sqrt{\log\log r}})^q$$

对于推论2。

若 χ 是奇特征，则根据定义有 $\theta(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}n\chi(n)e^{-\pi n^2/r}$，并且与之前类似地进行分部求和可得

$$\theta(1,\chi)=\int_1^{\sqrt{r\log r}}(\frac{2\pi u^2}{r}-1)e^{-\pi u^2/r}\sum_{n\le u}\chi(n)du+O(1).$$

由于现在有 $\int^{\sqrt{r}}$对数$_1$ $\overline{\qquad r}$ $|\frac{2\pi u^2}{r} - 1|e^{-\pi u^2/r}du \asymp \sqrt{r}$，应用 H¨older 不等式和定理 1（与偶特征情形相同）时，我们的上界中会多出一个因子 $(\sqrt{r})^{2q} = r^q$，从而得到对奇特征平均值所声称的上界。□

4.4. 定理3的证明。一旦引入乘性扭曲 $h(n)$，对应素数 p 的欧拉乘积因子就会从 $(1 - \chi_{(p)}\overline{p^{1/2+it}})^{-1}$（或随机乘性一侧的 $(1 - f(p)\overline{p^{1/2+it}})^{-1}$）变为

$$1 + \frac{h(p)\chi(p)}{p^{1/2+it}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h(p^k)\chi(p)^k}{p^{k(1/2+it)}} \quad \text{or} \quad 1 + \frac{h(p)f(p)}{p^{1/2+it}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h(p^k)f(p)^k}{p^{k(1/2+it)}}.$$

这里有 $|^h(\frac{p\,\chi\,p}{p^{1/2+it}} + \sum_{k=2}^{\infty} {}^{h)()}(\frac{p^k\,\chi\,p^k}{p^{k(1/2+it)}}| \le \sum_{k=1}\frac{1}{p^{k/2}} = \frac{1}{\sqrt{p}-1}$)()。只要满足 $p \ge 5$，这一切都是 $\le \frac{1}{\sqrt{5}-1} < 1$，因此我们仍然可以应用泰勒展开来分析欧拉因子的对数。素数2和3的情形并非如此，但对于它们，我们仍然可以得到欧拉因子的上界 $\ll 1$。

根据上述观察，定理3的证明只需对定理 1 的证明作相当直接的调整。我们不再使用 $S_k(\chi) := \Re\sum_{p\le P}(\frac{\chi\,p}{p^{1/2+ik/\log^{1.01}P}} + \quad {}^{\chi}(\,)(\quad {}_{p^2})\log^{1.01}{}_P)$，而~~是在第3节中~~采用 $S_{k,h}(\chi) := \Re\sum_{5\le p\le P}({}^h(p)\chi(p)\,{}_{p^{1/2+ik/}}\log^{1.01}{}_P$ ~~$^{2p^{1+2ik/}} + (h(p^2) - 1/2\,h\,p^{\,2}\,\chi\,p^{\,2}(\,)(\,))(\,))$~~ （它来自欧拉因子对数的泰勒展开中的一阶和二阶项）。$p^{1+2ik/\log^{1.01}P}$ 注意，这里略去了素数2和3。接下来的计算基本上无需改变，直到在 (3.4) 中得到 $|\prod_{p\le P}(1 + {}^h(\frac{p\,f\,p}{p^{1/2+it}} + \sum_{k=2}^{\infty}{}^h)(\,)(\frac{p^k\,f\,p^k}{p^{k(1/2+it)}})(\,))|$，而不是 $|F\text{rand}_P(1/2+it)|$。而这就是 $\ll |F^{\text{rand}}_{Ph}, (1/2+it)|$，其中 $F^{\text{rand}}_{Ph}, (s) := \prod_{5\le p\le P}(1 + {}^h(p)_{p^s}^{f\,p} + \sum_{k=2}^{\infty}{}^h(\,)(p^k)_{p^{ks}}^{\,f\,p^k}(\,))$（略去素数 2 和 3）。

继续阅读第 3.5 节和第 3.6 节后，我们只需验证：我们得到的上界与 $\mathbb{E}|F_P^{\text{rand}}(1/2 + i\quad {}^k\log^{1.01}P)|^{2.2}$ 的相同，~~即 $\mathbb{E}|F^{\text{rand}}_{Ph},(1/2 + i\quad {}^k\log^{1.01}P)|^{2.2}$~~ $\ll \log^{1.21}$ ~~P；并且~~（最重要的是）乘法混沌结果 1 在用 $F_{\text{rand}P,h}(1/2+it)$ 替换 $F_P^{\text{rand}}(1/2+it)$ 后仍然成立。前者只需对 [10] 中的欧拉乘积结果 1 做简单修改。后者也很容易验证：只要仔细推导 [11]，第 3.1–3.2 节和第 4.1–4.3 节中的证明即可。注意，该论文中的引理 1 对欧拉乘积 $F^{\text{rand}}_{Ph},(s)$ 依然成立，无需任何改动（这里很重要的一点是，$|h(p)| = 1$ 对素数 p 成立，而这些素数在那里产生了主项），后续所有结果也都由引理 1 推出。□

References

[1] P. Bengoechea. 特殊θ值上的伽罗瓦作用. J. Th ´eor. Nombres Bordeaux, 28, no. 2, pp 347-360. 2016[2] J. Bourgain. 解耦、指数和与黎曼ζ函数. 美国数学会杂志, 30, no. 1, pp 205-224.2017

[3] R. de la Bret`eche, M. Munsch, G. Tenenbaum. 小型 G´al 和及其应用. J. Lond. Math. Soc. (2), 103, no. 1, pp 336-352. 2021[4] T. Cochrane, Z. Zheng. 特征和的高阶矩. Proc. Amer. Math. Soc., 126, no. 4, pp 951-956. 1998[5] A. Fujii, P. X. Gallagher, H. L. Montgomery. 特征和与狄利克雷级数的一些混合界. 数论专题 (Proc. Colloq., 德布勒森, 1974), pp 41-57, Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai, Vol. 13, 北荷兰, 阿姆斯特丹. 1976[6] O. Gorodetsky. 幻方、对称群与莫比乌斯随机性. 预印本可在线获取：https://arxiv.org/abs/2102.11966[7] A. Granville, K. Soundararajan. 大特征和. 美国数学会杂志 , 14, no. 2, pp 365-397. 2001[8] X. Guo, Y. Peng. 具有特殊素数导子的特征的非零 θ 值. J. Math. Anal. Appl., 487, no. 1, 123971, 10 pp. 2020[9] A. J. Harper. 黎曼ζ函数的配分函数及 Fyodorov–Hiary–Keating 猜想. 预印本可在线获取：https://arxiv.org/abs/1906.05783[10] A. J. Harper. 随机乘性函数的矩，II：高阶矩. Algebra Number Theory, 13, no. 10, pp 2277-2321. 2019[11] A. J. Harper. 随机乘性函数的矩，I：低阶矩、优于平方根抵消的结果及临界乘性混沌. 数学论坛：π, 8, e1, 95pp. 2020[12] H. Helson. 汉克尔型. Studia Math., 198, no. 1, pp. 79-84, 2010[13] A. Ivi´c. 黎曼ζ函数：理论与应用. 多佛出版社再版，Dover Publications, Inc. 出版. 2003[14] B. Kerr. 关于同余 $x_1x_2 \equiv x_3x_4 \bmod q$. J. Number Theory, 180, pp 154-168. 2017[15] Y. Lamzouri. $\zeta(1+it)$ 值的二维分布. Int. Math. Res. Not., 2008, Art. ID rnn106, 48 pp.[16] S. Louboutin. 关于奇特征所关联函数的函数方程常数的数值计算. C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math., 329, no. 5, pp 347-350. 1999[17] S. Louboutin. 实阿贝尔数域类数的高效计算. Lect. Notes in Comp. Sci. 2369, pp 134-147. 2002[18] S. Louboutin, M. Munsch. θ函数在其中心点处的二阶矩与四阶矩. J. Number Theory, 133, no. 4, pp 1186-1193. 2013[19] K. Matom¨aki, M. Radziwi l l. 短区间内的乘性函数. Ann. of Math. (2), 183, no. 3, pp 1015-1056. 2016[20] H. L. Montgomery. 解析数论与调和分析交界面上的十讲. 数学科学会议委员会委托美国数学会出版. 1994[21] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. 带乘性系数的指数和. Invent. Math., 43, no. 1, pp 69-82. 1977[22] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. 特征和的平均值. Canad. J. Math., 31, no. 3, pp 476-487. 1979[23] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. 乘性数论I：经典理论. 第一版，剑桥大学出版社出版. 2007

[24] M. Munsch. L函数的平移矩与θ函数的矩。Mathematika, 63, 第 1 期，第 196-212 页，2017
[25] M. Munsch, I. E. Shparlinski. θ函数高阶矩的上界和下界。Q. J. Math., 67, 第 1 期，第 53-73 页，2016[26] J. Vaaler. 傅里叶分析中的一些极值函数。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 12, 第 2 期，第 183-216 页，1985

Mathematics Institute, Zeeman Building, University of Warwick, Coventry CV47AL, England电子邮箱：A.Harper@warwick.ac.uk