arXiv:2301.04433v1 [math.FA] 11 Jan 2023

巴拿赫空间单位球元素的直径概念

´ ¨MIGUEL MARTIN、YOEL PERREAU 和 ABRAHAM RUEDA ZOCA

Abstract. 我们介绍了 Δ点和 Daugavet 点的扩展：其中，用相对弱开子集替代切片（超 Δ点和超 Daugavet 点），或用切片的凸组合替代切片（ccs Δ点和 ccs Daugavet 点）。这些概念与凹陷点、连续点和强正则点完全相反。我们首先概述这些新概念，并给出它们对空间的一些等距推论。例如：如果巴拿赫空间包含一个超 Δ点，那么它不具有抑制常数小于二的无条件有限维分解（特别是无条件基）；如果实巴拿赫空间包含一个 ccs Δ点，那么它不具有一无条件基；如果巴拿赫空间包含一个 ccs Daugavet 点，那么其单位球的每个切片的凸组合都具有直径二。接下来，我们刻画了这些概念在某些巴拿赫空间类中的表现，例如证明在所有 L_1-预对偶空间中，这些概念全部 coinciding，并且在 L_1空间中，除 ccs Daugavet 点之外的所有概念都 coinciding。随后，我们讨论文献中此前出现的一些例子，并给出一些新的、引人入胜的例子：一些超 Δ点可以任意接近强暴露点（因此以极端方式不具备 Daugavet 点性质）；一个既是超 Δ点又是强正则点的例子（因此以最强方式不具备 ccs Δ点性质）；以及一个不是 ccsΔ点的超 Daugavet 点。我们还研究了直径概念向开单位球中点的扩展及其对空间的推论。最后，在存在超 Δ点或 ccs Δ点时，我们考察相对弱开子集和切片的凸组合的库拉托夫斯基测度，以及具有直径 2 性质的空间中的相应情形。本文最后以一节未解决问题作结。

Contents

1. 引言 2 2. 符号与预备结果 5 3. 直径概念的刻画及其对环境空间几何的影响 9 3.1. 具有一无条件基的空间及推广 12 3.2. 绝对和 16 4. 直径元素的例子与反例 19 4.1. 在 $C(K)$-空间、 L_1-预对偶及 M¨untz 空间中的刻画 19 4.2. 在 L_1-空间中的刻画 22 4.3. 文献中若干例子的评注 24 4.4. 一个以极端方式不满足 Daugavet 点条件的超 Δ 点 26 4.5. 一个同时也是强正则点的超 Δ 点 27 4.6. 一个不是 ccs Δ 点的超 Daugavet 点 28

Date：2023年1月11日。第一位和第三位署名作者获得了由 MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 和“欧洲区域发展基金“建设欧洲之路””资助的项目 PID2021-122126NB-C31、安达卢西亚自治区´ıa I+D+i 项目 P20 00255 和 FQM-185，以及由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的“Maria de Maeztu”卓越研究单元 IMAG（项目编号 CEX2020-001105-M）的支持。第二位署名作者获得了爱沙尼亚研究理事会项目 SJD58 的支持。

4.7. 各性质之间关系的总结 35 5. 开单位球中元素的直径性质 35 6. 库拉托夫斯基测度与大直径 38 6.1. 库拉托夫斯基测度与直径二性质。39 6.2. 库拉托夫斯基测度与 Δ 概念 41 7. 带评注的开放问题 42 致谢 45 参考文献 45

1. Introduction

可以说，巴拿赫空间最受研究的性质之一就是*Radon-Nikodým* 性质（*RNP*），因为事实证明它非常有用；这归功于其大量的几何、解析和测度论刻画；这些刻画存在于巴拿赫空间理论的多个领域中，例如有界线性算子的表示、对偶空间的表示或某些张量积空间的表示（见 [18, 21]）。

Radon-Nikodým 性质的一个著名几何刻画与切片的大小有关。回顾一下，巴拿赫空间的有界非空子集 C 的一个切片，就是 C 与一个半空间的（非空）交集。巴拿赫空间 X 具有 RNP，当且仅当 X 的每个非空闭有界子集都具有直径任意小的切片（例如见 [18]）。

巴拿赫空间的一个密切相关且同样重要的几何性质是连续点性质。回顾一下，巴拿赫空间 X 具有连续点性质（*PCP*），是指它的每个非空闭有界子集 X 都包含直径任意小的非空相对弱开子集。这里举例强调 Radon–Nikodym 性质与对偶空间的弱连续点性质版本之间惊人的等价关系，以及将 Asplund 空间刻画为 RNP 空间预对偶的相关结果（例如参见 [19]）。在证明具有有限维分解（FDD）的子空间可决定 Radon–Nikodym 性质时， [17], Bourgain 还引入了连续点性质的一个重要弱化版本，他称之为性质“（$*$）”，如今称为凸连续点性质。回顾一下，巴拿赫空间 X 具有凸连续点性质（*CPCP*），是指它的每个非空闭凸有界子集 X 都包含直径任意小的非空相对弱开子集。

事实上，Bourgain 在其研究中隐含地运用了强正则性的概念，并指出连续点性质蕴含强正则性。回想一下，若巴拿赫空间 X 中的每个非空闭凸有界子集都包含直径任意小的切片的凸组合，则称该空间具有强正则性（*SR*）。注意，在此定义中要求子集具有凸性，是为了保证它包含其切片的所有凸组合。后来发现，强正则性对于一个著名且至今悬而未决的问题有重要应用：Radon- Nikodým 性质与 Krein-Milman 性质是否等价。回想一下，若巴拿赫空间 X 中的每个非空闭凸有界子集 C 都存在一个极点，则称该空间具有*Krein- Milman* 性质（*KMP*）。Radon–Nikodym 性质蕴含 KMP（例如参见 [18, 定理 3.3.6]），并且由 [48] 可知，每个具有 KMP 的强正则空间都具有 Radon–Nikodym 性质。还要回想一下， [29]已证明，在对偶空间中，Radon–Nikodym 性质与 KMP 等价。

由定义可知，Radon–Nikodym 性质⇒片段连续性性质⇒连续点性质，且众所周知，连续点性质⇒强正则性。这些蕴含关系均不可逆（例如参见 [49]及其中的参考文献）。为证明连续点性质蕴含强正则性，Bourgain 提出了一个重要的几何观察：在巴拿赫空间 X的每个非空有界凸子集中，每个非空相对弱开子集都包含切片的一个凸组合。我们将在第2节更详细地讨论这个“Bougain 引理”及其在本文主题中的应用。

上述对 Radon-Nikod´ym 性质的刻画还有一种经典改进，与凹陷点的概念有关。回顾一下，有界子集 C X 中的点 x_0 称为 C 的切割点，如果 C 存在包含 x_0 且直径可以任意小的切片。巴拿赫空间 X 具有 RNP，当且仅当每个闭、凸且有界的子集都包含一个切割点。实际上，具有 RNP 的巴拿赫空间 X 中的每个非空闭、凸且有界子集 C，都等于其切割点集合的凸包的闭包（例如参见 [18, 推论 3.5.7]）。

对于 PCP 和 CPCP，弱到范数连续点发挥着类似的作用。给定 X的一个有界子集 C，我们称点 $x_0 \in C$ 为弱到范数连续点（简称连续点），如果恒等映射 i: $(C, w) \longrightarrow (C, \tau)$在点 x_0处连续；等价地，如果 x_0 属于 C 中直径可以任意小的相对弱开子集。值得注意的是，Lin-Lin-Troyanski [39] 的一项经典结果表明，点 $x_0 \in C$ 是切割点，当且仅当 x_0 同时是连续点和 C的极点。在具有 PCP 的空间中，每个非空闭且有界的子集都包含一个连续点；而在具有 CPCP 的巴拿赫空间 X 中，给定闭、凸且有界子集 C 的所有连续点组成的集合在 C 中弱稠密（例如参见 [22, 定理 1.13]）。

关于强正则性，若巴拿赫空间 X 的有界凸子集 C 中的点 x_0 满足：对任意小的直径，都存在包含 x_0 的 C 的切片的凸组合，则称其为强正则点。因此，在强正则巴拿赫空间 X 中，给定的闭凸有界子集 C 的所有强正则点在 C 中范数稠密（见 [25, 定理 3.6]）。值得注意的是，强正则点可能位于集合内部，而切割点（以及无限维情形下的连续点）始终位于集合的边界。

在 [3] 中，引入了与单位球的切割点截然相反的概念，定义如下：巴拿赫空间 X 的单位球面中的元素 x 称为 Δ-点，如果对于 B_X 中每个包含 x 的切片，我们都能找到一些点，使它们与 x 的距离可以任意接近球内可能达到的最大距离（距离为 2）。与此同时，在讨论巴拿赫空间的另一项著名性质——Daugavet 性质时，也出现了一个类似但更强的概念。回顾一下，若巴拿赫空间 X 满足 Daugavet 方程

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\| \tag{DE}$$

对每个秩一算子均成立 T: $X \longrightarrow X$，其中 Id 表示恒等算子。在这种情况下，所有弱紧算子也满足（DE）。背景介绍请参阅开创性论文 [35]。近期成果见 [42] 及其中的参考文献。Daugavet 性质有一个优美的几何刻画，它涉及切片，并与 Daugavet 点的概念相关：巴拿赫空间 x 单位球面上的元素 X 称为*Daugavet* 点，如果在 B_X （不一定包含该点 x）的每个切片中，都存在一些点，它们与 x 的距离可以任意接近 2。根据这一定义， [35, 引理 21] 指出， X 具有 DPr，当且仅当 S_X 中的所有元素都是 Daugavet 点。值得指出的是，Daugavet 性质对巴拿赫空间有很强的限制：若 X 是一个具有 DPr 的巴拿赫空间，则它不具有 Radon–Nikodym 性质，也没有无条件基（事实上，它不能嵌入具有无条件基的巴拿赫空间）。

另一方面， Δ点和 Daugavet 点已被证明比它们所定义的全局性质灵活得多。例如，存在一个具有 Radon–Nikodym 性质且含有 Daugavet 点 [51] 的巴拿赫空间（见第4.3.1段）；存在一个具有一无条件基且含有大量 Daugavet 点的巴拿赫空间 [6] （见第4.3.3段）；还有一个局部模一致凸巴拿赫空间，其单位球面上的所有元素都是 Δ点。该空间含有直径任意小的切片凸组合，但每个与其单位球面相交的切片凸组合的直径都为 2 [2] （见第4.3.2段）。尽管如此，近期研究已证明， Δ点对空间的等距结构有一定影响。例如， [5] 证明了一致非方形空间不含 Δ点；事实上，最近 [37] 证明了 Δ点不可能是局部一致非方点。此外，结合 [5] 的结果以及[52], 渐近一致光滑空间及其对偶空间不含 Δ点的结论。然而，关于 Δ点或 Daugavet 点是否会影响空间的同构结构，仍是一个重要的未解问题。

本文的主要目标是研究 Daugavet 点和Δ点概念的自然强化：将切片替换为非空相对弱开子集（“超点”），或将切片的凸组合替换为“ccs 点”，从而提出新的直径概念；这些概念分别与连续点和强正则点截然相反。详情见定义2.5 和 2.4 。我们的主要目标是了解，对于给定的巴拿赫空间，这类点的存在对其几何的影响，并研究若干类巴拿赫空间中的不同直径概念。我们尤其希望区分所有形式上各不相同的概念。

最后，我们简要介绍本文的结构及所得主要结果。第 2 节包含所需的记号（这些记号都是标准的）、必要的定义以及一些预备结果。第 3 节介绍若干关于较新的直径点概念的刻画，以及这类点存在的必要条件。特别地，我们研究具有一无条件基的空间中超 Δ 点和 ccs Δ 点的存在性。首先，我们给出 ccs Δ 点的一个类似结果，对应于 [6] 中的一个结果；该结果隐含地表明，这类空间不含超 Δ 点。其次，对于无条件常数较小的无条件有限维分解，以及更一般地，对于存在特殊算子族的空间，我们给出这一超 Δ 结果的更精确、改进版本。本节最后研究超 Δ 点和超 Daugavet 点在绝对和中的表现，这在一定程度上类似于已知的 Δ 点和 Daugavet 点的相关结论；然而，并非所有结果都能推广到 ccs Δ 点和 ccs Daugavet 点，我们也给出了一些部分结果。第 4 节专门讨论例子和反例。首先，我们刻画若干经典巴拿赫空间族中的直径概念：我们证明，在 L_1-预对偶和 M¨untz 空间中，所有概念都等价（第4.1小节）；在 L_1-空间中，除 ccs Daugavet 点外，所有概念也都一致（第4.2小节）。接着，我们在第4.3小节中对期刊文献中先前出现的一些例子作出评述，探讨其中新的直径概念，并指出这些概念有助于区分不同的直径概念。本节最后三个小节给出了最复杂、最棘手的例子：在第4.4小节中，超 Δ 点可以任意接近强暴露点（因此以极端方式不满足 Daugavet 点的性质）；在第4.5小节中，一个超 Δ 点是强正则的（因此以极端方式不满足 ccs Δ 点的性质）；以及超 Daugavet 点属于直径可以任意小的切片的凸组合（因此以极端方式不满足 ccs Δ 点的性质）。本小节最后总结所有直径概念之间的关系。第 5 节旨在将直径概念推广到开单位球中的元素，并用这些概念刻画若干几何性质。

特别地，我们恰当地局部化 Kadets 的结果：DSD2P 等价于 Daugavet 性质。第 6 节讨论切片、相对弱开子集和切片的凸组合的非紧性 Kuratowski 指数。我们证明，在具有直径二性质的空间中，每个相对弱开子集（分别地，在具有强直径 2 性质的空间中，每个切片的凸组合）的库拉托夫斯基测度均为 2；这些结果推广了 命题 3。1]中关于切片和局部直径 2 性质的类似结果。此外，我们还证明，每个包含超 Δ-点的相对弱开子集的库拉托夫斯基测度均为 2；对于包含 ccw Δ-点的相对弱开子集的凸组合，也有类似结果；这些结果推广了 [52, 推论 2。2]。最后，第 7 节专门汇集一些有趣的开放问题，并对这些问题作出若干评述。

2. Notation and preliminary results

例如，我们将采用书籍 [8], [23], 和 [24], 中的标准记号。给定一个巴拿赫空间 X， B_X （分别为 S_X）表示X的闭单位球（分别为单位球面）。我们用 X^* 表示 X 的拓扑对偶，并记 J_X: $X \longrightarrow X^{**}$ 为典范嵌入。我们分别用 dent（B_X）和 ext（B_X）表示 B_X的所有凹陷点以及 B_X的所有极点构成的集合。 B_X 的保持极点集合（即满足 J_X（x） $\in$ext（$B_{X^{**}}$）的那些 $x \in B_X$ ）记作 pre-ext（B_X）。对于巴拿赫空间 X和 Y， $\mathcal{L}$（X， Y）、 $\mathcal{F}$（X， Y）、$\mathcal{K}$（X， Y）分别表示所有（有界线性）算子、有限秩算子和紧算子构成的集合。我们感兴趣的性质只涉及相关巴拿赫空间的实结构，但为了考察实数或复数例子，我们并不将研究限于实空间。我们用记号 $\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 用 Re（z）表示 z 的实部（在处理实空间时，它就是恒等算子），并用 $\mathbb{T}$ 表示模为一的标量集合。

给定 C 的非空子集，我们将 co(C) 记作 C 的凸包，将 span(C) 记作 C 的线性包。此外，我们将 co(C)（分别地，span(C)）记作 C 的凸包（分别地，线性包）的范数闭包。我们将 C 的切片定义为 C 中具有如下形式的任意子集

$$S(x^*, \delta; C) := \{x \in C\colon \operatorname{Re} x^*(x) > M - \delta\}$$

其中， $x^* \in X^*$ 是 X 上的连续线性泛函， $\delta > 0$ 是正实数，且 $M := \sup_{x\in C} \operatorname{Re}\, x^*(x)$。对于单位球的切片，我们简记为 $S(x^*,\ \delta) := S(x^*,\ \delta;\ B_X)$。通常， C 的相对弱开子集是指 C 中由 C 与弱拓扑中的 X 的某个开集的（非空）交集得到的任意子集。

若假设 C 是凸的，则我们将 C 的切片的凸组合（简称 C 的凸组合切片）定义为 C 中具有如下形式的任意子集

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i,$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, 1]$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，且对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$， S_i 都是 C的一个切片。注意，切片的凸组合是凸集。我们以同样的方式定义的相对弱开子集的凸组合（简称 C 的凸组合弱开集 ）。

[30] 中的以下引理是研究 Δ-点时非常有用的工具。

引理 2.1 ([30, 引理 2.1])。 设 X 为一个巴拿赫空间，且 $x^* \in S_{X^*}$ 和 $\alpha > 0$。对于每个$x \in S(x^*, \alpha)$ 以及每个 $0 < \beta < \alpha$ ，存在 $y^* \in S_{X^*}$ 使得

$$x \in S(y^*, \beta) \subseteq S(x^*, \alpha).$$

我们还经常会用到以下由 Bourgain 提出的结果，我们在引言中已经提及。为完整起见并便于进一步讨论，我们在下文给出证明，沿用 [25, 引理 II。1], 中的证明方法。

引理 2.2 (Bourgain)。 设 X 是一个巴拿赫空间， C 是 X 的一个有界闭凸子集。那么， C 中的每个非空相对弱开子集 W 都包含 C 的切片的凸组合。

证明。 不失一般性，设 $W:=\bigcap_{i=1}^{m} S(f_i,\ \alpha_i,\ C)$，记 $\widetilde{C}=J_X(C)^{w^*}\subset X^{**}$，并且

$$W^{**}:=\bigcap_{i=1}^{m} S\big(J_{X^*}(f_i),\alpha_i;\widetilde{C}\big),$$

~它是 C 的一个非空相对弱开子集。由克莱因-米尔曼定理（例如参见 [24,定理 3.37]），可得 $\widetilde{C}=\overline{\text{co}}(\text{ext}\,(B_{X^{**}}))^{w^*}$，因此 $\overline{\text{co}}(\text{ext}\,(B_{X^{**}}))\cap W^{**}\neq\emptyset$。取一个包含于 W^{**} 中的极点凸组合 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^{**}$。由求和的连续性，对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，我们可以找到一个弱*开子集 W_i^{**}，使得 $e_i^{**}\in W_i^{**}$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i W_i^{**}\subset W^{**}$。

~现在，由于每个 e_i^{**}都是 C的极点，根据 Choquet 引理（例如参见 [24, 引理 3.40],），存在弱*切片 $S\big(J_{X^*}(g_i)\ \beta_i;\ \widetilde{C}\big)$ 满足 $e_i^{**}\in S\big(J_{X^*}(g_i)\ \beta_i;\ \widetilde{C}\big)\subseteq W_i^{**}$对每个 $i\in\{1,\dots,n\}$均成立。因此，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S\big(J_{X^*}(g_i)\ \beta_i;\ \widetilde{C}\big)\subseteq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i W_i^{**}\subseteq W^{**}$。现在，如果我们取

$$U:=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S(g_i,\beta_i,C)$$

不难证明 $U\subseteq W$，正如所需。 □

注 2.3. 请注意，一般而言，从上述证明中无法明确看出：若固定 $x\in W$，是否能保证存在切片的凸组合 $U$of C，使得 $x\in U\subseteq W$。

另一方面，鉴于上述证明，若 $x\in W\cap\overline{\text{co}}(\text{pre-ext}\,(C))$，则该结论成立。事实上，在这种情况下，若我们写作 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in W$，并满足 $x_1,\dots,x_n\in\text{pre-ext}\,(C)$ 且 $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in(0,1]$，其中 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，由求和的连续性，对于每个$1\leqslant i\leqslant n$，我们可以找到一个非空相对弱开子集 V_i，使得对每个 i 都有 $x_i\in V_i$，且满足$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i\subseteq W$。现在请注意，由于每个 x_i 都是 C的保持极点，包含 x_i 的 C 的切片构成了弱拓扑下 x_i 的邻域基。因此，对于 $1\leqslant i\leqslant n$，我们可以找到 C的一个切片 S_i，使得 $x_i\in S_i\subseteq V_i$，从而 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i\subseteq W$，所以 $U:=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_i$ 就是所需的切片的凸组合。

全文中，我们将经常讨论各种“直径 2 性质”。我们采用 [7] 中引入的记号。若巴拿赫空间 X 的每个切片的直径都为 2，则称其具有局部直径 2 性质（LD2P）；若 X 的每个非空相对弱开子集的直径都为 2，则称其具有直径二性质（D2P）；最后，若 X 的每个凸组合切片的直径都为 2，则称其具有强直径 2 性质（SD2P）（此时，根据引理 2.2，每个凸组合弱开集的直径也都为 2）。关于这些性质的定义和例子，请参见 [2, 14, 15, 45]。特别地，值得指出的是，这三种性质彼此不同；这一结果并不容易证明，参见 [14]。我们的论文与这些性质的直径型版本密切相关。虽然文献中早已隐含地研究了这些版本，但其正式定义和名称直到 [13] 才确定。若对每个切片 S 和每个 $x\in S\cap S_X$，都有 $\sup_{y\in S}\|x-y\|=2$，则称巴拿赫空间 X 具有直径型局部直径 2 性质（DLD2P）；若将切片替换为非空相对弱开

子集 B_X，则得到直径型直径 2 性质（DD2P）。显然，任何有限维空间都不具有这些性质。显然，DLD2P 蕴含 LD2P，DD2P 蕴含 D2P（这些蕴含关系均不可逆，例如 $X = c_0$），且 DD2P 蕴含 DLD2P。DLD2P 与 DD2P 是否等价尚不清楚；事实上，DLD2P 是否蕴含 D2P 也尚不清楚。对于使用凸组合切片的类似定义，我们需要稍作讨论。即使对于无限维空间 X，也不一定每个 B_X 的凸组合切片都与 S_X 相交；事实上，当且仅当 X 具有比 SD2P 更强的性质时，这种情况才会发生（见 [41, 定理 3.4]）。因此，[13] 给出的直径型强直径 2 性质（DSD2P）定义涵盖了 B_X 中的所有点，具体如下：对每个凸组合切片 C 和每个 $x \in C$，都有 $\sup_{y\in C} \|x - y\| = \|x\| + 1$。根据此定义，可以证明 DSD2P 蕴含 SD2P。然而，V. Kadets [34] 最近证明，DSD2P 等价于 Daugavet 性质。我们将在第 5 节详细讨论这一点。另一方面，我们将使用以下弱于 DSD2P 的性质：若对每个凸组合切片 C 和每个 $x \in C \cap S_X$，都有 $\sup_{y\in C} \|x - y\| = 2$，则称巴拿赫空间 X 具有受限 DSD2P。该性质严格弱于 DSD2P，参见第 4.3.2 段。

现在，我们来介绍本文将讨论的所有直径点概念。先从与上述定义关系最密切的概念说起。

定义 2.4. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。我们称

(1) 若对于包含 x的 B_X 的每个切片 S，$\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$，则称 [3] x 为 Δ-点；(2) 若对于包含 x的 B_X 的每个非空相对弱开子集V，$\sup_{y\in V} \|x - y\| = 2$，则称 x 为 超 Δ-点；(3) 若对于包含 x 的 B_X 的每个切片凸组合切片 C，$\sup_{y\in C} \|x - y\| = 2$，则称 x 为 凸组合切片 Δ-点。

Δ点在 [3] 中被引入，作为 DLD2P 的一种自然局部化（即，X 具有 DLD2P，当且仅当 S_X 中的每个元素都是一个 Δ点）。另外两个定义是新的。显然，超Δ点是 DD2P 的自然局部化：X 具有 DD2P，当且仅当S_X 中的每个元素都是一个超 Δ点。此外，ccs Δ点是受限 DSD2P 的局部化：X 具有受限 DSD2P，当且仅当 S_X 中的每个元素都是一个 ccs Δ点。

关于 Daugavet 性质，我们有以下关于点的概念。

定义 2.5。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。我们称

(1) 若对 B_X的每个切片 S 都有 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$，则称 [3] x 为一个*Daugavet* 点；(2) 若对 B_X的每个非空相对弱开子集 V 都有 $\sup_{y\in V} \|x - y\| = 2$，则称 x 为一个超 *Daugavet* 点；(3) 若对 B_X的每个 ccs C 都有 $\sup_{y\in C} \|x - y\| = 2$，则称 x 为一个*ccs Daugavet* 点。

回顾一下，Daugavet 点在 [3] 中被引入，作为 *Daugavet* 性质 的一种自然局部化，其含义是：巴拿赫空间 X 具有 Daugavet 性质，当且仅当 S_X 中的每个点都是 Daugavet 点（[35, 引理 2.1]）。根据 [50, 引理 3] 给出的几何刻画，以及其证明中包含的隐含结果可知，超 Daugavet 点和 ccs Daugavet 点也都是 Daugavet 性质的自然局部化。

由于 B_X 的每个切片都是相对弱开子集，并且根据 Bourgain 引理（见引理 2.2），的每个非空相对弱开子集都包含一个 B_X 的 ccs，因此显然有图 1 所示的关系图。

我们将在全文中证明，上述蕴含关系均不可逆；所有关系及其反例的说明请见小节 4.7。不过，我们先指出

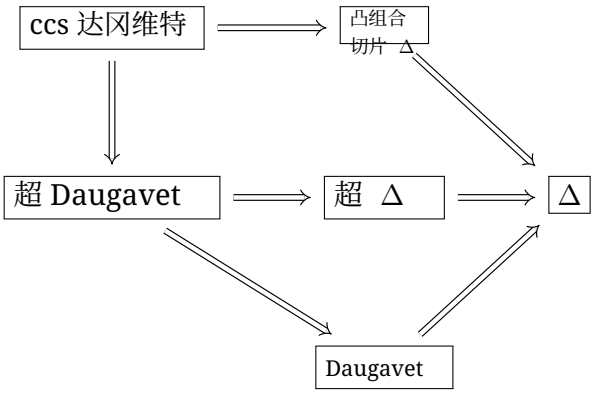

FIGURE 1. 直径概念之间的关系

我们不知道是否存在不是超 Δ的 ccs Δ 点。鉴于备注2.3，这类例子可能存在，因为 Bourgain 引理不能局部化。此外，再次由 Bourgain 引理可知，ccs Daugavet 点 $x \in S_X$ 对每个 $_{y\in D}\|x-y\|=2$ 的 ccw D，也满足 sup B_X。同样，对于 ccs Δ 点，这一点并不明确，因此我们自然可以区分 ccs Δ 点与“ccw Δ 点”。由于目前没有具体例子，我们将重点讨论切片的凸组合，并在全文中特别指出任何已知的 ccw 性质。

还需要指出，显然，如果给定巴拿赫空间的单位球的每个 ccs 都是弱开子集（分别地，具有非空的相对弱内部），那么该空间中的每个超 Δ-点（分别地，每个超 Daugavet 点）都是 ccs Δ-点（分别地，ccs Daugavet 点）。这类性质中的若干种已在 [1], [4], 和 [41]中引入并研究。关于相关背景和例子，请参阅这些论文。

注 2.6。本节所引入的所有直径点概念在对偶空间中都有自然的弱* 版本：将切片和相对弱开子集分别替换为弱* 切片（即由预对偶中的元素定义的切片）和相对弱* 开子集即可。采用显而易见的术语，根据 [35, 引理 2.1] 和 [50, 引理 3] 可知，巴拿赫空间 X 具有 Daugavet 性质，当且仅当 S_{X^*} 中的每个元素都是弱* Daugavet 点；这又当且仅当 S_{X^*} 中的每个元素都是弱* ccs Daugavet 点。由 [2, 定理 3.6] 还可知，X 具有 DLD2P，当且仅当 S_{X^*} 中的每个点都是弱* Δ-点。然而，目前尚不清楚 X 中的 DD2P 与 S_{X^*} 中的弱* 超 Δ-点之间的关系。

请注意，这些结果的一个直接推论是，弱* 直径点与其弱对应概念可能存在很大差异，因为例如，空间 $C[0,1]$*的单位球存在凹陷点。然而，显然，以下各节中关于不同直径点概念的所有结果，都有其弱* 对应概念的显然类比。为避免不必要的重复，具体细节留给读者；但我们仍要指出，由 Goldstine 定理以及对偶空间中范数的下弱半连续性可知，空间 S_X 中点的直径性质与其在二次对偶中经典范嵌入 J_X所得像的弱* 性质之间存在自然对应关系。具体而言：

(1) $x \in S_X$ 是 Daugavet 点（分别地，是 ccs Daugavet 点），当且仅当 $J_X(x)$ 是弱*Daugavet 点（分别地，是弱* ccs Daugavet 点）。

(2) $x \in S_X$ 是超 Daugavet 点，当且仅当 $J_X(x)$ 是弱* 超 Daugavet 点；当且仅当对于每个 $y \in B_X$，都存在 $B_{X^{**}}$ 中的一个网 (y_s^{**})，它在弱* 拓扑下收敛到 $J_X(y)$，且满足 $\|\pi_X(x) - y_s^{**}\| \longrightarrow 2$（见第 3 节）。(3) $x \in S_X$ 是一个 Δ-点（分别地，是一个超 Δ-点），当且仅当 $J_X(x)$ 是一个 Δ-点（分别地，是一个超 Δ-点）。(4) $x \in S_X$ 是一个 ccs Δ-点，当且仅当 $J_X(x)$ 是一个弱* ccs Δ-点。

需要指出的是，(3) 基本上可由以下显而易见的事实推出：Δ-点和超 Δ-点会自然地传递到超空间中。也就是说，若 Y 是 X 的子空间，且 $x \in S_Y$ 在 Y 中是一个 Δ-点（分别地，超 Δ-点），那么 x 在 X 中就是一个 Δ-点（分别地，超 Δ-点）。对于凸组合切片 Δ-点，这一性质并不明确，因此断言 (4) 与断言 (3) 并不类似。

3. Characterisations of diametral-notions and implications on the geometry of theambient space

鉴于直径点的定义，自然会认为，在给定的巴拿赫空间中存在任意类型的 Daugavet 元素或 Δ 元素，会因其对所考察点的性质施加严格限制，而影响该空间的整体等距几何，甚至其拓扑结构。然而，以往相关研究表明，实际情况远比乍看之下所能预料的复杂。例如，文献 [51] 和 [6] 分别构造了一个具有 Radon–Nikodym 性质（RNP）且含有 Daugavet 点的巴拿赫空间 X，以及一个具有一无条件基且含有 Daugavet 点弱稠密子集的巴拿赫空间。本节将给出新的直径概念的有用刻画，并研究这类点的存在对所考察空间几何的直接影响。

我们先从一个直观但并非完全显而易见的观察开始。

观察 3.1. 根据定义，显然，有限维空间中不存在超 Δ-点，因为在这种情形下弱拓扑与范数拓扑一致。此外，[5,定理 4.4] 已证明，有限维空间也不含 Δ-点（因而也不含凸组合切片 Δ-点）。事实上，它们以更强的方式不含这类点，参见 [5, 推论 6.10]。因此，只有在无限维空间中研究直径类概念才有意义。从现在起，除非另有说明，我们假定所考虑的所有巴拿赫空间都是无限维的。

接下来，我们证明超 Daugavet 点和超 Δ-点的一系列刻画。

设 X 为一个巴拿赫空间。对每个 $x \in S_X$ 和每个 $\varepsilon > 0$，定义

$$\Delta_\varepsilon(x) := \{y \in B_X \colon \|x - y\| > 2 - \varepsilon\}.$$

我们回顾 [3]中的 Daugavet 点和 Δ-点的如下刻画。

引理 3.2 ([3,引理 2.1 和 2.2])。设 X 是一个巴拿赫空间。

(1) 元素 $x \in S_X$ 是一个 *Daugavet* 点，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $B_X = \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(x)$。
(2) 元素 $x \in S_X$ 是一个 Δ-点，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $x \in \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(x)$。

我们对超点也有类似的刻画。

引理 3.3。设 X 是一个巴拿赫空间。

(1) 元素 $x \in S_X$ 是超 *Daugavet* 点，当且仅当 $B_X = \Delta_\varepsilon(x)^w$ 对每个 $\varepsilon > 0$都成立。(2) 元素 $x \in S_X$ 是超 Δ-点，当且仅当 $x \in \Delta_\varepsilon(x)^w$ 对每个 $\varepsilon > 0$都成立。

证明。 注意，对于给定的 $x \in S_X$、 $y \in B_X$ 和 $\varepsilon > 0$， y属于集合 $\Delta_\varepsilon(x)$ 的弱闭包，当且仅当 $\Delta_\varepsilon(x)$ 与 y 在 B_X的相对弱拓扑下的任意邻域都有非空交集。因此，对每个 $\varepsilon > 0$ ， y 属于 $\Delta_\varepsilon(x)^{w}$ ，当且仅当对于包含 y的每个相对弱开子集 V of B_X ，$\sup_{z\in V} \|x - z\| = 2$ 。结论显然成立。 □

对于任意给定的 $x \in B_X$，我们用 $\mathcal{V}(x)$ 表示 x 在 B_X的相对弱拓扑下的所有邻域的集合。我们可以利用网来刻画超点，这只是对 [13, 命题 25]的局部化。

命题 3.4。 设 X 为一个无限维巴拿赫空间。

(1) 元素 $x \in S_X$ 是一个超 *Daugavet* 点，当且仅当对于每个 $y \in B_X$ ，都存在一个网 (y_s) 位于 B_X 中，弱收敛于 y ，且满足 $\|x - y_s\| \longrightarrow 2$。(2)元素 $x \in S_X$ 是一个超 Δ-点，当且仅当存在一个网 (x_s) 位于 B_X 中，弱收敛于 x ，且满足 $\|x - x_s\| \longrightarrow 2$。

在这两种情况下，我们还可以强制使网属于 S_X。

证明。 固定 $x \in S_X$。给定任意 $y \in B_X$，显然，如果存在一个网 (y_s)，它位于 B_X 中，弱收敛于 y，并且满足 $\|x - y_s\| \longrightarrow 2$，那么对于每个 $\varepsilon > 0$， y 都属于 $\Delta_\varepsilon(x)$ 的弱闭包。反过来，取满足此性质的 $y \in B_X$。我们将 $S := \mathcal{V}(y) \times (0, \infty)$ 通过以下方式赋予有向集结构：当且仅当 $V' \subset V$ 且 $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ 时，令 $(V, \varepsilon) \leqslant (V', \varepsilon')$。根据假设，对于 S 中的每一对 $s := (V, \varepsilon)$， $V \cap \Delta_\varepsilon(x)$ 都是 B_X 的非空子集。从该集合中任取一个 y_s，即可得到所需的网。

最后注意到，对于 $x \in B_X$ 和 $\varepsilon > 0$，我们有 $B_X \backslash \Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X :$ 由于范数的下半连续性，$\|x - y\| \leqslant 2 - \varepsilon\}$ 是弱闭的，因此 $\Delta_\varepsilon(x)$ 是 B_X 的相对弱开子集。因此，对于 S 中的任意一对 $s := (V, \varepsilon)$， $V \cap \Delta_\varepsilon(x)$ 都是 B_X 的非空相对弱开子集。由于 X 是无限维的，该集合必然与 S_X 相交，实际上我们可以取 y_s 属于 $V \cap \Delta_\varepsilon(x) \cap S_X$。 □

注 3.5。 在 [36] 中给出了一个同时满足 Daugavet 性质和 Schur性质的巴拿赫空间实例。该实例表明，不可能得到一个涉及序列的上述结果版本。

请注意，以下结果与 [32, 引理 2.1 和 2.2], 类似，已包含在前面的证明中。

命题 3.6。 设 X 是一个巴拿赫空间，且令 $x \in S_X$。

(1) 若 x 是一个超 *Daugavet* 点，则对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及 B_X 的每个非空相对弱开子集 V，都可以找到 B_X 的一个非空相对弱开子集 U ，使其包含于 V，并且对每个 $y \in U$都有 $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$ 。(2) 若 x 是一个超 Δ-点，则对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及包含 x 的 B_X 的每个非空相对弱开子集V，都可以找到 B_X 的一个非空相对弱开子集 U ，使其包含于 V，并且对每个 $y \in U$都有 $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$ 。

证明。 任取 $x \in S_X$ 以及任意 $y \in B_X$ ，其中 $y \in B_X$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都属于 $\Delta_\varepsilon(x)$ 的弱闭包。那么，对于每个 $V \in \mathcal{V}(y)$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都有 $U := V \cap \Delta_\varepsilon(x)$ 是 B_X 的非空相对弱开子集。 □

根据定义显然， B_X 的切割点不可能是 Δ-点。另据 [32, 命题 31]首次指出，巴拿赫空间 X 中的每个 Daugavet 点到 X单位球中的每个切割点的距离都必须为 2。这一简单的观察后来在 [32] 和 [51]中研究 Lipschitz 自由空间里的 Daugavet 点时发挥了重要作用。对于超点，我们也有类似的观察。

引理 3.7. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。若 x 是一个超 Δ点，则 x 不可能是连续点。此外，若 x 是一个超 *Daugavet* 点，则 x 与 B_X中的每个连续点的距离都必须为 2 。

证明。 若 y 中的一个元素 B_X 是连续点，则它包含在 B_X 的直径任意小的相对弱开子集中。显然，没有超 Δ点具有这一性质，而任何超 Daugavet 点与这类点的距离都必须为 2。□

这个引理给出了不少不包含超点的巴拿赫空间实例。根据 [26] ，回顾一下， X 具有*Kadets* 性质是指范数拓扑与弱拓扑在 S_X上一致；而 X 具有$Kadets\text{-}Klee$ 性质是指， S_X 中的弱收敛序列范数收敛。还要回顾，任何局部一致凸空间都具有 Kadets-Klee 性质；而任何具有 Kadets-Klee 性质且不包含 ℓ_1 的空间都具有 Kadets 性质。根据命题3.4 ，我们显然得到以下结果。

命题 3.8。 如果 X 具有 *Kadets* 性质，那么 X 不包含超 Δ-点。

作为推论，我们得到如下结果。回顾一下，如果一个巴拿赫空间是渐近一致凸（简称渐近一致凸） [31], 则其渐近一致凸模

$$\overline{\delta}_X(t) := \inf_{x\in S_X} \sup_{\dim X/Y<\infty} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| - 1$$

对于每个 $t > 0$ 都严格为正。

推论 3.9. 设 X 是渐近一致凸的。那么， X 不包含超 Δ 点。

证明。 在渐近一致凸空间中，单位球面上的每个元素都是 B_X 的连续点，见 [31,命题 2.6]。 □

备注 3.10。 已在 [5, 定理 3.4] 中证明，任意自反 渐近一致凸空间都不含 Δ点。此外，结合 [5, 第 4] 节末尾关于渐近一致凸对偶空间单位球中的弱* 准凹陷点的观察，以及 [52, 推论 2.4] 关于包含弱* Δ 点的弱* 切片的 Kuratowski 指数达到最大值的结论，可知每个渐近一致凸对偶空间都不含弱*Δ点。不过请注意，目前尚不清楚非自反渐近一致凸空间（尤其是 James 树空间 JT*的对偶空间）是否可能含有 Daugavet 点或 Δ点。

事实证明，在 RNP 空间中（因为 RNP 空间 X 的单位球可以表示为其切割点集合的闭凸包），以及在 Lipschitz 自由空间中（紧致度量空间的[32, 定理 3.2] 和一般性陈述的 [51, 定理 2.1] ）中，Daugavet 点都可以通过其到切割点的距离来刻画。同样，我们也可以通过超 Daugavet 点到具有 CPCP 的 B_X is 空间中连续点的距离来刻画超 Daugavet 点。

命题 3.11。 如果巴拿赫空间 X 具有连续点性质，那么点 $x \in S_X$ 是超 *Daugavet* 点，当且仅当它与 B_X 的任意连续点之间的距离为2 。

证明。 如果 X 具有连续点性质，那么 B_X 的所有连续点构成的集合在 B_X 中弱稠密（例如参见 [22, 命题 3.9]），也就是说， B_X 的每个非空相对弱开子集都包含一个连续点。结论显然成立。 □

对于 ccs 点，情况则大不相同。事实上，尽管 ccs Δ-点显然不可能是强正则点，但根据 [41, 定理 3.1]， X 具有强直径二性质，当且仅当其每个切片的凸组合 B_X 都包含范数任意接近 1 的元素。因此很容易得出，任何含有 ccs Daugavet 点的空间都满足强直径二性质，所以它远非强正则。我们将在第 5节进一步探讨这一主题；为便于后文引用，先陈述如下命题。

命题 3.12。 设 X 为巴拿赫空间。若 X 含有 *ccs Daugavet* 点，则它具有强直径二性质（即不具有强正则性）。

接下来，我们将说明极点相对于直径概念具有良好的性质。

命题 3.13。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。

(1) 如果 $x \in \text{pre-ext}\,(B_X)$ 且它是一个 Δ-点，那么 x 是一个超 Δ-点。(2) 如果 $x \in \text{ext}\,(B_X)$ 且它是一个超 Δ-点，那么 x 是一个凸组合切片 Δ-点。(3) 特别地，如果 $x \in \text{pre-ext}\,(B_X)$ 是一个 Δ-点，那么 x 既是一个超 Δ-点，也是一个凸组合切片Δ-点。

证明。 由 Choquet 引理（例如参见 [23, 引理 3.69]）可知，对于巴拿赫空间的单位球中的保持极点，切片构成其相对弱拓扑的邻域基，因此 (1) 立即成立。对于 (2)，如果 x 是极点且属于 B_X 的一个凸组合切片 $C := \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$，那么 $x \in \bigcap_{i=1}^n S_i$，这是 B_X 的一个相对弱开子集。□

注 3.14。 注意到，事实上，任何极端超 Δ-点都是“凸组合弱开集 Δ-点”，正如我们在第 2 节中所讨论的。此外，Choquet 引理表明，对偶空间中的每个极端弱* Δ-点都是弱*凸组合弱开集 Δ-点。

3.1. Spaces with a one-unconditional basis and beyond. 在 [6], 中已经证明，具有次对称基的实巴拿赫空间不包含 Δ-点。另一方面，已有一个具有一无条件基且包含 Δ-点的巴拿赫空间实例，并且还构造了一个更为复杂的、具有一无条件基且包含许多 Daugavet 点的巴拿赫空间实例。我们将在小节4.3.3中详细讨论第二个实例。

在此过程中还隐含地证明了，具有一无条件基的实巴拿赫空间不能包含超 Δ-点。在本小节中，我们证明对于凸组合切片 Δ-点，结论同样成立。此外，我们还给出 [6, 命题 2.12]的更精确且更一般的版本。在本节的第一部分，我们遵循 [6]并将讨论限制在实巴拿赫空间的范围内。

设 X 是一个实巴拿赫空间，其绍德基为 $(e_i)_{i\geqslant 1}$。我们用 $(e_i^*)_{i\geqslant 1}$ 表示相应的双正交泛函序列。回顾一下，若对于每个 $x \in X$，级数$\sum_{i\geqslant 1} e_i^*(x)e_i$ 都无条件收敛，则称 $(e_i)_{i\geqslant 1}$ 为无条件 的。还需回顾，若

$$\left\|\sum_{i\geqslant 1} \theta_i e_i^*(x)e_i\right\| = \left\|\sum_{i\geqslant 1} e_i^*(x)e_i\right\|$$

对于每个 $(\theta_i)_{i\geqslant 1}\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 和每个 $x\in X$。此外，若

$$\left\|\sum_{i\geqslant 1}\theta_i e_i^*(x)e_{n_i}\right\| = \left\|\sum_{i\geqslant 1} e_i^*(x)e_i\right\|$$

对每个 $(\theta_i)_{i\geqslant 1}\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$、每个 $x\in X$ 以及 $\mathbb{N}$ 中每个严格递增的序列 $(n_i)_{i\geqslant 1}$，若满足上述条件，则称该基为次对称。

注意，对于具有一无条件基的空间，为了研究各种 Daugavet 和 Δ 概念，只需考察空间的正球面

$$S_X^+ := \{x\in S_X : e_i^*(x)\geqslant 0\ \forall i\}$$

X。此外，以下结果是众所周知的。

引理 3.15. 设 X 是一个具有一无条件基$(e_i)_{i\geqslant 1}$的实巴拿赫空间，且$(a_i)_{i\geqslant 1}$和$(b_i)_{i\geqslant 1}$ 是实数序列。若级数 $\sum_{i\geqslant 1} b_i e_i$ 收敛，且对每个i都有 $|a_i|\leqslant|b_i|$，则 $\sum_{i\geqslant 1} a_i e_i$ 也收敛，并且有

$$\left\|\sum_{i\geqslant 1} a_i e_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i\geqslant 1} b_i e_i\right\|.$$

现在我们回顾 [6]中的一些符号和预备结果。设 X 是一个实巴拿赫空间，其具有归一化单无条件基 $(e_i)_{i\geqslant 1}$。对于 A 的任意子集 $\mathbb{N}$，记 P_A 为到张成空间的投影$\{e_i,\ i\in A\}$。于是，对于每个 $x\in X$，定义

$$M(x) := \{A\subset\mathbb{N}:\ \|P_A(x)\| = \|x\|,\ \text{and}\ \left\|P_A(x) - e_j^*(x)e_j\right\| < \|x\|\ \ \forall j\in A\}.$$

集合 $M(x)$ 可视为 x 支撑中的所有极小范数决定子集 构成的集合。我们分别用 $M^{\mathcal{F}}(x)$ 和 $M^{\infty}(x)$ 表示 $M(x)$ 中所有有限元素和无限元素组成的子集。由 [6, 引理 2.7] 可知，集合 $M(x)$ 非空；由 [6, 命题 2.15] 可知，满足 $M^{\infty}(x)=\emptyset$ 的任何元素$x\in S_X$ 都不可能是 Δ-点。

对于 $\mathbb{N}$ 的任意非空有序子集 $A:=\{a_1<a_2<\dots\}$，以及任意小于或等于 $|A|$的 $n\in\mathbb{N}$，记 $A(n) := \{a_1,\dots,a_n\}$ 为由 A 的前 n 个元素构成的子集。以下默认 $M(x)$ 中的元素是 $\mathbb{N}$ 的有序子集。接下来的两个结果已在 [6,引理 2.8 和引理 2.11]中证明。

引理 3.16。 设 X 是一个具有归一化单无条件基$(e_i)_{i\geqslant 1}$ 的实巴拿赫空间，并设 $x\in S_X$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，集合

$$\big\{A\in M(x):\ |A|\leqslant n\big\}\quad \textit{and}\quad \big\{A(n): A\in M(x),\ \textit{and}\ |A|>n\big\}$$

均为有限集。

引理 3.17。 设 X 是一个具有归一化单无条件基的实巴拿赫空间，并设 $x\in S_X$。对于 $\mathbb{N}$ 的每个子集 E，若对每个 $A\in M(x)$ 都有 $E\cap A\neq\emptyset$，则有 $\|x-P_E(x)\|<1$。

有了这些工具，我们现在可以证明一个类似于 [6, 命题 2.13] 的结果，适用于切片的凸组合。

命题 3.18。 设 X 是具有归一化单无条件基的巴拿赫空间，且 $x\in S_X^+$。那么，存在 $\delta>0$ 和 B_X 的一个凸组合切片 C，使其包含 x，且 上确界$_{y\in C}\|x-y\|\leqslant 2-\delta$。

证明。 设 $x \in S_X^+$，并定义 $E = \bigcup_{A\in M(x)} A$(1)。由引理 3.16 和引理 3.17，可知 E 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集，且 $\|x - P_E(x)\| < 1$。特别地，存在 $\gamma > 0$ 使得$\|x - P_E(x)\| \leqslant 1 - \gamma$。对于每个 $i \in E$，我们定义

$$S_i := S\left(e_i^*, 1 - \frac{e_i^*(x)}{2}\right).$$

接下来我们考虑凸组合切片

$$C := \frac{1}{|E|}\sum_{i\in E} S_i.$$

由于 $x \in S_X^+$，显然有 $x \in \bigcap_{i\in E} S_i$，特别是有 $x \in C$。

因此，取 $y := \frac{1}{|E|}\sum_{i\in E} y^i$ 属于 C。于是，对于每个 i，我们都有 $e_i^*(y^i) > \frac{e_i^*(x)}{2}$。特别地，$e_i^*(y^i) \geqslant 0$，且 $\left|e_i^*(y^i) - e_i^*(x)\right| \leqslant e_i^*(y^i)$。事实上，对于任意给定的非负实数 α 和 β，若 $\beta \geqslant \frac{\alpha}{2}$，则有

$$|\beta - \alpha| = \beta - \alpha \leqslant \beta$$

若 $\beta \geqslant \alpha$，且

$$|\beta - \alpha| = \alpha - \beta \leqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \leqslant \beta$$

如果 $\beta \leqslant \alpha$。因此无论哪种情况，$|\beta - \alpha| \leqslant \beta$ 正如所要求的。

由引理 3.15 可知 $\left\|y^i - e_i^*\ (x)\ e_i\right\| \leqslant \left\|y^i\right\| \leqslant 1$ 最后，

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leqslant \left\|x - \frac{x}{|E|}\right\| + \left\|\frac{x}{|E|} - \frac{P_E(x)}{|E|}\right\| + \left\|\frac{P_E(x)}{|E|} - y\right\| \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{|E|} + \frac{1-\gamma}{|E|} + \frac{1}{|E|}\sum_{i\in E}\left\|e_i^*(x)e_i - y^i\right\| \leqslant 2 - \frac{\gamma}{|E|}.\end{aligned}$$

结论由 $\delta := \frac{\gamma}{|E|}$ 得出。特别地，注意到由于 x 属于相对弱开集 $\bigcap_{i\in E} S_i \subset C$，我们还可得到 x 不是超 Δ，从而重新得到 [6]中的结果。□

因此结合 [6, 命题 2。13] 和命题 3.18，我们立即得到，具有归一化单无条件基的空间不包含超 Δ-点和凸组合切片 Δ-点。因此，为便于今后参考，我们在此陈述如下结果。

定理 3.19。 设 X 是一个具有归一化单无条件基的实巴拿赫空间。那么， X不含超 Δ-点，且 X 不含凸组合切片 Δ-点。

在本小节余下部分，我们旨在给出 [6, 命题 2.13]更精确且改进的版本。特别是，我们将回到实或复巴拿赫空间的讨论。以下命题是本研究的主要结果。

命题 3.20。 设 X 是一个巴拿赫空间，并假设存在一个子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X, X)$，满足 上确界$\{\|$恒等算子 $- T\|$: $T \in \mathcal{A}\} < 2$，并且对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $x \in X$，都存在$T \in \mathcal{A}$ 使得 $\|x - Tx\| < \varepsilon$。那么， X 不含超 Δ-点。

下面给出一个引理，它是上述结果的局部化，其证明可立即得出。

引理 3.21。 设 X 为巴拿赫空间，且设 $x \in S_X$。如果存在一个有限秩算子 T 作用于X，使得 $\|x - Tx\| + \|$恒等算子 $- T\| < 2$，那么 x 不是超 Δ-点。

证明。 考虑 $\varepsilon > 0$，使得 $K := \|x - Tx\| + \|\text{恒等算子} - T\| + \varepsilon < 2$。由于 T具有有限秩，我们可以找到 $N \geqslant 1$, $w_1, \ldots, w_N \in S_X$以及 $f_1, \ldots, f_N \in X^*$，使得对于每个 $z \in X$都有 $T(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z) w_n$。考虑

$$W := \left\{ y \in B_X \colon |f_n(x-y)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ \forall n \in \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

W 是一个邻域，在 B_X的相对弱拓扑下是 x的邻域；对于每个 $y \in W$，我们有

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leqslant \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\| + \|y - Ty\| \\ &\leqslant \|x - Tx\| + \|\mathrm{Id} - T\| + \sum_{n=1}^{N} |f_n(x-y)| \, \|w_n\| \\ &\leqslant \|x - Tx\| + \|\mathrm{Id} - T\| + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant K < 2. \end{aligned}$$

□

注意：目前尚不清楚是否存在引理 3.21 关于凸组合切片 Δ-点的类似结果。因此，我们不知道命题 3.20 是否能推广到这一概念。

作为命题 3.20 的特例，我们有以下结果。回顾一下，给定巴拿赫空间 X 的有限维子空间序列$(E_n)_{n\geqslant 1}$称为 X 的有限维分解（FDD），如果每个元素 $x \in X$ 都能以唯一方式表示为级数 $x := \sum_{n\geqslant 1} x_n$，其中对每个 $n \geqslant 1$都有 $x_n \in E_n$。若对每个 $x \in X$，上述级数都无条件收敛，则称该 FDD 是无条件的。在这种情况下，众所周知，由 P_A 构成的族$(P_A)_{A\subset\mathbb{N}}$一致有界，其中 P_A 是由 $P_A(x) := \sum_{n\in A} x_n$ 给出的投影，而常数 $K_S := \sup_{A\subset\mathbb{N}} \|P_A\|$ 称为该 FDD 的抑制无条件常数。详情请参阅 [40, 第 1.g 节]；关于无条件基的特例，请参阅 [8, 第 3 节1] 。

推论 3.22。 若满足以下任一条件，则巴拿赫空间 X 不具有超 Δ点。

(1) 存在一个族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X, X)$，满足 $\sup\{\|\text{恒等算子} - T\| \colon T \in \mathcal{A}\} < 2$，且恒等映射属于该族在强算子拓扑（*SOT*）下的闭包。(2) 存在一个由 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 上的有限秩投影 构成的族，使得 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(X)$，并且 $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\text{恒等算子} - P_\lambda\| < 2$。(3) 空间 X 有一个有限维分解，其抑制无条件常数小于 2。特别地，若 X 有一个无条件基，且其抑制无条件常数小于 2。

我们注意到，上述结果中的数值 2 在若干方面都是最优的。

注 3.23。（1）空间 $C[0,1]$ 拥有单调 Schauder 基，因此存在该空间上的范数为一的有限秩投影序列 $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$，并且它在强算子拓扑下收敛到恒等算子。由于 $C[0,1]$ 具有 Daugavet 性质， S_X 中的所有元素都是超 Daugavet 点。注意，根据 DPr，对每个 $n \geqslant 1$，都有 $\|\text{恒等算子} - P_n\| = 2$。（2）设 X 为任意巴拿赫空间。对每个 $x \in S_X$，选取 $f_x \in S_{X^*}$ 使得 $f_x(x) = 1$，并定义 $P_x(z) = f_x(z)x$，对每个 $z \in X$均成立。于是 $\{P_x \colon x \in S_X\}$ 是 X上的一族范数为一的秩一投影， $X = \bigcup_{x\in S_X} P_x(X)$，并且对每个 $x \in S_X$，都有 $\|\text{恒等算子} - P_x\| \leqslant 2$。（3）空间 c 拥有 ccs Daugavet 点（因而也拥有超 Daugavet 点），见定理 4.2；但不难验证，其通常基是 3-无条件的，且为 2-抑制无条件。（4）文献 [30] 证明，巴拿赫空间具有 DLD2P，当且仅当对每个秩一投影 P，都有 $\|\text{恒等算子} - P\| \geqslant 2$。由此可知，具有 DLD2P 的巴拿赫空间上的无条件基，其抑制常数必须大于或等于 2。这里还要指出

，这一结果不存在局部版本，因为有些巴拿赫空间拥有一无条件基，且包含许多 Daugavet 点 [6]（见第 4.3.3 节）。

3.2. Absolute sums. 本小节考察巴拿赫空间的绝对和中直径点的传递。我们首先回顾以下定义。

定义3.24。 范数 N $\mathbb{R}^2$上的范数称为绝对的，如果对每个（a，b）$\in \mathbb{R}^2$都有 $N(a,\ b) = N(|a|,\ |b|)$；如果 $N(0,\ 1) = N(1,\ 0) = 1$，则称其为归一化的。

若 X 和 Y 是巴拿赫空间，且若 N 是 $\mathbb{R}^2$上的绝对归一化范数，我们将赋予范数 $\|(x,y)\| = N(\|x\|,\|y\|)$ 的积空间 $X\times Y$记为$X\oplus_N Y$。容易验证，$X\oplus_N Y$是巴拿赫空间，并且其对偶空间可表示为 $(X\oplus_N Y)^* \equiv X^*\oplus_{N^*} Y^*$，其中$N^*$是由公式 $N^*(c,d) = \max_{N(a,b)=1} |ac|+|bd|$给出的绝对范数。在 $\mathbb{R}^2$ 上的绝对归一化范数的经典例子是 $p\in[1,\infty]$的 ℓ_p 范数。关于绝对范数的信息可参见 [16, § 21] 以及其中的 [43] 和参考文献。例如，回顾一下，对于每个绝对归一化和 N，给定 $\mathbb{R}$中的非负 a、b、c、d，满足 $a\leqslant b$和 $c\leqslant d$，我们有 $N(a,b)\leqslant N(c,d)$。特别地，$\|\cdot\|_\infty \leqslant N \leqslant \|\cdot\|_1$。

与 DD2P（见 [13, 定理 2.11]）类似，Δ-点和 [28], 超 Δ-点在绝对和空间中都能很好地传递。

命题 3.25. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 N 是绝对归一化范数。

(1) 若 $x\in S_X$ 和 $y\in S_Y$ 都是超 Δ-点，则对于任意满足 $N(a,b)=1$ 的 $(ax,by)\in\mathbb{R}^2$，(ax,by) 在 $X\oplus_N Y$ 中是一个超 Δ- 点。(2) 若 $x\in S_X$ 是一个超 Δ- 点，则 $(x,0)$ 在 $X\oplus_N Y$ 中是一个超 Δ-点。若 $y\in S_Y$是一个超Δ-点，则 $(0,y)$ 在 $X\oplus_N Y$中是一个超 Δ-点。

证明。（1）。我们可以分别在 S_X 和 S_Y 中找到两个网 $(x_s)_{s\in S}$ 和 $(y_t)_{t\in T}$，使得 $x_s \xrightarrow{w} x$、$y_t \xrightarrow{w} y$，以及 $\|x-x_s\|$、$\|y-y_t\| \longrightarrow 2$。现在，若取 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，满足 $N(a,b)=1$，显然有 $(ax_s,by_t) \xrightarrow[(s,t)\in S\times T]{w} (ax,by)$，且 $\|(ax,by)-(ax_s,by_t)\| = N(a\|x-x_s\|,b\|y-y_t\|) \longrightarrow 2N(a,b)=2$，因此 (ax,by) 是 $X\oplus_N Y$ 中的一个超 Δ-点。对于（2），只需用 $a=1$ 和 $b=0$，或用 $a=0$ 和 $b=1$，重复前面的证明，因此只需其中一个点是超 Δ-点。□

对于超 Daugavet 点，情况更加复杂，我们需要区分不同类型的绝对范数。以下定义可见于例如 [28]。

定义 3.26. 设 N 是 $\mathbb{R}^2$上的绝对归一化范数。

(1) 若对任意 a、$b\in\mathbb{R}_+$，只要 $N(a,b)=1$，就能在 $\mathbb{R}^2$中找到 (a,b) 的一个邻域 W，使得 $\sup_{(c,d)\in W} c<1$或 $\sup_{(c,d)\in W} d<1$，并且任意满足 $N(c,d)=1$ 且 $N((a,b)+(c,d))=2$ 的二元组 $(c,d)\in\mathbb{R}^2_+$ 都属于 W，则 N 具有性质 (α)。(2) 若存在 a、$b\in\mathbb{R}_+$，使得 $N(a,b)=1$且 $N((a,b)+(c,d))=2$，则 N是 A-八面体的，对于

$$c=\max\{e\in\mathbb{R}_+ \colon N(e,1)=1\} \quad\text{and}\quad d=\max\{f\in\mathbb{R}_+ \colon N(1,f)=1\}.$$

(3) N是正八面体，如果存在 $a,b\in\mathbb{R}_+$使得 $N(a,b)=1$并且

$$N((a,b)+(0,1)) = N((a,b)+(1,0)) = 2.$$

正八面体范数是在 [27] 中引入的，旨在刻画使相应绝对和为八面体的绝对范数。显然，性质（α）与 A-八面体性

互不相容，并且每个正八面体绝对归一化范数都是 A-八面体的（显然也存在绝对 A-八面体范数并非正八面体）。此外，[28, 命题 2.5] 证明了，$\mathbb{R}^2$ 上的每个绝对归一化范数都必须满足性质（α），或者是 A-八面体的。对于 ℓ_p-范数，我们有 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 均为正八面体，并且 $\|\cdot\|_p$ 对每个α）都满足性质（ $p \in (1,\infty)$）。

注意，若 N 上的绝对归一化范数 $\mathbb{R}^2$ 是正八面体的，并且 (a,b) 如上面的定义所述，那么 N 的单位球面与 $\mathbb{R}^2$ 的正象限的交集，等于线段 $[(1,0)、(a,b)]$ 和 $[(0,1)、(a,b)]$ 的并集（图示见 [45, 第 3.3 节1]）。特别地，对于任意非负的 c,d，若 $N(c,d)=1$，则有 $N((a,b)+(c,d))=2$。与第 [3, 4] 节关于 Daugavet 点的结果类似，我们有以下结论。

命题 3.27. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 N 是一个绝对归一化范数。

(1) 若 [3，具有性质 (α)，则 $X\oplus_N Y$ 没有 *Daugavet* 点（因此，尤其没有超 *Daugavet* 点）。
(2) 若 N 是正八面体的，且 $x\in S_X$ 和 $y\in S_Y$ 是超 *Daugavet* 点，则对于如上面定义所述的任意 $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$，(ax,by) 是 $X\oplus_N Y$ 中的超 *Daugavet* 点。

证明。(2). 假设 N 是正八面体的，取定义中的 $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$，并令$x\in S_X$和 $y\in S_Y$为超 Daugavet 点。对于任意给定的范数为 $\|(u,v)\|=1$ 的 $(u,v)\in X\oplus_N Y$，我们可以分别在 S_X 和 S_Y 中找到两个网 $(u_s)_{s\in S}$ 和 $(v_t)_{t\in T}$，使得$\|u\|u_s \xrightarrow{w} u$、$\|v\|v_t \xrightarrow{w} v$，且 $\|x-u_s\|,\|y-v_t\|\longrightarrow 2$。那么 $(\|u\|\,u_s,\|v\|\,v_t)\underset{(s,t)\in S\times T}{\xrightarrow{w}}(u,v)$。由于

$$\begin{aligned}\|ax-\|u\|\,u_s\| &= \|(x-u_s)-[(1-a)x-(1-\|u\|)u_s]\|\\ &\geqslant \|x-u_s\|-(1-a+1-\|u\|),\\ &= a+\|u\|-(2-\|x-u_s\|),\end{aligned}$$

并且，同理，

$$\|by-\|v\|\,v_t\|\geqslant b+\|v\|-(2-\|y-v_t\|),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|(ax-\|u\|\,u_s,by-\|v\|\,v_t)\| &= N\left(\|ax-\|u\|\,u_s\|,\|by-\|v\|\,v_t\|\right)\\ &\geqslant N\left(a+\|u\|-(2-\|x-u_s\|),b+\|v\|-(2-\|y-v_t\|)\right)\\ &\longrightarrow N\left((a+\|u\|,b+\|v\|\right)=2.\end{aligned}$$

这表明 (ax,by) 是 $X\oplus_N Y$ 中的超 Daugavet 点。 □

注 3.28。注意，在前述结论中，如果 $(a,b)=(1,0)$（分别地，$(a,b)=(0,1)$）（例如，当 $N=\|\cdot\|_1$ 时），那么为了得到 $(x,0)$（分别地，$(0,y)$）是 $X\oplus_N Y$ 中的超 Daugavet 点，我们只需假设 x（分别地，y）是超 Daugavet 点。此外，如果 $N=\|\cdot\|_\infty$，那么为了得到对于每个 $\beta\in[0,1]$（分别地，$\alpha\in[0,1]$），$(x,\beta y)$（分别地，$(\alpha x,y)$）是 $X\oplus_N Y$ 中的超 Daugavet 点，我们只需假设 x（分别地，y）是超 Daugavet 点。

在 [28, 定理 2.2] 中，证明了正则 Daugavet 点也会通过 A-八面体和传递。我们不知道是否可以为超 Daugavet 点得到类似的结果。事实上，注意到若 N 是 A-八面体范数，且 c、d和（a、b）如上面的定义所述，那么 N 的单位球面与 $\mathbb{R}^2$ 的正象限的交集等于线段 $[(1,0),(1,d)]$, $[(1,d),(a,b)]$, $[(0,1),(c,1)]$和 $[(c,1),(a,b)]$的并。特别地，对于线段 $[(1,d),(a,b)]$ 和 $[(c,1),(a,b)]$, 上的任意一对（e、f），都有 $N((a,b)+(e,f))=2$，但以下情形则不再成立

在线段 $[(1,0),(1,d)]$ 和 $[(0,1),(c,1)]$ 上，而且上面证明中的论证不再适用。

关于 ccs Δ-点和 ccs Daugavet 点的情况尚不明确，而且上述结果的证明似乎难以轻易推广。例如，由下一个结果可知，备注 3.28对 ccs Daugavet 点并不成立。

命题 3.29。设 X 为任意巴拿赫空间，Y 为含有一个强暴露点 $y_0 \in S_Y$ 的巴拿赫空间，且 $E := X \oplus_1 Y$。那么，存在 B_E 的切片的凸组合，其中心为 0，且直径可任意小。特别地，E 不含 *ccs Daugavet* 点，且不具有强直径二性质。

证明。设 $y_0^* \in S_{Y^*}$ 强暴露 y_0。给定 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \varepsilon$，使得只要 $y \in B_Y$ 满足 $\operatorname{Re} y_0^*(y) > 1 - \delta$，就有 $\|y - y_0\| < \varepsilon$。考虑 $f = (0, y_0^*) \in S_{E^*}$ 并写成

$$C := \frac{1}{2}\left(S(f, \delta; B_E) + S(-f, \delta, B_E)\right)$$

取 $u := \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in C$ 其中 $u_1 \in S(f, \delta; B_E)$ 且 $u_2 \in S(-f, \delta; B_E)$。因此，若记 $u_1 := (x_1, y_1)$ 和 $u_2 := (x_2, y_2)$，则有

$$\operatorname{Re} y_0^*(y_1) = \operatorname{Re} f(x_1, y_1) > 1 - \delta \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} y_0^*(y_2) = \operatorname{Re} f(x_2, y_2) < -1 + \delta.$$

一方面，由此可得 $\|y_1 - y_0\| < \varepsilon$ 和 $\|y_2 + y_0\| < \varepsilon$。另一方面，$\|y_1\|, \|y_2\| > 1 - \delta$，因此 $\|x_1\| < \delta < \varepsilon$ 和 $\|x_2\| < \delta < \varepsilon$。综上，我们有

$$\|u\| = \frac{1}{2}\big(\|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\|\big) \leqslant \frac{1}{2}(2\varepsilon + 2\varepsilon) = 2\varepsilon. \qquad \square$$

Remark 3.30. 将前面的证明稍作调整，即可将其推广到 ℓ_p-和，其中 $1 < p < \infty$.

然而，注意到对于 ℓ_∞-和，情况截然不同。

定理 3.31。设 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 $E := X \oplus_\infty Y$。若 $x \in S_X$ 是一个 *ccs Daugavet* 点，则对每个 $y \in B_Y$，$(x, y) \in S_E$ 都是一个 *ccs Daugavet* 点。

证明。设 $C := \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$ 是 B_E 的一个凸组合切片。对每个 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们可以写成 $S_i := S(f_i, \delta_i)$，其中 $f_i := (x_i^*, y_i^*) \in S_{E^*}$ 满足 $1 = \|f_i\| = \|x_i^*\| + \|y_i^*\|$。一方面，考虑

$$\tilde{S}_i := \left\{ s \in B_X : \operatorname{Re} x_i^*(s) > \|x_i^*\| - \frac{\delta_i}{2} \right\},$$

另一方面，任取满足 $\operatorname{Re} y_i^*(t_i) > \|y_i^*\| - \frac{\delta_i}{2}$ 的 $t_i \in B_Y$。由于 $\tilde{C} := \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{S}_i$ 是 B_X 的一个凸组合切片~，对每个 $\varepsilon > 0$，我们都能找到 C 中的一个元素 $s := \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$，使得 $\|x - s\| > 2 - \varepsilon$。于是，令 $t := \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i$，便有 $(s_i, t_i) \in B_E$，并且

$$\operatorname{Re} f_i(s_i, t_i) = \operatorname{Re} x_i^*(s_i) + y_i^*(t_i) > \|x_i^*\| + \|y_i^*\| - \delta_i = 1 - \delta_i$$

对每个 i，使得 $(s_i, t_i) \in S_i$，且 $(s, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (s_i, t_i) \in C$。最后，

$$\|(x, y) - (s, t)\| \geqslant \|x - s\| > 2 - \varepsilon,$$

因此，如前所述，(x, y) 是一个 ccs Daugavet 点。 $\square$

4. Examples and counterexamples of diametral elements

本节旨在介绍一些巴拿赫空间单位球面上直径元素的例子和反例。我们首先刻画若干与 Daugavet 性质有天然联系的空间中的这一概念，例如 L_1-预对偶空间、M¨untz 空间以及 L_1-空间。接下来，我们将评述文献中此前出现的一些例子，并在某些情况下加以改进（例如 Lipschitz 自由空间中的情形）。最后，我们将介绍一些较为复杂的例子，以说明第 1 页 8中的图中不存在反向蕴含，并排除这些概念之间其他一些可能的蕴含关系。所有性质之间关系的总结将列于第 4.7 小节中。

4.1. Characterization in $C(K)$-spaces, L_1-preduals, and Müntz spaces. 在[3, 定理 3.4 和 3.7] 中已证明，对于 L_1-预对偶， Δ-点与 Daugavet 点的概念相同。作者首先刻画了 $C(K)$空间中的 Δ-点，然后利用局部自反原理得到了关于 L_1-预对偶的结果。随后， [42, 定理 3.2]给出了 L_1-预对偶中 Δ-点（等价地说，Daugavet 点）的刻画，并由此隐含地证明，在这一情形下， Δ-点与超 Daugavet 点实际上相同。我们在此陈述这一结果，以供后续参考。值得注意的是， [3] 的作者研究的是实巴拿赫空间，但显然， [3, 定理 3.4] 的证明在复数情形下同样成立；论文 [42] 则同时讨论了实数和复数情形。

命题 4.1 ([3, 定理 3.4 和 3.7], [42, 定理 3.2])**.** 设 X 是一个 L_1-预对偶，且 $x \in S_X$。以下断言等价。

(1) x 是一个 *Daugavet* 点。(2) x 是一个 Δ-点(3) 对于每个 $\delta > 0$，弱* 切片 $S(J_X(x)\ \delta; B_{X^*})$ 都包含 B_{X^*} 的无穷多个两两线性无关的极点。(4) 对于每个元素 $y \in B_X$，存在一个序列 (x_n^{**}) 属于 $B_{X^{**}}$，使得 $\|x - x_n^{**}\| \longrightarrow 2$且

$$\left\| \sum_{n\geqslant 1} a_n (y - x_n^{**}) \right\| \leqslant 2 \|a\|_\infty$$

对于每个 $a\colon = (a_n) \in c_{00}$。
(5) 对于每个元素 $y \in B_X$，存在一个序列 (x_n^{**}) 属于 $B_{X^{**}}$，它弱* 收敛到 y，且满足 $\|x - x_n^{**}\| \longrightarrow 2$。

当 $X = C(K)$ 是豪斯多夫拓扑空间 K 时，上述条件也等价于：

(6) x 在 K 的某个聚点处达到其范数。

我们将证明，事实上，对于 L_1 预对偶， Δ-点也与 ccs 版本一致。我们采用的方法类似于证明 [3] for Δ-点和 Daugavet 点时使用的方法：先证明 $C(K)$ 空间中的结果，再利用 L_1预对偶的二次对偶是 $C(K)$-空间这一事实，推导出该结果适用于所有 L_1-预对偶。对于 $C(K)$ 空间，我们首先证明 ccs Daugavet 点的一个充分条件；同样的方法也可用于向量值空间。回顾一下，给定紧豪斯多夫拓扑空间 K 和巴拿赫空间 X， $C(K,\ X)$ 表示由从 K 到 X 的连续函数构成、赋予上确界范数的巴拿赫空间。

定理 4.2。 设 K 是一个紧豪斯多夫拓扑空间， X 是一个巴拿赫空间，且令 t_0 为 K的一个聚点。若函数 $f \in S_{C(K,X)}$ 满足 $\|f(t_0)\| = 1$，则 f 是一个 *ccs Daugavet* 点。

证明。选取 $x^* \in S_{X^*}$ 使得 $\operatorname{Re} x^*(f(t_0)) = \|f(t_0)\| = 1$。令 $C := \sum_{i=1}^{L} \lambda_i S_i$ 为 $B_{C(K)}$ 的切片的凸组合。对于每个 $i \in \{1, \ldots, L\}$，选取一个函数 $g_i \in S_i$。由于 K 是紧的，且 t_0 是 K 的聚点，我们得到如下结论。

断言。 存在由 t_0 的开邻域构成的序列 $(U_n)_{n\geqslant 0}$，使得：

(1) $\overline{U_0} = K$，(2) 对每个 $n \geqslant 0$， U_{n+1} 是 U_n 的真子集，(3) 对每个 $i \in \{1, \ldots, L\}$ 和每个 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Re}(x^* \circ f)_{|U_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ 且 $\left\| g_{i|U_n} - g_i(t_0) \right\| \leqslant \frac{1}{n}$。

事实上，我们通过归纳法构造该序列。设 $U_0 := K$，并假设对于某个 $n \geqslant 0$， U_0、.....、U_n 已经构造出来。由于 K 是正规的，我们可以找到 U_n 的一个开子集 U，使得 $t_0 \in U \subset \overline{U} \subset U_n$。又由于 t_0 是 K 的一个聚点，且 K 是豪斯多夫的，我们可以找到 U 的一个开子集 V，使得 V 是 U 的真子集（取 U 中任意一个不同于 t_0 的点，并用开集将这两个点分离）。由 f 以及有限个 $g_i's$ 的连续性，我们于是可以找到 V 的一个开子集 W，使得

$$\operatorname{Re}(x^* \circ f)_{|W} > 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{and} \quad \left\| g_{i|W} - g_i(t_0) \right\| < \frac{1}{n+1}$$

对于每个 $i \in \{1, \ldots, L\}$ 都成立。集合 $U_{n+1} := W$ 即可满足要求。

现在，令我们选取如断言中所述的 $(U_n)_{n\geqslant 0}$，并定义 $F_n := U_n \backslash \overline{U_{n+1}}$ 对每个 $n \geqslant 0$ 都成立。根据构造， $F_n's$ 是 K 的非空闭子集，并且覆盖 $K \setminus \left(\bigcap_{n\geqslant 0} U_n\right)$；每个 F_n 至多与其邻集 F_{n-1} 和 F_{n+1} 相交。根据乌雷松引理，对于每个 $n \geqslant 1$，我们可以找到一个函数 $p_n \in C(K)$，满足：

(1) $0 \leqslant p_n \leqslant 1$，(2) $p_{n|F_{n+1}} = 1$，(3) $p_{n|F_0 \cup \cdots \cup F_{n-1} \cup U_{n+3}} = 0$。

序列 (p_n) 是归一化的，并且逐点收敛到 0，因此弱收敛到 0。此外，注意到

$$\|g_i - (1 + g_i(t_0))p_n\|_\infty \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

对每个 $i \in \{1, \ldots, L\}$，由于 $\left\| g_{i|U_n} - g_i(t_0) \right\| \leqslant \frac{1}{n}$，且 $p_{n|(K\setminus U_n)} = 0$ 是按构造得到的。因此，所有函数

$$g_{i,n} := \frac{n}{n+1}\left(g_i - (1 + g_i(t_0))p_n\right)$$

属于 $B_{C(K)}$，并且序列 $(g_{i,\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到 g_i，对每个 $i \in \{1, \ldots, L\}$都成立。由于有限多个 $S_i's$ 都是弱开集，因此我们可以找到某个 $N \geqslant 1$，使得 $g_{i,\,n} \in S_i$ 对每个i 和每个 $n \geqslant N$都成立。特别地，函数

$$g_n := \sum_{i=1}^{L} \lambda_i g_{i,n}$$

对每个 $n \geqslant N$都属于 C。最后，固定 $t \in F_{n+1} \subset U_{n+1} \subset \overline{U_n}$并注意到

$$\operatorname{Re} x^* f(t) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

并且

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} x^* g_{i,n}(t) &= \frac{n}{n+1} \operatorname{Re} x^* \left(g_i(t) - (1 + g_i(t_0)\right) \\ &\leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{Re} x^* \left(g_i(t_0) + \frac{1}{n} - (1 + g_i(t_0))\right) = -1 + \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

对每个 $i \in \{1, \dots L\}$。因此，

$$\|f - g_n\|_\infty \geqslant \operatorname{Re} x^* \left(f(t) - \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \operatorname{Re}(g_{i,n}(t))\right) \geqslant 2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1}. \qquad \square$$

结合前面的结果与命题 4.1，我们得到 $C(K)$ 空间中直径点的预期刻画。

推论 4.3。 设 K 是一个豪斯多夫拓扑紧空间。那么，直径点的六种概念在 $C(K)$ 中等价。

对于向量值空间，情况并没有那么简单，但我们可以给出一些结果。显然，若 t_0 是紧豪斯多夫拓扑空间 K 中的一个孤立点，且 X 是一个巴拿赫空间，则 $C(K, X) = C(K \setminus \{t_0\}, X) \oplus_\infty X$。

注 4.4。 设 K 是一个豪斯多夫拓扑紧空间， X 是一个巴拿赫空间，且$f \in C(K, X)$是一个满足 $\|f\| = 1$的函数。

(1) 如果 $f \in C(K, X)$满足 $\|f\| = 1$，且在 K的一个聚点处取得其范数，那么 f是一个 ccs Daugavet 点（由定理 4.2 得出），因此 f 满足六种直径概念。(2) 如果 $f \in C(K, X)$满足 $\|f\| = 1$，且在孤立点 t_0处取得其范数，并且 $f(t_0)$是一个 Daugavet 点（分别为超 Daugavet 点、ccs Daugavet 点），那么 f 是一个 Daugavet 点（分别为超 Daugavet 点、ccs Daugavet 点）（分别由 [3, 第 4], 节、注 3.28 和定理 3.31 得出）。(3) 假设 K包含一个孤立点 t_0，设 $x_0 \in S_X$，并设 $f \in C(K, X)$由$f(t_0) = x_0$和 $f(t) = 0$对每个 $t \in K \setminus \{t_0\}$给出。那么：(3.1) 如果 x_0 是 X的一个 Δ-点（分别为超 Δ-点），那么 f 是 $C(K, X)$的一个 Δ-点（分别为超 Δ-点）（分别由 [3, 第 4] 节和命题3.25得出）。(3.2) 如果 x_0 是 X的一个 Daugavet 点（分别为超 Daugavet 点、ccs Daugavet 点），那么 f是 $C(K, X)$的一个 Daugavet 点（分别为超 Daugavet 点、ccs Daugavet 点）（分别由 [45,命题 3.3.11],注 3.28、定理 3.31 得出）。(3.3) 如果 f 是 $C(K, X)$的一个 Δ-点（分别为 Daugavet 点），那么 x_0 是 X 的一个 Δ-点（分别为 Daugavet 点）（分别由 [45, 定理 3.4.4], [45, 定理 3.3.13],得出）。
(4) 现在很容易证明，在 $C(K, X)$ 空间中，六种直径概念并不相同。事实上，设 K 为一个含有孤立点 t_0的紧豪斯多夫拓扑空间，设 X为一个含有 Δ-点 x_0 的巴拿赫空间，该点不是 Daugavet 点（例如 $X = C[0, 1] \oplus_2 C[0, 1]$单位球面上的任意 x_0，参见命题3.25和3.27），并考虑函数$f \in C(K, X)$，其定义为 $f(t_0) = x_0$且对每个 $t \in K \setminus \{t_0\}$都有 $f(t) = 0$。那么，根据 (3.1)， f是一个 Δ-点，但根据 (3.3)，它不是 Daugavet 点。

现在我们可以将推论 4.3 推广到一般的 L_1-预对偶空间。

推论 4.5。 设 X 是一个 L_1-预对偶，且 $x \in S_X$ 是一个 Δ点。则， x 是一个 *ccs Daugavet* 点。因此，对于 L_1-预对偶空间，六种直径概念是等价的。

证明。若 x 是 Δ中的一个点，则如注 2.6 的第 (3) 项所述，我们有 $J_X(x)$ 是 X^{**}中的一个点。现在， X^{**} 与一个 $C(K)$ 空间等距，因此定理 4.2 表明 $J_X(x)$ 是 X^{**}中的一个 ccs Daugavet 点。然后，利用注 2.6 的第 (4) 项（或者像 [3, 定理 3.7]中那样，基于局部自反原理给出一个直接论证），我们得到 x 是 X中的一个 ccs Daugavet 点。□

请注意，定理 4.2 的证明¨对 Muntz 空间也适用（使用 [3, 引理 3.10]来为函数 p_n提供适当的替代项）。我们回顾一下，给定一个递增序列$\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ 非负实数，且 $\lambda_0 = 0$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$，则实巴拿赫空间

$$M(\Lambda) := \overline{\operatorname{span}}\{t^{\lambda_n} : n \geqslant 0\} \subseteq C[0,1]$$

称为与 Λ 相关的 M¨*untz* 空间 。从 $M(\Lambda)$ 中去掉常值函数后，我们得到 $M(\Lambda)$ 的子空间 $M_0(\Lambda) := \overline{\operatorname{span}}\{t^{\lambda_n} : n \geqslant 1\}$。

因此，调整定理 4.2 关于 M¨untz 空间（其中实值函数在 $1 \in [0,1]$ 处达到其范数）的证明，并结合 [3, 命题 3.12], ，我们得到以下与推论4.3 和 4.5类似的结果。

推论 4.6。 设 $X = M(\Lambda)$ 或 $X = M_0(\Lambda)$ 对应一个递增的非负实数序列 Λ ，且满足 $\lambda_0 = 0$ ，使得 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$。那么， X 中每个¯Δ-点都是 *ccs Daugavet* 点（因此，六种直径概念彼此等价）。

4.2. Characterization in L_1-spaces. 在 [3, 定理 3.1] 中，对于实数情形下 σ-有限 L_1-空间的元素，证明了 Daugavet 点与 Δ-点这两个概念等价。事实上，将这些结果推广到任意测度以及复数情形并不复杂。

命题 4.7 ([3, 定理 3.1] 适用于 σ-有限实数情形)。 设 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间，且 f 是 $L_1(\mu)$中的一个范数为 *1* 的元素。那么，以下断言等价。

(1) f 是一个 *Daugavet* 点。(2) f 是一个 Δ-点。
(3) 函数 f 的支撑中不含原子。

注意，(1) 推出 (2) 是显然的。为证明 (2) 推出 (3)，设 f 是一个 Δ-点，并设A 是一个有限测度的原子（只有这类原子才可能包含在可积函数的支撑中）。那么显然有 $L_1(\mu) = L_1(\mu|_{\Omega\setminus A}) \oplus_1 \mathbb{K}$（因为可积函数在原子上为常数），因此可将其写为 $f = (f_1, c)$，其中 $f_1 \in L_1(\mu|_{\Omega\setminus A})$ 和 $c = f(A) \in \mathbb{K}$是适当的。若 $c \neq 0$，则$\|f_1\| \neq 1$，由 [45, 定理 3.4.4] 可知 $1 \in \mathbb{K}$ 是一个 Δ-点，这与假设矛盾。这说明 f 的支撑中不含任何原子。

为证明 (3) 推出 (1)，我们实际上证明以下更一般的结果。回顾一下，给定测度空间 (Ω, Σ, μ) 和巴拿赫空间 X, $L_1(\mu, X)$ 表示从 Ω 到 X 的所有 B¨ochner 可积函数构成的巴拿赫空间。

定理 4.8。 设 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间， X 是一个巴拿赫空间，且 f 是 $L_1(\mu, X)$中的范数为 *1* 的元素。若函数 f 的支撑不含原子，则 f 是一个超 *Daugavet* 点。

证明。令 $S := \operatorname{supp} f$，根据假设它不含原子。我们先证明 f 是一个超 Daugavet 点。由于 S 不含原子，因此 $L_1(\mu|_S, X)$ 满足 Daugavet 性质（例如参见第 81] 页的示例）。特别地，f 是该空间中的超 Daugavet 点。由于 $L_1(\mu, X) = L_1(\mu|_S, X) \oplus_1 L_1(\mu|_{\Sigma\setminus S}, X)$，根据第 3.2 小节中的传递结果（参见注 3.28），可得 f 是 $L_1(\mu, X)$ 中的超 Daugavet 点。□

我们接下来要讨论它与 ccs 直径概念之间的关系。对于实 $L_1(\mu)$-空间，利用 [1], 中的一个结果，我们实际上可以得到，支撑无原子的实值可积函数是 ccs Δ-点。

命题4.9。 设 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间，且 f 是实空间$L_1(\mu)$中的一个范数为 *1* 的元素。如果函数 f 的支撑不含原子，那么 f 是一个 *ccs* Δ-点。

证明。取 $\varepsilon > 0$ 和 $D : = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i$ 一个包含 f的 $B_{L_1(\mu)}$ 的 ccs。设 $f := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$，其中对每个 i都有 $g_i \in \tilde{S_i}$。考虑 Ω 的可测子集 $\tilde{S} := \operatorname{supp} f \cup \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp} g_i$，并令 $\tilde{\mu}$ 为 $(S, \Sigma_{|\tilde{S}})$ 上的 σ-有限测度 $\tilde{\mu} := \mu_{|\tilde{S}}$。那么，通过支集限制，$D$在 $B_{L_1(\tilde{\mu})}$ 中诱导出一个 ccs $\tilde{D}$，其中包含函数 $\tilde{f}$；该函数就是将 f 视为 $L_1(\tilde{\mu})$ 中的元素，因此，$\tilde{f}$的支撑不含原子。由于 f 属于实空间 $L_1(\tilde{\mu})$ 的单位球面，根据 [1, 定理 5.5]，f 是$B_{L_1(\tilde{\mu})}$ 的相对弱拓扑下 $\tilde{D}$ 的一个内点。正如我们已在定理 4.8 中证明的，f 是一个超 Daugavet 点（因此也是一个超 Δ-点），所以可以找到 $\tilde{g} \in \tilde{D}$ 使得 $\left\|\tilde{f} - \tilde{g}\right\| > 2 - \varepsilon$。只需考虑将 $\tilde{g}$ 在整个 Ω 上延拓为 0 的延拓 g，便可得到 $g \in D$ 且 $\|f - g\| = \left\|\tilde{f} - \tilde{g}\right\| > 2 - \varepsilon$。□

需要指出的是，ccs Δ-点能否通过绝对和传递尚不明确，但我们在前面的证明中利用了 L_1-空间的特定几何性质。

注4.10。 请注意，由于 [1, 定理 5.5] 对 $B_{L_1(\mu)}$ 的相对弱开子集的凸组合也成立，事实上，实数 $L_1(\mu)$ 空间中的每个 Δ-点都是 ccw Δ-点。

结合命题 4.7、定理4.8和命题 4.9，可得以下推论。

推论4.11。 设 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间，且 f 是 $L_1(\mu)$ 中范数为 *1* 的元素。那么，对于 f，以下概念等价：Δ-点、*Daugavet* 点、超 Δ-点和超 *Daugavet* 点。此外，在实数情形下，前述四个概念还等价于 *ccs*Δ-点。

现在我们讨论 $L_1(\mu)$-空间中的 ccs Daugavet 点。注意，如果 Ω 含有一个 A 有限测度的原子，那么有 $L_1(\mu) \equiv L_1(\mu_{|\Omega\setminus A}) \oplus_1 \mathbb{K}$。特别地，在这种情况下，由命题 $L_1(\mu$可知，3.29不含 ccs Daugavet 点。于是我们得到以下关于 L_1-空间中存在 ccs Daugavet 点的刻画。

命题4.12。 令 (Ω, Σ, μ) 为一个测度空间。则以下断言等价。

(1) $L_1(\mu)$ 具有 *Daugavet* 性质。(2) $L_1(\mu)$ 包含一个 *ccs Daugavet* 点。(3) $L_1(\mu)$具有强直径二性质。(4) μ 不含有限测度的原子。

证明。 (1)⇔(4) 是众所周知的（参见 [54, 第 2 节，例 (b)]）；(1)⇒(2) 也是已知的；(2)⇒(3) 包含于命题 3.12 中。最后，(3)⇒(4) 由命题 3.29 以及该命题陈述之前的注释可得。□

4.3. Remarks on some examples from the literature.

4.3.1. *Lipschitz* 自由空间中的两个例子。 在 [51], Veeorg 构造了一个令人惊讶的例子：一个满足 Radon-Nikod´ym 性质且包含 Daugavet 点的空间。我们通过证明 Lipschitz 自由空间中极端Δ分子的一条一般事实，稍微改进了这一结果，证明该点还是一个凸组合切片 Δ-点。关于必要的定义，请参阅所引用的论文 [51]以及 [9, 10, 32]；关于 Lipschitz 自由空间的更多背景知识，请参阅书籍 [53]。

为此，我们先回顾 [32] 中关于 Lipschitz 自由空间上的分子何时为 Δ-点的如下刻画。

命题 4.13 ([32, 定理 4.7])。 设 M 为一个带基点度量空间，且设 $x \neq y \in M$。分子 $m_{x,\,y}$ 是一个 Δ-点，当且仅当每个包含 $m_{x,\,y}$ 的 $B_{\mathcal{F}(M)}$ 切片 S，对于每个 $\varepsilon > 0$，也包含一个分子 $m_{u,\,v}$，其中 $u \neq v \in M$ 满足 $d(u, v) < \varepsilon$。

在这种情 况下，分子是极点，我们有如下改进的结果 lt.

定理 4.14. 设 M 是一个带基点度量空间，且 $x \neq y \in M$。若分子 $m_{x,y}$ 是一个极点和一个 Δ-点，则$m_{x,\,y}$ 是一个凸组合切片 Δ-点。

注意，该结果不能由命题 3.13推出：Lipschitz 自由空间中的分子若是保持极点，则是切割点，因此与 Δ-点相去甚远。

为了证明该定理，我们需要一个结果，它只是对 [32] 中某个结果的等价改述。

引理 4.15 ([32,定理 2.6])**.** 设 M 是一个带基点度量空间，且 $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$。对于每个$\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得给定满足 $d(u, v) < \delta$ 的 $u \neq v \in M$，我们有 $\|\mu \pm m_{u,v}\| > 2 - \varepsilon$。

利用这一结果以及与 [15, 引理 2.3], 中的论证类似的齐次性论证，我们可以给出尚待完成的证明。

定理 *4.14* 的证明。 设 $C := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i$ 是包含 $m_{x,y}$ 的 $B_{\mathcal{F}(M)}$ 的一个凸组合切片，并设 $\varepsilon > 0$。由于$m_{x,\,y}$ 是极点，因此有 $m_{x,y} \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$；根据命题 4.13，每个 S_i 都包含支撑在任意接近点处的 $\mathcal{F}(M)$的分子。利用引理 4.15，我们对每个$\eta > 0$归纳构造 $\mathcal{F}(M)$中的一个有限分子序列 $(m_{u_i,v_i})_{i=1}^{n}$，使得

(1) $m_{u_i,v_i} \in S_i$ for every i.
(2) $\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\| > 1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \frac{k\varepsilon}{n}$ for every $k \leqslant n$.

事实上，由于 S_1包含支撑于任意接近点的 $\mathcal{F}(M)$ 的分子，根据引理 4.15 $u_1 \neq v_1 \in M$，我们可以找到使得 $m_{u_1、\,v_1} \in S_1$ 以及$\|m_{x、\,y} - m_{u_1、\,v_1}\| > 2 - \frac{\varepsilon}{n}$的对象。由此可得$\|m_{x、\,y} - \lambda_1 m_{u_1、\,v_1}\| \geqslant \|m_{x、\,y} - m_{u_1、\,v_1}\| - (1-\lambda_1)$ $> 1 + \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{n}$。假设对于给定的 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，$m_{u_1、\,v_1、\,\ldots\ldots、\,u_k、\,v_k}$已经按要求构造出来。由于 S_{k+1}包含支撑于任意接近点的 $\mathcal{F}(M)$ 的分子，根据引理 4.15 $u_{k+1} \neq v_{k+1} \in M$，我们可以找到使得 $m_{u_{k+1}、\,v_{k+1}} \in S_{k+1}$

and

$$\left\| \frac{m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i}}{\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|} - m_{u_{k+1},v_{k+1}} \right\| > 2 - \frac{\varepsilon}{n \left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|}.$$

那么，

$$\begin{aligned} \left\| \frac{m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i m_{u_i,v_i}}{\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|} \right\| &\geqslant \left\| \frac{m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i}}{\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|} - m_{u_{k+1},v_{k+1}} \right\| \\ &\quad - \left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|} \right) \\ &> 1 + \frac{\lambda_{k+1}}{\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|} - \frac{\varepsilon}{n \left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\|}. \end{aligned}$$

根据假设，

$$\left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\| > \left\| m_{x,y} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_{u_i,v_i} \right\| + \lambda_{k+1} - \frac{\varepsilon}{n} > 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \frac{(k+1)\varepsilon}{n}.$$

因此，$\mu := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{u_i,\ v_i}$ 属于 C，并满足$\|m_{x,\ y} - \mu\| > 2 - \varepsilon$. □

特别地，正如我们所宣布的，例子 $m_{x,\ y}$ 中的分子 [51] 是一个 ccsΔ点。注意，根据命题 3.12，由于该空间具有 Radon–Nikodym 性质，它不可能是 ccs Daugavet 点；但我们不知道它是否为超 Δ点，甚至是否为超 Daugavet 点。下面陈述这一结果，以供后续参考。

例 4.16。设 M 为在 [51, 例 3.1] 中构造的度量空间，x，y 为其中描述的点。那么，$\mathcal{F}(M)$具有 Radon–Nikodym 性质，分子$m_{x,\ y}$是$\mathcal{F}(M)$单位球的极点，且为 Daugavet 点。因此，根据定理4.14，$m_{x,\ y}$是一个 ccs-Δ-点。

Lipschitz 自由空间中的另一个有趣例子如下，它采用了由 Aliaga、Noûs、Petitjean 和 Procházka 构造的度量空间 ´ [10]。

例 4.17. 令 M 为 [10, 例 4.2]中的度量空间。于是可以验证，分子 $m_{0,\ q}$ 是 $B_{\mathcal{F}(M)}$ 的一个极点；又因为点 0 和 q 离散可连接，通过对 [32, 命题 4.2]作简单调整可知，该分子是一个 a Δ-点。特别地，由定理 4.14 可知，该分子也是一个凸组合切片 Δ-点。然而，不难证明，$B_{\mathcal{F}(M)}$ 中存在一些凹陷点，它们到 $m_{0,\ q}$ 的距离严格小于 2（取分子 $m_{x_i^n,\ x_{i+1}^n}$中的任意一个即可），因此该分子不是 Daugavet 点。还应注意，由于度量空间 M 是可数且完备的，该空间具有 Radon–Nikodym 性质 [9, 定理 4.6]。

最后需要指出，例 $\mathcal{F}(M)$ 中的空间 4.16和 4.17具有 Radon–Nikodym 性质，因此它们是强正则的，故强正则点在范数下稠密；但这两个例子都具有 ccsΔ-点。根据命题 3.12，它们不可能包含 ccs Daugavet 点。

我们还要指出，不能省略上述定理 4.14 的使用，因为分子$m_{0,\ q}$并非保持极点，因此命题3.13 同样不适用。

4.3.2. 一个具有 DD2P 和受限 DSD2P，但包含直径任意小的凸组合切片的巴拿赫空间示例。在 [2, 定理 2.12], 中，Abrahamsen、H´ajek、Nygaard、Talponen 和 Troy- anski 构造了一个空间 X，它具有 DLD2P，且是中点局部一致凸的（特别是满足 pre-ext $(B_X) = S_X$），并且 B_X 包含直径任意小的切片凸组合。由命题 3.13 可知，S_X 中的每个元素实际上都是超 Δ-点和凸组合切片 Δ-点（也就是说，X 具有 DD2P 和受限 DSD2P）。然而，由于包含直径任意小的凸组合切片，X 不具有强直径二性质 SD2P。SD2P 失效，而单位球面中的每个元素都是凸组合切片 Δ-点，这一现象显然是因为所有直径严格小于 2 的切片凸组合都不与单位球面相交。另一方面，空间 X 是由空间的 ℓ_2-和构造而成的，因此根据 [3,命题 4.6]，X 不含 Daugavet 点（参见命题 3.27）。

进一步注意到，X 具有受限 DSD2P 和 DD2P，但不具有 DSD2P（根据 [34]，这等价于 Daugavet 性质）。

4.3.3. 一无条件基空间中的一个例子。Abrahamsen、Lima、Martiny 和 Troyanski 在 [6, 第 4] 节构造了一个带有一无条件基的巴拿赫空间 $X_{\mathfrak{M}}$，其中包含一个子集 $D_B \subseteq S_{X_{\mathfrak{M}}}$，满足：

- 中的每个元素既是 Daugavet 点，也是连续点；
- $B_{X_{\mathfrak{M}}} = \overline{\text{co}}(D_B)$；
- D_B 在单位球中弱稠密。

注意到，没有任何元素 D_B 是超 Δ-点（恰恰相反！）。根据定理3.19，没有任何元素 D_B 是凸组合切片 Δ-点。

4.4. A SUPER Δ-POINT WHICH FAILS TO BE A DAUGAVET POINT IN AN EXTREME WAY. 为了将下面的结果置于适当背景中，我们回顾一下：Daugavet 点与任意切割点之间的距离为 2（见 [32, 命题 3.1]）。有鉴于此，下面的结果可以解释为：存在一些超 Δ-点，它们以极端方式不满足成为 Daugavet 点的条件。

定理 4.18。设 X 是一个具有 *Daugavet* 性质的巴拿赫空间。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个等价范数 $|\cdot|$ 以及两个点 x、$y \in B_{(X,|\cdot|)}$，使得

(1) y 是一个超 Δ-点。
(2) x 是强暴露点。(3)
$|x - y| < \varepsilon$。

证明。取一个子空间 $Y \subseteq X$，其维数为 $X/Y = 1$。注意到 Y 具有 Daugavet 性质（例如参见 [50, 定理 6 (a)]）。取 $x \in S_X$，使得 $0 < d(x, Y) < \varepsilon$（这可以通过取一个非零元素 $v \in X/Y$，使其商范数小于 ε 来解决）。现在，我们可以找到一个元素 $y \in S_Y$，使得$\|x - y\| < \varepsilon$。根据 Hahn-Banach 定理，我们可以取 $f \in S_{X^*}$，使 Re $f(x) > 0$，且 $f = 0$ 在 Y 上。这意味着 x 属于切片 $T := \{z \in B_X : \text{Re } f(z) > \alpha\}$，其中某个 $\alpha > 0$成立。取 $\delta > 0$，使得 $\frac{\|x-y\|}{1-\delta} < \varepsilon$。由引理 2.1，我们可以找到 $x^* \in S_{X^*}$，使得 $x \in S(x^*, \delta; B_X) \subseteq T$。根据上述包含关系，我们得出 $S(x^*, \delta; B_X) \cap B_Y = \emptyset$，或者换句话说，对每个$z \in B_Y$，都有 Re $x^*(z) \leqslant 1 - \delta$。令

$$B := \overline{\text{co}}(B_Y \cup (1 - \delta)B_X \cup \{\pm x\}).$$

B 是等价范数 $|\cdot|$ 的单位球；根据包含关系 $(1-\delta)B_X \subseteq B \subseteq B_X$，它满足

$$\|x\| \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{1-\delta}\|x\|$$

对每个 $x \in X$。我们来证明 $|\cdot|$、x 和 y 满足我们的要求。首先，注意到

$$|x-y| \leqslant \frac{\|x-y\|}{1-\delta} < \varepsilon.$$

接下来，我们声称 y 是一个超 Δ 点。事实上，由于 Y 具有 Daugavet 性质，我们可以找到一个网 $\{y_s\} \subseteq B_Y$，使得 $\{y_s\} \longrightarrow y$ 弱收敛且 $\|y-y_s\| \longrightarrow 2$。注意，在 X 上仍然可以保证弱收敛 $\{y_s\} \longrightarrow y$，因为 $i\colon (Y, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, |\cdot|)$ 是弱到弱连续的，因为 $\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|$ 等价。此外，注意到对每个 s，都有 $y_s \in B_Y \subseteq B$，因此对每个 s，都有 $|y_s| \leqslant 1$。最后，

$$|y_s - y| \geqslant \|y_s - y\| \longrightarrow 2,$$

由于 $y \in B_Y \subseteq B$，我们得出 $|y_s - y| \longrightarrow 2$。由此，$y$ 显然是范数 $|\cdot|$ 的一个超 Δ-点。

剩下要证明 x 是强暴露的。事实上，我们将证明 $\operatorname{Re} x^*$ 在 x 处强暴露 B，为此只需证明 $\operatorname{Re} x^*$ 在 x 处强暴露 $\operatorname{co}(B_Y \cup (1-\delta)B_X \cup \{\pm x\})$。取 $z := \alpha u + \beta(1-\delta)v + (\gamma-\omega)x \in \operatorname{co}(B_Y \cup (1-\delta)B_X \cup \{\pm x\})$，其中 $\alpha+\beta+\gamma+\omega = 1$。注意，由于包含关系 $B \subseteq B_X$，有 $1-\delta < \operatorname{Re} x^*(x) \leqslant |x^*| \leqslant \|x^*\|$。考虑到 $\operatorname{Re} x^*(u) \leqslant 1-\delta$，因为 $u \in B_Y$，且 $B_Y \cap S(x^*, \delta; B_X) = \emptyset$，我们得出

$$\operatorname{Re} x^*(z) \leqslant (1-\delta)(\alpha+\beta) + (\gamma-\omega)\operatorname{Re} x^*(x).$$

由于 $\operatorname{Re} x^*(x) > 1-\delta$，我们得到 $\sup\{\operatorname{Re} x^*(z)\colon z \in \operatorname{co}(B_Y \cup (1-\delta)B_X \cup \{\pm x\})\} = \operatorname{Re} x^*(x)$。如果我们取一个序列

$$z_n := \alpha_n u_n + \beta_n(1-\delta)v_n + (\gamma_n - \omega_n)x \in \operatorname{co}(B_Y \cup (1-\delta)B_X \cup \{\pm x\})$$

满足 $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\omega_n = 1$，使得 $\operatorname{Re} x^*(z_n) \longrightarrow \operatorname{Re} x^*(x)$，由前面的论证可得 $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0, \omega_n \to 0$，且 $\gamma_n \to 1$，这意味着 $z_n \to x$ 在范数下收敛。□

注 4.19。利用前面的定理和命题 3.25 可以很容易地构造（例如考虑 ℓ_2-和），一个巴拿赫空间 X，其中包含一个超 Δ-点序列（y_n），使得从 y_n 到强暴露点集合的距离趋于零。

4.5. A SUPER Δ-POINT WHICH IS A STRONGLY REGULAR POINT. 在本小节和下一小节中，我们旨在区分 Δ-点和 Daugavet 点的 super 与 ccs 概念。下面的结果表明，存在许多空间含有既是强正则点、又是 super Δ-点的点（因此远非 ccs Δ-点）。为简单起见，我们对实空间进行构造。

定理 4.20. 每个具有 *Daugavet* 性质的实巴拿赫空间都可以通过等价重范数化，使得新的单位球中有一个点同时是 *super*-Δ 点和强正则点（因此远非 *ccs* Δ-点）。

我们将使用下面这个直接推论，它源于凸组合切片的凸组合仍是一个凸组合切片这一事实。

引理 4.21. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 C 是 X 的闭凸有界子集。那么，C 的强正则点构成一个凸集。

定理 4.20 的证明。设 X 是具有 Daugavet 性质的巴拿赫空间。取 X的一个余维为 1 的子空间 Y。由于 Y在 X 中可补，因此 $X = Y \oplus \mathbb{R}$，所以我们将以这种方式考察 X。取 $r > 0$、 $y_0 \in S_Y$和 $f \in S_{X^*}$，使得 $f(y_0) = 1$，并在 $X = Y \oplus \mathbb{R}$ 上考虑等价范数 $|\cdot|$，其单位球为 $B := \operatorname{co}\big(B_Y \times \{0\} \cup \{\pm(y_0, r)\} \cup \{\pm(y_0, -r)\}\big)$。显然， $|\cdot|$ 在形如 $(y, 0)$ 的元素上与原范数 $\|\cdot\|$ 一致。

我们断言（y_0，0）满足我们的要求。首先，我们证明（y_0，0）是一个超-Δ点。由于 Y 是一维余维子空间，它具有 Daugavet 性质（例如参见 [50, 定理 6 (a)]）。因此，存在一个网（y_s），在 B_Y 中 $\longrightarrow y_0$ 弱收敛，并且满足 $\|y_0 - y_s\| \longrightarrow 2$。于是，（$y_s$，0）$\longrightarrow$（$y_0$，0）在（$X$，$|\cdot|$）中弱收敛。此外，显然，对于每个 s，都有（y_s，0）$\in B$。最后，

$$|(y_s, 0) - (y_0, 0)| = |(y_s - y_0, 0)| = \|y_s - y_0\| \longrightarrow 2.$$

现在我们证明 $(y_0, 0)$ 是一个强正则点。为此，根据引理 4.21，只需证明 $(y_0, \pm r)$ 是一个强暴露点（我们将证明 (y_0, r) 的情形，另一种情形完全类似）。我们证明 $\operatorname{Re}(f, 1)$ 在集合 $B_Y \times \{0\} \cup \{\pm(y_0, r)\} \cup \{\pm(y_0, -r)\}$ 中强暴露 (y_0, r)。另一方面，我们有

$$\operatorname{Re}(f, 1)(y_0, r) = \operatorname{Re} f(y_0) + r = 1 + r.$$

另一方面，给定 $(y, 0) \in B_Y \times 0$，我们有 $\operatorname{Re}(f, 1)(y, 0) = f(y) \leqslant 1 < 1 + r$。此外，$\operatorname{Re}(f, 1)(y_0, -r) = 1 - r$，且 $\operatorname{Re}(f, 1)(-y_0, \pm r) = -1 \pm r < 1 + r$。因此，

$$\begin{aligned}\sup\{\operatorname{Re}(f, 1)(a, b) \colon (a, b) \in B_Y \times \{0\} \cup \{\pm(y_0, r)\} \cup \{\pm(y_0, -r)\},\ (a, b) \neq (y_0, r)\}& \\ \leqslant 1 < 1 + r = \operatorname{Re}(f, 1)(y_0, r).&\end{aligned}$$

这足以保证 $\operatorname{Re}(f, 1)$ 强暴露 B 中的 (y_0, r)，因此证明完毕。 □

4.6. A SUPER DAUGAVET POINT WHICH IS NOT CCS Δ-POINT. 前一个例子表明，我们可以区分超 Δ-点与 ccs Δ-点的概念。因此，我们自然会认为，超 Daugavet 点与 ccs Δ-点的概念也应当能够区分。为此，我们需要考虑一种复杂的构造；作为其结果，我们将证明，存在超 Daugavet 点，它们包含在直径较小的切片的凸组合中。该构造与 [14, 定理 2.4], 中的构造非常相似，只略作变化，使所得范数具有更强的 Daugavet 特性。与前一小节一样，这里我们只讨论实空间。

为此，我们回顾 Argyros、Odell 和 Rosenthal [11] 的一个构造。取一个非递增的零序列 $\{\varepsilon_n\}$ in $\mathbb{R}^+$。我们在实空间 c_0 中构造一个递增的闭、有界凸集序列 $\{K_n\}$ in，以及一个序列 $\{g_n\}$ in c_0，如下所示：首先定义 $K_1 = \{e_1\}$、$g_1 = e_1$和 $K_2 = \operatorname{co}(e_1, e_1 + e_2)$。选取 $l_2 > 1$和 $g_2, \ldots, g_{l_2} \in K_2$，使其成为 K_2中的一个 ε_2-网。假设$n \geqslant 2$，并且 m_n, l_n, K_n及 $\{g_1, \ldots, g_{l_n}\}$均已构造，其中 $K_n \subseteq B_{\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{m_n}\}}$，且对每个 $1 \leqslant i \leqslant l_n$都有$g_i \in K_n$。定义 K_{n+1} 为

$$K_{n+1} = \operatorname{co}(K_n \cup \{g_i + e_{m_n + i} \colon 1 \leqslant i \leqslant l_n\}).$$

考虑 $m_{n+1} = m_n + l_n$ 并选择 $\{g_{l_n+1}, \ldots, g_{l_{n+1}}\} \in K_{n+1}$，使得 $\{g_1, \ldots, g_{l_{n+1}}\}$ 是 K_{n+1} 中的一个 ε_{n+1}-网。最后，我们定义 $K_0 = \overline{\cup_n K_n}$ 于是可得， K_0 是 c_0 的一个非空闭有界凸子集，满足对每个 $n \in \mathbb{N}$， $x(n) \geqslant 0$，且对每个 $x \in K_0$， $\|x\|_\infty \leqslant 1$，因此 $\operatorname{diam}(K_0) \leqslant 1$。

现在，对于固定的 i，由构造可知， $\{g_i + e_{m_n+i}\}_n$ 是 K_0 中的一个序列（当 n足够大时），它弱收敛于 g_i，并且对每个

n。于是，K_0的直径 $=1$。在本小节中，我们将广泛使用集合 K_0 和上述构造。注意，由上述构造可知

$$K_0 = \overline{\{g_i : i \in \mathbb{N}\}}^{w} = \overline{\{g_i : i \in \mathbb{N}\}}.$$

最后注意到，根据归纳构造，对于每个 $i \in \mathbb{N}$， g_i 都具有有限支撑。

根据 [11, 定理 1。2] 可知 K_0 包含直径任意小的切片的凸组合。然而， K_0 中的所有点在以下意义上都是“超 Daugavet 点”。

命题 4.22。对于每个 $x_0 \in K_0$、每个 $\varepsilon > 0$ 以及 K_0 的每个非空弱开子集 W，都存在 $y \in W$，使得 $\|x_0 - y\| > 1 - \varepsilon =$ 直径 $(K_0) - \varepsilon$。

证明。取 $\varepsilon > 0$ 和 K_0 的一个非空相对弱开子集。通过稠密性论证，我们可以找到满足 $\|x_0 - g_i\| < \varepsilon$ 的 $i \in \mathbb{N}$。再通过稠密性论证，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，存在 $g_k \in W$。

如上所述，根据 K_0 的定义，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有序列 $g_k + e_{m_n+k} \in K_0$。由于 $\left(g_k + e_{m_n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow g_k$ 弱收敛，我们可以取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $g_k + e_{m_n+k} \in W$，并且 $m_n + k \notin \operatorname{supp}(g_i) \cup \operatorname{supp}(g_k)$（这是可行的，因为前一个集合是有限的）。因此，取 $y = g_k + e_{m_n+k}$，得到 $y(m_m + k) = 1$，于是

$$\|g_i - y\| \geqslant y(m_n + k) - g_i(m_n + k) = 1 - 0 = 1.$$

因此， $\|x_0 - y\| \geqslant \|g_i - y\| - \|g_i - x_0\| > 1 - \varepsilon$，证明完毕。 □

现在来构造前面提到的 $C[0,1]$ 的重新赋范。取一列非空且两两不交的开子集 V_n，它们属于 $[0,1]$，并满足 $0 \notin \bigcup V_n$。根据乌雷松引理，对于$n\in\mathbb{N}$，我们可以找到每个 $n \in \mathbb{N}$，一个函数 $h_n \in S_{C[0,1]}$，满足 $0 \leqslant h_n \leqslant 1$，且 $\operatorname{supp}(h_n) \subseteq V_n$。若我们考虑$Z :=$ 张成空间$\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$，则可得 Z 与 c_0 在格意义下等距同构（事实上，映射$e_n \longmapsto h_n$ 是一个等距巴拿赫格同构）。因此，我们可以考虑在 Z 中构造的集合 K_0，从而得到 $K_0 \subseteq B_{C[0,1]}$ 是一个正函数集合（因为后一个线性等距映射保持格结构），其中包含直径任意小的切片的凸组合，同时具有命题 4.22 中展示的性质。此外，根据函数 h_n、 f 的构造，对于每个 $f \in Z$， $=0(0) = 0$，因此特别地，对于每个 $f \in K_0$， $f(0) = 0$。

现在，取 $0 < \varepsilon < 1$ 并写成

$$B_\varepsilon := \overline{\operatorname{co}}\left(2\left(K_0 - \frac{\mathbb{1}}{2}\right) \cup 2\left(-K_0 + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) \cup \left((1-\varepsilon)B_{C[0,1]} + \varepsilon B_{\ker(\delta_0)}\right)\right),$$

其中，$\mathbb{1}$ 表示 $C[0,1]$中的常值函数 1。

考虑 $\|\cdot\|_\varepsilon$上的范数（在 $C[0,1]$ 的实版本上），其单位球为 B_ε。正如我们所指出的，重新赋范技巧遵循 [14, 定理 2.4] 中给出的重新赋范方案，不同之处在于，在最后一项中我们使用 $B_{\ker(\delta_0)}$ 而不是 B_{c_0}，因为 $\ker(\delta_0)$ 是一个具有 Daugavet 性质的巴拿赫空间。

我们有如下结果。

定理 4.23。空间 $(X, \|\cdot\|_\varepsilon)$ 满足：

(1) $2(K_0 - \frac{\mathbb{1}}{2})$ 中的每个元素都是超 *Daugavet* 点。(2) 对于每个 $\eta > 0$，存在 B_ε 的切片的凸组合 D，使得 $D \cap 2(K_0 - \frac{\mathbb{1}}{2}) \neq \emptyset$，且直径 $(D) < \eta$。 –

特别地，存在不是凸组合切片$-\Delta$ 点的超 *Daugavet* 点。

证明。 (1). 取 $a \in K_0$，我们来证明 $2a - \mathbb{1}$ 是一个超 Daugavet 点。为此，取 B_ε 的一个非空相对弱开子集 W。记

$$A := 2(K_0 - \tfrac{\mathbb{1}}{2}) \text{ and } B := (1-\varepsilon)B_{C[0,1]} + \varepsilon B_{\ker(\delta_0)}.$$

由于 $B_\varepsilon = \overline{\text{co}}(A \cup -A \cup B)$，可知 W 与 $\text{co}(A \cup -A \cup B)$ 有非空交集。现在注意到 $\frac{A-A}{2} = K_0 - K_0 \subseteq B_{\ker(\delta_0)} \subseteq B$，因此 $\text{co}(A \cup -A \cup B) = \text{co}(A \cup B) \cup \text{co}(-A \cup B)$，由 [14,引理 2。4] 因此， $W \cap \text{co}(A \cup B)$ 或 $W \cap \text{co}(-A \cup B)$ 非空。我们分情况讨论。

首先假设 $W \cap \text{co}(A \cup B)$ 非空，因此可取 $a' \in K_0$, $f \in B_{C[0,1]}$, $g \in B_{\ker(\delta_0)}$，以及α, $\beta \in [0,1]$，使得 $\alpha + \beta = 1$ 满足

$$\alpha(2a' - \mathbb{1}) + \beta((1-\varepsilon)f + \varepsilon g) \in W.$$

取 $\eta > 0$。根据命题 4.22，存在一个网 $(a_s) \longrightarrow a'$ 弱收敛，且 $a_s \in K_0$ 对每个 s 都成立，并满足 $\|a - a_s\| \longrightarrow 1$。由于 $(2a_s - \mathbb{1}) \longrightarrow 2a' - \mathbb{1}$ 弱收敛，我们可以找到足够大的 s，使得

$$\alpha(2a_s - \mathbb{1}) + \beta((1-\varepsilon)f + \varepsilon g) \in W$$

and

$$\|(2a - \mathbb{1}) - (2a_s - \mathbb{1})\| = 2\|a - a_s\| > 2 - \eta.$$

注意到 $2a - \mathbb{1}$ 和 $2a_s - \mathbb{1}$ 是 $B_{C[0,1]}$ 中的函数，因为 a, a_s 是范数至多为一的正函数。由于 $\|(2a - \mathbb{1}) - (2a_s - \mathbb{1})\| > 2 - \eta$，存在 $t_0 \in [0,1]$ 和 $\theta \in \{-1, 1\}$，使得$\theta(2a - \mathbb{1})(t_0) > 1 - \eta$ 且 $\theta(2a_s - \mathbb{1})(t_0) < -1 + \eta$（注意，由构造可知 $t_0 \neq 0$，因为 $a(t_0) = a_s(t_0) = 0$）。因此，该集合

$$U := \{t \in [0,1] \colon \theta(2a - \mathbb{1})(t) > 1 - \eta \text{ and } \theta(2a_s - 1)(t) < -1 + \eta\}$$

是 $[0,1]$, 的一个非空开子集，并且我们可以构造一个由非空且两两不交的开集组成的序列 $W_n \subseteq U$。注意到 $0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$，因为 $0 \notin U$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，取 $p_n \in W_n$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以构造两个函数 f_n 和 g_n，它们属于 $C[0,1]$ 的单位球，并满足 $f_n = f$ 和 $g_n = g$，其中 $[0,1] \setminus W_n$ 和 $f_n(p_n) = g_n(p_n) = -\theta$。注意，函数序列 $(f - f_n)$ 的支撑两两不交，因此 $(f - f_n) \longrightarrow 0$ 弱收敛，换言之，$(f_n) \longrightarrow f$ 弱收敛。类似的论证表明，$(g_n) \longrightarrow g$ 弱收敛。还要注意，给定 $n \in \mathbb{N}$，由于 $0 \notin W_n$，那么$g_n(0) = g(0) = 0$，因此 $(g_n) \subseteq \ker(\delta_0)$。此后， $\alpha(2a_s - \mathbb{1}) + \beta((1-\varepsilon)f_n + \varepsilon g_n)$ 是 B_ε 中的一个序列，它在 n 中弱收敛到 $\alpha(2a_s - \mathbb{1}) + \beta((1-\varepsilon)f + \varepsilon g) \in W$。因此，我们可以取足够大的 n，使得 $\alpha(2a_s - \mathbb{1}) + \beta((1-\varepsilon)f_n + \varepsilon g_n) \in W$。最后，注意到包含关系 $B_\varepsilon \subseteq B_{C[0,1]}$ 蕴含 $\|z\| \leqslant \|z\|_\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}
\big\|(2a - \mathbb{1}) - \alpha(2a_s - \mathbb{1}) - \beta((1-\varepsilon)f_n + \varepsilon g_n)\big\|_\varepsilon &\geqslant \big\|(2a - \mathbb{1}) - \alpha(2a_s - \mathbb{1}) - \beta((1-\varepsilon)f_n + \varepsilon g_n)\big\| \\
&\geqslant \theta((2a - \mathbb{1}) - \alpha(2a_s - \mathbb{1}) - \beta((1-\varepsilon)f_n)(p_n) \\
&= \theta(2a - \mathbb{1})(p_n) - \theta\alpha(2a_s - \mathbb{1})(p_n) \\
&\quad - \theta\beta((1-\varepsilon)f_n(p_n) + \theta\varepsilon g_n(p_n)) \\
&> 1 - \eta - \alpha(-1 + \eta) - \beta(-1) \\
&= 1 + \alpha + \beta - (1 + \alpha)\eta = 2 - 2\eta.
\end{aligned}$$

由于 $\eta > 0$ 是任意的，这就完成了 $W \cap \text{co}(A \cup B) \neq \emptyset$ 的情形。

对于 $W \cap \mathrm{co}(-A \cup B) \neq \emptyset$ 的情形，取 $a' \in K_0$、$f \in B_{C[0,1]}$、$g \in B_{\ker(\delta_0)}$ 和 α，$\beta \in [0,1]$，使得 $\alpha+\beta=1$ 满足

$$\alpha(-2a'+\mathbb{1})+\beta((1-\varepsilon)f+\varepsilon g) \in W.$$

这种情况较简单，因为 $\|(2a-\mathbb{1})-(-2a'+\mathbb{1})\| \geqslant (2a-\mathbb{1})-(-2a'+\mathbb{1})(0)=2$。现在，采用与上述情况类似的近似论证，处理 f_n 和 g_n（在 (0,1) 的一个非空开子集上进行，以得到 $g_n(0)=0$），便可完成这种情况，从而完成 (1) 的证明。

(2)。证明的第一部分将重复 [14, 定理 24]中的论证。取定 $\gamma>0$。根据 [11, 定理 12]，存在切片 S_1，$\cdots$，S_n，其属于 K_0，使得

$$\operatorname{diam}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) < \frac{1}{4}(1-\varepsilon)\gamma.$$

我们可以假设 $S_i=\{x \in K_0 \colon x_i^*(x) > 1-\delta\}$，其中 $0<\delta<1$、$x_i^* \in C[0,1]^*$，并且对每个 $i=1,\ldots\ldots,n$，$\sup x_i^*(K_0)=1$ 都成立。显然

$$\sup x_i^*\big(2(K_0-\frac{\mathbb{1}}{2})\big) = 2(1-x_i^*(\frac{\mathbb{1}}{2})),$$

对所有 $i=1,\cdots,n$。我们令 ρ，$\delta>0$，使得 $\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|+\delta<\widetilde{\delta}$，$2\rho<\varepsilon$，$\rho\|x_i^*\|<4\delta$，且 $\frac{(7-2\varepsilon)\rho}{1-\varepsilon} < \gamma$，对所有 $i=1,\ldots,n$。我们考虑由下式给出的 B_ε 的相对弱开集

$$U_i := \left\{x \in B_\varepsilon \colon x_i^*(x) > 2\left(1-\delta-x_i^*\left(\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|,\ x(0)=\delta_0(x)<-1+\rho^2\right\}$$

对每个 $i=1,\ldots,n$。显然，对每个 $i=1,\ldots,n$，都有 $\|x_i^*\|_\varepsilon \leqslant \|x_i^*\|$，且 $\|\delta_0\|_\varepsilon=\|\delta_0\|=1$.

由于 $\rho\|x_i^*\|<4\delta$，我们有 $2(1-x_i^*(\frac{\mathbb{1}}{2})) > 2(1-\delta-x_i^*(\frac{\mathbb{1}}{2}))+\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|$。现在，$\sup x_i^*(2(K_0-\frac{\mathbb{1}}{2})) = 2(1-x_i^*(\frac{\mathbb{1}}{2}))$，因此存在 $x \in K_0$ 使得

$$x_i^*(2(x-\frac{\mathbb{1}}{2})) > 2(1-\delta-x_i^*(\frac{\mathbf{1}}{2}))+\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\| \quad \text{and} \quad \delta_0(2(x-\frac{1}{2})) = -1 < -1+\rho^2.$$

这意味着，对于每个 $i=1,\ldots,n$，都有 $U_i \neq \emptyset$。为了估计 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i$ 的直径，只需计算

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \cap \operatorname{co}\left(2\left(K_0-\frac{\mathbb{1}}{2}\right) \cup -2\left(K_0-\frac{\mathbb{1}}{2}\right) \cup [(1-\varepsilon)B_X+\varepsilon B_{\ker(\delta_0)}]\right).$$

由于 $2(K_0-\frac{\mathbb{1}}{2})$ 和 $(1-\varepsilon)B_{C[0,1]}+\varepsilon B_{\ker(\delta_0)}$ 是 B_ε 的凸子集，给定 $x \in B_\varepsilon$，我们可以假设 $x=\lambda_1 2(a-\frac{\mathbb{1}}{2})+\lambda_2 2(-b+\frac{\mathbb{1}}{2})+\lambda_3[(1-\varepsilon)x_0+\varepsilon y_0]$，其中 $\lambda_i \in [0,1]$ 满足 $\sum_{i=1}^3 \lambda_i=1$，且a，$b \in K_0$、$x_0 \in B_{C[0,1]}$和 $y_0 \in B_{\ker(\delta_0)}$。

因此，给定 x，$y \in \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i$，对于 $i=1,\cdots,n$，存在 a_i，a_i'，b_i，$b_i' \in K_0$、$\lambda_{(i,j)}$，$\lambda'_{(i,j)} \in [0,1]$，其中$j=1,2,3$，并且 x_i，$x_i' \in B_{C[0,1]}$，以及 y_i，$y_i' \in B_{Ker(\delta_0)}$，使得

$$u_i := 2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbf{1}}{2}\right)+2\lambda_{(i,2)}\left(-b_i+\frac{\mathbf{1}}{2}\right)+\lambda_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i+\varepsilon y_i]$$

$$u_i' := 2\lambda'_{(i,1)}\left(a_i'-\frac{\mathbf{1}}{2}\right)+2\lambda'_{(i,2)}\left(-b_i'+\frac{\mathbf{1}}{2}\right)+\lambda'_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i'+\varepsilon y_i']$$

对每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 都属于 U_i，并且满足

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{and} \quad y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i'.$$

对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们有 $u_i \in U_i$，因此

$$\delta_0(u_i) = \delta_0\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i - \frac{\mathbf{1}}{2}\right) + 2\lambda_{(i,2)}\left(-b_i + \frac{\mathbf{1}}{2}\right) + \lambda_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i + \varepsilon y_i]\right) < -1 + \rho^2.$$

注意，由构造可知，

$$\delta_0\left(a_i - \frac{\mathbf{1}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \delta_0\left(-b_i + \frac{\mathbf{1}}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ and } \delta_0((1-\varepsilon)x_i + \varepsilon y_i) = \delta_0((1-\varepsilon)x_i) \geqslant -(1-\varepsilon).$$

这意味着

$$2\lambda_{(i,2)} + \lambda_{(i,3)}\varepsilon - 1 = -\lambda_{(i,1)} + \lambda_{(i,2)} - \lambda_{(i,3)}(1-\varepsilon) < -1 + \rho^2.$$

由于 $2\rho < \varepsilon$，我们推得 $\lambda_{(i,2)} + \lambda_{(i,3)} < \frac{1}{2}\rho$。因此可得

$$\lambda_{(i,1)} > 1 - \frac{1}{2}\rho, \tag{4.1}$$

类似地，我们可得

$$\lambda'_{(i,1)} > 1 - \frac{1}{2}\rho, \tag{4.2}$$

对每个 $i = 1$、.....、 n 均成立。现在，由上述不等式可得

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_\varepsilon &\leqslant \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n 2\lambda_{(i,1)}\left(a_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right) - 2\lambda'_{(i,1)}\left(a'_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right\|_\varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\|2\lambda_{(i,2)}\left(-b_i + \frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right\|_\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\|2\lambda'_{(i,2)}\left(-b'_i + \frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right\|_\varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|\lambda_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i + \varepsilon y_i]\|_\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|\lambda'_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x'_i + \varepsilon y'_i]\|_\varepsilon \\
&\leqslant \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n 2\lambda_{(i,1)}\left(a_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right) - 2\lambda'_{(i,1)}\left(a'_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right\|_\varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\lambda_{(i,2)} + \lambda_{(i,3)}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\lambda'_{(i,2)} + \lambda'_{(i,3)}\right)
\end{aligned}$$

并且，利用（4.1）、（4.2），

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n 2\lambda_{(i,1)}\left(a_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right) - 2\lambda'_{(i,1)}\left(a'_i - \frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right\|_\varepsilon + \rho \\
&\leqslant \frac{2}{n}\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_{(i,1)}a_i - \lambda'_{(i,1)}a'_i\right\|_\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\lambda_{(i,1)} - \lambda'_{(i,1)}|\|\mathbb{1}\|_\varepsilon + \rho \\
&\leqslant \frac{2}{n}\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_{(i,1)}a_i - \lambda'_{(i,1)}a'_i\right\|_\varepsilon + \frac{(3-2\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)}\rho.
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_{(i,1)}a_i-\lambda'_{(i,1)}a'_i\right\|_{\varepsilon}\\
&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{(i,1)}-1)a_i\right\|_{\varepsilon}+\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i-a'_i\right\|_{\varepsilon}+\left\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda'_{(i,1)}-1)a'_i\right\|_{\varepsilon}\\
&\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i-a'_i\right\|+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\varepsilon}|\lambda_{(i,1)}-1|\|a_i\|+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\varepsilon}|\lambda'_{(i,1)}-1|\|a'_i\|\\
&\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i-a'_i\right\|+\frac{1}{1-\varepsilon}n\rho.
\end{aligned}$$

（在前一个估计中，注意到 $\|a_i\|\leqslant 1$ 且 $\|a'_i\|\leqslant 1$，因为 $a_i,\ a'_i\in K_0\subseteq B_{\ker(\delta_0)}\subseteq B_\varepsilon$）。因此，

$$\|x-y\|_{\varepsilon}\leqslant\frac{2}{1-\varepsilon}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i-a'_i\right\|+\frac{(7-2\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)}\rho. \tag{4.3}$$

现在，为了证明前一个范数很小，我们将证明这两个元素 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a'_i$ 都属于直径很小的 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i$。为此，请注意

$$\begin{aligned}
x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)+2\lambda_{(i,2)}\left(-b_i+\frac{\mathbb{1}}{2}\right)+\lambda_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i+\varepsilon y_i]\right)\\
>2\left(1-\delta-x_i^*\left(\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)+\frac{\rho}{2}\|x_i^*\|,
\end{aligned}$$

对每个 $i\in\{1,\dots,n\}$ 都成立。于是，

$$\begin{aligned}
x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|&\geqslant x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)+\lambda_{(i,2)}\|x_i^*\|+\lambda_{(i,3)}\|x_i^*\|\\
&\geqslant x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)+\lambda_{(i,2)}\|x_i^*\|_{\varepsilon}+\lambda_{(i,3)}\|x_i^*\|_{\varepsilon}\\
&\geqslant x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)+2\lambda_{(i,2)}\left(-b_i+\frac{\mathbb{1}}{2}\right)+\lambda_{(i,3)}[(1-\varepsilon)x_i+\varepsilon y_i]\right).
\end{aligned}$$

我们有

$$x_i^*\left(2\lambda_{(i,1)}\left(a_i-\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right)>2\left(1-\delta-x_i^*\left(\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\right),$$

因此

$$x_i^*(\lambda_{(i,1)}a_i)>1-\delta-(1-\lambda_{(i,1)})x_i^*\left(\frac{\mathbb{1}}{2}\right)\geqslant 1-\delta-\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|.$$

我们回想一下，$\delta+\frac{1}{2}\rho\|x_i^*\|<\widetilde{\delta}$，因此 $x_i^*(\lambda_{(i,1)}a_i)>1-\widetilde{\delta}$。由此可得 $x_i^*(a_i)>1-\widetilde{\delta}$。接着，$a_i\in K_0\cap S_i$并且类似地，我们得到，对每个 $i=1,\dots,n$，都有 $a'_i\in K_0\cap S_i$。因此，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a'_i\in\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i.$$

由于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S_i$的直径小于$\frac{1}{4}(1-\varepsilon)\gamma$，我们推得 $\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^n a_i - a_i'\| < \frac{1}{4}(1-\varepsilon)\gamma$。最后，根据（4.3）及上述估计，我们得出 $\|x-y\|_\varepsilon \leqslant \gamma$。因此，集合 $C := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i$ 在范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$下的直径至多为 γ。

现在，Bourgain 引理（见引理2.2）保证对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都存在切片的凸组合 $\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}T_{ij} \subseteq U_i$。利用这一事实，我们将找到$B$的切片的凸组合，其直径小于 $\gamma + \frac{4\rho^2}{(1-\frac{\rho^2}{\varepsilon})\varepsilon}$，并且每个切片都包含 $2(K_0 - \frac{\mathbb{1}}{2})$ 中的点。由于ρ 和 γ 可以任意小，我们便完成了证明。为此，固定 $1 \leqslant i \leqslant n$ 并定义

$$A_i := \left\{ j \in \{1,\dots,p_i\} \colon T_{ij} \cap \left(2K_0 - \frac{\mathbb{1}}{2}\right) = \emptyset \right\}; \quad B_i := \{1,\dots,p_i\} \setminus A_i.$$

给定 $x_{ij} \in T_{ij}$，我们有：对于 $j \in A_i$，根据单位球 B_ε的定义，$\delta_0(x_{ij}) \geqslant -1+\varepsilon$。由于 $\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}x_{ij} \in \sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}T_{ij} \subseteq U_i$，我们推出 $-1+\rho^2 > \delta_0\left(\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}x_{ij}\right)$。因此

$$-1+\rho^2 > \sum_{j\in A_i}\alpha_{ij}\delta_0(x_{ij}) + \sum_{i\in B_i}\alpha_{ij}\delta_0(x_{ij}) \geqslant (-1+\varepsilon)\sum_{j\in A_i}\alpha_{ij} - \sum_{j\in B_i}\alpha_{ij} = -1+\varepsilon\sum_{j\in A_i}\alpha_{ij}.$$

由上述不等式可推得，对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\sum_{j\in A_i}\alpha_{ij} \leq \frac{\rho^2}{\varepsilon}$ 成立。现在令$\Lambda_i := \sum_{j\in B_i}\lambda_{ij}$，当 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时它属于区间 $[1-\frac{\rho^2}{\varepsilon}, 1]$，并令

$$D := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B_i}\frac{\alpha_{ij}}{\Lambda_I}T_{ij}.$$

注意到 hat D 是 B_ε 的切片的凸组合，因为每个 T_{ij} 都是 B_ε 的一个切片，而且 sin ce

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B_I}\frac{\alpha_{ij}}{\Lambda_i}\alpha_{ij} = 1.$$

我们断言 $D \subseteq C + \frac{2}{1-\rho^2}\frac{\rho^2}{\varepsilon}B_\varepsilon$。这足以完成证明，因为上述条件意味着

$$\operatorname{diam}(D) \leqslant \operatorname{diam}(C) + \frac{4}{1-\frac{\rho^2}{\varepsilon}}\frac{\rho^2}{\varepsilon} \leqslant \gamma + \frac{4}{1-\frac{\rho^2}{\varepsilon}}\frac{\rho^2}{\varepsilon}.$$

因此我们来证明上述包含关系。取 $z := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B_i}\frac{\alpha_{ij}}{\Lambda_i}x_{ij} \in D$，其中 $x_{ij} \in T_{ij}$为某个确定值。设$z' := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B_i}\alpha_{ij}x_{ij}$。那么

$$|z-z'| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j\in B_{ij}}\left|1-\frac{1}{\Lambda_i}\right|\alpha_{ij}|x_{ij}| < \frac{1}{1-\frac{\rho^2}{\varepsilon}}\frac{\rho^2}{\varepsilon}.$$

另一方面，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $j \in A_i$，取 $x_{ij} \in T_{ij}$。定义

$$z'' := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}x_{ij} \in \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ij}T_{ij} \subseteq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i = C.$$

此外，我们有

$$|z'-z''| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j\in A_i}\alpha_{ij} < \frac{\rho^2}{\varepsilon}.$$

因此，由于 $z = z'' + (z - z'') \in C + \frac{2}{1-\frac{\rho^2}{\varepsilon}} \frac{\rho^2}{\varepsilon} B_{\varepsilon\,\varepsilon}$

$$|z - z''| \leqslant |z - z'| + |z' - z''| < \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{\varepsilon}} \frac{\rho^2}{\varepsilon} + \frac{\rho^2}{\varepsilon} < \frac{2}{1 - \frac{\rho^2}{\varepsilon}} \frac{\rho^2}{\varepsilon}. \qquad \square$$

4.7. A SUMMARY OF RELATIONS BETWEEN THE PROPERTIES. 图 2下图为一个示意图，补充展示了图 1 ，其中列出了由已知结果及本节结果得出的反例。

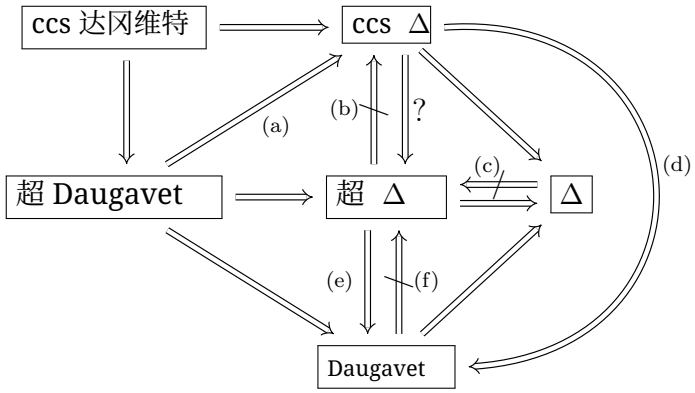

FIGURE 2. 所有直径概念之间关系示意图

下面列出相应的反例。

(a) 第4.6小节中的例子。(b) 第4.5小节中的例子以最强的可能方式否定了这一蕴含。(c) 第4.3.3段中的任意一个元素。它们还直接表明， Δ-点不一定是凸组合切片 Δ-点。(d) 第4.3.2段所给空间 X 的单位球面上的每个元素都是凸组合切片 Δ-点，但不是 Daugavet 点。另一个例子是例 4.17 中的分子$m_{0,q}$。(e) 在 $X = C[0,1] \oplus_2 C[0,1]$中，单位球面上的每个元素都是超 Δ-点（命题 3.25）；但 X 不含 Daugavet 点（命题 3.27）。此外，第4.3.2段所给空间 X 的单位球面上的每个元素都是超 Δ-点，但不是 Daugavet 点。(f) 第4.3.3段中的任意一个元素。

5. DIAMETRAL-PROPERTIES FOR ELEMENTS OF THE OPEN UNIT BALL

如第2节所述，DSD2P 根据 [34], 等价于 Daugavet 性质，但巴拿赫空间单位球面上的凸组合切片 Δ-点并不能刻画 DSD2P，而只能刻画受限 DSD2P；后者与 Daugavet 性质并不等价（见第 4.3.2段）。事实上，在 [34] 关于 DSD2P 与 Daugavet 性质等价性的证明中，开单位球内的元素起着决定性作用。本文旨在引入并研究内点的直径概念，给出有趣的应用，并考察给定巴拿赫空间的单位球中 Daugavet 元素和Δ-元素沿射线的行为。

开单位球中元素的达盖维特概念定义，是对范数为一的元素所给定义的自然推广，后者见定义2.5。

定义 5.1。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in B_X$。我们称

(1) x 是一个*Daugavet* 点，如果对于 B_X的每个切片 S，$\sup_{y\in S}\|x-y\| = \|x\|+1$；(2) x 是一个超 *Daugavet* 点，如果对于 B_X的每个非空相对弱开子集 V，$\sup_{y\in V}\|x-y\| = \|x\|+1$；(3) x 是一个*ccs Daugavet* 点，如果对于 B_X的每个凸组合切片 C，$\sup_{y\in C}\|x-y\| = \|x\|+1$。

事实证明，存在一个非零的 Daugavet 类元素，实际上会迫使其所属的整条射线都由类似的元素构成。

命题 5 .2. 设 X 为巴拿赫空间，且设 $x \in S_X$。以下断言等价 *t.*

(1) x 是一个 *Daugavet*（分别为超 *Daugavet*、*ccs Daugavet*）点。(2) 对于每个 $r \in [0,1]$，rx 都是一个 *Daugavet*（分别为超 *Daugavet*、*ccs Daugavet*）点。(3) 对于某个 $r \in (0,\ 1)$，rx 是一个 *Daugavet*（分别为超 *Daugavet*、*ccs Daugavet*）点。

让我们回顾以下一个初等但非常有用的结果，该结果来自 [34]由 Kade 得出 ts.

引理 5.3 ([34, 引理 2.2])。 设 X 为赋范空间。若 x、$y \in X$ 和 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\|x+y\| > \|x\| + \|y\| - \varepsilon,$$

则对于每个 a、$b > 0$，均满足

$$\|ax+by\| > a\|x\| + b\|y\| - \max\{a,b\}\varepsilon.$$

命题 *5.2*的证明。 我们只证明 Daugavet 点的情形，其他情形完全类似。首先假设 x 是一个 Daugavet 点。取 $r \in [0,1]$、 $\varepsilon > 0$以及 S的一个切片。则存在 $y \in S$ 使得 $\|x-y\| > 2-\varepsilon$。特别地， $\|y\| > 1-\varepsilon$。由于$\|y\| \leqslant 1$,

$$\|x-y\| > 2-\varepsilon \geqslant \|x\| + \|y\| - \varepsilon.$$

由引理 5.3可知

$$\|rx-y\| > \|rx\| + \|y\| - \varepsilon > \|rx\| + 1 - 2\varepsilon.$$

因此， rx 也是一个 Daugavet 点。

现在，设对于某个 $r \in$ (0,1)， rx 是一个 Daugavet 点。再次取 B_X的 $\varepsilon > 0$ 和 S 切片，并选取满足 $\|rx-y\| > \|rx\| + 1 - r\varepsilon$的 $y \in S$。特别地， $\|y\| > 1 - r\varepsilon$。由于 $\|y\| \leqslant 1$，我们有

$$\|rx-y\| > \|rx\| + \|y\| - r\varepsilon.$$

因此，由引理5.3可得

$$\|x-y\| > \|x\| + \|y\| - \varepsilon > 2 - (1+r)\varepsilon$$

于是， x 是一个 Daugavet 点。 □

正如命题3.12之前的讨论中所提到的，在给定的巴拿赫空间中存在 ccs Daugavet 点，必然会使该空间满足强直径二性质。现在可以将此视为前一个命题以及下列 [41,定理 3。1]的直接改述的推论。

命题 5.4 ([41,定理 3.1])。 设 X 是一个巴拿赫空间。那么， X 具有强直径二性质，当且仅当0 是一个 *ccs Daugavet* 点。

注意， c_0 具有强直径二性质，但没有非零 Daugavet 点（例如，使用命题 4.1）。将命题 5.4 与下面这个显然的备注进行比较。

注 5.5。 巴拿赫空间 X 是无限维的，当且仅当 0 是超 Daugavet 点 .

我们还要指出，0 总是一个 Daugavet 点（无论是有限维还是无限维），因为单位球的每个切片都必须与单位球面相交。

我们还要指出， [41,定理 3.1]具有如下缩放版本。

命题 5.6。 设 X 是一个巴拿赫空间，并设 $r \in (0,1]$。那么，以下断言等价。

(1) B_X 的每个凸组合切片的直径都大于或等于 $2r$。(2) $\sup\{\|x\|\colon x \in C\} \geqslant r$ 对于 B_X 的每个凸组合切片 C 均成立。(3) $\sup\{\|x\|\colon x \in D\} \geqslant r$ 对于 B_X 的每个对称闭凸包切片 D 均成立（即包含0）。

证明。假设(1)成立。那么，对于任意给定的 B_X的凸组合切片 C 以及任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在x、$y \in C$ 使得 $\|x-y\| > 2r - 2\varepsilon$。特别地，可得 $\|x\| > r-\varepsilon$ 或 $\|y\| > r-\varepsilon$，从而得到(2)。(2)⇒(3)显然成立。假设(1)不成立，也就是说，存在 B_X 的一个凸组合切片 C 以及 $\varepsilon > 0$，使得diam $(C) \leqslant 2r - 2\varepsilon$。考虑由 $D := \frac{1}{2}(C-C)$定义的 B_X的凸组合切片 D。那么 D是对称的，并且对于每个 $u := \frac{x-y}{2}$和每个 D 中的 $u' := \frac{x'-y'}{2}$，都有 $\|u-u'\| = \left\|\frac{x+y'}{2} - \frac{x'+y}{2}\right\|$。现在，$x$、$x'$、$y$、$y'$属于 C，而 C是凸的，因此 $\frac{x+y'}{2}$和 $\frac{x'+y}{2}$也属于 C，故 $\|u-u'\| \leqslant 2r - 2\varepsilon$。由于 D 对称，这意味着 $D \subset (r-\varepsilon)B_X$，因此(3)不成立。□

以下 是上述命题在直径概念之外的一个很好的推论 .

推论 5.7。 设 X 为巴拿赫空间。那么，当且仅当0 是 B_X的一个强正则点时， B_X 包含直径任意小的凸组合切片。

现在考虑的开单位球中点的直径概念，这些概念只是定义 2.4中所给概念的推广。

定义 5.8。 设 X 为巴拿赫空间，且设 $x \in B_X$。我们称

(1) 如果对于包含 x的 B_X 的每个切片 S，都有 $\sup_{y\in S}\|x-y\| = \|x\|+1$，则称 x 为 Δ点；(2) 如果对于包含 x的 B_X 的每个非空相对弱开子集 V，都有 $\sup_{y\in V}\|x-y\| = \|x\|+1$，则称 x 为超 Δ点；(3) 如果对于包含 x的 B_X 的每个凸组合切片 C，都有 $\sup_{y\in C}\|x-y\| = \|x\|+1$，则称 x 为凸组合切片 Δ点。

有了这些定义，我们可以改进命题 5.4 ，改进结果来自命题 5.6。

推论 5.9. 设 X 是一个巴拿赫空间。那么， X 具有强直径二性质，当且仅当 0 是一个凸组合切片 Δ-点。

将前一个推论与下面这个显而易见的备注进行比较，它类似于备注5.5。

Rema备注 5.10. 巴拿赫空间 X 是无限维的，当且仅当 0 是一个超 Δ-点 t.

注意，对 Δ中元素的凸组合切片 B_X -点的定义给出了 DSD2P 的局部化，也就是说， X 具有 DSD2P（因而具有 Daugavet 性质 [34]）当且仅当B_X 中的所有元素都是凸组合切片 Δ-点。回顾一下，DSD2P 不等价于受限 DSD2P（即 S_X 中的所有点都是凸组合切片 Δ-点），参见第 4.3.2 段。

下面的结果是 Kadets 定理的局部化版本，该定理 [34] 阐述了 DSD2P 与 DPr 的等价性。

定理 5.11。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。若对于每个 $r \in (0,\ 1)$，rx 都是一个 *ccs* Δ 点，则 x 是一个 *ccs Daugavet* 点。此外，只需满足下确界 $\{r \in (0,\ 1)\colon\ rx$ 是一个 *ccs* Δ 点 $\} = 0$。

证明。固定一个由 B_X 和 $\varepsilon > 0$ 构成的 ccs C。由于 $\tilde{C} := \frac{1}{2}(C - C)$ 也是由 B_X 构成的 ccs，且根据命题 2.1]，$0 \in \tilde{C}$ 是 C 的一个˜范数内点，因此对于每个 $r \in (0, \delta)$˜，存在某个 $\delta > 0$，使得 rx 属于 C。根据假设，存在 $r > 0$，使得 rx 是一个 ccs Δ 点，且 $rx \in C$。因此，存在 $y \in C$ 使得 $\|rx - y\| > r + 1 - r\varepsilon$。接着，若记 $y := y_1 - y_2$，其中 $y_1, y_2 \in C$，则根据三角不等式，有$\|rx - y_1\| > r + 1 - r\varepsilon$或 $\|rx - y_2\| > r + 1 - r\varepsilon$；特别地，$\|y_1\| > 1 - r\varepsilon$且 $\|y_2\| > 1 - r\varepsilon$。在这两种情况下，都存在 $y \in C$ 使得 $\|rx - y\| > r\|x\| + \|y\| - r\varepsilon$，由引理 5.3 可得

$$\|x - y\| > \|x\| + \|y\| - \varepsilon > 2 - (1 + r)\varepsilon > 2 - 2\varepsilon. \qquad \square$$

此时，自然会问命题 5.2 的等价表述是否适用于某些不同的 Δ概念。对于 ccs Δ点，答案是否定的，这可由定理 5.11以及例如第 4.3.2 段中的例子得出。下面给出另一个或许更简单的例子来说明这一点。

例 5.12. 设正测度 μ 含有一个有限测度的原子，且也有非空的非原子部分。那么，实空间 $L_1(\mu)$ 根据命题 4.12 不含 ccs Daugavet 点。然而，根据定理 Δ4.8 和命题4.9，其中包含单位球面上的元素，这些元素是 ccs Δ点和超 Daugavet 点。特别地，作为定理 5.11和命题 5.2的推论，必定存在单位球面上的 f，它是 ccs Δ点，并且存在 $t \in (0,1)$ 使得 tf 不是 ccs Δ点，但它是超 Δ点。

对于 Δ-点，我们有以下结果。

命题 5.13。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。若 x 是一个 Δ-点，则对每个 $r \in (0,1)$，rx 都是一个 Δ-点。

证明。设 x 是一个 Δ-点，并固定 $r \in (0, 1)$。取 $\varepsilon > 0$ 以及B_X 的一个包含 rx的切片 S。现在，要么 x 属于 S，要么 $-x$ 属于 S。在第一种情形下，我们可以找到$y \in S$使得 $\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$，再利用引理 5.3，得到 $\|rx - y\| \geqslant \|rx\| + 1 - 2\varepsilon$。否则，$\|rx - (-x)\| = r + 1 = \|rx\| + 1$，证毕。$\square$

对于超 Δ点，目前尚不清楚它们在射线上是否表现得像 Δ点 s.

6. Kuratowski measure and large diameters

设 M 为一个度量空间。非空有界子集 A 的库拉托夫斯基非紧性测度 $\alpha(A)$定义为满足以下条件的所有实数 $\varepsilon > 0$ 的下确界：A 可以被 M 中的有限个直径小于或等于 ε的子集覆盖。

根据定义，显然，$\alpha(A) = 0$ 当且仅当 A 是全有界（亦称预紧）。由此可知，M 中任何 α-测度为 0 的完备子集 A 都是紧的。特别地，若 M 是完备度量空间，则 $\alpha(A) = 0$ 当且仅当 A 是紧的，其中 A 表示集合 A的闭包。因此，可以将 α-测度视为衡量 M 的给定（非空）有界闭子集距离成为紧空间还有多远的一种方式。该测度由 C. Kuratowski 于 [38] 年提出，旨在

推广康托尔著名的交集定理。后来，人们发展出非紧性测度的一般理论，结果表明，该理论为度量不动点理论带来了重要成果，尤其可应用于函数方程或最优控制。有关该主题的介绍及更具体的应用，请参阅 [12]。

注意到 $A \subseteq B$ 蕴含 $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$，且 $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$。还需注意，对于 M 的每个非空有界子集 A，B，都有 $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A)\ \alpha(B)\}$。此外，若 $M = X$ 是赋范空间，则已知 α 具有其他一些有用性质：它是对称的、平移不变的、正齐次的、次可加的，并满足 $\alpha(\operatorname{co} A) = \alpha(A)$。$\alpha$-测度已被证明是研究巴拿赫空间几何的有力工具；例如，我们可参阅相关著作 [46], [47] 和 [44]，这些著作涉及 性质 (α)、落滴性质以及自反巴拿赫空间的同构刻画。

根据定义，显然 A 的库拉托夫斯基测度小于或等于其直径。显然，等号并非总是成立，但在 [5] 中发现、并在 [52]中补充完善了 Δ-点概念与切片的库拉托夫斯基测度之间一种富有成果的关系。特别地，得到了以下结果（参见 [52, 推论 2.2]）。

定理 6.1。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。若 x 是一个 Δ-点，则对于每个包含 x 的 B_X 的切片 S，都有 $\alpha(S) = 2$。此外，对于每个 $\delta > 0$，在 B_{X^*} 中都有 $\alpha(S(x, \delta; B_{X^*})) = 2$。

如下例所示，反向命题一般并不成立。

例 6.2。考虑 $X := L_1([0,1]) \oplus_\infty \ell_1$。由此可知，$X$ 和 X^* 都具有强直径二性质 [15,备注 2.6],，因此由下文的定理 6.3 可知，对于任意切片 $S = S(x^*, \delta; B_X)$，都有 $\alpha(S) = 2$；对对偶空间中的切片也同样成立。然而，存在一些点不是 Δ-点，因为 X 不满足 DLD2P [30, 定理 3.2]，因为 ℓ_1 不满足该性质。因此，只需取任意一个不是 Δ-点的点 $x \in S_X$，即可得到所需的反例。

请注意，切片具有较大直径与切片具有较大的库拉托夫斯基测度之间的联系，其结果并不止于定理 6.1。以下结果最先在 [20]中被指出。

定理 6.3 ([20, 命题 3。1])。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\beta \in (0, 2]$。以下断言等价。

(1) B_X 的每个切片的直径都大于或等于 β。(2) B_X 的每个切片的库拉托夫斯基测度都大于或等于 β。

本节旨在为相对弱开子集，以及切片的凸组合或弱开集的凸组合证明这一结果的类似结论，并将 Veeorg 的结果推广到 superΔ- 点和凸组合弱开集 Δ- 点。

6.1. Kuratowski measure and diameter two properties. 对于非空弱开子集，定理 6.3的类似结论如下。

定理 6.4. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\beta \in (0, 2]$。以下断言等价。

(1) B_X 的每个非空相对弱开子集的直径都大于或等于 β。(2) B_X 的每个非空相对弱开子集的库拉托夫斯基测度都大于或等于 β。

证明。(2)⇒(1)显然成立，因此我们来证明(1)⇒(2)。为此，固定 $\beta \in (0, 2]$，并假设 B_X 的每个非空相对弱开子集的直径都大于或等于 β。那么

取 $\varepsilon > 0$，并让我们用归纳法证明：对于 n，对 B_X 的每个非空相对弱开子集 W 以及 X 的每个有限集族 C_1、.....、C_n，若对每个 i 都有 $\operatorname{diam}(C_i) \leqslant \beta - \varepsilon$，则有 $W \not\subset \bigcup_{i=1} C_i$。

对于 $n = 1$，由假设可知，对于每个非空相对弱开子集 W，均有 $\operatorname{diam}(W) \geqslant \beta > \beta - \varepsilon$。

因此，假设该结论对每个非空相对弱开子集 W of B_X 以及每组由 n 个集合构成的集合族都成立，并证明该结论对由 $n+1$ 个集合构成的集合族成立。为此，考虑 C_1，.....，C_n，C_{n+1}，它们是 X 的子集，且对每个 i，均有 $\operatorname{diam}(C_i) \leqslant \beta - \varepsilon$。注意，由于 X 的范数具有 w-下半连续性，$\operatorname{diam}(C_i) = \operatorname{diam}(C_i^w) \leqslant \beta - \varepsilon$，因此我们可以并且确实假设，对每个 i，C_i 都是弱闭的。

注意，由情形 $n = 1$ 可知 $W \not\subset C_{n+1}$，这意味着 $W \setminus C_{n+1}$ 非空。此外，它是 B_X 的一个弱开子集，因为假设 C_{n+1} 弱闭；由 n $n+1$ 归纳假设可得 $W \setminus C_{n+1} \not\subset \bigcup_{i=1} C_i$。特别地，$W \not\subset \bigcup_{i=1} C_i$，定理得证。□

接下来，我们来建立定理 6.3 关于切片的凸组合的对应版本。为此，注意到根据 Bourgain 引理（见引理 2.2），B_X 的任意非空相对弱开子集的凸组合都 B_X 包含一个切片的凸组合。这个结论使下面的引理成立，从而我们可以将注意力集中在弱开子集的凸组合上。

引理 6.5。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $r > 0$。

(1) 以下命题等价：(a) B_X 的每个切片的凸组合的直径都大于或等于 r。(b) B_X 的每个非空相对弱开子集的凸组合的直径都大于或等于 r。(2) 以下命题等价：(a) $\alpha(C) \geqslant r$ 对 B_X 的每个切片的凸组合 C 都成立。(b) $\alpha(D) \geqslant r$ 对 B_X 的每个非空相对弱开子集的凸组合 D 都成立。

现在我们可以给出以下结果。

定理 6.6。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\beta \in (0, 2]$。以下断言等价：$t.$

(1) B_X 的任意切片凸组合的直径都大于或等于 β。(2) B_X 的任意切片凸组合的库拉托夫斯基测度都大于或等于 β。

证明。(2)⇒(1)显然成立，因此我们来证明 (1)⇒(2)。为此，固定 $\beta \in (0, 2]$，并假设 B_X 的非空相对弱开子集的任意凸组合的直径都大于或等于 β。然后取 $\varepsilon > 0$，并对 n 使用归纳法，证明对于 B_X 的非空相对弱开子集的任意 D 凸组合，以及 X 的子集 n 中的任意有限集族 $C_1, \ldots, C_n$，若对于每个 i 都有 $\operatorname{diam}(C_i) \leqslant \beta - \varepsilon$，则有 $D \not\subset \bigcup_{i=1} C_i$。

对于 $n = 1$，这显然成立，因为根据假设，对于 B_X 的 D 的非空相对弱开子集的任意凸组合，直径 $(D) \geqslant \beta > \beta - \varepsilon$。

通过归纳步骤，假设该结论对 n 成立。

现在取 D 非空相对弱开子集的凸组合，以及 X 的有限集族 $C_1, \ldots, C_{n+1}$，使得对每个 i都有 $\operatorname{diam}(C_i) \leqslant \beta - \varepsilon$。如定理 6.4 的证明中所述，我们可以假设每个 C_i 都是弱闭的。记 $D = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i W_i$。注意，由情形$n = 1$ 可知 $D \not\subseteq C_{n+1}$，因此存在 $z \in D \setminus C_{n+1}$。由于 $z \in D$，我们可以写成 $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$，其中对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$都有 $x_i \in W_i$ 成立。此外，由于 $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \notin C_{n+1}$，这意味着$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in X \setminus C_{n+1}$，而后者是一个弱开集。利用求和的弱连续性，我们可以找到 B_X的弱开子集 V_i，使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$都有 $x_i \in V_i$，并满足 $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i \subseteq X \setminus C_{n+1}$。通过取更小的 V_i，我们可以假设对每个i都有 $V_i \subseteq W_i$。现在令 $\tilde{D} := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i V_i$，它是 B_X的弱开子集的凸组合。根据归纳步骤，$\tilde{D} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} C_j$，因此存在 $y \in D$，使得对 $1 \leqslant j \leqslant n$有 $y \notin C_j$。注意，条件 $V_i \subseteq W_i$ 意味着 $\tilde{D} \subseteq D$，因此 $y \in D$ 确实成立。此外，$D \subseteq X \setminus C_{n+1}$ 尤其意味着$y \notin C_{n+1}$。这就推出 $y \in D \setminus \bigcup_{i=1} C_i$，恰好证明了我们要证明的结论。 □

6.2. Kuratowski measure and Δ-notions. 现在我们证明一个关于超Δ点的定理 6.1 的类比结果。

定理 6.7. 设 X 为巴拿赫空间，且 $x \in S_X$ 为超 Δ点。则每个包含 x 的非空相对弱开子集 W，其中 B_X，都满足 $\alpha(W) = 2$。

证明将直接由下面的结果推出。

命题 6.8. 设 X 为巴拿赫空间，$x \in S_X$ 为超 Δ 点，且 W 为 B_X 的弱开子集，满足 $x \in W$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个序列 $\{x_n\} \subseteq W$，使得$\|x_i - x_j\| > 2 - \varepsilon$ 对每个 $i \neq j$都成立。

证明。令 $\varepsilon > 0$。我们通过归纳法构造一个序列 $\{x_n\}$，使其满足$\|x - x_i\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$，并且对于 $i \neq j$ 有 $\|x_i - x_j\| > 2 - \varepsilon$。

利用 x是超 Δ点选择，根据超 Δ的定义，选取一个点 $x_1 \in W$，使得 $\|x - x_1\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$。

现在，假设 $x_1, \ldots, x_n$已构造完成，接下来构造 x_{n+1}。根据定义该序列的性质可知，给定 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $\|x - x_i\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$，因此我们可以找到 $g_i \in S_{X^*}$，使得 $\operatorname{Re} g_i(x - x_i) > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$，这意味着 $\operatorname{Re} g_i(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$且 $\operatorname{Re} g_i(x_i) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}$。因此

$$x \in V := W \cap \bigcap_{i=1}^{n} S\left(g_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

这是一个弱开集。由于 x是超 Δ，我们可以找到 $x_{n+1} \in V$，使得 $\|x - x_{n+1}\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$。为完成构造，我们只需证明 $\|x_i - x_{n+1}\| > 2 - \varepsilon$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$都成立。但这显然成立，因为给定 $1 \leqslant i \leqslant n$，条件 $x_{n+1} \in V$意味着 $\operatorname{Re} g_i(x_{n+1}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$，所以

$$\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant \operatorname{Re} g_i(x_{n+1} - x_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon,$$

证明至此完成。 □

注意，定理 6.7的类似结论也可针对凸组合弱开集 Δ 点建立。

定理 6.9。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$ 是一个凸组合弱开集 Δ点。那么， B_X 中包含 x 的相对弱开子集的任意非空凸组合 D 都满足 $\alpha(D) = 2$。

与前一种情形一样，证明可直接由下一个结果得出。

命题 6.10. 设 X 是一个巴拿赫空间， $x \in S_X$ 是一个凸组合弱开集 Δ 点，且 D 是 B_X 的一个凸组合弱开集，使得 $x \in D$。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个序列 $\{x_n\} \subseteq D$，使得对每个 $i \neq j$， $\|x_i - x_j\| > 2 - \varepsilon$ 成立。

证明。令 $\varepsilon > 0$。写作 $D := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i W_i$，其中对每个 i， $\lambda_i \neq 0$ 成立。令 $\delta := \frac{\varepsilon}{2 \cdot \text{最小值}_{1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i}$。我们用归纳法构造一个序列 $\{x_n\} \subseteq D$，使得 $\|x - x_i\| > 2 - \delta$，并且对 $i \neq j$有 $\|x_i - x_j\| > 2 - \varepsilon$。利用 x 是一个凸组合弱开集 Δ 点这一事实，根据凸组合弱开集 Δ的定义，选取一点 $x_1 \in D$ ，使得 $\|x - x_1\| > 2 - \delta$。

现在假设 x_1、……、 x_n 已经构造完成，接下来构造 x_{n+1}。我们可以将 $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ 和 $x_i := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^i$ 写成 D 的元素。

根据定义该序列的性质，注意到给定 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时，我们有 $\|x - x_i\| > 2 - \delta$，因此可以找到满足以下条件的 $g_i \in S_{X^*}$

$$\operatorname{Re} g_i(x - x_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{Re} g_i(x_j - x_j^i) > 2 - \delta = 2 - \frac{\varepsilon}{2 \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j}.$$

由凸性论证可知，对每个 $1 \leqslant j \leqslant k$， $\operatorname{Re} g_i(x_j - x_j^i) > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ 都成立，这意味着

$$\operatorname{Re} g_i(x_j) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} g_i(x_j^i) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到

$$x_j \in V_i := W_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} S\left(g_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

这是一个弱开集。由于 x 是一个 ccw Δ-点，且 $x \in \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_j$，我们可以找到一点 $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j z_j \in \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_j \subseteq D$，使得 $\|x - x_{n+1}\| > 2 - \delta$。为了完成构造，我们只需证明对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$， $\|x_i - x_{n+1}\| > 2 - \varepsilon$ 都成立。给定 $1 \leqslant j \leqslant k$，条件 $z_j \in V_j$ 蕴含 $\operatorname{Re} g_i(z_j) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$。另一方面，$\operatorname{Re} g_i(x_j^i) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}$，因此

$$\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant \operatorname{Re} g_i(x - x_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{Re} g_i(z_j - x_j^i) > (2 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 2 - \varepsilon,$$

证明至此完成。 □

7. Commented open questions

目前尚不确定是否成立的性质之间唯一的蕴含关系如下（见第2 页35）。

问题 7.1。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$ 是一个凸组合切片 Δ-点。 x 是超 Δ-点吗?

我们来对这个问题作一些评论。一方面，根据 Bourgain 引理（引理 2.2），答案似乎是肯定的，但该引理 并未说明 一般而言，给定相对弱开子集 x 中的一个元素 W ，若 B_X属于 B_X

包含于 W 且 包含 x。当 $x \in \mathrm{co}(\text{pre-ext}\,(B_X))$ 时，情况便是如此（见注 2.3），因此，问题 7.1 在此情形下的答案是肯定的。另一方面，该问题的一个可能反例是例 4.16 或4.17中的分子；已知它们是凸组合切片 Δ点，且是极端点，但不是保持极端点（因此它们不属于保持极端点集合的凸包）。要证明这些分子不是超 Δ点，可以考察 RNP 空间中是否可能存在超 Δ点。

定理3.19指出，实数巴拿赫空间若具有一无条件基，则既不包含超 Δ点，也不包含凸组合切片 Δ 点。很可能，这样的结果在复数情形下同样成立，因为我们认为，只要采用恰当的一无条件基概念（使得 [6] 中的预备结果对复数标量也成立），[6, 命题 23] 便成立。此外，我们还预计，其中的结果可以轻易推广到一无条件有限维分解。不过，由于命题3.20在非常一般的情形下，针对超 Δ点得到了这一结果的更强版本，因此自然会问，能否通过证明命题 Δ3.20的类似结论，同时改进关于凸组合切片 Δ点的两个方向上的结果？那么，我们来提出以下问题。

问题 7.2。 设 X 是一个巴拿赫空间，并假设存在一个子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X, X)$，满足 $\sup\{\|\text{恒等算子} - T\| : T \in \mathcal{A}\} < 2$，且对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $x \in X$，都存在$T \in \mathcal{A}$ 使得 $\|x - Tx\| < \varepsilon$。 X 中能否包含一个 ccs Δ-点?

对这个问题作出否定回答会很有意思，因为这将给出一个 accsΔ-点，它不是超 Δ-点，从而也是否定地回答了问题7.1。

另一个有意思的问题是，连续点能否成为 ccs Δ-点。下面将这些问题形式化。

问题 7.3。 设 X 是一个巴拿赫空间。

(1) 如果 X 包含一个超 Δ-点或一个超 Daugavet 点，那么它是否不具有 Radon–Nikodym 性质（甚至不具有连续点性质）？ (2) 连续点能否成为 ccs Δ-点?

第4 节给出的令人惊讶的例子表明，在巴拿赫空间上仅仅存在某些直径概念（但不包括 ccs Daugavet 点），并不意味着整个空间具有任何直径二性质或 Daugavet 性质。我们在此想探讨的是：一个巴拿赫空间必须包含多少个直径点，才会具有某种直径二性质或 Daugavet 性质，或者不具有 RNP 或一无条件基?

问题 7.4。 具有 Radon-Nikod´ym 性质、连续点性质、强正则性或一无条件基的巴拿赫空间中，Daugavet 点、超 Daugavet 点、 Δ-点、超Δ-点或 ccs Δ-点的集合可以有多大?

关于直径点存在的等距推论，近期有一些结果表明，包含一个 Δ点的巴拿赫空间不可能是一致非方形的 [5] ，甚至不可能是局部一致非方形的 [37], 或渐近一致光滑的 [5, 52]。此外，具有抑制无条件常数小于 2 的无条件基的巴拿赫空间不能包含超 Δ点，而包含 ccs Daugavet 点的巴拿赫空间具有强直径二性质。鉴于目前尚不清楚是否存在具有 Daugavet 性质的严格凸巴拿赫空间（见 [33,章节 5]），下面的问题是有意义的。回顾一下，段落4.3.2 给出了一个严格凸巴拿赫空间的例子，其中每个范数为一的元素都是 ccs Δ点和超 Δ点，但由于其构造方式，该空间不包含任何 Daugavet 点。

问题 7.5。是否存在一个包含 Daugavet 点的严格凸巴拿赫空间?

鉴于命题 3.13 和定理4.14，下面的问题便有意义。

问题 7.6。设 X 为巴拿赫空间。若 $x \in \operatorname{ext}(B_X)$ 是一个 Δ-点，这是否意味着 x 是一个凸组合切片 Δ-点或超 Δ-点?

迄今为止，已知巴拿赫空间含有 Δ-点乃至 Daugavet 点的唯一同构限制是该空间不能是有限维的。若能找到更多限制，将会很有意义。

问题 7.7。找出巴拿赫空间含有 Δ-点或其他任一直径概念的同构限制。特别是，自反巴拿赫空间甚至超自反巴拿赫空间能否含有 Δ-点、超 Δ-点、凸组合切片 Δ-点、Daugavet 点或超 Daugavet 点?

第 3.2 小节中关于绝对和的结果，在超 Daugavet 点的情形下尚不完整，而在凸组合切片概念的情形下则更不明朗。下面提出两个可能的问题。

问题 7.8。设 X, Y 是巴拿赫空间，且 N 是一个绝对和。

(1) 若 N 是 A-八面体的，$x \in S_X$ 和 $y \in S_Y$ 是超 Daugavet 点，那么当 a，b 满足 A-八面体性的定义条件时，$(ax,\ by)$ 是否是 $X \oplus_N Y$ 中的超 Daugavet 点? (2) 若 N 是 ℓ_∞-和，$x \in S_X$ 和 $y \in S_Y$ 是凸组合切片 Δ-点，那么对于 $a,\ b \in [0,1]$ 且 $\max\{a,b\} = 1$，形如 $(ax,\ by)$ 的元素是否是 $X \oplus_\infty Y$ 中的凸组合切片 Δ-点?

研究第3.2 小节中结果的逆命题也很有意义，正如[45] 针对 Δ-点和 Daugavet 点所做的那样（见 [45] 第 86 和 87 页的表格）。

问题 7.9。设 X、Y 为巴拿赫空间，N 为绝对和，$x \in S_X$、$y \in S_Y$ 和 $a,\ b \geqslant 0$ 满足 $N(a,\ b) = 1$。假设 $(ax,\ by)$ 满足六种直径概念中的任意一种，讨论 x 和 y 会出现什么情况。

第4.1 和4.2 小节中的某些论证或许可以推广到其他类的巴拿赫空间。我们提出几种可能性。

问题 7.10。刻画一致代数、洛伦兹空间及其等距前预空间，以及某些向量值函数空间（如 $C(K,\ X)$ 空间或 $L_\infty(\mu,\ X)$ 空间）中的六种直径概念。

直径点的弱星版本之间的关系（见注释 2.6）尚不清楚。例如，下面的问题尚待探讨。

问题 7.11。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。

(1) 如果 x 是一个凸组合切片 Δ-点，那么 $J_X(x)$ 是否是 X^{**} 中的凸组合切片 Δ-点? (2) X 中的 DD2P 与 S_{X^*} 中的弱星超 Δ- 点之间是否存在某种关系?

正如注释 4.19 中所述，巴拿赫空间 X 包含一个序列（y_n），其中的超 Δ-点到 y_n 中强暴露点集合的距离趋于零。但下面的问题仍未解决。

问题 7.12。超 Δ点（甚至 Δ点）能否属于凹陷点集的闭包?

关于 Δ点和超 Δ点在射线上的行为，下一个问题仍未得到解答，正如我们在第5节中所述。

问题 7.13。设 X 是一个巴拿赫空间，并设 $x \in S_X$。

(1) 若对于某个 $0 < r < 1$，rx 是一个 Δ-点，这是否意味着 x 是一个 Δ-点？(2) 若对于某个 $0 < r < 1$，rx 是一个超 Δ-点，这是否意味着 x 是一个超 Δ-点？(3) 若 x 是一个超 Δ-点，这是否意味着对于所有 $0 < r < 1$，rx 都是一个超 Δ-点？

正如我们在第 6 节所证明的，每个包含超 Δ-点（分别地，包含凸组合弱开集 Δ-点）的相对弱开子集，其库拉托夫斯基测度均为 2。我们的证明似乎不适用于切片的凸组合，因此我们提出如下问题。

问题 7.14. 如果单位球的一个 ccs 包含一个 ccs Δ-点，它是否必然具有最大库拉托夫斯基测度？

Acknowledgments

这项工作的部分内容是在第二位作者于2022年9月访问格拉纳达大学期间完成的。他谨此感谢同事们的热情接待，并感谢所有促成此次访问的人。

作者感谢 Gin´es L´opez-P´erez 就本文主题进行了富有成效的讨论，特别感谢他围绕第4.6小节中的例子提供了启发性的想法。

作者还感谢 Trond A. Abrahamsen、Andr´e Martiny 和 Vegard Lima 就本文主题进行了有益的讨论，尤其感谢他们指出了 [6, 命题 2 的 ccs 版本，12]该版本见第3.1小节。

References

[1] T. A. Abrahamsen, J. Becerra Guerrero, R. Haller, V. Lima, and M. P
¨ oldvere, *Banach spaces where convex combinations of relatively weakly open subsets of the unit ball are relatively weakly open*, Studia Math. (2020), 297–320. [2] T. A. Abrahamsen, P. H´ajek, O. Nygaard, J. Talponen, and S. Troyanski, *Diameter 2 properties and convexity*. Studia Math. **232** (2016), 227–242. [3] T. A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima, and K. Pirk, *Delta- and Daugavet points in Banach spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc. **63** (2020), 475–496. [4] T. A. Abrahamsen and V. Lima, *Relatively weakly open convex combinations of slices*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), 4421–4427. [5] T. A. Abrahamsen, V. Lima, A. Martiny, and Y. Perreau, *Asymptotic geometry and Delta-points*, Banach J. Math. Anal. **16** (2022), article 57. [6] T. A. Abrahamsen, V. Lima, A. Martiny, and S. Troyanski, *Daugavet- and delta-points in Banach spaces with unconditional bases*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser B **8** (2021), 379–398. [7] T. A. Abrahamsen, V. Lima and O. Nygaard, *Remarks on diameter two properties*, J. Convex Anal. 20, 2 (2013), 439–452. [8] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer, Cham, 2016. [9] R. J. Aliaga, C. Gartland, C. Petitjean, and A. Proch´azka, *Purely 1-unrectifiable metric spaces and locally flat Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **375** (2022), 3529–3567. [10] R. J. Aliaga, C. Noˆus, C. Petitjean, and A. Proch´azka, *Compact reduction in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. **260** (2021), 341–359. [11] S. Argyros, E. Odell, and H. Rosenthal, *On certain convex subsets of c_0*, Lecture Notes in Math. 1332, 泛函分析, ed. by E. Odell and H. Rosenthal, 柏林 (1988), 80–111.

[12] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dom
´ ´
Measures of noncompactness in metric ınguez
fixed point theory ¨ 99 1997
Benavides, and G. Lopez Acedo, , Birkhauser Verlag, ( ). [13] J. Becerra Guerrero, G. L´opez-P´erez, and A. Rueda Zoca,
Diametral diameter two properties in Banach spaces, J. Conv. Anal. 25, 3 (2018), 817–840. [14] J. Becerra Guerrero, G. L
´ ´
Extreme differences between weakly open subsets and opez-Perez,
convex combinations of slices in Banach spaces **269** 2015 56 70
and A. Rueda Zoca, , Adv. Math. ( ), – . [15] J. Becerra Guerrero, G. L
´ ´
Octahedral norms and convex combinations of slices opez-Perez,
in Banach spaces **266** 2014 2424 2435
and A. Rueda Zoca, , J. Funct. Anal. ( ), – . [16] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges. II*, 剑桥大学出版社, 纽约-伦敦 (1973). [17] J. Bourgain, *Dentability and finite-dimensional decompositions*, Studia Math. 67 (1980), 135–148. [18] R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property*, Springer-Verlag 柏林 海德堡 (1983). [19] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman纯数学与应用数学专著和综述, 64 (1993). [20] S. J. Dilworth, C. Gartland, D. Kutzarova, and N. L. Randrianarivony, *Nondentable sets in Banach spaces*, J. Convex Anal. 28, 1 (2021), 31–40. [21] J. Distel and J. J. Uhl, *Vector measures*, American Matematical Society 普罗维登斯, 罗得岛州 (1977). [22] G. A. Edgar and R. F. Wheeler, *Topological properties of Banach spaces*, Pacific J. Math. 115 (1984), 317–350. [23] M. Fabian, P. Habala, P. H
´
Functional Analysis and Infinite ajek, V.
dimensional Geometry 2001
Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler, , CMS数学丛书, Springer-Verlag, 纽约, . [24] M. Fabian, P. Habala, P. H´ajek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach space theory*, Springer Science+Business Media, LLC 2011. [25] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer,
Some topological and geometrical structures
in Banach spaces **387** 1987 116 ,《美国数学会回忆录》 ( ), p. [26] P. H´ajek and J. Talponen, *Note on Kadets Klee property and Asplund spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 3933–3939. [27] R. Haller, J. Langemets and R. Nadel,
Stability of average roughness octahedrality and strong diameter 2 , , , Banach J.
properties of Banach spaces with respect to absolute sums 1, 12 2018 222 239
Math. Anal., ( ), – . [28] R. Haller, K. Pirk, and T. Veeorg, *Daugavet- and delta-points in absolute sums of Banach spaces*, J. Convex Anal. 28 (2021), 41–54. [29] R. E. Huff and P. D. Morris,
Dual spaces with the Krein-Milman property have the Radon-Nikodým property, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 104–108. [30] Y. Ivakhno and V. Kadets, *Unconditional sums of spaces with bad projections*, Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. 645 (2004), 30–35. [31] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, and G. Schechtman,
Almost Fréchet differentiability of Lipschitz
mappings between infinite dimensional Banach spaces *84*, 3 2002 711 746 , Proc. London
Math. Soc. ( ), – . [32] M. Jung and A. Rueda Zoca, *Daugavet points and Δ-points in Lipschitz-free spaces*, Studia Math. 265 (2022), 37–55.[33] V. Kadets, *Some remarks concerning the Daugavet equation*, Quaestiones Math. 19 (1996), 225–235. [34] V. Kadets, *The diametral strong diameter 2 property of Banach spaces is the same as the Daugavet property*, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), 2579–2582. [35] V. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin, and D. Werner,
Banach spaces with the Daugavet property, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 855–873. [36] V. Kadets and D. Werner,
A Banach space with the Schur and the Daugavet property, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 1765–1773. [37] A. Ka
minska, H.-L. Lee, and H.-J. Tag, *Daugavet and diameter two properties in Orlicz-Lorentz spaces*, 预印本. arXiv:
https://arxiv.org/abs/ 2212 12149 1 . v C. Kuratowski, , 《数学基础》, 1, 15 (1930),
[38] *Sur les espaces complets*
301-309. [39] B. L. Lin, P. K. Lin, and S. Troyanski, *Characterizations of denting points*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 526–528.[40] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I (Sequence spaces)*, Springer-Verlag (1977). [41] G. L
´ ´ ´
Strong diameter two property and convex combinations of opez-Perez, M.
slices reaching the unit sphere **16** 2019 122
Martın, and A. Rueda Zoca, , Mediterr. J. Math., ( ), article . [42] M. Mart´ın and A. Rueda Zoca,
Daugavet property in projective symmetric tensor products of Banach spaces, Banach J. Math. Anal. 16 (2022), article 35. [43] J. F. Mena, R. Pay´a, and A. Rodr´ıguez, *Absolute subspaces of Banach spaces*, Quart. J. Math. 40 (1989), 33–37.

[44] V. Montesinos, *Drop property equals reflexivity*, Studia Math., 1, 87 (1987), 93–100. [45] K. Pirk, *Diametral diameter two properties, Daugavet-, and Δ-points in Banach spaces*, Dissertationes Mathe- maticae Universitatis Tartuensis 133 2020 10062 68458 ( ), [46] *On drop property* 1, 85 1986 27 35 1987 https://dspace.ut.ee/handle/ / S. Rolewicz, , Studia Math., ( ), – ( ). [47] S. Rolewicz, *On Δ-uniform convexity and drop property*, Studia Math., 2, 87 (1987), 181–191. [48] W. Schachermayer, *The Radon-Nikodým property and the Krein-Milman property are equivalent for strongly regular sets* **303** 1987 673 687 , Trans. Amer. Math. Soc. ( ), – . [49] W. Schachermayer, *An example concerning strong regularity and points of continuity in Banach spaces*, Lecture Notes in Math. 1332, 泛函分析, ed. by E. Odell and H. Rosenthal, 柏林 (1988). [50] R. V. Shvydkoy, *Geometric aspects of the Daugavet property*, J. Funct. Anal., 176 (2000), 198–212. [51] T. Veeorg, *Characterizations of Daugavet- and delta-points in Lipschitz-free space*, Studia Math. 268 (2023), 213–233. [52] T. Veeorg, *Daugavet- and delta-points in spaces of Lipschitz functions*, 预印本. Arxiv: https://arxiv.org/abs/ 2206 03475 . N. Weaver, (Second edition), 世界科学出版公司 Co., Inc., 里弗埃奇, NJ, [53] *Lipschitz algebras* 2018. [54] D. Werner, *Recent progress on the Daugavet property*, Irish Math. Soc. Bulletin 46 (2001), 77–97.

(Martín) Universidad de Granada, Facultad de Ciencias. Departamento de Análisis Matemático, 18071Granada, SpainORCID: 0000-0003-4502-798X

Email address: mmartins@ugr.es
URL: https://www.ugr.es/local/mmartins

(PERREAU) University of Tartu, Institute of Mathematics and Statistics, Narva mnt 18, 51009 Tartulinn, EstoniaORCID: 0000-0002-2609-5509

Email address: yoel.perreau@ut.ee

(RUEDA ZOCA) Universidad de Granada, Facultad de Ciencias. Departamento de Análisis Matemático, 18071 Granada, SpainORCID: 0000-0003-0718-1353

Email address: abrahamrueda@ugr.es*URL*:
https://arzenglish.wordpress.com