arXiv:2301.04428v1 [math.QA] 11 Jan 2023

JORDAN 平面的 DRINFELD 双的素谱

K. A. BROWN 和 J. T. STAFFORD

ABSTRACT. 本文研究的 Hopf 代数 $\mathcal{D}$ 可以视为 Jordan 平面的玻色化的 Drinfeld 双。我们完全确定了它的素谱和本原谱。作为这一分析的推论，我们证明 $\mathcal{D}$ 满足 Dixmier-Moeglin 等价，并据此提出一个猜想：该等价对点态诺特 Hopf代数是否成立。

1. INTRODUCTION

1.1. 在全文中，k 表示一个特征 0 的代数闭域。标题中的 Hopf k代数 $\mathcal{D}$ 是在 [2], 中定义的，并在那里推导出一些初步性质；[1, 3]中则给出了进一步结果。本文关注 $\mathcal{D}$的素谱和本原谱，并将其完全确定。Hopf 代数 $\mathcal{D}$ 是一个点化的仿射诺特整环，其 Gelfand-Kirillov维数为 6；其定义回顾于 §2。1。它是一个优美的代数，具有若干引人注目的性质，值得从多个角度加以研究，其中三个角度将在 §§1. 3-1.5 中简要介绍。首先，我们概述本文结果并说明其所在位置。

1.2. 结果。已在 [1, 定理 4.10], 中证明，并在此处的引理 2.1 和定理 2.2(iv)中详细说明，$\mathcal{D}$ 的中心 $Z(\mathcal{D})$由元素 z、ω 和 θ 生成，其中 $z\theta = \omega^2$。因此，Maxspec($Z(\mathcal{D})$)有一个奇异点，即 $\mathfrak{m}_0 := \langle z, \omega, \theta\rangle$。中心还有另一个特殊的极大理想，即

$$\mathfrak{m}_+ \;:=\; Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}^+ \;=\; \langle z - 16, \omega + 16, \theta - 16\rangle,$$

其中 $\mathcal{D}^+$ 是 $\mathcal{D}$的增广理想。最后，令 K 表示 Hopf代数满射 $\pi\colon \mathcal{D} \longrightarrow U(\mathfrak{sl}(2, k))$的核，该满射在 §1.3中提及；因此 K是一个 Hopf 理想，其描述见定理 2.2(i),(ii)。

本文的主要结果由以下定理给出，并完整描述了 $\mathcal{D}$的素理想和本原理想。

定理 1.1。沿用上述记号。$\mathcal{D}$ 的本原理想为：

（I） $\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 的极大理想，其中 $\mathfrak{m} \in$ Maxspec($Z(\mathcal{D})$)，且 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$、$\mathfrak{m}_+$；

（II）包含 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 的本原理想，即 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 本身以及

$$\mathcal{P} := \pi^{-1}(\mathrm{Privspec}(U(\mathfrak{sl}(2, k))));$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16T05、16D25；次要分类：16T20、16S40、17B37。两位作者分别获得 Leverhulme荣休研究奖学金 EM- 2017-081 和 EM-2019-015 的部分资助。第一作者感谢 Nicolas Andruskiewitsch、Ivan Angiono 和 Hector Pena Pollastri 提供有益的意见，并分享其研究的早期版本。

（III）包含 $\mathfrak{m}_0\mathcal{D}$ 的唯一素理想 P_0，它具有 $\mathfrak{m}_0\mathcal{D} = (P_0)^2 \subsetneq P_0$。

定理 1.2. 用上述记号， $\mathcal{D}$ 的非本原素理想为：

(A) $\{0\}$, K; (B) 对于 $Z(\mathcal{D})$ 中除 $\mathfrak{p}_1 = \langle z, \omega \rangle$ 和 $\mathfrak{p}_2 = \langle \theta, \omega \rangle$ 以外的每个高度一素理想 $\mathfrak{p}$，主素理想 $\mathfrak{p}\mathcal{D}$；(C) 高度为一的素理想 P_1, P_2，其中 $\mathfrak{p}_i\mathcal{D} = P_i^2 \subsetneq P_i$ 对于 $i = 1, 2$，每个 P_i 都由一个正规（但非中心的）元素生成。此外， $P_1 + P_2 = P_0$。

定理 1.3. 保留上述记号。

(a) 每个非本原素理想都是完全素的。除余阿廷极大理想（余单位除外）外，每个本原理想都是完全素的；这些余阿廷极大理想构成 $\mathcal{P}$ 的一个子集。(b) 除余阿廷极大理想以及（可能的） P_0 外，每个素理想 P 都有一个与 Weyl 代数 $A_n(K)$ 双有理等价的 $\mathcal{D}/P$，其中 $1 \leq n \leq 2$，且 K 是超越次数至多为 2 的域，定义在 k 之上。(c) $\mathcal{D}$ 满足 Dixmier-Moeglin 等价。

定理 1.1 在第 4 节中证明，尤其参见第 4.5 小节；定理 1.2 则在定理 5.3 中证明。最后，定理 1.3 在第 5.2 小节中证明。文中还穿插提出了一些问题和一个猜想（猜想 5.5）。

1.2. 对偶中的 Hopf 代数。无限维 Hopf 代数 H 的完整 Drinfeld 双 $\mathcal{D}(H) = H \bowtie H^\circ$ 往往难以处理，因为 H 它拥有“过多”的有限维表示，从而导致有限对偶 H°庞大到难以驾驭。近来，人们对构造如下形式的双代数 $\mathcal{D}(H) := H \bowtie H'$ 产生了浓厚兴趣：其中 H' 是 H°的某个适当的 Hopf 子代数；例如可参见 [9, 20] 以及 §1中列出的论文。1. 目前仍有许多问题尚不清楚：例如，“适当的”Hopf 子代数 H'应如何定义？适当的代数 H' 是否总是存在？Jordan 平面的双代数 $\mathcal{D}$ 是研究这些及其他问题的一个试金石。尤其是， $\mathcal{D}$ 所展现的一些理想性质，或可为在更一般的情形下定义双代数提供范例。

1.3. 表示论。$\mathcal{D}$ 的表示论有一个显著特点： [1, 定理 3.11] 中证明并在此处的定理 2.2(iii)中重述的事实表明，$U(\mathfrak{sl}(2, k))$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个商霍普夫代数，而有限维不可约 $\mathcal{D}$-模恰好是有限维不可约 $U(\mathfrak{sl}(2, k))$-模。这立刻引出许多问题，其中一些已在 [3], 中探讨，文中还引入了 Verma $\mathcal{D}$- 模。但许多其他问题仍未触及：例如，关于局部有限维 $\mathcal{D}$-模范畴，我们能说些什么？对于 $\mathcal{D}$ 的每个本原理想 P，能否找到一个典范的不可约模（最好是某个 Verma 模的因子），使其湮灭子等于 P? 探讨这些问题的第一步，是分类 $\mathcal{D}$ 的本原理想，这正是本文所做的。

1.4. Dixmier-Moeglin 等价。代数 R 满足 Dixmier-Moeglin 等价，这使得我们能够同时从表示论、代数和拓扑角度刻画 R的素理想中的本原理想。某些 Hopf k-代数具有这种等价性，但并非所有此类代数都是如此；例如，参见 [5, 6]，其中讨论了诺特（Hopf）代数何时满足该等价性。正如我们在定理 1.2 中证明的， $\mathcal{D}$ 满足该等价性。详情请见 §5.2,

我们还提出了相当宏大的猜想 5.5，旨在给出一个涵盖所有仿射诺特点化 Hopf $\mathbb{C}$-代数的一般性结果。

记号。全文中，所有向量空间及所有未加修饰的张量积均视为定义在基域 k 上。我们用 Δ 表示 Hopf 代数 H 的余乘法，用 H^+ 表示其增广理想。对象 X 的 Gelfand–Kirillov 维数（简称 GK 维数）记为 GKdim(X)；环 R 的全局（同调）维数和内射维数分别记为 gldim(R) 和 injdim(R)。为明确起见，我们规定，在 Ore 扩张 $T = S[v; \sigma, \partial]$ 中，乘法定义为

$$vs = s^\sigma v + \partial(s) \qquad \text{for } s \in S. \tag{1.1}$$

由此可知，∂ 是一个 σ-导子，即满足 $\partial(ab) = a^\sigma \partial(b) + \partial(a)b.$。这遵循例如 [17, 第 34] 页中的惯例。

2. Preliminaries

2.1. 定义与记号。本文将始终使用文献 [1]中的以下定义与记号。首先，Jordan 平面为

$$J := k\langle x, y : [y, x] = -\tfrac{1}{2}x^2\rangle,$$

及其玻色化

$$\mathcal{H} := J\#C_\infty = J\#\langle g^{\pm 1}\rangle, \ where\ gxg^{-1} = x,\ gyg^{-1} = y + x.$$

接着，J的 Drinfeld 双定义为 $\mathcal{D} := \mathcal{H}\langle u, v, \zeta\rangle$，并附有以下关系：

$$\begin{aligned}
&[u, v] = \tfrac{1}{2}u^2;\ \ [\zeta, v] = -v;\ \ [\zeta, u] = -u;\ [u, y] = 1 - g;\\
&[v, x] = 1 - g + xu;\ \ [v, y] = yu - g\zeta;\ [v, g] = gu;\ \ [\zeta, y] = y;\ \ [\zeta, x] = x;\\
&[x, u] = [x, g] = [u, g] = [\zeta, g] = 0.
\end{aligned}$$

余代数结构在此处大多与我们无关；对于$\mathcal{H}$，规定 g 为类群元，x 和 y 为$(g, 1)$–本原元，即可确定其余代数结构；随后通过令 u 和 ζ 为本原元，并令 $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v + \zeta \otimes u.$，将其扩展到 $\mathcal{D}$

注意，$K := k\langle u, v, \zeta\rangle$ 是 $\mathcal{D}$ 的 Hopf 子代数。事实上，根据文献 [2, 命题 2.3（ii）]中所述的 $\mathcal{D}$ 的 PBW 定理可知，$\mathcal{D} = J \otimes_k K$ 作为向量空间。正如文献 [2, 引理 2.2] 中所述，J 与 K 之间存在非退化斜配对，由此得到这些子代数之间如 [14]所示的乘法关系。

2.2. 初步结果。我们在定理 2.2 中汇总了 [2] 和 [1] 的一些主要结果。首先定义 $\mathcal{D}$ 中的一些元素如下。令

$$q := ux + 2(1 + g), \ \ and\ \ s := xv + uy + (-\frac{1}{2}ux + g - 1)\zeta - 2(g + 1). \tag{2.1}$$

[1, §4] 中的下述引理部分是显式的，部分是隐式的。给定 k 代数 H 的一个 k-代数自同构 σ，若 H 中的元素 h 满足对所有 $a \in H$ 都有 $ha = \sigma(a)h$，则称其为 σ-正规元素。

引理 2.1。沿用上述记号。

（i） q 和 s 都为 σ-正规，其中 σ 是由 $\mathcal{D}$ 定义的自同构，定义为

$$\sigma(y) = y + \tfrac{1}{2}x, \ \ \sigma(v) = v - \tfrac{1}{2}u,$$

其中 σ 在 $\mathcal{D}$的其他生成元上作用为恒等映射。

（ii） σ^2 等于 g 在 $\mathcal{D}$上的共轭；也就是说，对所有 $h \in \mathcal{D}$， $\sigma^2(h) = ghg^{-1}$。

（iii）元素 $z := q^2g^{-1}$、 $\theta := s^2g^{-1}$ 和 $\omega := qsg^{-1}$ 属于 $\mathcal{D}$的中心$Z(\mathcal{D})$。

证明。（i）和（ii）很容易验证，（iii）由（i）和（ii）立即可得。 □

定理 2.2。沿用上文引入的记号。

（i） [2, 命题 2.7(i)] $\mathcal{O}(G) := k\langle x, u, g^{\pm 1}\rangle$ 是 $\mathcal{D}$的正规交换 Hopf 子代数，其中 $G = ((k,+) \times (k,+)) \rtimes (k^*, \times)$。（ii） [2, 命题 2.7(ii)] $\mathcal{DO}(G)^+$ 是 $\mathcal{D}$的 Hopf 理想，且存在一个 Hopf 代数同构

$$\mathcal{D}/\mathcal{DO}(G)^+ \ \cong \ U(\mathfrak{sl}_2(k)). \tag{2.2}$$

（iii） [1, 定理 3.11] 有限维不可约 $\mathcal{D}$-模是有限维不可约 $U(\mathfrak{sl}_2(k))$-模，由满同态 (2.2) 给出。

（iv） [1, 定理 4.10] 采用引理 2.1 中的记号， $\mathcal{D}$ 的中心为

$$Z(\mathcal{D}) \ = \ k\langle z, \omega, \theta \ : \ z\theta = \omega^2\rangle, \tag{2.3}$$

（v） [1, 注 2.2] $\mathcal{D}$ 是点化的。 □

我们需要对 $Z(\mathcal{D})$ 的极大理想作如下标记。请注意， $Z(\mathcal{D})$ 中有两个极大理想需要特别关注。

记号 2.3. （i）由定理 2.2（（iv），Maxspec($Z(\mathcal{D})$) 由以下对象构成

$$\{\mathfrak{m}_{(\alpha,\gamma)} := \langle z - \alpha^2\gamma^{-1}, \omega - \alpha, \theta - \gamma\rangle : \alpha \in k, \ \gamma \in k^*\} \dot\cup \{\mathfrak{m}_\beta := \langle z - \beta, \omega, \theta\rangle : \beta \in k\}.$$

注意， $\mathfrak{m}_{(\alpha,\gamma)}$ 可简化为 $\mathfrak{m}_{(\alpha,\gamma)} = \langle \omega - \alpha$，而当 $\beta \neq 0$时， $\mathfrak{m}_\beta = \langle z - \beta$、 $\omega\rangle$。

（ii）根据余单位的定义，很容易计算得

$$\mathcal{D}^+ \cap Z(\mathcal{D}) \ = \ \mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \cap Z(\mathcal{D}) \ = \ \mathfrak{m}_{(-16,16)}.$$

因此，我们将$\mathfrak{m}_{(-16,16)}$ 记为 $\mathfrak{m}_+$。

（iii）显然， Z（$\mathcal{D}$）的奇异轨迹为 $\{\mathfrak{m}_0\}$。

3. Ring-theoretic preparations

本节汇总分析 $\mathcal{D}$的本原谱所需的一些性质。证明最简便的方法是将 $\mathcal{D}$ 视为一个迭代 Hopf Ore 扩张，其起点不是基域 k ，而是定理 2.2(i)中的交换正规 Hopf 子代数 $\mathcal{O}$（G） $= k\langle x$、 u、 $g^{\pm 1}\rangle$。更确切地说：

命题 3.1. $\mathcal{D}$ 是一个迭代 Ore 扩张

$$\mathcal{D} \ = \ \mathcal{O}(G)[y; \delta_1][\zeta; \delta_2][v; \tau, \delta_3], \tag{3.1}$$

其中，导子 δ_1 和 δ_2、自同构 τ 以及 τ-导子 δ_3 均可从第 2.1 小节给出的 $\mathcal{D}$ 的定义关系中读出。

特别地， $\mathcal{D}$ 是一个诺特整环。

证明。利用 [2, 命题 1.6] 的证明来说明 $\mathcal{D}$ 具有基

$$\{g^a x^b u^c y^d \zeta^e v^f : a \in \mathbb{Z}, b, \dots, f \in \mathbb{N}\}.$$

因此，关系式 (2.1) 的形式结合 [12, 定理 1，p.438]表明它确实是一个 Ore 扩张。□

虽然本文中不会用到，但描述 (3.1) 甚至将 $\mathcal{D}$ 描述为一个迭代 Hopf Ore 扩张（IHOE），这意味着该公式中的每个扩张本身都是一个 Hopf 代数。它还表明，通过令

$$\begin{aligned} &\deg x = \deg u = \deg g = \deg g^{-1} = 0; \\ &\deg y = \deg \zeta = \deg v = 1, \end{aligned}$$

可以在 $\mathcal{D}$ 上得到一个滤子 $\mathcal{F}$，其伴随分次代数为

$$\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{D} = \mathcal{O}(G)[\overline{y}, \overline{\zeta}, \overline{v}]. \tag{3.2}$$

因此，$\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ 是一个含有 6 个变量且其中一个变量可逆的交换多项式代数。

3.1. 同调性质。本小节指出，$\mathcal{D}$ 具有一些有用的同调性质，并从相关定义开始。若环 A具有有限的内射维数且满足 Gorenstein 条件，则称其为 Auslander-Gorenstein：如果 $p < q$ 是非负整数，且 M 是有限生成的 A-模，那么对于 $\operatorname{Ext}_A^p(N, A)$ 的每个子模 N，均有 $\operatorname{Ext}_A^q(M, A) = 0$。若环 A 是有限全局维数的 Auslander-Gorenstein 环，则称其为 Auslander 正则。令 $j_A(M) = \min\{r : \operatorname{Ext}_A^r(M, A) \neq 0\}$，表示 M 的同调级。若一个有限 GK 维数的 Auslander-Gorenstein 环 A 满足条件 $j_A(M) + \operatorname{GKdim}(M) = \operatorname{GKdim}(A)$，对每个这样的 M 均成立，则称其为 GK-Cohen-Macaulay 环（或简称 CM 环）。显然，仿射交换正则环既是 Auslander 正则环，也是 CM 环。

P命题 3.2. （i） $\mathcal{D}$ 是 Auslander 正则且满足 Cohen–Macaulay 条件。
（ii） $\mathcal{D}$ 按照例如 [19]的意义是 AS 正则。（iii）GK 维数($\mathcal{D}$) $= 6 =$全局维数($\mathcal{D}$)。（iv）GK 维数是有限生成 $\mathcal{D}$-模上的正合函数。

证明.（i）由 [7, 注，p. 157]，滤子 $\mathcal{F}$ 是 Zariskian 的，因此结论由 [7, 定理 3.8、3.9 和注，p. 165]得出。

（ii）由（i）和 [11, 引理 6.1]立即可得。

（iii）由 [22, 推论 1.4],，GK 维数($\mathcal{D}$) = GK 维数($\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D})$) $= 6$.

由命题 3.1 和 [21, 定理 7.5.3(i)],，可得全局维数($\mathcal{D}$) ≤ 6。由[1, 定理 3.11] $\mathcal{D}$ 有一个有限维模，例如 M，且 CM 条件意味着 M 的同调维数为 ≥ 6。因此全局维数($\mathcal{D}$) $= 6$。

(iv) 由于根据 [19, 定理 2.3],， $j_{\mathcal{D}}$ 在有限生成的 $\mathcal{D}$-模上是正合的，因此该结论由 CM 条件推出。□

3.2. 关键引理。以下引理对于我们分析 $\mathcal{D}$ 的本原谱至关重要。在其证明中，给定诺特环 S 的一个理想 B，我们用 $\sqrt{B}$ 表示 S 的理想，使得 $\sqrt{B}/B$ 是 S/B 的幂零根。

引理 3.3. 设 M 是一个有限生成的（右或左） $\mathcal{D}$-模，且满足 $\mathrm{Ann}^{k[x]}(M) \neq 0$ 或 $\mathrm{Ann}^{k[u]}(M) \neq 0$。那么

（i）存在 $r \geq 1$ 使得

$$(\mathfrak{m}_+\mathcal{D})^r \subseteq (\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D})^r \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(M);$$

（ii）GK 维数$(M) \leq 3$。

证明. （i）令 $I := \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(M)$，这是 $\mathcal{D}$的一个理想。假设 $I \cap k[x] \neq 0$；另一种情况的证明完全类似，只需用 $k\langle u、 v\rangle$ 替换 J。容易验证，Jordan 平面的每个非零素理想 $J = k\langle x, y\rangle$ 都包含 x。因此，由于 $I \cap k[x] \neq 0$，存在 $N \geq 1$ 使得 $x^N \in I \cap k[x] \subseteq I \cap \mathcal{O}(G)$。由于 $\mathcal{O}(G)$是交换的，

$$x \in \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))}. \tag{3.3}$$

由于 I 是 $\mathcal{D}$ 的理想，$[v, I] \subseteq I$；此外，根据 $\mathcal{D}$ 的定义关系以及 $\mathcal{O}(G) = k\langle x, u, g^{\pm 1}\rangle$，$[v, \mathcal{O}(G)] \subseteq \mathcal{O}(G)$ 这一事实。因此

$$[v, I \cap \mathcal{O}(G)] \subseteq I \cap \mathcal{O}(G). \tag{3.4}$$

由于 k 的特征为 0，由 (3.4) 和 $[17,$ 引理 3.20$]$ 可得

$$[v, \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))}] \subseteq \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))}. \tag{3.5}$$

由 (3.3) 和 (3.5)

$$[v, x] = 1 - g + xu \in \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))},$$

因此 $(1 - g) \in \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))}$。于是

$$[v, g - 1] = [v, g] = gu \in \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))},$$

因此 $u \in \sqrt{(I \cap \mathcal{O}(G))}$。由于 $\mathcal{O}(G)^+$ 由 x、 u 和 $g - 1$ 生成，我们推得 $\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \subseteq \sqrt{I}$，从而证明了（i）。

（ii）由（i）， M 是一个有限生成的 $\mathcal{D}/(\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D})^r$-模，其中某个 $r \geq 1$。由于根据定理 2.2(ii)，$\mathcal{D}/\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \cong U(\mathfrak{sl}(2, k)$，因此其 GK 维数为 3，由此以及命题 3.2(iv) 可得（ ii ）。 □

3.3. $\mathcal{D}$ 的 Ore 局部化。为了分析其本原谱，我们需要 $\mathcal{D}$ 的四种 Ore 局部化。其中第一种在 $[1,$ 定理 4.8$]$, 中描述，其余几种与之类似。这些集合定义如下：

定义 3.4。将 $\mathcal{D}$ 的以下四个子集标记为：

$$A := \{q^i : i \geq 0\} \dot\cup \{x^j : j \geq 0\}, \quad B := \{s^i : i \geq 0\} \dot\cup \{x^j : j \geq 0\},$$
$$C := \{q^i : i \geq 0\} \dot\cup \{u^j : j \geq 0\}, \quad D := \{s^i : i \geq 0\} \dot\cup \{u^j : j \geq 0\}.$$

引理 3.5。(1) 元素 x 和 u 在 $\mathcal{D}$ 上的作用是 ad-局部幂零的。因此，$\{x^i : i \geq 0\}$ 和 $\{u^i : i \geq 0\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 Ore 集。

(2) 对每个 $\Omega \in \{A, B, C, D\}$，集合 Ω 都是 $\mathcal{D}$ 的正则元 Ore 集，我们将相应的局部化记为 $\mathcal{D}_{(\Omega)}$。

证明. (1) 对于 x，这已在 [1, 引理 4.3(i)] 中得到证明。关于 u 的结论是由 $\mathcal{D}$ 的定义关系得出的类似的简单推论。

(2) 对 q 的幂进行局部化，与对 q^2 的幂进行局部化相同，甚至与对幂 $z = q^2g^{-1}$ 进行局部化也相同，因为 g 是单位。因此，对于 $\Omega = A$ 或 $\Omega = C$，根据引理 2.1(iii)，我们可以用中心元 z 替换 q。类似地，在另外两种情况下，我们可以用中心元 θ 替换 s。因此，每种情况下，我们都希望在整环 $\mathcal{D}$ 中对一个中心元和一个局部伴随幂零元进行局部化。由此可知，这确实是一个由正则元组成的 Ore 集。□

因此，这四个环 $\mathcal{D}_{(\Omega)}$ 都是商除法代数$Q(\mathcal{D})$的子代数，且包含 $\mathcal{D}$。如下文所示，这些环分别是交换环上的第二 Weyl 代数的局部化。

记号 3.6. （i）在 $\mathcal{D}_{(A)}$ 中，设 $p_A := -2q^{-1}x^{-1}y$，$q_A := q$，$t_A := qx^{-1}$，以及$\eta_A := -xq^{-1}\zeta$.

（ii）在 $\mathcal{D}_{(B)}$ 中，设 $p_B := -2s^{-1}x^{-1}y$，$q_B := s$，$t_B := sx^{-1}$. $\eta_B := -xs^{-1}\zeta$.

（iii）在 $\mathcal{D}_{(C)}$ 中，设 $p_C := 2q^{-1}u^{-1}v$，$q_C := q$，$t_C := q^{-1}u^{-1}$，$\eta_C := -uq\zeta$。

（iv）在 $\mathcal{D}_{(D)}$ 中，设 $p_D := 2s^{-1}u^{-1}v$，$q_D := s$，$t_D := s^{-1}u^{-1}$，$\eta_D := us\zeta$.。我们进一步设 $z_\Omega := z$，当 $\Omega = A$ 和 $\Omega = C$ 时，但当 $\Omega = B$ 时，$z_\Omega := \theta, D$。

上述定义的动机可从以下引理中看出。对于 $\Omega = A$，这一结果已在 [1, 定理 4.8]的证明中得到。关于其他元素的断言也可通过类似的直接计算验证。

引理 3.7. 设 $\Omega \in \{A, B, C, D\}$. 则在 $Q(\mathcal{D})$ 中有以下关系：

$$[p_\Omega, q_\Omega] = 1 = [\eta_\Omega, t_\Omega],$$ 其他所有括号均为零；□

当 $\Omega = A$ 时，以下结果见 [1, 定理 4.8], ，不过我们给出了一个同时适用于全部 4 种情形的证明。

定理 3.8. 对于每个 $\Omega \in \{A, B, C, D\}$，局部化 $\mathcal{D}_{(\Omega)}$ 是其中心上的局部化 Weyl 代数。更确切地说：

$$\mathcal{D}_{(\Omega)} = A_2^{(\Omega)}(k) \otimes S_{(\Omega)},$$

其中 $A_2^{(\Omega)}(k)$ 表示第二 Weyl 代数在 k 上的局部化，其生成元为 $p_\Omega, q^{\pm 1}{}_\Omega \quad \eta_\Omega$, $t^{\pm 1}{}_\Omega$；而 $S_{(\Omega)}$ 是交换环 $S_{(\Omega)} = k[z^{\pm 1}{}_\Omega \quad \omega]$。

证明。$Z(\mathcal{D})$ 的生成元 z、ω 和 θ 见引理 2.1(iii)，由此可知，$Q(\mathcal{D})$ 的子代数 $S_{(\Omega)}$ 包含于中心 $Z(\mathcal{D}_{(\Omega)})$ 中。因此，我们可以考虑子代数

$$\mathcal{E}_{(\Omega)} := S_{(\Omega)}\langle p_\Omega, q_\Omega, t_\Omega, \eta_\Omega\rangle \subseteq \mathcal{D}_{(\Omega)}. \tag{3.6}$$

我们断言，包含关系 (3.6) 实为等式。为证明这一点，检查 $\mathcal{D}_\Omega$ 的给定生成元均包含于 $\mathcal{E}_{(\Omega)}$ 中即可。例如，当 $\Omega = A$ 时，可证明 $\{q^{-1}, x^{\pm 1}, y, \zeta, g^{\pm 1}, u, v\} \subset \mathcal{E}_{(A)}$；其他情况同理。因此，$\mathcal{E}_{(\Omega)} = \mathcal{D}_{(\Omega)}$，如所断言。正如引理 3.5 的证明中所指出的，将 $\mathcal{D}$ 在 Ω 处局部化，需要对 $\mathcal{D}$ 的一个中心元和一个伴幂零元求逆。因此，由命题 3.2(iii) 和引理 4.7], ，GKdim($D_{(\Omega)}$) =GKdim($\mathcal{D}$) $= 6$。我们得出 GKdim($\mathcal{E}_{(\Omega)}$) =GKdim($\mathcal{D}$) $= 6$.

另一方面，根据引理 3.7 $\mathcal{E}_{(\Omega)}$ 是环的一个因子

$$V_{(\Omega)} := S_{(\Omega)} \otimes_k A_2^{(\Omega)}(k),$$

它也是一个 GK 维数为 6 的整环。因此，如果 $\mathcal{E}_{(\Omega)}$ 是 $V_{(\Omega)}$的真因子，那么 [21, 推论 8.3.6] 将推出 GK 维数($\mathcal{E}_{(\Omega)}$) < 6，从而产生矛盾。

因此，唯一的可能性是 $\mathcal{E}_{(\Omega)} \cong V_{(\Omega)} = S_{(\Omega)} \otimes_k A_2^{(\Omega)}$ (k)，这正是所需的。 □

4. The primitive spectrum of $\mathcal{D}$

本节中，我们描述 $\mathcal{D}$ 的本原谱。它自然地分为几种情况:

- 不包含 $\mathfrak{m}_+$ 或 $\mathfrak{m}_0$ 的本原理想；这些是一般情形；
- 理想 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$，它也是本原的；
- 理想 $\mathfrak{m}_0\mathcal{D}$，其中$\sqrt{\mathfrak{m}_0\mathcal{D}}$ 是唯一的素理想 P_0；
- 最后， P_0 也是极大理想。

详情将在接下来的四个小节中给出，相关结果将在第 4.5 小节中汇总。

在本节和第 5.1 节中，我们将不再另行说明，直接使用诺特环在 Ore 局部化下关于素理想的相关理论，例如 [17, 定理 10.18 和 10.20] 中所述。我们使用记号 2.3 描述 $Z(\mathcal{D})$ 的极大理想，并使用定义 3.4 定义 $\mathcal{D}$ 中的 Ore 集。

4.1. 一般极小本原理想。我们先考察一般情形。

定理 4.1. 设 $\mathfrak{m}$ 是 $Z(\mathcal{D})$ 的极大理想，且满足 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_+$ 和 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$。则以下结论成立。

（i） $\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$的完全素极大理想。（ii）将 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 在（ x 或 u 的像的）幂处局部化，所得代数同构于局部化 Weyl 代数 $A_2^{(\Omega)}$ (k)，其中 $\Omega \in \{A, B, C, D\}$。（iii）GK 维数($\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$) $= 4$。（iv） $\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 由长度为 2 的中心正则序列生成。（v） $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 是 Cohen–Macaulay 代数且为 Auslander-Gorenstein 代数，其内射维数($\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$) < 4.

证明。（i）、（ii）根据记号 2.3， $\mathfrak{m} = \langle z - \alpha, \omega - \beta, \theta - \gamma \rangle$ 满足 $\alpha, \beta, \gamma \in k$ 和 $\alpha\gamma = \beta^2$。此外，由于关于 $\mathfrak{m}$的假设，(a) $\alpha \neq 0$ 或(b) $\gamma \neq 0$。

假设(a)。我们证明在 x的幂处局部化时（ii）成立。（在 u 的幂处局部化的论证完全类似，只需使用 Ore 集 C 和 D ，而非 A和 B。）采用记号 2.3 中的记号并应用定理 3.8，可知 $\mathfrak{m}\mathcal{D}_{(A)}$是 $\mathcal{D}_{(A)}$的极大理想。注意，由于 $A := \{q^i, x^j : i, j \geq 0\}$ 且

$$z = q^2 g^{-1} \equiv \alpha \neq 0 \; mod(\mathfrak{m}\mathcal{D}),$$

$A_2^{(A)}$ (k) 同构于 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 在 x 的幂处的局部化。定义

$$P_{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}\mathcal{D}_{(A)} \cap \mathcal{D},$$

使得 $P_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathcal{D}$ 的完全素理想，且 $\mathfrak{m}\mathcal{D} \subseteq P_{\mathfrak{m}}$。根据 $P_{\mathfrak{m}}$ 的定义，

$$\mathfrak{m}\mathcal{D}_{(A)} = P_{\mathfrak{m}}\mathcal{D}_{(A)}. \tag{4.1}$$

我们实际上断言

$$P_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\mathcal{D}. \tag{4.2}$$

由于 $\mathcal{D}$ 是（左）诺特的，存在 $e_1, \ldots, e_t \in P_{\mathfrak{m}}$，使得 $P_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t} \mathcal{D}e_i$。根据 (4.1)，对于每个 $i = 1, \ldots, t$，存在 $f_i \in \mathfrak{m}\mathcal{D}$ 和 $s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

$$e_i = f_i x^{-s_i}. \tag{4.3}$$

定义 $s := \max\{s_i : 1 \leq i \leq t\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并且

$$I := \{\tau \in \mathcal{D} : P_{\mathfrak{m}}\tau \subseteq \mathfrak{m}\mathcal{D}\}.$$

因此，I 是 $\mathcal{D}$ 的一个理想，包含 $\mathfrak{m}\mathcal{D}$，并且由（4.3）可知，$x^s \in I.$。如果 $s = 0$，那么 $I = \mathcal{D}$；否则，由引理 3.3 可知，对于某个 $r \geq 1$，有 $(\mathfrak{m}_+)^r \subset I$。又因为根据假设，$\mathfrak{m} \subseteq I$和 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_+$，所以可得 $I = \mathcal{D}$，（4.2）得证。

在情形（a）下，只需证明 $P_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathcal{D}$的一个极大理想。于是，设 J 是 $\mathcal{D}$ 的一个理想，且 $P_{\mathfrak{m}} \subsetneq J$。那么，由理想 $P_{\mathfrak{m}}\mathcal{D}_{(A)}$（它属于 $\mathcal{D}_{(A)}$）的极大性可知，$J\mathcal{D}_{(A)} = D_{(A)}$。再次利用 $q + \mathfrak{m}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 的一个单位这一事实，可知对于某个 $s \geq 1$，有 $x^s \in J$。然后，如前所述，引理 3.3 蕴含 $J = \mathcal{D}$。

假设 (*b*) 成立，而非 (*a*)。那么元素 s 在模$\mathfrak{m}\mathcal{D}$意义下是单位元，因此我们采用与 (*a*) 相同的论证，但改用 $\mathcal{D}_{(C)}$ 而非 $\mathcal{D}_{(A)}$。

（iii）由（ii）以及 [18, 例 3.7 和定理 4.9] 可知，将 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 在 x 的各次幂处局部化后，GK 维数为 4。由于 ad(*x*) 根据引理 3.5 在 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 上幂零，由 [18, 定理 4.9] 可得 GKdim($\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$) $= 4$.

（iv）同样，我们假设 (*a*)，即 $z-\alpha \in \mathfrak{m}$ 对于 $\alpha \in k\backslash\{0\}$成立；情形 (*b*) 的证明类似。我们可以用 $z-\alpha$在 $\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 中构造一个正则中心序列。由于 $\mathcal{D}$ 根据命题 3.2(*i*, *iii*) 是 GK 维数为 6 的 Cohen–Macaulay 代数，由 [16, 定理 7.2(b)]可得，$\mathcal{D}/(z-\alpha)\mathcal{D}$ 是 GK 维数为 5 的 Cohen–Macaulay 代数。此外，根据 [19, 注 2.4]，Cohen–Macaulay 性质保证 $\mathcal{D}/(z-\alpha)\mathcal{D}$ 是 GK 齐次的；也就是说，它不含 GK 维数严格小于 5 的非零理想。由于 $Z(\mathcal{D})/(z-\alpha)Z(\mathcal{D})$ 是多项式代数，我们可以选取 $y \in \mathfrak{m}$，使得 $\mathfrak{m} = \langle z-\alpha, y\rangle$。若 $y+(z-\alpha)\mathcal{D}$是 $\mathcal{D}/(z-\alpha)\mathcal{D}$ 中的零因子，则可得到一个被 $\mathfrak{m}\mathcal{D}$湮灭的 $\mathcal{D}/(z-\alpha)\mathcal{D}$ 的非零理想；结合（iii），这与 $\mathcal{D}/(z-\alpha)\mathcal{D}$ 的 GK 齐次性矛盾。因此，$\{z-\alpha, y\}$ 是 $\mathfrak{m}\mathcal{D}$中的正则中心序列。

（v）由于 $\mathcal{D}$ 根据命题 3.2(i) 是 Cohen–Macaulay 环，因此由（iv）以及两次应用 [16, 定理 7.2(b)] 可知，$R = \mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 是 Cohen–Macaulay 环，且 GK 维数(R) $= 4$。Auslander-Gorenstein 性质由（iv）和 [19, §3.4，注释（3）] 给出。由于 R 是单环，它不可能有有限维模。因此，内射维数(R) < 4 可由下一个引理得出。□

以下观察是众所周知的。

引理 4.2. 设 R 是一个诺特、Auslander-Gorenstein、Cohen–Macaulay 环，并记 GK 维数(R) $= m$。则内射维数(R) $\leq m$。此外，内射维数(R) $= m \iff R$ 有一个有限维表示。

证明。令 $n =$ injdim(R)，并选取一个有限生成的 R-模 M，使得 Ext$^n_R(M, R) \neq 0$。由 Auslander 条件和谱序列 [19, 定理 2.2] j（$E^{nn}(M)$) $= n$，可得 $E^{nn} =$Ext^n(Ext$^n(M, R)$ R)。由 Cohen–Macaulay 性质 GKdim($E^{nn}(M)$) $= m - n$，结论便显而易见。□

4.2. 非一般极小本原理想（I）- $\mathfrak{m}_+$。接下来要考虑的情形是 $\mathfrak{m}\mathcal{D}$for $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_+$，本文将在此讨论。回顾记号 2.3（ii），有 $\mathfrak{m}^+=\mathcal{D}^+\cap Z(\mathcal{D})=\langle\omega+16,\theta-16\rangle$。

我们先给出一个辅助结果，它适用于任意特征零的域 k 。

定理 4.3。 $\mathcal{D}$ 是一个满足零点定理的雅各布森环，换言之：

（i） $\mathcal{D}$ 的每个素理想都是本原理想的交；（ii）对于每个单 $\mathcal{D}$-模 M，$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(M)$ 在 k 上是代数的。特别地， $\mathcal{D}$ 的每个本原理想都包含 $Z(\mathcal{D})$ 的一个极大理想。

证明。由 (3.2)， $\mathcal{D}$ 有一个滤子 $\mathcal{F}$，使得伴随分次环 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D})$ 是交换仿射环。因此，根据 [22, 推论 1.7] ，存在第二个滤子$\mathcal{G}$ ，其由 $\mathcal{D}$ 的有限维 k-子空间构成，使得 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D})$ 也是交换仿射环。结论现在由 [4, 定理 0.4] 得出。□

定理 4.4。（i） $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个完全素本原理想。

（ii）将 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 在 x 的幂或 u 的幂处局部化，得到 Weyl 代数 $A_2(k)$ 在某个生成元的幂处的局部化。（iii） $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 由一个长度为 2 的正则中心序列生成。

（iv） $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 是 Auslander-Gorenstein 代数和 Cohen–Macaulay 代数，且

$$\mathrm{GKdim}(\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D})=4=\mathrm{injdim}(\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}).$$

（v）每个严格包含 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{D}$ 的素理想 P 都满足

$$\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}\subseteq P,$$

因此，这类素理想 P 构成的空间与 $\mathrm{Spec}(U(\mathfrak{sl}(2,k))$ 同胚。

证明。回忆 $q_A=q$。由于 $q^2\equiv 16g\neq 0 \bmod(\mathfrak{m}_+\mathcal{D})$，定理 3.8 表明 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}_{(A)}$ 是 $\mathcal{D}_{(A)}$的极大理想，且 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}_{(A)}\cong A_2^{(A)}(k)$。因此，定义 $P_+:=\mathfrak{m}_+\mathcal{D}_{(A)}\cap\mathcal{D}$，我们推得 P_+ 是 $\mathcal{D}$ 的完全素理想，且

$$\mathfrak{m}_+\mathcal{D}\subseteq P_+. \tag{4.4}$$

我们最终将证明 (4.4) 是一个等式。

与定理 4.1(i)、(ii) 的证明类似，令 I 为 $P_+/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$在 $\mathcal{D}$ 中的右湮灭子。于是 I 包含 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 以及 x的一个幂，因此由引理 3.3,

$$(\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D})^r\subseteq I\qquad\text{for some } r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}, \tag{4.5}$$

特别地，由引理 3.3(ii)，GK 维数$(\mathcal{D}/I)\leq 3$ 。因此，由 [18, 命题 5.1(d)]

$$\mathrm{GKdim}(P_+/\mathfrak{m}_+\mathcal{D})\leq 3. \tag{4.6}$$

回顾一下，由 [18, 例 7.3 和定理 4.9], 可知 GK 维数$(A_2^{(A)}(k))=4$ ，因此

$$\mathrm{GKdim}(\mathcal{D}/P_+)=4 \tag{4.7}$$

由 [18, 定理 4.9] 可知。因此，由 (4.6)、(4.7) 和命题 3.2(iv) 可得

$$\mathrm{GKdim}(\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D})=4. \tag{4.8}$$

根据命题 3.2，$\mathcal{D}$ 是 Cohen–Macaulay 且 Auslander 正则的，并且 gldim($\mathcal{D}$) $= 6 =$GK 维数($\mathcal{D}$)。因此，结合 $\mathcal{D}$ 的 Cohen–Macaulay 性质与 (4.8)，可得

$$j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}) = 6-4 = 2. \tag{4.9}$$

由 (4.9) 和 [8, 命题 3.6] 可推得，$\mathfrak{m}_+$ 在 $\mathcal{D}$ 上的正则序列的最大长度恰为 2；特别地，$\mathfrak{m}_+$中任意一对生成元，例如 $\{z-16, \omega+16\}$，都是 $\mathcal{D}$上的正则序列。因此，通过两次应用 [16, 定理 7.2(b)],

$$\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D} \textit{ is CM of GK-dimension } 4. \tag{4.10}$$

同理，两次应用 [19, §3.4，注（3）] 可知，$\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 是 Auslander-Gorenstein 的。由引理 3.3(i) 和定理 2.2(ii)，$U(\mathfrak{sl}(2,k)) \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{O}(G)^+$是 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 的一个因子，因此 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 有一个非零有限维模 M。于是，由引理 4.2，injdim($\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$) $= 4$.

根据 [19, 注记 2.4], ，$\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 的 Cohen–Macaulay 性质再次表明，$\mathcal{D}/\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$是 GK 齐次的。因此，由 (4.6) 可得，$P_+$ 确实等于 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$。这就证明了（i）-（iv），但尚未证明 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 是本原的。

（v）设 Q 是 $\mathcal{D}$ 的一个素理想，且满足 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D} \subsetneq Q$。如前所述，模 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$而言，$q$ 同一个单位元同余。于是，根据 (ii) 有 $Q\mathcal{D}_{(A)} = \mathcal{D}_{(A)}$，因此 Q 必定包含 x的某个幂。因此，由引理 3.3，$\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \subseteq Q$，如所要求。

最后，为了说明 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 是本原的，注意到（v）表明它是局部闭的。因此，根据定理 4.3(i)，它是本原的。□

4.3. 非一般极小本原理想（II）- $\mathfrak{m}_0$。在本小节中，我们开始研究理想 $\mathfrak{m}_0\mathcal{D}$。回顾 (2.1) 中 q、s 的定义，并根据记号 2.3(iii) 可知，$\mathfrak{m}_0 := \langle q^2g^{-1}$、$qsg^{-1}$、$s^2g^{-1}\rangle$ 是 Maxspec($Z(\mathcal{D})$) 的唯一奇异点。显然，右理想

$$P_0 := q\mathcal{D} + s\mathcal{D} \tag{4.11}$$

是 $\mathcal{D}$ 的双边理想，因为根据引理 2.1，q 和 s 在 $\mathcal{D}$ 中是正规元。此外，

$$\mathfrak{m}_0\mathcal{D} = P_0^2 \subset P_0 \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}_0\mathcal{D}}.$$

作为下一个命题的一部分，我们将看到 P_0 是完全素的，因此上面的第二个包含关系是等式。事实上，P_0 是一个极大理想，但证明这一点更为困难，故推迟到 §4.4。

命题 4.5. 保留上述记号，并令 $T := \mathcal{D}/P_0$。

（i）T 是 k 的一个 4 步迭代 Ore 扩张的局部化，即

$$T = \big((k[u,x]\langle(ux+2)^{-1}\rangle)[y;\partial_1]\big)[v;\sigma,\partial_2],$$

其中 u 和 x 可交换，

$$\partial_1(u) = -\tfrac{1}{2}ux - 2, \quad \partial_1(x) = -\tfrac{1}{2}x^2,$$

$$\partial_2(u) = -\tfrac{1}{2}u^2, \quad \partial_2(x) = \tfrac{3}{2}ux + 2, \quad \partial_2(y) = \tfrac{3}{2}uy - 2,$$

且 $\sigma(y) = y + \frac{1}{2}x$，其中 $\sigma(x) = x$ 且 $\sigma(u) = u$.

（ii）$\{q, s\}$ 构成了 P_0 的正则正规生成元序列。（iii）T 的全局维数 $\leq 4 =$ T 的 GK 维数。

（iv） T 是 Cohen–Macaulay 且是 Auslander 正则整环。

证明。在整个证明过程中，为简便起见，我们滥用记号：当不会引起混淆时，将元素 ω 在 T 中的像记为 ω，其中 ω 属于 $\mathcal{D}$。

（i），（ii）由于 $q := ux + 2(1 + g)$ 且 $q \equiv 0$ 模 P_0，我们可以写成

$$g \equiv -\tfrac{1}{2}(ux + 2)\ mod(P_0), \tag{4.12}$$

因此

$$ux + 2 \text{ is a unit in } T. \tag{4.13}$$

利用（4.12），我们得到，模 P_0,

$$s := xv + uy + (-\tfrac{1}{2}ux + g - 1)\zeta - 2(g + 1) \equiv xv + uy + 2g\zeta - 2g - 2,$$

因此，由于 $s \in P_0$,

$$\zeta \equiv -\tfrac{1}{2}g^{-1}(ux + xv + uy) \quad mod(P_0) \tag{4.14}$$

由 (4.12)、(4.13) 和 (4.14) 可得

$$T = k\langle u, x, (ux + 2)^{-1}, y, v\rangle. \tag{4.15}$$

$\mathcal{D}$ 中给出的关系立即推出 (4.15) 中列出的 T 生成元的以下关系

$$\begin{aligned} &[u, x] = 0, && [y, x] = -\tfrac{1}{2}x^2, && [v, x] = \tfrac{3}{2}ux + 2, \\ &[y, u] = -\tfrac{1}{2}ux - 2, && [v, u] = -\tfrac{1}{2}u^2, && [v, y] = \tfrac{3}{2}uy + \tfrac{1}{2}xv - 2. \end{aligned}$$

显然，(i) 中定义的 $k[u, x]\langle(ux + 2)^{-1}\rangle$ 的迭代 Ore 扩张满足这些关系，因此我们暂时将其记为 T，于是存在一个代数满同态 Φ 从 T 映到 $T_{\text{。}}$

接下来我们通过计算 GKdim(T) 来证明 Φ 是一个同构。首先注意，由定理 12.3 可知，GKdim(T) $= 4$，因为它是 $k[u, x]\langle(ux + 2)^{-1}\rangle$在 2 个变量上的 PBW 扩张。因此，显然 GKdim(T) $\leq 4.$。另一方面，根据命题 3.2(i, iii)， $\mathcal{D}$ 是 GK 维数为 6 的 Cohen–Macaulay 代数。因此，由于根据引理 2.1， q 是 $\mathcal{D}$ 的正则正规元，依据定理 7.2(b)及其证明， $\mathcal{D}/q\mathcal{D}$ 是 GK 维数为 5 的 Cohen–Macaulay 代数。此外，根据备注 2.4], $\mathcal{D}/q\mathcal{D}$ 是 GK 齐次的。由于 GKdim(T) ≤ 4，这保证了

$$s \text{ cannot be a zero-divisor mod } q\mathcal{D}. \tag{4.16}$$

由于 $P_0 := q\mathcal{D} + s\mathcal{D}$，再次应用 [16, 定理 7.2(b) 及其证明]可得 GK 维数(T) $= 4$，并且还表明

$$T \text{ is CM}. \tag{4.17}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 T是整环，等式 GK 维数(T) $= 4 =$GK 维数(T)结合[18, 命题 3.15], 表明 $T = T_{\text{。}}$因此（i）得证，而（ii）也可由 (4.16) 得出。

（iii）由（i）， T是 $k[u.x]\langle(ux + 2)^{-1}\rangle$的二步迭代 Ore 扩张，因此两次应用 [21, 定理 7.5.3(i)] 可得全局维数(T) ≤ 4。

（iv）由（i）可知， T 是整环，而 Cohen–Macaulay 性质已在（4.17）中证明。根据命题 3.2(i)， $\mathcal{D}$ 具有 Auslander-Gorenstein 性质。因此，由（ii）以及两次应用 [16, 定理 7.2(a)]可知， T 也具有 Auslander-Gorenstein 性质，继而由（iii）可知它是 Auslander 正则的。□

我们指出，根据引理 4.2 和定理 2.2(iii)，可得 gldim(T) < 4。我们不知道 gldim(T) 的确切值。

4.4. P_0的极大性。设 $T := \mathcal{D}/P_0$ 如命题 5.3 所述。另定义 T 的以下子代数:

$$R := k\langle u, x, (ux+2)^{-1}\rangle, \ and\ S := R[y; \partial_1],$$

因此 $T = S[v;\ \sigma,\ \partial_2]$。值得注意的是，根据命题 4.5 中的公式， R 在 σ-导子 ∂_2 作用下保持不变。此外，由于 $\sigma_{|R}$ 是恒等映射，∂_2 实际上限制为 R 上的导子。

若环是微分算子环（即定义自同构实际上是恒等映射），则更容易判定 Ore 扩张何时为单环。因此，我们将归约到这种情形。其思路源自引理 2.1，该引理表明， σ^2 由内自同构 τ_g 给出，也就是说，对于适当的 $g \in S$，有 $\sigma(s) = \tau_g(s) = gsg^{-1}$。因此，我们将用 $\sqrt{g}$ 扩张 R、S 和 T，并证明此时 σ 是内自同构，因而可以将其消去。具体细节将在接下来的几个结果中给出，最终得到命题 4.9。

1 ~记号 4.6。在 R 的代数闭包中，令 $h = (ux+2)^{-\frac{1}{2}}$。记 $R = R\langle h\rangle = k\langle u, x, h, h^{-1}\rangle$。按照分数幂的通常规则，我们将 ∂_i 延拓为作用于 $\widetilde{R}$ 上的导子:

$$\partial(h) = (-\frac{1}{2})(ux+2)^{-1}h\partial(ux+2),$$

~ ~ ~对于 $\partial = \partial_1, \partial_2$。令 $S = R[y; \partial_1]$。最后，通过令~$\sigma(h) = h$，我们可以将 σ 延拓至 R 和 S。于是， σ 和 ∂_2 都自然地定义在 S 上，分别为自同构 ~ ~和 σ-导子，因此 $T = S[v;\ \sigma, \partial_2]$ 是~S 的一个定义良好的 Ore 扩张。

下面的观察将证明很有用。

~ ~引理 4.7。 S 是一个自由的左、右 S 模，其基为 $\{1, h\}$。同样， T 是一个自由的左、右 T 模，其基为 $\{1, h\}$。

证明。由于 $h^2 = (ux+2)^{-1} \in R$， $\widetilde{R}$ 的构造确保 $\widetilde{R}$ 是以 $\{1, h\}$ 为基的自由左、右 R-模。于是我们可以写成

$$\widetilde{S} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \widetilde{R}y^i = \bigoplus Ry^i \oplus \bigoplus Rhy^i = \bigoplus Ry^i \oplus \bigoplus Ry^i h.$$

~合并各项可得 $S = S \oplus Sh$。由于 S 是整环，因此这必然是自由模的~直和。同样的论证也适用于 T。□

引理 4.8。在 $\widetilde{S}$ 上， σ 是由 $\tau_{h^{-1}}$ 给出的内自同构；因此 $\sigma(f) = h^{-1}fh$（对 ~ $f \in S$）。

~证明。由于 R 是一个交换环，且 σ 是其恒等映射，因此该引理在 R上显然成立~。所以只需检查这些自同构在y上是否一致。为此，我们将 $h^{-1}yh$ 改写如下。

$$\begin{aligned} h^{-1}yh &= (ux+2)^{\frac{1}{2}}y(ux+2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (ux+2)^{\frac{1}{2}}(ux+2)^{-\frac{1}{2}}y \ + \ (ux+2)^{\frac{1}{2}}\cdot\partial_1\big((ux+2)^{-\frac{1}{2}}\big) \\ &= y \ + \ (ux+2)^{\frac{1}{2}}(-\tfrac{1}{2})(ux+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\partial_1((ux+2)) \\ &= y \ - \ \tfrac{1}{2}(ux+2)^{-1}\Big((-\tfrac{1}{2}ux-2)x-u(\tfrac{1}{2}x^2)\Big) \\ &= y \ - \ \tfrac{1}{2}(ux+2)^{-1}\big(-(ux+2)x\big) \\ &= y \ + \tfrac{1}{2}x \ = \ \sigma(y); \end{aligned}$$

如所需。 □

~ ~ ~ ~命题 4.9。令 $\alpha = hv$。则 T 是 Ore 扩张 $T = S[\alpha;\ \partial_2]$ 其中 ∂_2~ ~ ~是 S 上的导子，由 $\partial_2(s) = h\partial_2(s)$ 对于 $s \in S$定义；因此

$$\widetilde{\partial}_2(u) = -\tfrac{1}{2}hu^2, \quad \widetilde{\partial}_2(x) = h(\tfrac{3}{2}ux+2) \quad \textit{and} \quad \widetilde{\partial}_2(y) = h((\tfrac{3}{2}uy-2).$$

~因此， T 是一个诺特整环。

~证明。这是一次形式计算。事实上，对于 $s \in S$，引理 4.8 蕴含$\sigma(s) = h^{-1}sh$。等价地，

$$\begin{aligned} \alpha s &= hvs = h\sigma(s)v + h\partial_2(s) \\ &= hh^{-1}shv + h\partial_2(s) = s\alpha + h\partial_2(s). \end{aligned} \tag{4.18}$$

因此，由于 $\widetilde{T} = \widetilde{S}[v;\ \sigma, \partial_2] = \bigoplus \widetilde{S}v^i$，我们得出 $\widetilde{T} = \bigoplus \widetilde{S}\alpha^i$。由于 $\widetilde{T}$是一个整环，结合 (4.18) 和 [12, 定理 1，第 438] 页，便得到所需结论。□

~接下来，我们将证明环 T 是一个单整环，之后很容易证明 T也有相同的结论。我们先给出一些预备结果。

~ ~引理 4.10. 若 R中存在一个非零的 (∂_1, ∂_2)-不变理想 I，则 R中存在一个非零的 (∂_1, ∂_2)-不变素理想 P。

~ ~证明. 两次应用 [17, 引理 3.18(b)]，显然 IS 是 S ~ ~的真非零理想，进而 IT 是 T的真非零理想。取一个素理想 $Q \supseteq IT$。然后，两次应用 ~ ~ ~[17, 引理 3.18 和 3.21],，可知 $Q_1 = Q \cap S$ 是 S~ ~的 ∂_2-不变素理想，因此 $Q_2 = Q_1 \cap R$ 是 R的 ∂_1-不变素理想。然而，由于 R 和 ~Q_1 都是 ∂_2-不变的，Q_2也如此。因此，$P = Q_2$ 就是所求的素理想。□

~ ~命题 4.11. R 中不存在非零的真 (∂_1, ∂_2)-不变理想 I。

证明。假设存在这样一个理想 I。根据引理 4.10，我们可以且将假设 I 是一个素理想。首先，假设对于某个 $\lambda \in k$，有 $(xu+\lambda) \in I$。那么

$$I \ \ni \ \partial_1(xu+\lambda) \ = \ (-\tfrac{1}{2}ux-2)x - (\tfrac{1}{2}x^2)u \ = \ -(ux+2)x$$

and

$$I \ \ni \ \widetilde{\partial}_2(xu+\lambda) \ = \ h\big(-\tfrac{1}{2}u^2x + (\tfrac{3}{2}ux+2)u\big) \ = \ h\big(ux^2+2u\big) \ = \ h(ux+2)u.$$

由于 $(xu+2)^{-1}=h^2\in\widetilde{R}$，显然 $\lambda\neq 2$，因此这两个方程分别推出 $x\in I$ 和 $u\in I$。于是，$I=x\widetilde{R}+u\widetilde{R}$。但是，现在 $I\ni\partial_1(u)=-\frac{1}{2}ux-2$，因此 $I=R$，矛盾。我们得出结论：

$$I\cap\mathcal{C}=\emptyset\quad\text{for }\mathcal{C}=\{(xu+\lambda):\lambda\in k^*\}\tag{4.19}$$

由于 I 是一个素理想，因此可得 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{C}(I)$，进而可知 $I_{\mathcal{C}}$ 是局部化 $R_{\mathcal{C}}$ 的一个真素理想。

接下来，若对某个 $f(u)\in k[u]$ 有 $I_{\mathcal{C}}\ni f=f(u)$，则 $I_{\mathcal{C}}\ni\partial_1(f)=-\frac{1}{2}(ux+4)\frac{df}{du}$。因此 $\frac{df}{du}\in I_{\mathcal{C}}$。对 deg f 作归纳可得 $I_{\mathcal{C}}=\widetilde{R}_{\mathcal{C}}$，这就产生了矛盾。因此 $I_{\mathcal{C}}\cap k[u]^*=\emptyset$，于是我们可以进一步在 $\mathcal{S}=k[u]^*$ 处局部化，并得出 $I_{\mathcal{CS}}$ 是 $\widetilde{R}_{\mathcal{CS}}$ 的一个真素理想。现在考虑 $\widetilde{R}_{\mathcal{CS}}$。我们有 $\widetilde{R}=k\langle u、x、h、h^{-1}\rangle$，并且 $h^{-2}=(ux+2)$，由此得到 $x=u^{-1}(h^{-2}-2)$。因此 $\widetilde{R}_{\mathcal{CS}}=\widetilde{R}_{\mathcal{SC}}$ 是 $k(u)[h,h^{-1}]$ 的一个局部化。

在 ∂_2 中进行工作的优点是 $\widetilde{R}_{\mathcal{CS}}$ 是 $R_{\mathcal{CS}}$ 我们可以简化导子。那么，作为作用在任一环上的导子，

$$\partial_1=-(\tfrac{1}{2}xu+2)\partial_u\ -\ \tfrac{1}{2}x^2\partial_x$$

而

$$\widetilde{\partial}_2\ =\ -\tfrac{1}{2}hu^2\partial_u\ +\ h(\tfrac{3}{2}ux+2)\partial_x.$$

现在令 $\mu:=-hu^2(ux+4)^{-1}$，并取

$$\widetilde{\partial}_2'\ :=\ \widetilde{\partial}_2+\mu\partial_1=\Big(-\tfrac{1}{2}hu^2+\mu(-\tfrac{1}{2}ux-2)\Big)\partial_u\ +\ \Big(h(\tfrac{3}{2}ux+2)-\tfrac{1}{2}x^2\mu\Big)\partial_x.$$

选取元素 μ，使得 ∂_2' 中 ∂_u 的系数为

$$-\tfrac{1}{2}(ux+4)^{-1}\Big(hu^2(ux+4)-(ux+4)hu^2\Big)\ =\ 0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}_2'\ &=\Big(h(\tfrac{3}{2}ux+2)\ +\ \tfrac{1}{2}hx^2u^2(ux+4)^{-1}\Big)\partial_x\\&=(ux+4)^{-1}h\Big((\tfrac{3}{2}ux+2)(ux+4)+\tfrac{1}{2}x^2u^2\Big)\partial_x\\&=(ux+4)^{-1}h\Big(2u^2x^2+8ux+8\Big)\partial_x\\&=\beta\partial_x\qquad for\quad\beta\ :=\ 2(xu+4)^{-1}(ux+2)^2h.\end{aligned}$$

由于 $I_{\mathcal{CS}}$ 在 ∂_1 和 ∂_2 作用下均不变，因此它在 ∂_2' 作用下也不变。由于 β 是 $R_{\mathcal{CS}}$ 中的一个单位，因此

$$I_{\mathcal{CS}}\ is\ also\ invariant\ under\ \beta^{-1}\widetilde{\partial}_2'=\partial_x.\tag{4.20}$$

因此，由 (4.20) 以及上文给出的 ∂_1 的表达式可知，$I_{\mathcal{CS}}$ 在 $(\frac{1}{2}ux+2)\partial_u$ 作用下不变，因而在 ∂_u 作用下也不变，因为 $\frac{1}{2}ux+2$ 是一个单位。所以，$I_{\mathcal{CS}}$ 在 ∂_u 和 ∂_x 作用下不变。由于 $R_{\mathcal{CS}}$ 是 $k[u,x]$ 的局部化，这迫使 $I_{\mathcal{CS}}=R_{\mathcal{CS}}$ 成立，从而得到所需的矛盾。□

为了在 T 与 T 之间转换，我们需要：

引理 4.12. 若 T 是单环，则 T 也是单环。

证明。假设 T有一个真理想 J。那么 $X = T/JT$是一个（T, T）-双模。此外，由引理 4.7 T 是有限生成左 T-模，因此 X 是有限生成左 T-模；设为 $X = \sum_{i=1}^{r} Tx_i$。由于 T是 Ore 整环，$\operatorname{ann}\tilde{\tau}(X) = \bigcap_i \operatorname{ann}\tilde{\tau}(x_i) \neq 0$。因为 T是单环，这意味着 $\operatorname{ann}\tilde{\tau}(X) = T$，从而 $X = 0$。换言之，$JT = T$。

另一方面，根据引理 4.7，$T = T + Th$是一个自由左 T-模，因此 $JT = J \oplus Jh \neq T$。这一矛盾证明了该引理。□

现在我们把所有内容综合起来，证明本小节的主要结果。

定理 4.13。 T 是一个单环。

证明。由引理 4.12，只需证明 T 是单环。根据 [21, 定理 1.8, 4] $T = S[\alpha;\ \partial_2]$，我们需要证明

(a) ∂_2 不是 S上的内导子，并且

(b) S 没有真 ∂_2-不变理想。

现在，由于 $\partial_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$，右理想 $x\widetilde{S}$ 是 $\widetilde{S}$ 的真双边理想。因此，它在 $\widetilde{S}$ 的任意内导子作用下保持不变。但是 $\widetilde{\partial}_2(x) = h(\frac{3}{2}ux + 2) \notin x\widetilde{S}$，这意味着 ∂_2 不可能是 S 的内导子，因此 (a) 成立。

∂_2-不假设 S 有一个真根据 [17, 引理 3.18], $K = I \cap R$ 是 R 的 ∂_1-不变理想；而根据 [17, 引理 3.19], $K \neq 0$。由于 I 和 R 都是 ∂_2-不变的，K也如此。换言之，K 是 R 的真 (∂_1, ∂_2)-不变理想。这与命题 4.11 矛盾。因此 (b) 成立，进而 [21, 定理 1.8.4] 推出 T 是单环。□

注 4.14. 我们以指出 T 与 Weyl 代数 A_2显然是双有理的来结束本小节。我们不知道 T 本身是否也如此。

4.5. $\mathcal{D}$的本原谱的结构。本小节中，我们结合本节前面的结果来证明定理 1.1。根据定理 4.3，$\mathcal{D}$ 的每个本原理想 P 都包含 $Z(\mathcal{D})$的一个极大理想。因此，Privspec($\mathcal{D}$)是不交并

$$\operatorname{Privspec}(\mathcal{D}) = \dot{\bigcup}_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Maxspec}(Z(\mathcal{D}))} \mathcal{V}(\mathfrak{m}) \tag{4.21}$$

其中 $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \{P \in \operatorname{Privspec}(\mathcal{D}):\ \mathfrak{m} \subseteq P\}$. 因此有 3 种情况，分别对应于 §§4.1、4.2 和 4.3。

(I) $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$，其中 $\mathfrak{m} \in \operatorname{Maxspec}(Z(\mathcal{D}))$，且 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_+$ 和 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$。根据定理 4.1，$\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\mathcal{D}\}$ 是 $\mathcal{D}$的一个单一泛极大理想。此外，$\mathcal{D}/\mathfrak{m}\mathcal{D}$ 与第二 Weyl 代数双有理等价，并具有该定理中列出的其他性质。

（II） $\mathcal{V}(\mathfrak{m}_+)$。根据定理 4.4，这由 $\mathfrak{m}_+\mathcal{D}$ 以及

$$\mathcal{V}(\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}) := \{P \in \operatorname{Privspec}(\mathcal{D}) : \mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \subset P\},$$

组成；根据定理 2.2(ii)，它与 Privspec($U(\mathfrak{sl}(2,k))$) 同胚。

回顾一下，Privspec($U(\mathfrak{sl}(2,k))$)由余阿廷极大理想$\{M_n$ 组成：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$，其中 $M_n = \operatorname{Ann}(V_n)$，$V_n$ 是 n维不可约

$U(\mathfrak{sl}_2(k))$–模，以及 $U(\mathfrak{sl}(2,k))$的极小本原理想；也就是说，理想$(\Omega - \lambda)U(\mathfrak{sl}(2,k))$: $\lambda \in k\}$，其中Ω是Casimir 元素。每个 M_n都包含一个这样的极小本原理想，而每个极小本原理想至多包含于一个 M_n中；其余极小本原理想也都是极大理想。注意，$\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}$ 是素的，但不是本原的，因为 $\mathcal{D}/\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \cong U(\mathfrak{sl}(2,k))$，且这个整环满足零点定理，并具有非平凡中心 $k[\Omega]$。

(III) $\mathcal{V}(\mathfrak{m}_0)$。根据命题 4.5 和定理 4.13，这就是单元素集 $\{P_0 = q\mathcal{D} + s\mathcal{D} = \sqrt{\mathfrak{m}_0}\}$。

5. 素理想与 Dixmier-Moeglin 等价

本节证明引言中的定理 1.2，该定理描述了 $\mathcal{D}$ 的素理想，并讨论 $\mathcal{D}$ 的 Dixmier-Moeglin 等价。

5.1. $\mathcal{D}$的素谱。我们需要以下引理来证明主要结果定理 5.3。

引理 5.1. 设 P 是 $\mathcal{D}$ 的非零素理想。那么 $P \cap Z(\mathcal{D}) \neq \{0\}$。

证明。如果对某个 $i \geq 0$ 有 $x^i \in P$，那么由引理 3.3（取 $M = \mathcal{D}/P$）可得 $\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \subseteq P$，因此 $\mathfrak{m}^+ = \mathcal{O}(G)^+\mathcal{D} \cap Z(\mathcal{D}) \subseteq P$，从而对 P 证明了该引理。因此我们可以假设 $\{x^i : i \geq 0\} \cap P = \emptyset$。类似地，我们可以假设 $\{q^j : j \geq 0\} \cap P = \emptyset$，因为否则对某个 $n \geq 0$ 有 $0 \neq q^n g^{-2n} \in P \cap Z(\mathcal{D})$，同样可得对 P 的结论。

因此，利用记号 3.6 和定理 3.8，$P\mathcal{D}_{(A)}$ 作为 $\mathcal{D}_{(A)} = \mathcal{D}\langle q^{-1}$ 的非零真理想仍然成立，$x^{-1}\rangle = A_2^{(A)}(k) \otimes_k S_{(A)}$，其中 $A_2^{(A)}(k)$ 是一个局部化 Weyl 代数，且 $S_{(A)} = k[z^{\pm 1}, \omega]$。特别地，

$$P\mathcal{D}_{(A)} = (P\mathcal{D}_{(A)} \cap S_{(A)})\mathcal{D}_{(A)}. \tag{5.1}$$

由 [17, 定理 10.20] 以及本证明第一段中的讨论，$P = P\mathcal{D}_{(A)} \cap \mathcal{D}$，因此

$$P \cap Z(\mathcal{D}) = P\mathcal{D}_{(A)} \cap Z(\mathcal{D}) = (P\mathcal{D}_{(A)} \cap S_{(A)}) \cap Z(\mathcal{D}). \tag{5.2}$$

由于 $Z(\mathcal{D})$-模 $S_{(A)}/Z(\mathcal{D})$ 是 $\{z^i\}$-挠的，也就是说是 $\{q^i g^{-2i}\}$-挠的，由 (5.1) 和 (5.2) 可得 $P \cap Z(\mathcal{D}) \neq \{0\}$，正如所需。□

注意，由于 k 是代数闭且特征为 0，$Z(\mathcal{D})$ 的定义关系$z\theta = \omega^2$ 经过变量线性变换后可改写为二次型 $X^2 + Y^2 = Z^2$。因此，下一条结果的证明可见 [15, 第 51 页及命题 11.4]。

引理 5.2. $Z(\mathcal{D})$ 的所有高度一素理想都是主理想，除了 $\mathfrak{p}_1 := \langle z、\ \omega\rangle$ 和 $\mathfrak{p}_2 := \langle \theta、\ \omega\rangle$。□

以下是本节的主要结果，其中（ii）采用引理 5.2 中的记号。这证明了引言中的定理 1.2。

定理 5.3. 设 P 是 $\mathcal{D}$ 的一个素但非本原理想。

（i） P有以下三种可能。（a） $P = \{0\}$。（b） $P = \mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}$。

（c） P 的高度为一，且是高度一素理想 $P \cap Z(D)$ 在 $Z(\mathcal{D})$ 中位于 $(P \cap Z(\mathcal{D}))\mathcal{D}$ 之上的极小理想。（ii）在情形（c）中，如果 $P \cap Z(\mathcal{D}) = \mathfrak{p}_i$ 对于 $i = 1$，分别对于 $i = 2$，那么 $P = q\mathcal{D}$，分别为$P = s\mathcal{D}$。情形（c）中的其余素理想恰好构成集合

$$\{P : P = f\mathcal{D}\},$$

当 f 遍历 $Z(\mathcal{D})$ 的不可约元等价类（不包括 z 的相伴元）时，ω, θ。

证明。首先注意到，根据命题 3.1，$\{0\}$ 是完全素的；它不是本原的，因为根据定理 4.3，$\mathcal{D}$ 满足零点定理，且 $Z(\mathcal{D}) \neq k$。这涵盖了情形（a）。

设 P 是 $\mathcal{D}$ 的一个非零素但非本原理想。根据引理 5.1，

$$\{0\} \neq \mathfrak{p} := P \cap Z(\mathcal{D}).$$

若 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_+$，则定理 4.4 结合 §4.5(II) 处的讨论表明，唯一可能是 $P = \mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}$；它是完全素的，但由于零点定理，它仍然不是本原的，因为 $Z(U(\mathfrak{sl}(2,k))) \neq k$。这就是情形（$b$）。

若 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_0$，则 $P = P_0$，根据定理 4.13，它是极大的，因此这种情形不可能发生。类似地，若 $\mathfrak{p}$ 是 $Z(\mathcal{D})$ 的任意极大理想，且不同于 $\mathfrak{m}_+$ 或 $\mathfrak{m}_0$，则 $P = \mathfrak{p}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的极大理想（根据定理 4.1(i)），这同样会导致矛盾。

因此，剩下的情形是 $\mathfrak{p}$ 的高度为一。先假设 $\mathfrak{p} = fZ(\mathcal{D})$ 是主理想。那么，由引理 5.2，$z = q^2g^{-1} \notin P$，且 $\{x^i : \text{根据引理 3.2，} i \geq 0\} \cap P = \emptyset$。因此，利用记号 3.6 和定理 3.8

$$\mathfrak{p}\mathcal{D}_{(A)} = (P \cap S_{(A)})\mathcal{D}_{(A)} = P\mathcal{D}_{(A)}.$$

我们断言 $P = \mathfrak{p}\mathcal{D}$。为此，注意到 $\mathfrak{p}\mathcal{D} = f\mathcal{D}$ 是主理想，因此根据 [16, 定理 7.2(b) 及其证明], $\mathcal{D}/\mathfrak{p}\mathcal{D}$ 是 GK 维数为 5 的 Cohen–Macaulay 环，并且由 [19, §3.4，注记 (3)] 可知它是 GK-齐次的。现在，$P/\mathfrak{p}\mathcal{D}$ 被 $\mathfrak{p}\mathcal{D}$ 消去，也被 q 的某个幂或 x 的某个幂消去，因此其 GK 维数小于 5；这分别由定理 4.1(iii) 和 4.4(iv)，或引理 3.2 得出。这迫使 $P/\mathfrak{p}\mathcal{D} = \{0\}$，因而 $P = \mathfrak{p}\mathcal{D}$，正如所声称的那样。

最后，假设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ 或 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$。在第一种情况下，由于根据引理 2.1，$q$ 是 $\mathcal{D}$ 的正规元，$q \in \sqrt{\mathfrak{p}\mathcal{D}}$。因此

$$q\mathcal{D} \subseteq P. \tag{5.3}$$

我们断言 (5.3) 是一个等式。为此，注意到 $s \notin P$，否则 $P \cap Z(\mathcal{D}) = \mathfrak{m}_0$，这与假设相矛盾。此外，$\{x^j : \text{根据引理 3.2，} j \geq 0\} \cap P = \emptyset$。因此，我们可以在 Ore 集 $B = \{s^i x^j : i\text{处局部化，} j \geq 0\}$ 是定义 3.4 中的，并转到定理 3.8 中的局部化 Weyl 代数 $D_{(B)} = A_2^{(B)}(k) \otimes S_{(B)}$。然而，$P\mathcal{D}_{(B)}$ 和 $q\mathcal{D}_{(B)}$ 与中心 $S_{(B)}$ 的交相同，即 $\omega\theta^{-1}S_{(B)} = \mathfrak{p}_1 S_{(B)}$。因此，$P\mathcal{D}_{(B)} = q\mathcal{D}_{(B)}$，因为 $D_{(B)}$ 的理想由中心元生成。因此，$P/q\mathcal{D}$ 是 B-挠的，所以若它非零，则包含一个非零元，该元要么被 q 和 s湮灭，要么被 q 和 x湮灭。如上一段所述，$\mathcal{D}/q\mathcal{D}$ 是 GK 齐次的，GK 维数为 5，因此没有这样的非零挠子模。这就证明了 (5.3) 是一个等式。

若 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$，则证明 $P = s\mathcal{D}$ 的论证类似，只需使用 Ore 集 A；证明留给读者。□

5.2. Dixmier-Moeglin 等价。以下结果为支持 [6, 猜想 1.3], 提供了证据。该猜想提出，有限 GK 维数的仿射诺特 Hopf $\mathbb{C}$ 代数应满足 Dixmier-Moeglin 等价。定义和背景见 [5, 10] 。

推论 5.4. $\mathcal{D}$ 满足 Dixmier-Moeglin 等价。

证明。首先，利用 §4.5 中对本原谱的描述，我们检验每个本原理想都是局部闭的。对于类（I）和（III），这显然成立，因为这些本原理想全都是极大理想。（II）中的本原理想与 $U(\mathfrak{sl}(2,k))$ 的本原谱同胚，而后一个代数由 [23] 可知满足该等价。因此，根据 [10, 引理 II.7.15], ，只需证明每个有理素理想 P 都是本原理想，其中若 $\mathcal{D}/P$ 的 Goldie 商代数的中心为 k，则称 P 为有理的。非本原素理想列于定理 5.3 中，逐一检查可轻易得知，它们都不是有理的。□

推论 5.4 证明了定理 1.3(c)。除一个例外外，该定理的 (a) 和 (b) 部分已由前两节的结果得以证明；这两节描述了 $\mathcal{D}$ 的素理想。例外是这样一个断言： $\mathcal{D}$ 的所有完全素因子（如注 4.14 所述， $\mathcal{D}/P_0$ 可能除外）都与 Weyl 代数双有理等价。对于严格包含 $\mathcal{O}(G)^+\mathcal{D}$ 的本原理想 P，这由 [13, Remarque 7.1] 得出。对于其他素理想，这一点从前两节对素理想的描述中显然可见。

我们所依据的不过是关于群代数和包络代数的已知结果与反例、余交换情形下的定理 [6] 、Sierra 和 Walton 关于包络代数 Noether 性的最新工作[25], ， 以及上述结果和其他零散的例子；因此，我们倾向于在 [6, 的点化情形下提出以下猜想，以强化猜想 1.3], ，既希望促进反例的发现，也期待得到肯定的结果。

猜想 5.5. 设 H 是一个仿射诺特点化 Hopf $\mathbb{C}$代数。则下列条件等价：

(1) GK 维数(H)有限。(2) H 满足 Dixmier-Moeglin 等价。
(3) H 的类群元群 $G(H)$是有限扩张幂零的。

感谢 Roseblade [24] 关于群代数的一个著名结果，当 k 是有限域时，蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (3) 不成立。

References

[1] N. Andruskiewitsch、F. Dumas 和 H. M. Pena Pollastri, *On the double of the Jordan plane*, Ark. Mat. 60 (2022), 213-229. [2] N. Andruskiewitsch 和 H. M. Pena Pollastri, *On the restricted Jordan plane in odd characteristic* **20** 2021 2140012 , J. Algebra Appln. ( ), no. . [3] , *On the finite-dimensional representations of the double of the Jordan plane*, arXiv2211.01581 (2022). [4] M. Artin、L. W. Small 和 J. J. Zhang, *Generic flatness for strongly noetherian rings*, J. Algebra 221 (1999), 579-610. [5] J. Bell, *On the importance of being primitive*, Rev. Colombiana Mat. 53 (2019), 87-112. [6] J. Bell 和 W. H. Leung, *of finite Gelfand-Kirillov Dimension* **17** 2014 1843 1852 , Alg. Rep. Theory ( ), - .

[7] J.-E. Bjork, *The Auslander condition on noetherian rings*, Seminaire Malliavin, 数学讲义 1404 (1989), 137-173. [8] K. A. BROWN, *Unruffled extensions and flatness over central subalgebras*, J. Algebra 284 (2005), 771-800. [9] K. A. BROWN、M. Couto 和 A. Jahn, *The finite dual of commutative-by-finite Hopf algebras*, 格拉斯哥数学杂志 (2022), 1-28. [10] K. A. BROWN 和 K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, 巴塞罗那 CRM 数学高级课程, Birkhauser, 2002. [11] K. A. BROWN 和 J. J. Zhang, *Dualising complexes and twisted Hochschild (co)homology for noetherian Hopf algebras* **320** 2008 1814 1850 , J. Algebra ( ), - . [12] P. M. Cohn, *Algebra Vol. II*, Wiley, 1977. [13] J. Dixmier, *Quotients simples de l'alg`ebre enveloppante de* $\mathfrak{sl}_2$, J. Algebra 24 (1973), 551-564. [14] Y. Doi 和 M. Takeuchi, *Multiplication alteration by two-cocycles - the quantum version*, Comm. in Algebra 22 (1994), 5715-5732. [15] R. M. Fossum, *The Divisor Class Group of a Krull Domain*, 数学及其边界领域成果, 第74卷, Springer, 1973. [16] K. R. Goodearl 和 T. L. Lenagan, *Primitive ideals in quantum SL3 and GL3*, 当代数学 562 (2012), 115-140. [17] K. R. Goodearl 和 R. W. Warfield, *An Introduction to Noncommutative Noetherian rings*, 第二版, 伦敦数学会学生教材, 第61卷, 剑桥大学出版社, 2004. [18] G. R. Krause 和 T. H. Lenagan, *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, 修订版, 数学研究生教程, 第22卷, 美国数学会, 2000. [19] T. Levasseur, *Some properties of non-commutative regular graded rings*, 格拉斯哥数学杂志 34 (1992), 277-300. [20] K. Li 和 C. Liu, *The finite duals of affine prime regular Hopf algebras of GK-dimension one* 2103 00495 2021 , arXiv . ( ). [21] J. C. McConnell 和 J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, 修订版, 数学研究生教程, 第30卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2001. [22] J. C. McConnell 和 J. T. STAFFORD, *Gelfand-Kirillov dimension and associated graded modules* **125** 1989 197 214 , J. Algebra ( ), - . [23] C. Moeglin, *Idéaux primitifs dés algèbres enveloppantes*, 纯粹与应用数学杂志 59 (1980), 265-336. [24] J. E. Roseblade, *Group rings of polycyclic groups*, 纯粹与应用代数杂志 3 (1973), 307-328. [25] Sierra 和 Walton, *The universal enveloping algebra of the Witt algebra is not noetherian* **262** 2014 239 260 , Adv. Math. ( ), - .

School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow, Glasgow G12 8QQ, Scotland
Email address: ken.brown@glasgow.ac.uk

School of Mathematics, The University of Manchester, Manchester M13 9PL, Eng-land*Email address*: Toby.Stafford@manchester.ac.uk