arXiv:2301.04405v1 [math.NT] 11 Jan 2023

PGL($n, \mathbb{Z}[i]$) 的自守尖点形式上确界范数问题

P ´ETER MAGA 和 GERGELY Z ´ABR ´ADI

Abstract. 设 ϕ 是定义在局部对称空间X :=PGL$_n(\mathbb{Z}[i])\backslash$PGL$_n(\mathbb{C})/PU_n$上的 PGL$_n(\mathbb{Z}[i])$ 的 L^2-归一化 Hecke–Maass尖点形式。如果 Ω 是 X 的紧子集，那么我们证明了界 $\|\phi|_\Omega\|_\infty \ll_\Omega \lambda_\phi^{n(n-1)/4-\delta}$，其中某个 $\delta > 0$ 仅依赖于 n，而 λ_ϕ 是 ϕ 的拉普拉斯特征值。

1. Introduction

给定一个黎曼局部对称空间 $X = \Gamma\backslash S$，对（L^2-归一化的）特征函数 F，给出不变微分算子代数 $\mathcal{D}$（S）的逐点界，并使其在 S 上关于拉普拉斯特征值 λ_F 的界 F保持一致，是一个经典的解析问题。如果 X 是紧的，那么 Sarnak [Sar] 证明了基准界

$$\|F\|_\infty \ll_X \lambda_F^{\frac{\dim(X)-\mathrm{rk}(X)}{4}}. \tag{1}$$

右端的指数通常已知是最优的。在一些特殊情形下也已知，若 X 非紧，则 $\|F\|_\infty$ 可能大得多（参见[BT20]），但若将（1）限制在 F 的紧子集上，结论仍成立。自守形式理论中的上确界范数问题关注的是：若 X 是一个算术流形，且 F 不仅是$\mathcal{D}$(S的特征函数，也是 X的完整 Hecke代数的特征函数，那么（1）中的指数能否改进。

一个重要的研究动机来自量子力学。经典力学将自由运动的粒子解释为测地流。量子力学对同一对象的解释则是特征态的一个 L^2归一化线性组合。由于测地流相对于切空间上的刘维尔测度是遍历的，量子力学的对应原理提示，在高能极限下，特征态的质量会再现不变测度。特征态的上确界范数（或一般而言，任意 L^p 范数） $p > 2$的界可以控制其质量集中，因此与 Rudnick 和 Sarnak 的量子唯一遍历猜想相关[RS94]。上确界范数界的其他重要联系还包括重数问题、自守形式的节点域以及 L-函数的界，参见例如 [Sar], [GRS13], [BH10]。

在改进（1）方面，研究至少有两个彼此独立的方向：一是在特殊情形下尽可能获得强有力的幂次节省，通常是在一阶情形（例如参见 [IS95] 和 [BHMM20]）；另一个是在高阶情形或尽可能一般的情形下获得任何幂次节省（例如参见 [BP16], [BM15], [BM16]）。我们沿着第二个方向继续探讨。目前我们所知的局限来自一份尚未发表的手稿 [Mar], ，该手稿证明了对于一大类对称空间都存在幂次节省；更具体地说，对准分裂群的算术商空间成立，但 SU($n, n-1$) 型除外。（我们指出，尽管 [Mar] 尚未经过同行评审，但学界普遍认为其结果正确。）

在本文中，我们介绍一种新方法，该方法以[BM16], 的方法为基础并加以改进，以处理上确界范数问题。作为一项检验性应用，我们证明在局部对称空间

$$X := \Gamma\backslash G/K, \qquad \Gamma := \mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}[i]), \qquad G := \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}), \qquad K := \mathrm{PU}_n.$$

诚然，我们的结果可以由 [Mar] 的主要结果推出（尤其参见 [Mar，推论 1。4]），但我们坚信，该方法的新颖性值得关注，并且可能有助于处理 SU(n, $n-1$) 型这一 Marshall 工作中的例外情形。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11F55, 11F72, 11D75.*Key words and phrases.* 高阶自守形式、上确界范数问题、Hecke 算子、迹公式、丢番图逼近、放大法。

在整篇论文中，我们都将 $n \geqslant 2$ 视为固定量；特别是，以下所有隐含常数都允许依赖于 n。

在陈述主要结果之前，我们先固定一些记号。由于使用矩阵而非其射影化更为方便，我们将 G 中的元素表示为右端非零项为 1 的底行。我们也会将 X 或 G/K 中的点称为矩阵，意即任何表示它们的矩阵。令 A 表示 G 中由正实数项组成的对角子群，并令 N 表示上三角幺幺子群。那么，伊瓦萨瓦分解写作 $G = NAK$。我们用 $\mathfrak{a}$ 表示 A的李代数，用 $\mathfrak{a}^*$ 表示其对偶，用 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 表示 $\mathfrak{a}^*$的复化。在 $\mathfrak{a}^*$ 和 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$中固定基后，我们可以分别将它们视为 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$的适当子集。令 W 表示韦伊群， Σ 表示根集， Σ^+ 表示与 N 对应的正根集。对于 $\alpha \in \Sigma$，令 $m(\alpha)$ 表示相应根空间的实维数。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$，定义

$$D(\lambda) := \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (1 + |\langle \alpha, \lambda \rangle|)^{m(\alpha)},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 由 Killing形式诱导。

在我们的特殊情形中，对 $1 \leqslant j \leqslant n$，定义函数 e_j 在 $\mathfrak{a}$ 上的取值为 e_j(对角矩阵$(a_1, \dots, a_n)) = a_j$，于是正根集合为 $e_j - e_k$，其中 $1 \leqslant j < k \leqslant n$。相应的根空间由矩阵 E_{jk} 和 iE_{jk}张成，其中 E_{jk} 是一个仅在位置 j, k 处为 1、其他位置均为零的矩阵，因此 $m(e_j - e_k) = 2$。

定义在 X 上的 Hecke–Maass尖点形式 ϕ 带有阿基米德朗兰兹参数 $\mu_\phi = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W \subset \mathbb{C}^n/W$，使得 $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 0$ 且 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_n}\}$。在我们的参数化中，$(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ 对应于温和谱，并且有 $\Im\mu_1, \dots, \Im\mu_n = O(1)$。令 μ_ϕ^*表示 $\Re\mu_\phi$。由于 ϕ的拉普拉斯特征值 λ_ϕ，

$$\lambda_\phi \asymp 1 + \|\mu_1\|^2 + \ldots + \|\mu_n\|^2$$

成立时，我们有

$$D(\mu_\phi^*) \ll \lambda_\phi^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

本文的主要结果如下。

定理1. 对任意 $n \geqslant 2$，存在某个 $\delta = \delta(n) > 0$，具有如下性质。对于任意 L^2-归一化的 Hecke–Maass尖点形式 ϕ，定义在 X 上，以及任意紧集 $\Omega \subset X$，

$$\|\phi|_\Omega\|_\infty \ll_\Omega D(\mu_\phi^*)^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

特别地，

$$\|\phi|_\Omega\|_\infty \ll_\Omega \lambda_\phi^{\frac{n(n-1)}{4}(1-2\delta)}.$$

由于 $n(n-1)/4 =$(维数$(X) -$秩$(X))/4$，这比 (1) 有所改进。我们注意到，情形 $n = 2$ 已在 [BHM16]中解决。

我们的方法紧随 [BM16], 所引入的方法；然而，此处的计数问题更具挑战性（因为 G 的极大紧子群过大，具体情况将在下文简要说明）。这要求改进计数技巧，而这正是本文的核心（粗略地说，就是引理 4 与引理 8的结合）。作为副产品，我们不再需要关于算术级数中小素数的 Linnik 型定理（即 L-函数的零点排斥）。

我们指出，经过一番努力，可以明确写出下文 O（1）式的复杂推导（尤其是第4节中的推导），因此可以得到明确的次凸性节省，参见 [Gil20] 关于有理数域的工作（事实上，现在更容易了，因为不再需要引用 Linnik 型定理）。我们还注意到，隐含常数（依赖于 Ω）也可以完全明确，因此原则上该方法是有效的，例如我们不需要引用 Siegel 零点。

致谢。我们感谢 Valentin Blomer 就论文主题进行了有益的讨论。我们还感谢 Gergely Harcos 和 Vitezslav Kala 就一些密切相关的问题进行了讨论。

本研究得到 NKFIH（国家研究、发展与创新办公室）资助项目 KKP 133819（PM）、FK 135218（PM）、FK 127906（GZ）、K 135885（GZ）、ELKH（E¨otv¨os Lor´and 研究网络）资助项目 SA-71/2021（PM 与 GZ），以及 MTA R´enyi Int´ezet Lend¨ulet Automorphic ResearchGroup（PM 与 GZ）的支持。

2. Reduction to a counting problem

在本节中，我们沿用[BM15] 和[BM16], 处理 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{PO}_n$ 问题的方法，将问题归结为一个矩阵计数问题。在阿基米德位置和所有相关的非阿基米德位置上，球面海克代数在该情形下都与我们的情形同构，因此几乎所有结论都可逐字推出；我们这里只作简要说明，并着重强调其中由以下事实导致的微小差异：在实数情形中，极大紧子群是正交群，而在复数情形中则是酉群。

令 $f_{\mu_\phi}: K\backslash G/K\to\mathbb{C}$ 为 [BM16，第 1276–1277]页中构造的球函数（此处我们利用~， A、$\mathfrak{a}^*$、$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 中相同）。记 f_{μ_ϕ} 为其球变换，则对任意x， $y\in G$，有迹公式前公式

$$\int \tilde{f}_{\mu_\phi}(\mu_\varpi)\overline{F_\varpi(x)}F_\varpi(y)\,d\varpi=\sum_{\gamma\in\Gamma}f_{\mu_\phi}(x^{-1}\gamma y), \tag{2}$$

其中，左侧的积分是对 $\Gamma\backslash G$ 的整个谱进行的。

当前设置下的放大法思想可概括如下。假设我们想要估计我们的形式 ϕ 在点 $g\in\Omega$ 处的值。那么在（2）中，我们令 $x:=g$ 并取 y 形如 γg的形式，其中 γ 遍历与某些 Hecke 算子相对应的右陪集代表元。对这些结果取适当的加权和，可在 $L^2(X)$ 上得到一个正算子，因此，从左侧来看，除对应于$F_\varpi=\phi$ 的那一项外，其余各项都可以舍去（关于这一正性论证，也可参见 [BHMM20，第 3]节）。总之，我们得到如下形式的界

$$C|\phi(g)|^2\leqslant\sum_{\gamma\in\Gamma'}f_{\mu_\phi}(g^{-1}\gamma g)$$

其中 Γ' 是由所用 Hecke 算子产生的有限矩阵集合，而 C 是一个正的常数~，它来源于 f_{μ_ϕ} 及相应的海克特征值。接着，利用 f_{μ_ϕ} 在远离 K 时可控地衰减（见[BP16，定理 2]），为了给 $|\phi(g)|$作上界，实质上我们必须对满足以下条件的 $\gamma\in\Gamma'$ 进行计数： $g^{-1}\gamma g$接近于 K。

更具体地说，设 $L\geqslant 2$ 为一个参数，并假设 $\mathcal{P}$ 是一个素数集合 π，其中的素数位于不同的分裂有理素数之上，且满足 $L\leqslant N(\pi)$，其中 $<2L$ 表示 N 范数。那么，[BM15第 4, 6] 节的讨论（事实上其中用到了 [BP16定理 2], ，另见 [BM16第 2]节）表明，对任意数 $M\geqslant 1$,

$$|\phi(g)|^2\ll_{M,\Omega}D(\mu_\phi^*)\cdot\left(\frac{1}{\#\mathcal{P}}+D(\mu_\phi^*)^{-\kappa}L^K+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\#\mathcal{P})^2}\sum_{\pi,\pi'\in\mathcal{P}}\frac{\#S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M)}{L^{\nu(n-1)}}\right),\qquad g\in\Omega, \tag{3}$$

其中 K 是一个仅取决于 M 和 n的固定数， $\kappa>0$ 也是一个仅取决于 n的固定数；并且

$$\begin{aligned}S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M):=\Big\{&\gamma\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i])\cdot\mathrm{diag}(1,\pi^\nu,\dots,\pi^\nu,\pi^\nu\pi'^\nu)\cdot\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i]):\\&\|\,|\det\gamma|^{-\frac{2}{n}}\cdot\gamma^*Q\gamma-Q\|_\infty\leqslant\max\left(N(\pi)^{-M},N(\pi')^{-M}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $Q:=|$行列式$g|^{2/n}\cdot(g^*)^{-1}g^{-1}$，而 $\|\cdot\|_\infty$ 作用于矩阵时，指其绝对值最大的元素。注意，在 [BM15] 和 [BM16], 中，取 γ 和 g 的转置，而非其伴随。

根据素数定理，我们可以选取 $\mathcal{P}$ 使得 $\#\mathcal{P}\gg_\varepsilon L^{1-\varepsilon}$ 对任意 $\varepsilon>0$都成立。因此，如果我们能够证明

$$\#S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M)\ll_{\Omega,M}L^{\nu(n-1)-\eta}$$

对每个 $1\leqslant\nu\leqslant n$ 都成立，其中存在某个 $\eta>0$，那么（3）在令为 L 的一个非常小的正幂 $D(\mu_\phi^*$时，即可推出定理 1。我们证明一个较弱的形式，但仍足以推出定理 1。

在阐述这个较弱的命题之前，我们先固定一些记号。引入记号 S_n，表示 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的自伴矩阵实向量空间；并用 $P_n\subset S_n$ 表示正定矩阵构成的开凸锥。给定一个紧集 $\Omega\subset X$，如定理 1所述，我们引入

$$\Omega':=\left\{\left[\frac{1}{2},2\right]\cdot|\det g|^{\frac{2}{n}}\cdot(g^*)^{-1}g^{-1}:g\in\Omega\right\}.$$

那么，Ω' 是 P_n 在子空间拓扑下的一个紧子集。

命题1. 令 $\varepsilon > 0$ 任意。存在正数 $\alpha(\varepsilon) \geqslant 1$ 和 $M(\varepsilon) \geqslant 1$ （二者仅依赖于 n 和 ε），满足以下性质。对于任意紧集$\Omega \subset X$，存在常数 $L(\Omega) \geqslant 2$（仅依赖于 n、 $\alpha(\varepsilon)$、 $M(\varepsilon)$和Ω），使得以下结论成立。对于任意 $L_0 \geqslant L(\Omega)$，存在某个$L_0 \leqslant L \leqslant L_0^{\alpha(\varepsilon)}$，使得对于任意位于某个分裂有理素数之上且满足 $L \leqslant N(\pi) < 2L$ 的素数 π，我们有

$$\#S(Q, \pi^\nu, \pi^\nu, M(\varepsilon)) \ll_{\Omega,\varepsilon} L^{\nu(n-1)+\varepsilon}, \qquad Q \in \Omega', 1 \leqslant \nu \leqslant n; \tag{5}$$

a并且对于任意两个不同的、分别位于不同分裂有理素数之上的素数 π、 π'，我们有 e

$$\#S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M(\varepsilon)) = 0, \qquad Q \in \Omega', 1 \leqslant \nu \leqslant n. \tag{6}$$

这仍足以证明定理1。事实上，我们取任意 $0 < \varepsilon < 1/2$应用命题1。由此得到隐含的数 $\alpha := \alpha(\varepsilon) \geqslant 1$ 和 $M := M(\varepsilon) \geqslant 1$，再结合额外给定的$\Omega$，由命题1还得到一个数 $L(\Omega)$。接着取 $L_0 := D(\mu_\phi^*)^\omega$，其中 $\omega > 0$ 是稍后指定的一个固定常数。由命题1可知，若 $L_0 \geqslant L(\Omega)$，我们可以找到某个满足 $D(\mu_\phi^*)^\omega \leqslant L \leqslant D(\mu_\phi^*)^{\alpha\omega}$ 的对象，使得对于任意满足 $L \leqslant N(\pi)\ N(\pi') < 2L$的素数，计数式(5)和(6)均成立。于是，在(3)的每一项中，只要在开头将 $\omega > 0$ 选得足够小，我们就能得到幂次节省。现在回到条件$L_0 \geqslant L(\Omega)$。除去一个仅依赖于Ω的有限海克–马斯尖点形式集合外， $L_0 = D(\mu_\phi^*)^\omega$确实满足此条件。随后通过调整隐含常数处理这有限多个例外形式（注意，隐含常数可以依赖于Ω，只有指数中的节省必须是绝对的）。

因此，本文余下部分将致力于证明命题1。

我们以一个特例说明：当 Q 是单位矩阵时，为何对于 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z}[i])$，这个计数问题比对于 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z})$ 更难。此时，在 $S(\ldots)$ 中，两种情形都要满足一个关于史密斯标准形的条件，其复杂度相同。然而，另一个条件是 γ 与一个正交归一矩阵射影等价。直观上，这种情况在 $\mathbb{C}$ 上比在 $\mathbb{R}$上更常见，因为

$$\dim(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) = 2n^2 - 2, \qquad \dim(\mathrm{PU}_n) = n^2 - 1 = \frac{\dim(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}))}{2},$$

而

$$\dim(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})) = n^2 - 1, \qquad \dim(\mathrm{PO}_n) = \frac{n^2 - n}{2} < \frac{\dim(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}))}{2},$$

也就是说，PU_n 是 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 的一个比 PO_n 作为 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ 的子群“更大”的子群。

3. Counting techniques in a special case

本节将介绍一种在诸多方面都非常特殊情形下的计数技巧。首先，我们假设 Q 是对角矩阵，且其对角元属于基域 $\mathbb{Q}(i)$。由此可知，对角元都是有理数，即 $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$，其中 $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$。于是 $q_j \asymp_\Omega 1$ 对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$都成立；此外，我们还假设，对所有 $q_j\ 1 \leqslant j \leqslant n$，其分子和分母（均为最简形式）都与 π互素， π'。最后一个简化假设是，我们不允许式（4）中出现误差项；为此，我们用 ∞ 代替 M。

我们的约定是，向量，即 $\mathbb{Z}[i]^n$、 $\mathbb{C}^n$ 等的元素，始终指列向量。我们还引入记号 $v_\pi(q)$，其中 $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ 为任意素数， $q \in \mathbb{Q}(i)$ 为任意元素，该记号表示 q 的 π- 进赋值。有时，我们也会将此记号用于元素来自 $\mathbb{Q}(i)$ 的向量或矩阵，此时它表示各元素所取的最小 π-进赋值。

引理1. 设 $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ 是位于分裂有理素数 $p = \pi\overline{\pi}$, $\rho \in \mathbb{N}$ 上方的一个素数，并设 $A \in \mathbb{Q}(i)^{n\times n}$ 是一个自伴矩阵，满足 $v_\pi(A) \geqslant 0$。设 $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^t, y = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n)^t \in \mathbb{Z}[i]^n$ 是满足 $v_\pi(x) = v_\pi(y) = 0$ 的向量，使得对任意 $1 \leqslant j < k \leqslant n$， $\pi^\rho \mid (\xi_j\upsilon_k - \xi_k\upsilon_j)$。那么以下结论成立。

（a）对于某个与 p 互素的 $a \in \mathbb{Z}$，有 $y \equiv ax$ 模 π^ρ，且此 a 模 p^ρ 定义良好。

（b）选取 $a \in \mathbb{Z}$ 具有此性质的（a），还存在一个 $b \in \mathbb{Z}$ （模 p^ρ唯一）满足 $b \equiv ai$ 模 π^ρ，因此我们进一步得到

$$2x^*Ay \equiv (a - bi)x^*Ax + (a' - b'i)y^*Ay \qquad \bmod p^\rho, \tag{7}$$

其中， $a' \in \mathbb{Z}$ （分别为 $b' \in \mathbb{Z}$）表示 a （分别为 b）模 p^ρ 的乘法逆元。（c）对于上文定义的整数 a、b、a'、b'，我们有 $\pi^\rho \mid a' - b'i$ 和 $\overline{\pi}^\rho \mid a - bi$。

证明。这是[BM16 引理 3]，的一个变体，不过此处的证明在计算上稍微复杂一些。不失一般性，我们可以假设 $\pi \nmid \xi_n$。于是 $\pi \nmid v_n$；否则，对某个 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，$\pi \nmid v_j$，从而 $\pi \nmid (\xi_n v_j - \xi_j v_n)$。那么 $a \equiv v_n \xi_n^{-1}$模 π^ρ 就满足要求，因为对于任意 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，都有 $v_j \equiv \xi_j v_n \xi_n^{-1} \equiv a\xi_j$ 模 π^ρ。此外，由于 $0, 1, \ldots, p^\rho - 1$ 是模 π^ρ 的一组代表元（即我们有同构 $\mathbb{Z}/(p^\rho) \cong \mathbb{Z}[i]/(\pi^\rho)$），所以 a 可以在 $\mathbb{Z}$ 中模 p^ρ 唯一选取。(a) 的证明完成。

关于（b），任取一个代表元 $a \in \mathbb{Z}$ 并令 $b \in \mathbb{Z}$ 满足 $b \equiv ai$模 π^ρ。于是 π^ρ 整除 $y - ax$ 中的所有项，因此 $\overline{\pi}^\rho$ 整除 $(y - ax)^*$中的所有项。由此可得

$$0 \equiv (y-ax)^* A (y-ax) = y^*Ay + a^2 x^*Ax - ax^*Ay - ay^*Ax \qquad \bmod p^\rho = (\pi\overline{\pi})^\rho$$

因此

$$x^*Ay + y^*Ax \equiv ax^*Ax + a'y^*Ay \qquad \bmod p^\rho \tag{8}$$

其中， $a' \in \mathbb{Z}$ 是 a 模 p^ρ的乘法逆元。类似地， π^ρ 整除 $iy - bx$ 中的所有项，并且$\overline{\pi}^\rho$ 整除 $(iy - bx)^*$，因为 $ai \equiv b$ 模 π^ρ。因此我们计算

$$0 \equiv (iy-bx)^* A (iy-bx) = y^*Ay + b^2 x^*Ax - bix^*Ay + biy^*Ax \qquad \bmod p^\rho$$

因此

$$x^*Ay - y^*Ax \equiv -bix^*Ax - b'iy^*Ay \qquad \bmod p^\rho \tag{9}$$

其中 $b' \in \mathbb{Z}$ 是 b 模 p^ρ的乘法逆元。将方程（8）和（9）相加即可得到该结论。

对于（c）部分，我们计算 $\pi^\rho \mid i(b - ai) = ib + a$ 因此 $\overline{\pi}^\rho \mid \overline{a + bi} = a - bi$。类似地， $\pi^\rho \mid a'b'(b - ai) \equiv a' - b'i$。□

引理 2. 设 $A \in \Omega'$，并假设对于某个 $0 \leqslant k \leqslant n-1$， x_1、……、$x_k \in \mathbb{Z}[i]^n$ 是线性无关向量。那么对于任意实数 $\beta \geqslant 2$,

$$\#\{y \in \mathbb{Z}[i]^n : y^*Ay = \beta^2, \ \textit{and } x_j^*Ay = 0 \textit{ for any } j = 1, \ldots, k\} \ll_{\Omega,\varepsilon} \beta^{2(n-k-1)+\varepsilon}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。

证明。 参见 [BM15，推论 5。3]。 □

我们将记号 $S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty)$ 略作扩展，对于 $\pi, \pi' \nmid m \in \mathbb{Z}[i]$，定义为

$$S_m(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty) := \Big\{ \gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i]_{\pi,\pi'}) \cdot \mathrm{diag}(1, \pi^\nu, \ldots, \pi^\nu, \pi^\nu\pi'^\nu) \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i]_{\pi,\pi'}) : m\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i]), |\det\gamma|^{-\frac{2}{n}} \cdot \gamma^* Q \gamma = Q \Big\},$$

其中，$\mathbb{Z}[i]_{\pi,\ \pi'}$ 表示满足 $v_\pi(a)$ $v_{\pi'}(a) \geqslant$的元素 $a \in \mathbb{Q}(i)$ 所构成的环 0.

引理 3. 设 $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ 是一个位于分裂有理素数之上的素数，且 $\pi \nmid m \in \mathbb{Z}[i]$。令 $Q =$为 $\mathrm{diag}(q_1, \ldots\ldots, q_n)$，其中对于所有 $1 \leqslant j \leqslant n$，均有 $q_j \in \mathbb{Q}$、 $q_j \asymp_\Omega 1$。那么对于任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$,

$$\#S_m(Q, \pi^\nu, \pi^\nu, \infty) \ll_{\Omega,\varepsilon} |m|^{2n^2-2+\varepsilon} \mathrm{den}(Q)^{\frac{(2n-1)(n-1)}{2}} N(\pi)^{\nu(n-1)+\varepsilon}.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。这里，$\mathrm{den}(Q)$ 表示 Q （已化为最简形式）的对角元分母的最小公倍数。

证明。根据 $S_m(Q, \pi^\nu, \pi^\nu, \infty)$ 的定义，其中计数的任意矩阵都必须有一列不能被 π 整除，我们不妨设其为第一列 γ_1。由于 $(m\gamma_1)^* Q (m\gamma_1) = |m|^2 N(\pi)^\nu$，由引理 2 可知，可能的 $m\gamma_1$ 的数量为 $O_\varepsilon(|m|^{2(n-1)+\varepsilon} N(\pi)^{\nu(n-1)+\varepsilon})$。现在只需证明，固定 γ_1 后，有 $O_\Omega(m^{2n(n-1)}\mathrm{den}(Q)^{(2n-1)(n-1)/2})$ 种方法补全矩阵。

我们按照 π-赋值对可能的第二列 γ_2 进行分组。当 $v_\pi(\gamma_2) \geqslant \nu$时，则$m\gamma_2/\pi^\nu \in \mathbb{Z}[i]^n$ 且 $\|m\gamma_2/\pi^\nu\| \asymp_\Omega \|m\gamma_2/\pi^\nu\|_Q = |m|$，因此对于这样的 γ_2，此类选择有 $O_\Omega(|m|^{2n})$ 个。现在固定 $0 \leqslant \mu < \nu$，于是只需证明满足 $v_\pi(\gamma_2) = \mu$ 的可能 γ_2'的数量为$O_\Omega(|m|^{2n}\mathrm{den}(Q)^{(2n-1)/2})$，因为对所有后续列也可以重复同样的论证。

设 x, y 是第一列 γ_1 之后的第二列，且满足 $v_\pi(x) = v_\pi(y) = \mu$。接着考虑向量 $x' := mx/\pi^\mu$ 和 $y' := my/\pi^\mu$。由引理 1(a)，x' 和 y' 都是模 $\pi^{\nu-\mu}$下 $m\gamma_1$ 的倍数，因此由传递性可知，它们模 $\pi^{\mu-\nu}$下互为倍数。接着引入 $Q' := \mathsf{den}(Q)Q$。采用此记号，由于 $x'^*Q'x' = y'^*Q'y' = |m|^2 q_2 \,\mathsf{den}(Q)\pi^{\nu-\mu}\overline{\pi}^{\nu-\mu} = |m|^2 q_2 \,\mathsf{den}(Q)N(\pi)^{\nu-\mu}$，(7) 得出$x'^*Q'y'$ 可被 $N(\pi)^{\nu-\mu}$整除。另一方面，将 $\mathbb{C}^n$ 视为 $\mathbb{R}^{2n}$，我们得到，对于 x 与y 的 Q-夹角，

$$\sphericalangle_Q(x,y) = \arccos\frac{\Re(x^*Qy)}{\sqrt{(x^*Qx)(y^*Qy)}} = \arccos\frac{\Re(x'^*Q'y')}{\sqrt{(x'^*Q'x')(y'^*Q'y')}} = \arccos\frac{\Re(x'^*Q'y')}{|m|^2 q_2\,\mathrm{den}(Q)N(\pi)^{\mu-\nu}}.$$

由于最右侧表达式中的分子可被 $N(\pi^{\mu-\nu})$ 整除，因此对某个 $\ell \in \{0,1,2,\dots\}$，可继续写为

$$\sphericalangle_Q(x,y) = \arccos\left(1 - \frac{\ell}{|m|^2 q_2\,\mathrm{den}(Q)}\right) \gg_\Omega |m|^{-1}\,\mathrm{den}(Q)^{-1/2}, \qquad \text{if } \ell \neq 0, \text{ i.e. } x \neq y.$$

这意味着可能的第二列数量为 O_Ω（$|m|^{2n-1}\mathrm{den}(Q)^{(2n-1)/2}$）（这相当初等，另见 [BM16，引理 4]）。证明完毕。□

引理 4. 设 $\pi, \pi' \in \mathbb{Z}[i]$ 是位于不同分裂有理素数之上的不同素数，并令 $m \in \mathbb{Z}[i]$ 满足 $v_\pi(m) = v_{\pi'}(m) = 0$。进一步，设 $Q =$ 为对角矩阵 $\mathsf{diag}(q_1, \dots, q_n)$，满足 $q_j \in \mathbb{Q}$ 且 $v_\pi(q_j) = v_{\pi'}(q_j) = 0$ 对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$ 均成立。那么对任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$,

$$\#S_m(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty) = 0.$$

证明。首先注意，如果 $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$，那么

$$|\det\gamma|^{\frac{2}{n}} = (\pi\overline{\pi})^{\frac{\nu(n-1)}{n}}\left(\pi'\overline{\pi'}\right)^{\frac{\nu}{n}} \notin \mathbb{Q},$$

因此 $|\det\gamma|^{2/n}\gamma^*Q\gamma \neq Q$，这意味着在此情形下 $\#S_m(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty) = 0$，因此从现在起，我们假设 $\nu = n$.

在 $\#S_m(Q, \pi^n, \pi'^n, \infty)$ 中计数的任意 γ 都必须有一列，不妨设为第一列 γ_1，使得 $v_\pi(\gamma_1) = 0$。现在我们证明，任意选取 γ_2 都会导致矛盾。令 $\mu := v_\pi(\gamma_2) \geqslant 0$。接着我们应用引理1，特别是对 γ_1 和 $\gamma_2' := \gamma_2/\pi^\mu$ 应用 (7)，采用记号 $p = \pi\overline{\pi}$, $a, b \in \mathbb{Z}$，它们与 p 互素，且满足$1 \leqslant a, b, a', b' \leqslant p^{n-\mu} - 1$，$\gamma_2' \equiv a\gamma_1$ 模 $\pi^{n-\mu}$, $b \equiv ai$ 模 $\pi^{n-\mu}$，其中 a', b' 分别是 a, b 模 $p^{n-\mu}$ 的乘法逆元。由此可得

$$0 = \pi^{-\mu}\gamma_1^* Q\gamma_2 = \gamma_1^* Q\gamma_2' \equiv (a - bi)p^{n-1}\pi'\overline{\pi'}q_1 + (a' - b'i)p^{n-1-\mu}\pi'\overline{\pi'}q_2 \mod p^{n-\mu}, \tag{10}$$

这显然与 $\mu \geqslant 1$ 矛盾，因为最右侧表达式中的第二项不能被 $p^{n-\mu}$ 整除，而第一项和它们的和都可以。

现在假设 $\mu = 0$。由引理 1(c)，可得 $\overline{\pi} \mid a - bi$ 以及 $\pi \mid a' - b'i$。因此，在（10）中，右侧第一项不能被 π^n 整除（因为 $\pi \nmid a - bi$，而 $p \nmid a - bi$），而第二项和它们的和都可以。□

4. Exchanging matrices

回想一下，我们想要证明 （5）和（6）对于 $N(\pi)$ $N(\pi') \in [L, 2L)$，并适当地选择 $L \geqslant L_0$，使其不超过 L_0的某个固定次幂。我们的策略是将 Q 换成具有越来越好的算术性质的其他矩阵。注意，先验地，Q 是实流形上的一个点，其元素可能具有高度超越性。我们先非正式地描述这些替换。首先，我们将用 Q_1 代替 Q，以保证

$$S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \subseteq S(Q_1, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty)$$

对于每一种满足以下条件的可行选择：$N(\pi)$ $N(\pi')$介于 L_0的两个固定次幂之间的 π、π'、ν。这个新的 Q_1 的元素将属于数域 $K \supseteq \mathbb{Q}(i)$。利用这个 Q_1，我们将能够证明，在一个适当的子区间内（同样，范数介于 L_0的两个固定次幂之间），所有的 γ都对应于$\pi = \pi'$ 或 $\nu = n$。

其次，在这个子区间内，我们将找到一个 Q_2，这次它满足

$$S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \subseteq S(Q_2, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty)$$

对于每一种满足以下条件的可行选择 π, π', ν：$N(\pi)$ $N(\pi')$ 落入一个更短的子区间（同样位于 L_0 的两个幂之间）。这个新的 Q_2 的各项将属于 $\mathbb{Q}(i)$，并且我们能够控制它们的高度。

最后，我们将把 Q_2 对角化为 Q_3，同样控制各项的高度；这些高度必然是有理数。这个对角化过程会影响被计数的 γ 本身，但不会改变其数量；我们还能够很好地控制新计数的 γ 可能出现的分母，即

$$\#S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M) \leqslant \#S(Q_2,\pi^\nu,\pi'^\nu,\infty) \leqslant \#S_m(Q_3,\pi^\nu,\pi'^\nu,\infty)$$

对于 π，π'，ν如上所述。然后，对于此处最右侧的计数，我们将应用引理 3–4，其结论实际上将达到（5）和（6）的要求。

现在我们详细实施这一计划。首先陈述一个关于有效可计算性的命题。代数数域记为 $\overline{\mathbb{Q}}$。给定一个代数数 a，我们将 a 的复杂度定义为

$$\operatorname{comp}(a) := \inf_{\substack{a=\frac{b}{c}\\ b,c\in\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(a)}}} \left(\max_{\sigma\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(a),\mathbb{C})}|\sigma(b)| + \max_{\sigma'\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(a),\mathbb{C})}|\sigma'(c)|\right)+1$$

其中 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(a)}$ 表示 $\mathbb{Q}(a)$ 的整数环。

引理 5. 设 $a_1,\ldots,a_m$ 为代数数，并令 $K:=\mathbb{Q}(a_1,\ldots,a_m)$。假设 $f\colon \overline{\mathbb{Q}}^m\to\overline{\mathbb{Q}}$ 是一个含 m 个变量的函数，它总共通过 t 次加法、减法、乘法和除法计算得出。那么我们有

$$\operatorname{comp}(f(a_1,\ldots,a_m)) \leqslant \left(\max_{1\leqslant j\leqslant m}(\operatorname{comp}(a_j))\right)^{O_{m,t,\deg(K:\mathbb{Q})}(1)}.$$

证明。 参见 [BM16 中证明 5] 引理的第一段。 □

将 Ω' 包含在某个 Ω_1 中，使其仍是 P_n 的紧子集，并满足 $\Omega'\subset\operatorname{int}(\Omega_1)$。我们以明确的方式构造这个包含，例如，令 Ω_1 为特征值介于 $a/2$ 和 $2b$ 之间的自伴正定矩阵集合，其中 a、b 分别是 Ω' 中矩阵的最小和最大特征值。于是 $\operatorname{dist}(\Omega',\ P_n\setminus\Omega_1)\gg_\Omega 1$，其中矩阵距离指由逐项距离的最大值所诱导的距离。

Giv对于任意矩阵 $\gamma\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，我们定义如下线性变换 $B_\gamma\colon\ S_n\to S_n$：

$$B_\gamma(A) := \gamma^* A\gamma - |\det(\gamma)|^{\frac{2}{n}}A,\qquad A\in S_n.$$

对于任意 $0<C_1<C_2$，我们引入记号 $\mathcal{P}(C_1,C_2)$，表示满足以下条件的素数 $\pi\in\mathbb{Z}[i]$：$\Re\pi$、$\Im\pi>0$ 以及 $C_1\leqslant N(\pi)<C_2$（因此，特别地，$\mathcal{P}(C_1,C_2)$ 中的元素位于彼此不同的分裂有理素数之上）。我们引入的另一个记号是 $T\geqslant 1$，这是一个仅依赖于 n 的固定数，它大于论文中提及的所有 $O(1)$ 的隐含常数。

引理 6. 令 $D\geqslant 2$ 和 $E\geqslant 2$ 为任意对象。则存在某个 $M\geqslant 2$（依赖于 n、D、E）以及 $L_1(\Omega)\geqslant 2$（依赖于 n、D、E、M、Ω），使得以下结论成立。对于任意 $Q\in\Omega'$，存在某个 $1\leqslant j\leqslant n^2+1$ 满足

$$S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M)=\emptyset$$

对于所有 $\pi,\pi'\in\mathcal{P}(2L_0^{(DE)^j},2L_0^{(DE)^{j+1}})$，除非 $\pi=\pi'$ 或 $\nu=n$。

证明。固定 $Q\in\Omega'$。对于任意 $L_0\geqslant 2$，考虑这些子空间（暂时取某个未指定的 $M\geqslant 2$）

$$H_j := \bigcap_{\substack{\gamma\in S(Q,\pi^\nu,\pi'^\nu,M)\\ \pi,\pi'\in\mathcal{P}(L_0,2L_0^{(DE)^j})\\ 1\leqslant\nu\leqslant n}} \ker B_\gamma,\qquad j=1,\ldots,n^2+2.$$

于是，$S_n\supseteq H_1\supseteq\ldots\supseteq H_{n^2+2}\supseteq\{0\}$ 和 $\dim(S_n)=n^2$ 推出，对于某个 $1\leqslant j\leqslant n^2+1$，有 $H_j=H_{j+1}$。取满足条件的最小 j。由于 $\dim S_n-\dim H_j\leqslant n^2$，实际上只需通过求交 n^2 个 $\ker B_\gamma$，即可得到 H_j；例如，$H_j=\cap_{\ell=1}^t\ker B_{\gamma_\ell}$ 与某个 $t\leqslant n^2$。由于每个这样的 γ_ℓ 的每个元素的复杂度为 $O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)})$，根据引理 5，$H_j$ 可通过一个线性方程组来定义，该方程组的系数来自复杂度为 $O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)})$ 的有理数域 $(i,\pi_1^{1/n},\ldots,\pi_{2n^2}^{1/n})$（因为定义 H_j 的线性系统可由所用的 γ 在 $O(1)$ 步内计算得出）。

根据假设，$\operatorname{dist}(Q, \ker B_\gamma) \ll L_0^{-M}$，其中 dist 表示在 S_n 中作为维数为 n^2的实向量空间所取的距离。我们声称，这意味着 $\operatorname{dist}(Q, H_j) = O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)} L_0^{-M})$。事实上，取线性张成空间（$\ker B_{\gamma_\ell})^\perp$'s 的基矩阵 $V_1, \dots, V_m$，使得每个 $V_{\ell'}$ 都属于某个 $\ker B_{\gamma_\ell}$，且其元素属于复杂度为 $O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)})$ 的 K（这是可行的，因为这样的基可由这些 γ_ℓ计算得到，随后即可应用引理 5）。利用格拉姆-施密特正交化可将这样的基变为$V_1', \dots, V_m'$，然后

$$\operatorname{dist}(Q, H_j) = \|\operatorname{proj}_{H_j^\perp}(Q)\| = \left\| \sum_{\ell'=1}^{m} \frac{\langle Q, V_{\ell'}' \rangle}{\langle V_{\ell'}', V_{\ell'}' \rangle} V_{\ell'}' \right\| = \left\| \sum_{\ell'=1}^{m} \frac{\sum_{\ell''=1}^{m} U_{\ell'\ell''} \langle Q, V_{\ell''} \rangle}{\langle V_{\ell'}', V_{\ell'}' \rangle} V_{\ell'}' \right\|,$$

其中 U是表示格拉姆–施密特过程的矩阵。由于 $\langle Q, V_{\ell''} \rangle \ll L_0^{-M}$(因为对每个$\ell''$，我们都有 $V_{\ell''} \in \ker B_{\gamma_\ell}$ 对某个 ℓ成立)，并且所有系数（包括 U的各项，根据引理 5）的复杂度均为 $O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)})$，因此应用引理 Q和 H_j，再一次使用引理 $= O_\Omega((L_0^{(DE)^j})^{O(1)} L_0^{-M}$5，可得 dist(5。

现在，若 M 足够大，例如，

$$M \geqslant T \cdot (DE)^{n^2+2} + 1, \tag{11}$$

其中请回忆，$T \geqslant 1$ 是论文中曾提及的所有 $O(1)$ 的隐含常数的上界，则 $\operatorname{dist}(Q, H_j) = O_\Omega(L_0^{-1})$（因为 $j \leqslant n^2+1$，指数 n^2+2似乎过大，但为了后文引用，最好令 M 再稍大一些）。接着，取方便的 $L_1(\Omega)$ $\geqslant 2$，若 $L_0 \geqslant L_1(\Omega)$，则 $H_j \cap \operatorname{int} \Omega_1 \neq \emptyset$，特别地，$H_j \neq \{0\}$。此外，由于 H_j 定义在 K上，我们可以找到并固定某个 $0 \neq Q_1 \in H_j$，其各项属于 K。

根据 H_j 的定义及其选择 $H_j = H_{j+1}$，我们得知，对于任意 π、$\pi' \in \mathcal{P}(L_0, 2L_0^{(DE)^{j+1}})$ 以及任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$,

$$S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \subseteq S(Q_1, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty).$$

假设对于某些 $\pi, \pi' \in \mathcal{P}(2L_0^{(DE)^j}, 2L_0^{(DE)^{j+1}})$，有 $\gamma \in S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M)$。由于 Q_1 有一个非零项，例如 Q_{rs}，由上一个公式可知

$$\gamma_r^* Q_1 \gamma_s = |\det(\gamma)|^{\frac{2}{n}} Q_{rs},$$

其中 γ_r, γ_s 分别表示 γ 的第 r 列和第 s 列。这里，左边属于 K，因此右边也属于 K，这意味着 $|\det(\gamma)|^{2/n} = (\pi\overline{\pi})^{\nu(n-1)/n}(\pi'\overline{\pi'})^{\nu/n} \in K$。根据根的独立性（Besicovitch 定理 [Bes40]），以及 K 是由范数小于 $2L^{(DE)^j}$ 的素数的第 n 次根定义的，而 H_{j+1} 的定义中所用的素数范数至少为 $2L^{(DE)^j}$，可知 $\pi = \pi'$ 或 $\nu = n$，证明完毕。□

引理 7. 设 $D \geqslant 2$ 任意，并假设 $E > D^{n^2+1}$。设 $M, L_1(\Omega) \geqslant 2$ 由引理 6 和 (11) 给出。对于任意 $Q \in \Omega'$，以及由引理 6 给出的相应 $j \leqslant n^2+1$，存在一个自伴矩阵 Q_2，其元素属于 $\mathbb{Q}(i)$，复杂度为 $O_\Omega((L^{D^k(DE)^j})^{O(1)})$，其中 $k \in \{0, \dots, n^2\}$ 为某个值，使得对于任意$\pi, \pi' \in \mathcal{P}(2L_0^{D^k(DE)^j}, 2L_0^{D^{k+1}(DE)^j})$ 以及任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$,

$$S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \subseteq S(Q_2, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty).$$

证明。定义子空间

$$H_k' := \bigcap_{\substack{\gamma \in S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \\ \pi, \pi' \in \mathcal{P}(2L_0^{D^k(DE)^j}, 2L_0^{D^{k+1}(DE)^j}) \\ 1 \leqslant \nu \leqslant n}} \ker B_\gamma, \qquad k = 0, \dots, n^2+1.$$

于是 $S_n \supseteq H_0' \supseteq \dots \supseteq H_{n^2+1}' \supseteq \{0\}$ 且 $\dim(S_n) = n^2$ 蕴含 $H_k' = H_{k+1}'$ 对某个 $1 \leqslant k \leqslant n^2$ 成立。取满足此条件的最小 k。

根据我们的选择 $D^{n^2+1} < E$，我们有 $2L_0^{(DE)^j} \leqslant 2L^{D^k(DE)^j} < 2L^{D^{k+1}(DE)^j} \leqslant 2L_0^{(DE)^{j+1}}$，因此可以应用引理 6，推出 $S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) = \emptyset$，除非 $\pi = \pi'$或 $\nu = n$。特别地，对于 H_k'的定义中所有 $\gamma \in S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M)$，我们有 $|\det(\gamma)|^{2/n} = (\pi\overline{\pi})^{\nu(n-1)/n}(\pi'\overline{\pi'})^{\nu/n} \in \mathbb{Z}$。因此，所有线性映射 B_γ

H'_k 定义中的对象均定义在 $\mathbb{Q}(i)$ 上。与引理 6 的证明一样，利用引理 5，我们找到一个矩阵 $Q_2 \in \mathrm{int}\,\Omega_1 \cap H'_k$，其元素属于 $\mathbb{Q}(i)$，复杂度为 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)})$，使得结论成立。（注意，这正是我们使用对 M 所施加的稍强条件 (11) 的地方：它不仅超过 $(DE)^j \cdot O(1)$，还超过 $D^k(DE)^j \cdot O(1)$。）□

引理 8. 令 $D \geqslant 2$ 为任意对象，并令 E 如引理 7 中所述，则 $M, L_1(\Omega)$ 如引理 6 中所给出。对于任意 $Q \in \Omega_1,$，令 j,k 也为引理 6–7 中给出的数。存在某个复杂度为$O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)})$ 的 $m \in \mathbb{Z}[i]$，以及一个矩阵 $U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i, \frac{1}{m}])$，满足以下性质：
(a) U 和 U^{-1} 的所有项的复杂度均为 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)})$。(b) $Q_3 := U^*Q_2U$ 是对角矩阵，其对角项属于 $\mathbb{Q}$，复杂度为 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)})$，并且位于一个仅依赖于 Ω 的紧子集 $\Omega_2 \subset P_n$ 中。(c) 对任意不整除 m 的 $\pi, \pi' \in \mathcal{P}(2L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix}, 2L^{D^{k+1}}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})$，以及任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$，我们有

$$\#S(Q_2, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty) \leqslant \#S_m(Q_3, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty).$$

证明。我们构造 U，使得 Q_3 是 Q_2的格拉姆–施密特正交化形式，即

$$Q_3 = U^*Q_2U,$$

其中 U 是一个$\binom{n}{2}$ 由初等基变换构成的长复合，标识为$_n + uE_{\ell_1\ell_2}$，对应于 $\ell_1 \neq \ell_2$，其中 u 的选取是为了消去位置 ℓ_1处的元素；ℓ_2（注意，U 并非唯一确定，因为我们可以按任意顺序消去这些元素；固定一种顺序即可）。注意到 Q_2 的每个元素的复杂度为 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)}$，由引理 5 可知结论（a）成立。

对于（b），我们首先断言，对正定矩阵进行一步格拉姆-施密特变换时，一个对角元素的绝对值会减小，而其余对角元素保持不变。只需对 2×2分块验证这一点，计算如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\overline{b}}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - \frac{|b|^2}{a} \end{pmatrix}.$$

这里，$0 < c - |b|^2/a < c$，因此结论得证。

因此，将 $\Omega_1,$ 中的任意元素对角化后，所得对角矩阵的对角元不会大于 $\Omega_1,$ 中的最大特征值，设为 λ。但最小特征值不可能小于 Δ/λ^{n-1}，其中 Δ 是 Ω_1中取得的最小行列式。因此，对 Ω_1 中的任意元素应用格拉姆–施密特过程，都会得到特征值介于 Δ/λ^{n-1} 和 λ之间的正定矩阵。这类矩阵构成了 Ω_2的一个合适选择。

显然，Q_3 的有理性成立，因为它是自伴的，且其对角元先验地属于 $\mathbb{Q}(i)$。接着注意到，矩阵 Q_3 经过 $O(1)$步运算即可由 Q_2算出。根据引理5，这验证了 Q_3 的各项确实具有 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)}$的复杂度。这就证明了 (b)。

此外，令 $m := \mathrm{den}(U^{-1})\,\mathrm{den}(U)$（即 $\mathrm{den}(U)^2,$，因为 $\det(U) = 1$）。那么，m可在$O(1)$步内计算；参照引理 5，可知 m 的复杂度为 $O_\Omega((L^{D^k}\begin{pmatrix} & \\ 0 & DE^j \end{pmatrix})^{O(1)})$，如所声称。特别地，对于任意 $\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[i])$，我们有 $mU^{-1}\gamma U \in \mathbb{Z}[i]^{n\times n}$。

最后，若 $\pi, \pi' \nmid m$，则由 U 给出的基变换不会改变史密斯标准形的 π-部分和 π'-部分。因此，若 $\gamma \in S(Q_2, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty)$，则

$$|\det(\gamma)|^{\frac{2}{n}} Q_3 = |\det(\gamma)|^{\frac{2}{n}} U^*Q_2U = U^*\gamma^*Q_2\gamma U = (U^{-1}\gamma U)^*U^*Q_2U(U^{-1}\gamma U) = (U^{-1}\gamma U)^*Q_3(U^{-1}\gamma U)$$

表明 $U^{-1}\gamma U \in S_m(Q_3, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty)$。由于 U-共轭是双射，我们得到（c）。□

5. The endgame

设 $\varepsilon > 0$ 如命题 1的输入中所给定。于是选取 $D \geqslant 2$ 使得 $D\varepsilon/2 > T + 1$，其中回顾一下，$T \geqslant 1$ 是论文中曾提及的所有 $O(1)$ 的隐含常数的上界。然后取 $E \geqslant 2$ 如引理 7所需，再取 $M \geqslant 2$ 如引理 6所蕴含。此 M 将作为命题 $M(\varepsilon)$ 中的 1。

现在设 Ω，因此 Ω′、Ω_1,Ω_2 均已给定。取足够大的 $L(\Omega)$，使得一方面 $L(\Omega) \geqslant L_1(\Omega)$（引理6–7），另一方面，对于任意 $L_0 \geqslant L(\Omega)$ 以及引理 8 所蕴含的任意 m （对于任何可能的 $1 \leqslant j \leqslant n^2+1$ 和 $0 \leqslant k \leqslant n^2$），都有 $N(m) < L^{D^{k+1}}(DE^j)$，这可以实现，因为$N(m) = O_\Omega(L^{D^k}(DE^j))$。这尤其意味着，对于任意 $\pi \in \mathcal{P}(L^{D^{k+1}}(DE^j), 2L^{D^{k+1}}(DE^j))$，均有 $\pi \nmid m$。注意，此时 j、k、m 均未固定，但我们已经得到了所声称的界及其上的不整除关系。

于是，$Q \in \Omega'$ 和 $L_0 \geqslant L(\Omega)$均可任意选取。根据引理 6，存在满足其所述性质的某个 $1 \leqslant j \leqslant n^2+1$、$0 \leqslant k \leqslant n^2$；根据引理 7，存在满足其所述性质的某个 Q_2、Q_3；根据引理 8，存在满足其所述性质的某个 $m \in \mathbb{Z}[i]$。令 $L := L^{D^{k+1}}(DE^j)$，使其满足命题1的大小要求，即 $L_0 \leqslant L \leqslant L_0^{\alpha(\varepsilon)}$，其中 $\alpha(\varepsilon)$是仅依赖于 ε 的常数（我们可以取 $\alpha(\varepsilon) = D^{n^2+1}(DE)^{n^2+1}$）。对于任意 π、$\pi' \in \mathcal{P}(L, 2L)$以及任意 $1 \leqslant \nu \leqslant n$，结合引理7–8可得

$$\#S(Q, \pi^\nu, \pi'^\nu, M) \leqslant \#S(Q_2, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty) \leqslant \#S_m(Q_3, \pi^\nu, \pi'^\nu, \infty).$$

因此，只需对最右侧的表达式给出上界。应用引理4，取 $\pi \neq \pi'$ 可知计数为 0，从而证明了（6）。当 $\pi = \pi'$时，我们应用引理3（将 $\varepsilon/2$ 代替其中的 ε），可得

$$O_\Omega((L_0^{D^k(DE)^j})^{O(1)}) \cdot O_{\Omega,\varepsilon}((L_0^{D^{k+1}(DE)^j})^{\nu(n-1)+\frac{\varepsilon}{2}}) = O_{\Omega,\varepsilon}(L^{\nu(n-1)+\varepsilon}),$$

其中最后一个界由 D 的选取以及 $N(\pi) < 2L$得到。这就证明了（5）。

命题1 的证明以及由此定理1 的证明均已完成。

References

[Bes40] A. S. Besicovitch. 关于整数分数次幂的线性无关性。 *J. London Math. Soc.*，15:3–6，1940。[BH10] V. Blomer 和 G. Harcos。数域上的扭曲 L *Geom. Funct.* -函数与希尔伯特第十一个问题。，( ): –52，2010。[BHM16] V. Blomer、G. Harcos 和 D. Mili *Anal.* 20 1 1 3 *Duke Math.* cevic。算术双曲 -流形上特征形式的界。，( ): –659，2016。[BHMM20] V. Blomer、G. Harcos、P. Maga 和 D. Mili *J.* 165 4 625 2 *J. Eur.* cevic。数域上 GL( ) 的上确界范数问题。，( ): – 。[BM15] V. Blomer 和 P. Maga。PGL(4) 的上确界范数问题。 *Math. Soc. (JEMS)* 22 1 1 53, 2020 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(14):5311–5332，2015。[BM16] V. Blomer 和 P. Maga。PGL(n) 上尖点形式上确界范数的次凸性。 *Selecta Math. (N.S.)*，22(3):1269– 1287，2016。[BP16] V. Blomer 和 A. Pohl。秩二西格尔模空间上的上确界范数问题。 *Amer. J. Math.*，138(4):999– 1027，2016。[BT20] F. Brumley 和 N. Templier。GL $_n$ 26 4 63, 71，上尖点形式的大值。2020 *Selecta Math. (N.S.)*，( ):论文编号 。[Gil20] N. Gillman。PGL $_n$ $\mathbb{R}$ 206 46 61, ( ) 上尖点形式上确界范数的显式次凸性节省。 *J. Number Theory*，: – 。[GRS13] A. Ghosh、A. Reznikov 和 P. Sarnak。马斯形式的节点域 I。2020 *Geom. Funct. Anal.*，23 1568，2013 5 1515( ): – 。[IS95] H. Iwaniec 和 P. Sarnak。算术曲面上特征函数的 L^∞ 141 2 301 320, 范数。 *Ann. of Math. (2)*，( ): – 。[Mar] S. Marshall。半单群上马斯形式的上界。可见于 https://arxiv.org/abs/1405.7033。[RS94] Z. Rudnick 和 P. Sarnak。算术双曲流形上特征态的行为。 *Comm. Math. Phys.*，161 1 195( ): –213，1994。[Sar] P. Sarnak。致 Morawetz的信。可见于 http://publications.ias.edu/sites/default/files/Sarnak_Letter_to _Morawetz.pdf。

Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, POB 127, Budapest H-1364, Hungary
Email address: magapeter@gmail.com, gergely.zabradi@ttk.elte.hu

Eötvös Loránd University, Institute of Mathematics, Pázmány Péter sétány 1/C, Budapest H-1117, Hungary
Email address: gergely.zabradi@ttk.elte.hu