arXiv:2301.04406v1 [cs.DS] 11 Jan 2023

关于二元秩性质测试的注记

Nader H. Bshouty 以色列理工学院计算机科学系，海法，以色列。

2023年1月12日

摘要

设 M 是一个 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。我们将 M 的 s二元秩 br$_s(M)$ 定义为满足以下条件的最小整数 d：存在 d 个单色矩形，它们覆盖矩阵中的所有 1 元素，且每个 1 元素至多被 s 个矩形覆盖。当 $s = 1$ 时，这就是文献中已知的二元秩 br(M)。

设 $R(M)$ 和 $C(M)$ 分别为 M 的行集和列集。我们利用 Sgall [8] 的结果证明，若 M 的 s-二元秩至多为 d，则 $|R(M)| \cdot |C(M)| \le \binom{d}{\le s} 2^d$，其中 $\binom{d}{\le s} = \sum_{i=0}^{s} \binom{d}{i}$。该界是紧的；也就是说，存在一个 M'，其 s-二元秩为 d，且满足 $|R(M')| \cdot |C(M')| = \binom{d}{\le s} 2^d$。

利用这一结果，我们针对 s-二元秩至多为 d（且恰为 d）的 (0, 1)-矩阵，给出新的单边自适应测试器和非自适应测试器，分别进行 $\tilde{O}\left(\binom{d}{\le s} 2^d/\epsilon\right)$ 次和 $\tilde{O}\left(\binom{d}{\le s} 2^d/\epsilon^2\right)$ 次查询。

对于固定的 s，这使 Parnas 等人在 [7] 中提出的测试器的查询复杂度降低了 $\tilde{\Theta}(2^d)$ 倍。

1 引言

设 M 是一个 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。我们将 M 的 s 二元秩 br$_s(M)$ 定义为满足以下条件的最小整数 d：存在 d 个集合（矩形） $I_k \times J_k$，其中 $I_k \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}, J_k \subset [m], k \in [d]$，使得 [1] $M[i, j] = 1$ 对所有 $(i, j) \in I_k \times J_k$, $k \in [d]$（单色矩形）均成立；并且对于每个满足 $M[i, j] = 1$ 的 $(i, j) \in [n] \times [m]$，至少存在一个且至多存在 s 个整数 $t \in [d]$，使得 $(i, j) \in I_t \times J_t$（ M 中的每个 1 矩阵元素都至少被一个且至多被 s 个单色矩形覆盖）。当 $s = 1$ 时，br$_1(M)$ 即为二元秩 br(M)；当 $s = \infty$ 时，br $_\infty(M)$ 即为布尔秩。这两种秩在文献中均已有研究。例如，参见 [4]。

二元秩也可以如下定义。 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 M的二元秩等于最小的 d，使得存在 $n \times d$ (0, 1) 矩阵 N 和 $d \times m$ (0, 1) 矩阵 L，满足 $M = NL$。它也等于将一个二分图的所有边划分所需的最少二分团数，该二分图的邻接矩阵为 M。 M 的 s-二元秩是覆盖邻接矩阵为 M的二分图所有边所需的最少二分团数，其中每条边至多被 s 个二分团覆盖。文献 [2], 证明，对于任意给定的 δ，将二元秩近似到因子 $n^{1-\delta}$ 以内是 NP困难的。

[1] 对于 M，矩阵的 (i, j) 矩阵元素记作 $M[i, j]$。

输入一个 s-二元秩 [7] 的性质测试算法（测试器） $0 < \epsilon < 1$、整数 d、 n、 m，以及对 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 M中元素的查询权限。如果 M的 s-二元秩至多为 d （或等于 d），则测试器以至少 $2/3$的概率接受。如果 M 与满足 s-二元秩至多为 d （或等于 d）的矩阵相距 ϵ，即必须修改 M 中超过 ϵ比例的元素，才能得到一个 s-二元秩至多为 d （或等于 d）的矩阵，那么测试器以至少 $2/3$的概率拒绝。如果测试器以概率 1 接受 s-二元秩至多为 d （或等于 d）的矩阵，我们称之为单边错误测试器。在自适应测试中，查询可以依赖于先前查询的答案；而在非自适应测试中，所有查询都由测试器预先确定。目标是构造一个查询次数最少的测试器。

文献 [6, 7] 研究了 (0, 1) 矩阵的 s 二元秩至多为 d 时的可测试性。在 [6], , Nakar 和 Ron 提出了一种针对 $s = 1$ 的非自适应单边错误测试器，所需查询次数为 $\tilde{O}(2^{4d}/\epsilon^4)$。在 [7], , Parnas 等人提出了针对 $s = 1$ 的非自适应和自适应单边错误测试器，所需查询次数分别为 $O(2^{2d}/\epsilon^2)$ 和 $O(2^{2d}/\epsilon)$。文献 [7] 中的结果对于 s 二元秩至多为 d 的情形也成立。本文证明，对于 s 二元秩至多为 d 且等于 d 的情形，

定理 1. 存在一种针对 $n \times m$ (0, 1) 矩阵的 s 二元秩的自适应单边错误测试器，所需查询次数为 $\tilde{O}\left(\binom{d}{\leq s} 2^d/\epsilon\right)$。

定理 2。存在一个非自适应单边错误测试器，用于测试 s-二元秩为 $n \times m$ (0, 1)- 矩阵，并进行 $\tilde{O}\left(\binom{d}{\leq s} 2^d/\epsilon^2\right)$ 次查询。

对于固定的 s，这将 Parnas 等人在 [7] 中的查询复杂度提高了 $\tilde{O}(2^d$倍).

1.1 我们的方法

Parnas 等人的测试器 [7] 利用了以下事实：如果 M'是 M的一个 $k \times k$子矩阵，且 M'的s-二元秩至多为 d，那么

1. M' 至多有 2^d 个不同的行和 2^d 个不同的列。2. 如果 M 距离具有至多为 d的 s-二元秩有 ϵ远，那么从 M' 出发，再从 M中均匀随机抽取一行和一列进行扩展，得到 M的一个 $(k+1) \times (k+1)$ 子矩阵 M''，其满足以下条件的概率至少为 $\Omega(\epsilon)$： M'' 中的不同的行数比 M' 多一，或者 M''中的不同的列数比 M'多一。

因此，他们的自适应测试器运行 $O(2^d/\epsilon)$ 次迭代。在每次迭代中，它从 M' 中均匀随机地扩展出一行和一列。令 M'' 为所得的子矩阵。如果 M'' 的 s二元秩大于 d，则测试器拒绝。如果 M'' 中不同的行数或列数大于 M' 中的数量，则它使用 $M' \leftarrow M''$ 继续下一次迭代。否则，它使用 M' 继续下一次迭代。如果在 $O(2^d/\epsilon)$ 次迭代之后， M' 的 s二元秩为 d，则测试器接受。

如果 s-二元秩的 M 为 d，那么每个子矩阵的 s-二元秩均为 d，测试器会接受。如果 M 距离具有至多为 d的 s-二元秩至少为 ϵ，那么：由于在每次迭代中，以至少 $\Omega(\epsilon)$ 的概率， M' 中不同的行数或列数会增加一；并且由于 s-二元秩为 d 的矩阵至多有 2^d 个不同的行和 2^d 个不同的列，因此以高概率，我们会得到 M' ，其 s-二元秩大于 d ，测试器会拒绝。该

测试器的查询复杂度为 $O(2^{2d}/\epsilon)$，即矩阵 M'的元素数 $O(2^{2d})$，乘以通过添加一行和一列来扩展 M' 所需的试验次数 $O(1/\epsilon)$。

现在给出我们的方法。若子矩阵 M' of M 具有互不相同的行和列，则称其为完美的。我们的自适应测试器利用了以下事实：如果 M'是 $M$of s-二元秩为 d 的一个完美 $k \times k'$子矩阵，那么

1. $kk' \leq \binom{d}{\leq s} 2^d$。2. 如果 M 距离具有至多 d 的 ϵ-二元秩有 s 这么远，那么以下情况至少有一种会发生

(a) 以至少 $\Omega(\epsilon)$ 的概率，在 M 中均匀随机选取一列并将其加入 M'，得到 M 的一个完美 $k \times (k'+1)$ 子矩阵 M''。(b) 以至少 $\Omega(\epsilon)$ 的概率，在 M 中均匀随机选取一行并将其加入 M'，得到 M 的一个完美 $(k+1) \times k'$子矩阵 M''。(c) 以至少 $\Omega(\epsilon)$ 的概率，在 M 中均匀随机选取一列和一行并将它们加入 M'，得到 M 的一个完美[2] $(k+1) \times (k'+1)$ 子矩阵 M''。

第 1 项由 [8] 中的 Sgall 结果推出（见第 3 节），第 2 项则是 [7] 中的断言 10。现在，测试器策略如下。如果 $k \leq k'$，测试器首先尝试用一列扩展 M'。如果成功，就进入下一次迭代。否则，它尝试用一行扩展 M'。如果成功，就进入下一次迭代。否则，它尝试用一行和一列扩展 M'。如果成功，就进入下一次迭代。如果失败，就接受。如果 $k' < k$，则先从行开始，然后是列，最后同时尝试二者。

采用这一策略，我们证明，查询复杂度至多为 M' 的大小$kk' \leq \binom{d}{\leq s} 2^d$ 乘以试验次数 $\tilde{O}(1/\epsilon)$ 的量级，用于找到新行、新列或二者。这达到了定理 1 中的查询复杂度。

对于非自适应测试器，测试器均匀随机地选择 $t = \tilde{O}\left(\binom{d}{\leq s} 2^d/\epsilon^2\right)$ 行r_1，……，$r_t \in [n]$ 以及 t 列 c_1，……，$c_t \in [m]$，并查询所有 $M[r_i, c_j]$（对所有 $i \cdot j \leq t$），然后将它们放入一个表格中。接着运行上述非自适应测试器。当非自适应测试器要求均匀随机地选择一行或一列时，它会分别提供下一个元素 r_i 或 c_j。随后根据表格回答查询。我们证明，自适应算法在停止之前无需进行表格中没有的查询。这实现了定理 2 中的查询复杂度。

1.2 其他秩问题

$n \times m$-矩阵 M 在任意域 F 上的实秩，是满足以下条件的最小 d：存在一个 $n \times d$ 矩阵 N，其元素取自 F，以及一个 $d \times m$ 矩阵 L，其元素取自 F，使得 $M = NL$。实秩的可测试性已在 [1, ? 、 5] 中得到研究。在 [1], , Balcan 等人提出了一种用于实秩的非自适应测试器，其查询复杂度为 $\tilde{O}(d^2/\epsilon)$。他们还证明了这一查询复杂度是最优的。

布尔秩（∞-二元秩）在 [6, 7] 中得到了研究。Parnas 等人在 [7] 中给出了一个用于布尔秩的非自适应测试器，其查询次数为 $\tilde{O}(d^4/\epsilon^4)$[3]。

[2]可能会出现事件 (a) 和 (b) 不发生，而 (c) 发生的情况[3] [7] 中的查询复杂度为 $\tilde{O}(d^4/\epsilon^6)$。我们注意到，[7] 中的引理 3在将 $(\epsilon^2/64)n^2$ 替换为 $(\epsilon/4)n^2$时仍然成立。为证明这一点，在引理 3 的证明中，将修改规则 1 和 2 替换为以下修改：将所有有益项修改为 0。由此得到此处所述的结果，[3]。

2 定义和预备结果

设 M 是一个 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。我们分别用 $R(M)$ 和 $C(M)$ 表示 M 的行集和列集。M 中不同的行数和列数分别记为 $r(M) = |R(M)|$ 和 $c(M) = |C(M)|$。$n \times m$ 矩阵 M 的二元秩 $\mathrm{br}(M)$ 等于满足以下条件的最小 d：存在一个 $n \times d$ (0, 1) 矩阵 N 和一个 $d \times m$ (0, 1) 矩阵 L，使得 $M = NL$。

我们将 s-二元秩 $\mathrm{br}_s(M)$ 定义为满足以下条件的最小整数 d：存在 d 个集合（矩形）$I_k \times J_k$，其中 $I_k \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}, J_k \subset [m], k \in [d]$，使得对于所有 $(i, j) \in I_k \times J_k, k \in [d]$（单色矩形），并且对于每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$，其中 $M[i, j] = 1$，至少存在一个且至多存在 s 个整数 $t \in [d]$，使得 $(i, j) \in I_t \times J_t$（$M$ 中的每个 1 矩阵元素至少被一个且至多被 s 个单色矩形覆盖）。

现在我们来证明。

引理1. 设 M 是一个 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。M 的 s-二元秩 $\mathrm{br}_s(M)$ 等于满足以下条件的最小整数 d：存在一个 $n \times d$ (0, 1) 矩阵 N 和一个 $d \times m$ (0, 1) 矩阵 L，使得：对于 $P = NL$,

1. 对每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$, $M[i, j] = 0$ 当且仅当 $P[i, j] = 0$。2. 对每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$, $P[i, j] \leq s$.

证明。如果 M的 s-二元秩为 d，那么存在矩形 $\{I_k \times J_k\}_{k \in [d]}, I_k \subseteq [n], J_k \subset [m], k \in [d]$，使得对于所有 $(i, j) \in I_k \times J_k, k \in [d]$，都有 $M[i, j] = 1$；并且对于每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$，其中 $M[i, j] = 1$，至少存在一个且至多存在 s 个整数 $t \in [d]$，使得 $(i, j) \in I_t \times J_t$。定义行向量$a^{(k)} \in \{0, 1\}^n$和 $b^{(k)} \in \{0, 1\}^m$，其中 $a_i^{(k)} = 1$ 当且仅当 (iff) $i \in I_k$，而 $b_j^{(k)} = 1$ 当且仅当 $j \in J_k$。然后定义[4] $P = a^{(1)\prime} b^{(1)} + \cdots + a^{(d)\prime} b^{(d)}$。不难看出，$(a^{(k)\prime} b^{(k)})[i, j] = 1$ 当且仅当 $(i, j) \in I_k \times J_k$。因此，$P[i, j] = 0$ 当且仅当 $M[i, j] = 0$，并且对于所有 $(i, j) \in [n] \times [m]$，都有 $P[i, j] \leq s$。定义 $n \times d$矩阵 $N = \left[a^{(1)\prime} | \cdots | a^{(d)\prime}\right]$ 和 $d \times m$矩阵 $L = \left[b^{(1)\prime} | \cdots | b^{(d)\prime}\right]'$。同样不难看出$P = NL$。

通过回溯上述证明，可以很容易看出另一个方向。 □

现在我们证明以下结论：

引理 2. 设 M 是一个 $n \times m$ 矩阵。设 N 和 L 分别是 $n \times d$ 个 (0, 1) 矩阵和 $d \times m$ 个 (0, 1) 矩阵，满足 $P = NL$。则 $r(P) \leq r(N)$ 且 $c(P) \leq c(L)$。

证明. 我们对 r 证明该结论。对 c 的证明类似。设 $r_1, \ldots, r_n$ 是 N 的行，且 $p_1, \ldots, p_n$ 是 P 的行。那么 $p_i = r_i L$。因此，若 $r_i = r_j$，则 $p_i = p_j$。于是，$r(P) \leq r(N)$。

□

设 M 是一个 $n \times m$ 矩阵。对于 $x \in X \subseteq [n], y \in Y \subseteq [m]$，我们用 $M[X, Y]$ 表示 M 的 $|X| \times |Y|$ 子矩阵，$(M[x', y'])_{x' \in X, y' \in Y}$。用 $M[X, y]$ 表示列向量 $(M[x', y])_{x' \in X}$，用$M[x, Y]$ 表示行向量 $(M(x, y'))_{y' \in Y}$。

对于 $x \in [n]$（分别地，对于 $y \in [m]$），如果 $M[X, y]$ 不等于 $M[X, Y]$ 的任何一列，我们就称其为 $M[X, Y]$ 的新列；（分别地，如果 $M[x, Y]$ 不等于 $M[X, Y]$ 的任何一行，我们就称其为 $M[X, Y]$ 的新行）。

[4]这里，x' 是 x的转置。

引理 3. 设 M 为一个 $n \times m$ 矩阵， $x \in [n]$、 $X \subseteq [n]$、 $y \in [m]$ 和 $Y \subseteq [m]$。假设 $M[x,Y]$ 不是 $M[X,Y]$ 的新行，且 $M[X,y]$ 不是 $M[X,Y]$ 的新列。那么， $M[x,Y \cup \{y\}]$ 是 $M[X,Y \cup \{y\}]$ 的新行，当且仅当 $M[X \cup \{x\},y]$ 是 $M[X \cup \{x\},Y]$ 的新列。

证明。若 $M[x,Y \cup \{y\}]$ 不是 $M[X,Y \cup \{y\}]$的新行，则存在 $x' \in X$ 使得 $M[x,Y \cup \{y\}] = M[x',Y \cup \{y\}]$。由于 $M[X,y]$ 不是 $M[X,Y]$的新列，因此存在 $y' \in Y$ 使得 $M[X,y] = M[X,y']$。由于 $M[x,Y \cup \{y\}] = M[x',Y \cup \{y\}]$，我们有 $M[x',y'] = M[x,y']$和 $M[x,y] = M[x',y]$。由于 $M[X,y] = M[X,y']$，我们有 $M[x',y] = M[x',y']$。因此， $M[x,y] = M[x,y']$ 和 $M[X \cup \{x\},y] = M[X \cup \{x\},y']$。于是， $M[X \cup \{x\},y]$不是 $M[X \cup \{x\},Y]$的新列。

同样，另一个方向也可推出。 □

3 s-二元秩矩阵 d

本节将证明以下两个引理。

引理 4. 对于任意 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 M，其 s-二元秩至多为 d，有

$$r(M) \cdot c(M) \leq \binom{d}{\leq s} 2^d.$$

引理 5. 存在一个 (0, 1) 矩阵 M'，其 s-二元秩为 d，满足 $r(M') \cdot c(M') = \binom{d}{\leq s} 2^d$.

为证明引理 4，我们使用以下 Sgall 引理。

引理 6. *[8]*. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^{[d]}$ 满足：对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$， $|A \cap B| \leq s$。那么 $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq \binom{d}{\leq s} 2^d$.

现在证明引理 4。

证明。由于 M 的 s-二元秩至多为 d，由引理1可知，存在一个 $n \times d$ (0, 1) 矩阵 N 和一个 $d \times m$ (0, 1) 矩阵 L，使得对于 $P = NL$

1. 对于每个 $(i,j) \in [n] \times [m]$， $M[i,j] = 0$ 当且仅当 $P[i,j] = 0$。
2. 对于每个 $(i,j) \in [n] \times [m]$， $P[i,j] \leq s$.

显然， $r(M) \leq r(P)$ 且 $c(M) \leq c(P)$。考虑 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq 2^{[d]}$ 和 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq 2^{[d]}$，其中 $A_i = \{j | N_{i,j} = 1\}$ 且 $B_k = \{j | L_{j,k} = 1\}$。由于 $P = NL$ 的元素至多为 s，对于每个 $i \in [n]$ 和 $k \in [m]$， $|A_i \cap B_k| \leq s$。

由引理 2 和引理 6，

$$r(M) \cdot c(M) \leq r(P) \cdot c(P) \leq r(N) \cdot c(L) = |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq \binom{d}{\leq s} 2^d.$$

□

现在我们证明引理 5

证明。令 N 为一个 $2^d \times d$ (0, 1) 矩阵，其行包含 $\{0,1\}^d$ 中的所有向量。令 L 为一个 $d \times \binom{d}{\leq s}$ 矩阵，其列包含 $\{0,1\}^d$ 中重量不超过 s 的所有向量。显然，$P = NL$ 是一个 $2^d \times \binom{d}{\leq s}$ 矩阵，其元素均小于或等于 s。定义一个 $2^d \times \binom{d}{\leq s}$ (0, 1) 矩阵 M'，其中 $M'[i,j] = 0$ 当且仅当 $P[i,j] = 0$。那么，根据引理1，M' 的 s二元秩至多为 d。现在我们证明 $r(M') \cdot c(M') = \binom{d}{\leq s} 2^d$。

由于恒等 $d \times d$ 矩阵 I_d 是 L的子矩阵，我们可知 $NI_d = N$ 是一个 (0, 1) 矩阵，且是 P的子矩阵，因此也是 M'的子矩阵。因此，$r(M') \geq r(N) = 2^d$。由于 I_d 是 N的子矩阵，根据同样的论证，$c(M') \geq c(L) = \binom{d}{\leq s}$。因此，$r(M') \cdot c(M') \geq \binom{d}{\leq s} 2^d$。于是，$r(M') \cdot c(M') = \binom{d}{\leq s} 2^d$。

现在我们证明 M'的 s-二元秩为 d。反设不然，即 M'的二元秩为$d' < d$。那么存在 $2^d \times d'$ (0, 1) 矩阵 N和 $d' \times \binom{d}{\leq s}$ (0, 1) 矩阵 L，使得 $P = NL$，且 $M'[i,j] = 0$当且仅当 $P[i,j] = 0$。由引理 2，$r(M') \leq r(P) \leq r(N) \leq 2^{d'} < 2^d$，这就得出了矛盾。

□

4 测试 s-二元秩

本节介绍用于测试 s-二元秩至多为 d的自适应和非自适应测试算法。我们先给出自适应算法，并证明定理 1。

4.1 自适应测试器

本节证明定理 1。

考虑图 1 中的测试器 Adaptive-Test-Rank。在主 while 循环（步骤 2）的每次迭代中，测试器都有一个 M的行集合 X，以及一个 M的列集合 Y。如果 $|X| \geq |Y|$（步骤 5），测试器首先尝试用新列扩展 $M[X,Y]$（步骤 6-8）。如果成功，则进入下一次迭代。否则，它尝试用新行扩展 $M[X,Y]$（步骤 9-12）。如果成功，则进入下一次迭代。否则，它尝试用新行和新列扩展 $M[X,Y]$（步骤 21-26）。如果成功，则进入下一次迭代。如果失败，则接受（步骤 27）。如果 $|X| < |Y|$（步骤 13），则先从 $M[X,Y]$ 的行开始（步骤 14-16），然后是列（步骤 18-20），最后是两者（步骤 21-26）。如果失败，则接受（步骤 27）。

如果 $|X| \cdot |Y| > \binom{d}{\leq s} 2^d$（步骤 2，然后是步骤 28），或者 $M[X,Y]$ 的 s-二元秩大于 d（步骤 3），则拒绝。

我们首先证明
引理 7。设 $t = 9d/\epsilon$。测试器 Adaptive-Test-Rank 至多进行 $2\binom{d}{\leq s} 2^d t = \tilde{O}\left(\binom{d}{\leq s} 2^d\right)/\epsilon$ 次查询。

证明。我们通过归纳法证明，在主 While 循环（步骤 2）的每次迭代中，测试器都知道 $M[X,Y]$的元素，并且查询总数 $q_{X,\ Y}$ 至多为 $2|X||Y|t$。由于 While 循环的条件是$|X||Y| \leq \binom{d}{\leq s} 2^d$，结论得证。

在算法开始时，不进行任何查询，且 $|X| = |Y| = 1$。然后 $2|X||Y|t = 2t > 0 = q_{X,\ Y}$。假设在第 k次迭代时，测试器已知 $M[X,Y]$和$q_{X,\ Y} \leq 2|X||Y|t$ 的元素。我们证明第 $(k+1)$ 次迭代的结果。

我们分以下几种情况讨论（在第 $(k+1)$ 次迭代时）
情况 I。$|X| \geq |Y|$（步骤 5），并且对于某个 x，$M[x,Y]$是 $M[X,Y]$的一行新行（步骤 8）。

Adaptive-Test-Rank(d, s, M, n, m, ϵ)
输入：访问 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 M 的元素的预言机。
输出："接受"或"拒绝"

1. $X \leftarrow \{1\}$； $Y \leftarrow \{1\}$； $t = 9d/\epsilon$。
2. 当 $|X| \cdot |Y| \leq \binom{d}{\leq s} 2^d$ 时执行
3. 如果 $M[X, Y]$ 的 s-二元秩大于 d，则拒绝。
4. $Finish \leftarrow False$； $X' \leftarrow \emptyset$； $Y' \leftarrow \emptyset$。 /* X'和 Y'是多重集。
5. 如果 $|X| \geq |Y|$，则
6. 当（非 $Finish$）且 $|X'| < t$时
7. 均匀随机抽取 $x \in [n] \backslash X$； $X' \leftarrow X' \cup \{x\}$；
8. 如果 $M[x, Y]$是 $M[X, Y]$的新行，则 $X \leftarrow X \cup \{x\}$； $Finish \leftarrow True.$
9. 如果（非 $Finish$），则
10. 当（非 $Finish$）且 $|Y'| < t$
11. 均匀随机抽取 $y \in [m] \backslash Y$； $Y' \leftarrow Y' \cup \{y\}$。
12. 如果 $M[X, y]$是 $M[X, Y]$的新列，那么 $Y \leftarrow Y \cup \{y\}$； $Finish \leftarrow True.$
13. 否则（$|X| < |Y|$）
14. 当（非 $Finish$）且 $|Y'| < t$
15. 均匀随机抽取 $y \in [m] \backslash Y$； $Y' \leftarrow Y' \cup \{y\}$；
16. 如果 $M[X, y]$ 是 $M[X, Y]$ 的新列，则 $Y \leftarrow Y \cup \{y\}$； $Finish \leftarrow True.$
17. 如果（非 $Finish$），则
18. 当（非 $Finish$）且 $|X'| < t$ 时
19. 均匀随机抽取 $x \in [n] \backslash X$； $X' \leftarrow X' \cup \{x\}$
20. 如果 $M[x, Y]$ 是 $M[X, Y]$ 的新行，则 $X \leftarrow X \cup \{x\}$； $Finish \leftarrow True.$
21. 当（非 $Finish$）且 $X' \neq \emptyset$ 时，执行
22. 均匀随机抽取 $x \in X'$ 和 $y \in Y'$
23. 如果 $M[x, Y \cup \{y\}]$是 $M[X, Y \cup \{y\}]$的新行，或者等价地，
24. $M[X \cup \{x\}, y]$是 $M[X \cup \{x\}, Y]$的新列
25. 那么 $X \leftarrow X \cup \{x\}$； $Y \leftarrow Y \cup \{y\}$； $Finish \leftarrow True$。
26. 否则 $X' \leftarrow X' \backslash \{x\}$； $Y' \leftarrow Y' \backslash \{y\}$。
27. 如果（非 $Finish$），则接受
28. 拒绝

图 1：用于测试二元秩至多为 d 的 s 的自适应测试器。

在这种情况下， $Finish$ 变为 $true$，且不会执行其他子 while 循环。因此，在这次迭代中进行的查询次数至多为 $|Y|t$（以找出所有 $M[x, Y]$），并将一个元素 x 添加到 X。然后，测试器知道 $M[X \cup \{x\}, Y]$ 的所有元素，并

$$q_{X \cup \{x\}, Y} = q_{X,Y} + |Y|t \leq 2|X||Y|t + |Y|t \leq 2|X \cup \{x\}| \cdot |Y|t,$$

由此即可得出结论。
情况 II。对于所有的 $x' \in X'$， $M[x', Y]$ 都不是 $M[X, Y]$ 的新行（步骤 8）；对于某个 y，$M[X, y]$ 是 $M[X, Y]$ 的新列（步骤 12）。

在这种情况下， $Finish$ 变为 $true$，并且第二个子 while 循环之后不会再执行其他子 while 循环（步骤 10）。

因此，在这种情况下，此次迭代中所进行的查询次数至多为 $|Y|t + |X|t$。第一个子 while 循环中至多进行 $|X|t$ 次查询（以找出所有 $x \in X'$ 对应的 $M[x, Y]$），第二个子 while 循环中至多进行 $|Y|t$ 次查询（以找出所有 $y' \in Y'$ 对应的 $M[X, y']$ ）。随后，将一个元素 y 添加到 Y 中。因此，测试器知道 $M[X, Y \cup \{y\}]$ 的元素，并且由于 $|Y| \leq |X|$,

$$q_{X,Y\cup\{y\}} = q_{X,Y} + |X|t + |Y|t \leq 2|X||Y|t + 2|X|t = 2|X| \cdot |Y \cup \{y\}|t,$$

结论随即得出。

情况 III。对于所有 $x' \in X'$， $|X| \geq |Y|$; 对于所有 $y' \in Y'$， $M[x', Y]$ 不是 $M[X, Y]$ 的新行； $M[X, y']$ 不是 $M[X, Y]$ 的新列；并且对于某个 $x \in X'$， $y \in Y'$， $M[x, Y \cup \{y\}]$ 是 $M[X, Y \cup \{y\}]$ 的新行（步骤 23）。

在这种情况下， $|X'| = |Y'| = t$，查询次数为 $|X|t + |Y|t + t$。第一个子 while 循环中恰好有 $|X|t$ 次查询，第二个子 while 循环中恰好有 $|Y|t$ 次查询，步骤 21 中的子 while 循环最多有[5] t 次查询。随后，将一个元素 x 添加到 X，并将一个元素 y 添加到 Y。然后，测试器知道 $M[X \cup \{x\}, Y \cup \{y\}]$ 的元素以及

$$q_{X\cup\{x\},Y\cup\{y\}} = q_{X,Y} + |X|t + |Y|t + t \leq 2|X| \cdot |Y|t + |X|t + |Y|t + t \leq 2|X \cup \{x\}| \cdot |Y \cup \{y\}|t.$$

情况 IV。 $|X| \geq |Y|$, 对于所有 $x' \in X'$， $M[x', Y]$ 都不是 $M[X, Y]$ 的新行；对于所有 $y' \in Y'$， $M[X, y']$ 都不是 $M[X, Y]$ 的新列；对于所有抽取的配对 $x \in X'$， $y \in Y'$， $M[x, Y \cup \{y\}]$ 都不是 $M[X, Y \cup \{y\}]$ 的新行（步骤 23）。

在这种情况下， $Finish$ 的值为 $False$，测试器在步骤 27 中接受 .

当 $|X| < |Y|$ 时的情况分析与上述分析类似。 □

现在我们证明该测试器的完备性。

引理 8. 如果 M 是一个 s 二元秩至多为 d 的 $n \times m$ (0, 1) 矩阵，那么测试器 Adaptive- Test-Rank 以概率 1 接受。

证明. 当且仅当以下情况之一发生时，测试器拒绝,

1. $M[X, Y]$ 的 s 二元秩大于 d。2. $|X| \cdot |Y| > \binom{d}{\leq s} 2^d$。

如果 $M[X, Y]$ 的 s-二元秩大于 d，那么 M 的 s-二元秩大于 d。这是因为，如果 $M = NL$，那么 $M[X, Y] = N[X, [d]] \cdot L[[d], Y]$。因此，情况 1 不可能发生。

在证明情况 2 不可能发生之前，我们先证明以下结论:

结论 1。 $M[X, Y]$ 的行（分别是列）互不相同。

证明。测试器中添加行或列的步骤为步骤 8、12、16、20 和 23。在步骤 8、12、16、20 中，只有当某行（分别地，某列）是 $M[X, Y]$ 的新行（分别地，新列）时，才会添加该行（分别地，该列）。考虑步骤 23，并且不失一般性地假设 $|X| \geq |Y|$。仅当 $Finish = False$ 时才执行此步骤。当 $|X'| = |Y'| = t$ 时会出现这种情况：对于每个 $x \in X'$， $M[x, Y]$ 都不是 $M[X, Y]$ 的新行；对于每个 $y \in Y'$， $M[X, y]$ 都不是 $M[X, Y]$ 的新列。于是 x

[5]这是因为，对于 $x \in X'$、 $y \in Y'$，测试器已经从第一个和第二个子 while 循环中获知 $M[x, Y]$ 和 $M[X, y]$，只需查询 $M[x, y]$。

若 $M[x, Y \cup \{y\}]$ 是 $M[X, Y \cup \{y\}]$ 的新行，则将 y 添加到 X 和 Y 中。然后，根据引理 3，$M[X \cup \{x\}, y]$ 是 $M[X \cup \{x\}, Y]$ 的新列。因此，$M[X \cup \{x\}, Y \cup \{y\}]$ 中的行（和列）各不相同。这就得出了所需结果。

□

反设 $|X| \cdot |Y| > \binom{d}{\leq s} 2^d$。由于 $M' = M[X, Y]$ 满足 $r(M')c(M') = |X| \cdot |Y| > \binom{d}{\leq s} 2^d$，根据引理 4，$M'$ 的 s-二元秩，因此 M 的二元秩，大于 d。矛盾。

□

现在我们证明该测试器的可靠性。
我们先证明以下结论。

断言 2. 设 M 是一个 $n \times m$ (0, 1) 矩阵，$X \subseteq [n]$，且 $Y \subseteq [m]$。假设存在两个函数，$' \colon [n] \to X$ 和 $'' \colon [m] \to Y$，使得

1. 对每个 $x \in [n]$，$M[x, Y] = M[x', Y]$。 2. 对每个 $y \in [m]$，$M[X, y] = M[X, y'']$。 3. 对每个 $x \in [n]$ 和 $y \in [m]$，$M[x, y] = M[x', y'']$。

那么，M 至多有 $|X|$ 个不同的行和 $|Y|$ 个不同的列，其 s-二元秩等于 $M[X, Y]$ 的 s-二元秩。

证明。令 $x \in [n] \backslash X$。对于每个 y，$M[x, y] = M[x', y''] = M[x', y]$。因此，$M$ 中的行 x 等于行 x'。类似地，M 中的列 y 等于列 y''。
由于向矩阵添加相同的列和行不会改变其 s-二元秩[6]，，因此 $\mathrm{br}_s(M[X, Y]) = \mathrm{br}_s(M[X, [m]]) = \mathrm{br}_s(M)$。 □

以下断言在 [7] 中得到了证明（断言 10）。这里，为了完备性，我们给出证明。

断言 3。设 M 是一个 (0, 1) 矩阵，且距离具有至多为 d 的 s-二元秩有 ϵ 之远。设 $X \subseteq [n]$ 和 $Y \subseteq [m]$，使得 $\mathrm{br}_s(M[X, Y]) \leq d$，$M[X, Y]$ 的列互不相同，且 $M[X, Y]$ 的行互不相同。那么，以下情况必有一种成立：

1. 满足 $M[x, Y]$ 是从 $M[X, Y]$ 添加的新行的行数 $x \in [n]$ 至少为 $n\epsilon/3$。 2. 满足 $M[X, y]$ 是从 $M[X, Y]$ 添加的新列的列数 $y \in [m]$ 至少为 $m\epsilon/3$。 3. 满足以下条件的数对 (x, y)，$x \notin X$，$y \notin Y$ 的数量至少为 $mn\epsilon/3$：$M[x, Y] = M[x', Y]$ 对某个 $x' \in X$ 成立，$M[X, y] = M[X, y'']$ 对某个 $y'' \in Y$ 成立，并且 $M[x, y] \neq M[x', y'']$。

证明。反设上述陈述均不成立。将 M 中每个满足 $M[x, Y]$ 是添加到 $M[X, Y]$ 的新行的行 x 改为零行。令 X' 为这些行的集合。将 M 中每个满足 $M[X, y]$ 是添加到 $M[X, Y]$ 的新行的列 y 改为零列。令 Y' 为这些列的集合。对于其他每个矩阵元素 (x, y)，若 $x \notin X$，$y \notin Y$ 未被改为零且 $M[x, y] \neq M[x', y'']$，则将 $M[x, y]$ 改为 $M[x', y'']$。令 M' 为经过上述修改后得到的矩阵。

其中满足 $M[x, y] \neq M'[x, y]$ 小于 $(n\epsilon/3)m + (m\epsilon/3)n + mn\epsilon/3 = \epsilon mn$ 的元素数量为 (x, y)。因此，M' 与 M 的距离不超过 ϵ。根据断言 3，$\mathrm{br}_s(M') = \mathrm{br}_s(M[[n] \backslash X', [m] \backslash Y']) = \mathrm{br}_s(M[X, Y]) \leq d$。矛盾。

□

[6]如果我们向矩阵添加一列，且该列与列 y 相同，那么覆盖列 y 的矩形也可以延伸到新增的列。

现在我们证明该测试器的完备性。

引理 9. 如果 M 与具有 s-二元秩 d 的性质相距至少 ϵ，那么 Adaptive-Test-Rank 以至少 $2/3$ 的概率拒绝。

证明. 考虑第 i 次迭代时步骤 2 中的 While循环。如果 $\mathrm{br}_s(M[X,Y]) > d$，那么测试器会在步骤 3 拒绝。现在我们将证明，如果 $\mathrm{br}_s(M[X,Y]) \le d$，那么测试器在第 i 次迭代时接受的概率至多为 $3e^{-2d}$。

为此，设 $\mathrm{br}_s(M[X,Y]) \le d$。那么，根据断言 3，以下情况之一成立。

1. 满足 $M[x,Y]$ 是 $M[X,Y]$ 的新行的行 $x \in [n]$ 至少有 $n\epsilon/3$ 个。 2. 满足 $M[X,y]$ 是 $M[X,Y]$ 的新列的列 $y \in [m]$ 至少有 $m\epsilon/3$ 个。 3. 数对 (x,y)，$x \notin X$，$y \notin Y$，其中，对某个 $x' \in X$，$M[x,Y] = M[x',Y]$，对某个 $y'' \in Y$，$M[X,y] = M[X,y'']$，且 $M[x,y] \neq M[x',y'']$，至少有 $mn\epsilon/3$ 个。

现在进行到第 i 次迭代时，不失一般性，假设 $|X| \ge |Y|$（另一种情况 $|Y| < |X|$ 类似）。如果出现情形 1，那么测试器以至少 $p = 1 - (1-\epsilon/3)^t \ge 1 - e^{-2d}$ 的概率找到一行作为 $M[X,Y]$，并且在第 i 次迭代时不接受。如果出现情形 2，那么如果它没有找到一行作为 $M[X,Y]$，则测试器以至少 p 的概率找到一列作为 $M[X,Y]$，并且不接受。如果出现情形 3，且它没有找到一行或一列作为 $M[X,Y]$，那么它以至少 p 的概率找到这样一对，并且不接受。因此，测试器在第 i 次迭代时接受的概率至多为 $3(1-p) \le 3e^{-2d}$。

由于 While循环至多运行 $|X| + |Y| \le 2|X||Y| \le 2\binom{d}{\le s}2^d \le 2^{2d+1}$ 次，测试器在 While循环中接受的概率至多为 $3e^{-2d}2^{2d+1} \le 1/3$。因此，测试器在 While循环中不接受的概率至少为 $2/3$。所以，它要么因 $\mathrm{br}_s(M[X,Y]) > d$ 而拒绝，要么在第 28 步拒绝。

□

4.2 非自适应测试器

本节中，我们证明定理 2。

首先，考虑图 1 中的 Adaptive-Test-Rank。考虑第 7、11、15 和 19 步，在这些步骤中，它会抽取一列或一行。我们来证明。

引理 10。设 $t = 9d/\epsilon$。在 Adaptive-Test-Rank 的每次迭代中，均匀随机抽取的行 $x \in [n]$ 的总数至多为 $(|X| + \min(|X|, |Y| - 1))t$，而均匀随机抽取的行 $y \in [m]$ 的数量至多为 $(|Y| + \min(|X|, |Y|))t$。

证明。我们通过归纳法证明，在主 while 循环（步骤 2）的每次迭代中，测试器抽取的随机行总数 $n_{X,Y}$ 至多为 $(|X| + \min(|X|, |Y| - 1))t$，抽取的随机列总数 $m_{X,Y}$ 至多为 $(|Y| + \min(|X|, |Y|))t$。

初始时，$|X| = |Y| = 1$，列数和行数均为 1。在这种情况下，[7] $n_{X,Y} = 1 \le t$ 且 $m_{X,Y} = 1 \le 2t$。假设在第 k 次迭代时，归纳命题成立。我们证明命题在第 $(k+1)$ 次迭代时也成立。

在第 $(k+1)$ 次迭代时，分为以下几种情况。

情况 I。$|X| \ge |Y|$（步骤 5），并且对于某个 x，$M[x,Y]$ 是要添加到 $M[X,Y]$（步骤 8）中的新行。

[7] 我们假设抽取的第一列/行是第 1 列/行

Non-Adaptive-Test-Rank(d, s, M, n, m, ϵ)
输入：可访问 (0, 1) 矩阵 M 的元素的预言机。
输出："接受"或"拒绝"。

1. $T \leftarrow \frac{324 \cdot d^2 (\sum_{i \le s} \binom{d}{i}) 2^d}{\epsilon^2}$.
2. 从 $x^{(1)}, \ldots, x^{(T)} \in [n]$ 中均匀随机抽取。
3. 从 $y^{(1)}, \ldots, y^{(T)} \in [m]$ 中均匀随机抽取。
4. 对于每个 $i \in [T]$ 和 $j \in [T]$，使得 $i \cdot j \le T$
5. $D[i, j] \leftarrow$ 查询 $M[x^{(i)}, y^{(j)}]$
6. $u = 1$; $w = 1$.
7. 运行 Adaptive-Test-Rank(d, s, M, n, m, ϵ)
   当测试器要求均匀随机的 x 时——返回 $x^{(u)}$; $u \leftarrow u + 1$
   当测试器要求均匀随机的 y 时——返回 $y^{(w)}$; $w \leftarrow w + 1$
   当测试器发出查询 $M[x^{(i)}, y^{(j)}]$ 时——返回 $D[i, j]$

图 2：用于测试 s-二元秩至多为 d 的非自适应测试器。

在这种情况下， $Finish$ 变为 $true$，并且不会执行其他子 while 循环。因此，此次迭代绘制的行数至多为 t，并且会向 X中添加一个元素 x 。不会绘制任何列。然后，

$$n_{X\cup\{x\},Y} \le n_{X,Y} + t \le (|X| + \min(|X|, |Y| - 1) + 1)t \le (|X \cup \{x\}| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y| - 1))t,$$

and

$$m_{X\cup\{x\},Y} = m_{X,Y} \le (|Y| + \min(|X|, |Y|))t \le (|Y| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y|))t.$$

因此，这种情况下的结论成立。
情况 II。对于所有 $x' \in X'$， $|X| \ge |Y|$（步骤 5）都不是 $M[X, Y]$（步骤 8）中的新行；对于某个 y， $M[X, y]$ 是 $M[X, Y]$（步骤 12）中的新列。

在这种情况下， $Finish$ 变为 $true$，并且在第二个子 while 循环（步骤 10）之后，不会执行其他子 while 循环。

因此，在这种情况下，本次迭代抽取的行数为 t，有一个元素 y 被添加到 Y，而抽取的列数至多为 t。接着

$$\begin{aligned} n_{X,Y\cup\{y\}} = n_{X,Y} + t &\le (|X| + \min(|X|, |Y| - 1) + 1)t \\ &= (|X| + |Y|)t = (|X| + \min(|X|, |Y \cup \{y\}| - 1))t, \end{aligned}$$

and

$$m_{X,Y\cup\{y\}} \le m_{X,Y} + t \le (|Y| + \min(|X|, |Y|) + 1)t \le (|Y \cup \{y\}| + \min(|X|, |Y \cup \{y\}|))t.$$

因此，此情形下的结论得证。
情况 III. $|X| < |Y|$（步骤 13），并且对于某个 y， $M[X, y]$ 是 $M[X, Y]$（步骤 16）中的新列。

在这种情况下， $Finish$ 变为 $true$，且不会执行其他子 while 循环。因此，此次迭代中绘制的列数至多为 t，并向 Y中添加一个元素 y。不会绘制任何行。然后，

$$n_{X,Y\cup\{y\}} = n_{X,Y} \le (|X| + \min(|X|, |Y| - 1))t \le (|X| + \min(|X|, |Y \cup \{y\}| - 1))t,$$

and

$$m_{X,Y\cup\{y\}} \le m_{X,Y} + t \le (|Y| + \min(|X|, |Y|) + 1)t = (|Y \cup \{y\}| + \min(|X|, |Y \cup \{y\}|))t.$$

因此，这种情况下的结论成立。

情况 IV。 $|X| < |Y|$（步骤 13），对于所有 $y' \in Y'$， $M[X, y']$都不是 $M[X, Y]$的新行；而对于某个x， $M[x, Y]$是 $M[X, Y]$ 的新列（步骤 20）。在这种情况下， $Finish$变为 $true$，并且在第四个子 while 循环之后不会执行其他子 while 循环（步骤 18）。

在这种情况下，此次迭代绘制的行数为 t，有一个元素 x 被添加到 X，而绘制的列数至多为 t。于是

$$\begin{aligned} n_{X\cup\{x\},Y} = n_{X,Y} + t &\le (|X| + \min(|X|, |Y| - 1) + 1)t \\ &\le (|X \cup \{x\}| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y| - 1))t \end{aligned}$$

$$m_{X\cup\{x\},Y} \le m_{X,Y} + t \le (|Y| + \min(|X|, |Y|) + 1)t = (|Y| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y|))t.$$

因此，这种情况下的结论成立。

情况 V。对于所有 $x' \in X'$， $M[x', Y]$都不是 $M[X, Y]$的新行；对于所有 $y' \in Y'$， $M[X, y']$都不是 $M[X, Y]$的新列；而对于某个 $x \in X'$， $y \in Y'$， $M[x, Y \cup \{y\}]$是 $M[X, Y \cup \{y\}]$的新行（步骤 23）。

在这种情况下，本次迭代抽取的行数为 t，抽取的列数为 t，向 X 中添加一个元素 x，并向 Y 中添加一个元素 y。于是

$$\begin{aligned} n_{X\cup\{x\},Y\cup\{y\}} = n_{X,Y} + t &\le (|X| + \min(|X|, |Y| - 1) + 1)t \\ &\le (|X \cup \{x\}| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y \cup \{y\}| - 1))t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{X\cup\{x\},Y\cup\{y\}} = m_{X,Y} + t &\le (|Y| + \min(|X|, |Y|) + 1)t \\ &\le (|Y \cup \{y\}| + \min(|X \cup \{x\}|, |Y \cup \{y\}|))t. \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明定理 2 了。

证明。根据引理 10，在 Adaptive-Test-Rank 中，截至第 t 次迭代，抽取的行数和列数总和分别至多为 $n' := 9(|X| + \min(|X|, |Y| - 1))d/\epsilon \le 18|X|d/\epsilon$ 和 $m' := 9(|Y| + \min(|X|, |Y|)d/\epsilon \le 18|Y|d/\epsilon$。此外，我们还有 $|X| \cdot |Y| \le \binom{d}{\le s}2^d$。因此

$$n' \cdot m' \le 324|X||Y|d^2/\epsilon^2 \le T := \frac{324 \cdot d^2\binom{d}{\le s}2^d}{\epsilon^2}.$$

考虑图 2 中的测试器 Non-Adaptive-Test-Rank。该测试器抽取 T 行 $x^{(1)}, \ldots, x^{(T)} \in [n]$和列 $y^{(1)}, \ldots, y^{(T)} \in [m]$，并查询所有满足 $ij \le T$ 的 $M[x^{(i)}, y^{(j)}]$，然后将

结果存入表格 D。然后，它使用上述抽取的行和列运行 Adaptive-Test-Random。现在我们证明，Adaptive-Test-Random 执行的所有查询都可以从表格 D 中获取。

在每次迭代中，抽取的行数至多为 n'，且抽取的行数至多为 m'。因此，测试器需要（在最坏情况下）获知所有矩阵元素 $M[x^{(i)}, y^{(j)}]$，其中 $i \le n'$ 且 $j \le m'$。由于 $ij \le n'm' \le T$，结论得证。

测试器进行的查询次数为

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{T}{i} = O(T \ln T) = \tilde{O}\left(\frac{\binom{d}{\le s} 2^d}{\epsilon^2}\right).$$

□

5 精确的 s-二元秩测试

我们首先证明以下结论。

引理 11. 设 M 和 M' 是仅有一行（或一列）不同的 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。那么 $|\mathrm{br}_s(M) - \mathrm{br}_s(M')| \le 1$。

证明. 假设 $\mathrm{br}_s(M) = d$，且 M' 与 M 仅在第 k 行不同。设 N 和 L 分别为 $n \times d$ (0, 1) 矩阵和 $d \times m$ (0, 1) 矩阵，使得对每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$，都有 $P = NL$，且 $P[i, j] \le s$，当且仅当 $P[i, j] = 0$。在 N 中添加一列（作为第 $d + 1$ 列），该列除第 k 个矩阵元素为 1 外，其余元素均为 0。然后对所有 $j \in [d]$，将 $N[k, j]$ 改为 0。设 N' 为所得矩阵。在 L 中再添加一行（作为第 $d + 1$ 行），该行等于 M' 的第 k 行。设 L' 为所得矩阵。令 $P' = N'L'$。容易看出，对所有 $i \ne k$ 和 j，都有 $P'[i, j] = P[i, j]$，并且 P' 的第 k 行等于 M' 的第 k 行。于是，对每个 $(i, j) \in [n] \times [m]$，都有 $P'[i, j] \le s$，且 $P'[i, j] = 0$ 当且仅当 $M'[i, j] = 0$。因此，$\mathrm{br}_s(M') \le d + 1 = \mathrm{br}_s(M) + 1$。同理，$\mathrm{br}_s(M) \le \mathrm{br}_s(M') + 1$。 □

引理 12。设 $\eta = d^2/(nm)$。设 M 为 $n \times m$ (0, 1) 矩阵。若 M 与具有至多 s 二元秩的矩阵相差 ϵ，则 M 与具有 s 二元秩 d的矩阵相差 $\epsilon + \eta$。

证明。我们将证明，对于每个二元秩至多为 $d-1$ 的 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 H，都存在一个二元秩为 d 的 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 G，使其与 H 相差 η。因此，如果 M 与具有至多 s 二元秩的矩阵相差 ϵ，那么它与具有 s 二元秩 d的矩阵相差 $(\epsilon + \eta)$。

定义 $n \times m$ (0, 1) 矩阵 G_k、$k \in [d] \cup \{0\}$，其中 $G_0 = H$；对于 $k \ge 1$，若 $j > k$或 $i > d$，则 $G_k[i, j] = H[i, j]$；并令 $G_k[[d], [k]] = I_d[[d], [k]]$，其中 I_d为 $d \times d$单位矩阵。由于 $G_d[[d], [d]] = I_d$，我们有 $\mathrm{br}_s(G_d) \ge d$。显然，对于每个 $k \in [d] \cup \{0\}$，G_k与 H相差 (d^2/nm)。如果 $\mathrm{br}_s(G_d) = d$，则取 $G = G_d$，结论即得。否则，设 $\mathrm{br}_s(G_d) > d$。

现在考虑序列 $H = G_0, G_1, G_2, \ldots, G_d$。由引理 11，我们有 $\mathrm{br}_s(G_{i-1}) - 1 \le \mathrm{br}_s(G_i) \le \mathrm{br}_s(G_{i-1}) + 1$。现在，由于 $\mathrm{br}_s(G_0) = \mathrm{br}_s(H) \le d - 1$ 且 $\mathrm{br}_s(G_d) > d$，根据离散介值定理，必定存在 $k \in [d]$，使得 $\mathrm{br}_s(G_k) = d$。接着取 $G = G_k$，即可得证。 □

现在，用于测试 s-二元秩 d 的测试器按如下方式运行。如果 $mn < 2d^2/\epsilon$，则使用 $mn < 2d^2/\epsilon$ 次查询找出 M 的所有元素。如果 $\mathrm{br}_s(M) = d$，则接受；否则，拒绝。

如果 $mn \geq 2d^2/\epsilon$，则运行 Adaptive-Test-Rank($d, s, M, n, m, \epsilon/2$)（对于非自适应情形，我们运行 Non-Adaptive-Test-Rank($d, s, M, n, m, \epsilon/2$)），并输出其答案。

现在我们证明该算法的正确性。若 M 的 s-二元秩为 d，则其 s-二元秩至多为 d，因此测试器接受。

现在，假设 f 与具有 s-二元秩 d的情形相距至少 ϵ。若 $mn < 2d^2/\epsilon$，测试器拒绝。若$mn \geq 2d^2/\epsilon$，则根据引理 12，f 与具有至多 d 的 s-二元秩的情形相距 ($\epsilon - \eta$)，其中$\eta = d^2/(nm)$。由于 $\eta = d^2/(nm) \leq \epsilon/2$，函数 f 与具有至多 d 的 s-二元秩的情形相距 ($\epsilon/2$)，因此测试器以至少 $2/3$ 的概率拒绝。

参考文献

[1] Maria-Florina Balcan、Yi Li、David P. Woodruff 和 Hongyang Zhang。《最优矩阵秩测试》。载于《第三十届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2019，美国加利福尼亚州圣迭戈，2019 年 1 月 6 日至 9 日，第 727–746 页，2019 年。doi:10.1137/1.9781611975482.46。

[2] Parinya Chalermsook、Sandy Heydrich、Eugenia Holm 和 Andreas Karrenbauer。关于最小二部团覆盖与划分的近乎紧确近似性结果。载于 Andreas S. Schulz 和 Dorothea Wagner（编），《算法——ESA 2014——第 22 届欧洲年度研讨会论文集》，波兰弗罗茨瓦夫，2014 年 9 月 8 日至 10 日，论文集，第 8737 卷《计算机科学讲义》，第 235–246 页。Springer，2014 年。doi:10.1007/978-3-662-44777-2_20。

[3] Dana Ron。私人通信。

[4] David A. Gregory、Norman J. Pullman、Kathryn F. Jones 和 J. Richard Lundgren。正则二部图的二部团覆盖与正则矩阵的最小半环秩。《组合理论杂志》B 辑，51(1):73–89，1991 年。doi:10.1016/0095-8956(91)90006-6。

[5]Yi Li、Zhengyu Wang 和 David P. Woodruff。低秩矩阵的改进测试。载于第20届 ACM SIGKDD 知识发现与数据挖掘国际会议（KDD '14），美国纽约，2014年8月24日至27日，第691–700页，2014年。doi:10.1145/2623330.2623736。

[6]Yonatan Nakar 和 Dana Ron。关于图划分性质的可测试性。载于 Eric Blais、Klaus Jansen、Jos´e D. P. Rolim 和 David Steurer 编，《近似、随机化与组合优化：算法与技术》，APPROX/RANDOM 2018，2018年8月20日至22日，美国新泽西州普林斯顿，LIPIcs 第116卷，第53:1–53:13页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018年。doi:10.4230/LIPIcs.APPROX-RANDOM.2018.53。

[7] Michal Parnas、Dana Ron 和 Adi Shraibman。布尔秩和二元秩的性质测试。《Theory Comput. Syst.》，65(8):1193–1210，2021年。doi:10.1007/s00224-021-10047-8。

[8] Jir´ı Sgall。具有受限交集的族对的界。《Comb.》，19(4):555–566，1999年。doi:10.1007/s004939970007。