arXiv:2301.04436v1 [math.CA] 11 Jan 2023

# 两个变量的 Mittag-Leffler 函数的振荡型积分

ISROIL A. IKROMOV、MICHAEL RUZHANSKY、AKBAR R. SAFAROV*

Abstract. 本文研究含有两个变量的米塔-莱夫勒函数的振荡积分估计问题。本文的推广之处在于，我们以 Mittag-Leffler 型函数替代指数函数，从而研究振荡型积分。

Contents

1. 引言2. 预备知识 3. 辅助 1
命题 4. 主要结果的证明 致 2
谢 数据可用性 参考文献 4
7
9
9
9

## 1. Introduction

函数 $E_\alpha(z)$ 以瑞典数学家 G¨osta Magnus Mittag-Leffler（1846—1927）的名字命名，他通过幂级数定义了该函数

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \alpha\in\mathbb{C}, Re(\alpha)>0, \tag{1.1}$$

并在 1902—1905 年间发表的几篇后续短文中研究了它的性质， [18, 19, 20, 21] 这些研究与他用于发散级数的求和方法有关。

米塔-莱夫勒函数的一种经典推广，即双参数Mittag-Leffler函数，是

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}, Re(\alpha)>0, \tag{1.2}$$

Humbert 和 Agarval 于 1953年（[1,10, 11]）独立对其进行了深入研究，Dzherbashyan 于 1954年（[4, 5, 6]）也进行了研究，此外还见于 [9]。

*通讯作者。2010年数学主题分类：35D10、42B20、26D10。关键词与短语：Mittag-Leffler 函数、相位函数、振幅。所有作者对本文的撰写贡献均等。所有作者均已阅读并批准最终稿。

它具有如下性质:

$$E_{1,1}(x) = e^x, \text{and we can refer to [23] for other properties.} \tag{1.3}$$

在调和分析中，振荡积分最重要的估计之一是范德科普特引理[24, 25, 26, 34]。例如，关于具有多项式相位的振荡积分的估计，可见论文[2, 15, 29, 30, 31]。本文将指数函数替换为 Mittag-Leffler型函数，并研究振荡型积分（2.3）。论文 [26] 和 [27] 讨论了涉及 Mittag-Leffler 函数的一维积分的范德科普特引理类比结果。我们将[26] 和 [27] 的结果推广到相位具有某些简单奇点的二维积分。关于具有简单奇点的两个变量光滑相位函数所对应的 Mittag-Leffler 函数估计的类似问题，已在论文 [28] 和 [32]中讨论。

## 2. Preliminaries

定义 2.1. 以 $f$ 为相位、以 $a$ 为振幅的振荡积分是如下形式的积分

$$J(\lambda, f, a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda f(x)} dx, \tag{2.1}$$

其中 $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$。

若 $a$ 的支集位于原点的一个充分小邻域内，且 $f$ 是在 $x = 0$处的解析函数，则当 $\lambda \to \infty$ 时，以下渐近展开成立（[17]）：

$$J(\lambda, f, a) \approx e^{i\lambda f(0)} \sum_s \sum_{k=0}^{n-1} b_{s,k}(a) \lambda^s (\ln \lambda)^k, \tag{2.2}$$

其中 $s$ 属于有限个等差数列，这些数列与 $a$无关，且由负有理数组成，$b_{s,\,k}$ 是支集包含于临界集 $\{x$ 中的一个分布： $\nabla f(x) = 0\}$。

受[3], 中术语的启发，我们将 $s$的最大值（此处记为 $\alpha$ ）称为 $f$的增长指标，或原点处的振荡指标；相应的 $k$ 值称为重数。

更确切地说，解析相位在临界点处的振荡指标的重数，是具有如下性质的最大数目 $k$ ：对于临界点的任意邻域，都存在一个支集包含于该邻域内的振幅，使得渐近级数（2.2）中的系数 $b_{s,\,k}(a)$ 不等于零。振荡指标的重数记为 $m$ （见 [3]）。

设 $f$ 是定义在$\mathbb{R}^2$ 中原点邻域上的光滑实值函数，满足 $f(0,0) = 0$、 $\nabla f(0,0) = 0$, 并考虑相应的泰勒级数

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

以原点为中心的 $f$。集合

$$\Im(f) := \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : c_{jk} = \frac{1}{j!k!} \partial_{x_1}^j \partial_{x_2}^k f(0,0) \neq 0\}$$

称为 $f$ 在 (0, 0) 处的泰勒支撑。我们将始终假设

$$\Im(f) \neq \emptyset,$$

也就是说，函数 $f$ 在原点处是有限型的。如果 $f$ 是实解析的，因此泰勒级数在原点附近收敛于 $f$，这就意味着 $f \neq 0$. 。函数 $f$ 在原点处的牛顿多面体 $\aleph(f)$ 定义为所有象限 $(j,k) + \mathbb{R}^2_+$ 的并集的凸包，其中 $(j,k) \in \Im(f)$。按照瓦尔琴科的意义，与之关联的牛顿图$\aleph_d(f)$ [33] 是牛顿多面体的所有紧致面的并集；这里，面是指一条边或一个顶点。

我们将使用坐标 $(t_1, t_2)$ 表示包含牛顿多面体的平面中的点，以便将该平面与 $(x_1, x_2)$-平面区分开来。

按照瓦尔琴科的意义，牛顿多面体与原点之间的距离 $d = d(f)$ 由点 $(d, d)$ 的坐标 $d$ 给出，该点是角平分线$t_1 = t_2$ 与牛顿多面体边界的交点。

$f$ 的牛顿多面体的主面 $\pi(f)$ 是包含点 $(d, d)$ 的最小维数面。不同于 [33]，中的记法，我们将该级数称为

$$f_p(x_1, x_2) := \sum_{j,k \in \pi(f)} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

$f$ 的主部。如果 $\pi(f)$ 是紧的，则 $f_\pi$ 是混合齐次多项式；否则，我们将 $f_\pi$ 视为形式幂级数。

请注意，牛顿多面体与原点之间的距离取决于表示 $f$ 时所选用的局部坐标系。本文所说的原点处的局部解析（分别为光滑）坐标系，是指在原点附近定义且保持 0 不变的解析（分别为光滑）坐标系。如果我们研究光滑函数 $f$，则始终考虑光滑坐标系；如果 $f$ 是解析的，通常则限定使用解析坐标系（尽管正如我们将看到的，这对于我们要研究的问题并非必需）。解析（分别为光滑）函数 $f$ 的高度定义为

$$h := h(f) := sup\{d_x\},$$

其中，上确界取遍原点处所有局部解析（分别为光滑）坐标系 $x$，而 $d_x$ 表示坐标系 $x$.下牛顿多面体与原点之间的距离

若给定坐标系 $x$ 满足 $h(f) = d_x$.，则称其适配于 $f$

设 $\pi$ 为主面。我们假设 $\pi$ 是一个点或一条紧边，此时 $f_\pi$ 是一个加权齐次多项式。用 $\nu$ 表示 $f_\pi$ 在原点处单位圆上的根的最大阶数，因此

$$\nu := \max_{S^1} ord(f_\pi).$$

若存在一个坐标系 $x$ 使得 $\nu = d_x$，则令 $m = 1$. 。可以证明，在这种情况下，$x$ 适配于 $f$（见 [12]）。否则，取 $m = 0$。我们沿用 A. N. Varchenko 的说法，将 $m$ 称为牛顿多面体的重数。

在 A. N. Varchenko 的经典论文中，[33]，他根据高度得到了振荡积分的锐利估计。此外，在论文 [13] 中，高度被用于获得与光滑曲面相关的极大算子的锐利上界

$\mathbb{R}^3$。结果表明，类似的量也可用于含米塔-莱夫勒函数的振荡积分。

我们考虑如下具有相位 $f$ 和振幅 $\psi$ 的积分，其形式为

$$I_{\alpha,\beta} = \int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))\psi(x)dx, \tag{2.3}$$

其中 $0 < \alpha < 1$， $\beta > 0$， $U$ 是原点的一个充分小的邻域。我们特别关注 $I_{\alpha,\ \beta}$ 当 $\lambda$ 较大时的行为，因为当 $\lambda$ 较小时，该积分有界。特别地，如果 $\alpha = 1$ 且 $\beta = 1$，我们得到振荡积分（2.1）。

本文的主要结果如下。

定理 2.2. 设 $f$ 是定义在原点的一个充分小邻域内的关于两个变量的光滑有限型函数，且设 $\psi \in C_0^\infty(U)$。

设 $h$ 为函数 $f$ 的函数高度，并设 $m = 0$，1 为其牛顿多面体的重数。如果 $0 < \alpha < 1$、 $\beta > 0$、 $h > 1$，且 $\lambda \gg 1$，则有估计式

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x_1, x_2))\psi(x)dx\right| \le \frac{C|\ln\lambda|^m \|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}. \tag{2.4}$$

若 $0 < \alpha < 1, \beta > 0, h = 1$ 和 $\lambda \gg 1$，则有以下估计

$$\left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x_1, x_2))\psi(x)dx\right| \le \frac{C|\ln\lambda|^2 \|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda}, \tag{2.5}$$

其中常数 $C$ 与相位、振幅和 $\lambda$ 无关。

## 3. Auxiliary statements

我们首先回顾一些有用的性质。

命题 3.1. 若 $0 < \alpha < 2, \beta$ 是任意实数， $\mu$ 满足 $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$，则存在 $C > 0$，使得

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \le \frac{C}{1 + |z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \le |\arg(z)| \le \pi. \tag{3.1}$$

见 [4], [9], [23]。

命题 3.2. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个开有界子集，且 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，使得对于所有 $\lambda \gg 1$ 以及某个正的 $\delta \ne 1$，有

$$\left|\int_\Omega e^{i\lambda f(x)}dx\right| \le C|\lambda|^{-\delta}|\ln\lambda|^m, \tag{3.2}$$

其中 $m \ge 0$. 于是，我们有

$$\left|x \in \Omega : |f(x)| \le \varepsilon\right| \le C_\delta \varepsilon^\delta |\ln\varepsilon|^m, \quad for\ \delta < 1,$$

$$for\ \ 0 < \varepsilon \ll 1, and\ for\ \delta > 1, |x \in \Omega : |f(x)| \le \varepsilon| \le C_\delta \varepsilon\ ,$$

$$for\ \delta = 1, \quad \left|x \in \Omega : |f(x)| \le \varepsilon\right| \le C_\delta \varepsilon |\ln\varepsilon|^{m+1},$$

*where* $C_\delta$ 仅取决于 $\delta$, $|A|$ 表示集合 $A$. 的勒贝格测度。参见 [7 ].

证明。为方便读者，我们给出命题的一个独立证明3.2。我们考虑一个偶的非负光滑函数

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } |x| \le 1, \\ 0, & \text{when } |x| \ge 2. \end{cases}$$

对于 Ω 的示性函数，其中 $\Omega \subset U$，有如下不等式成立

$$|x \in \Omega : |f(x)| \le \varepsilon| = \int_\Omega \chi_{[0,1]}\left(\frac{|f(x)|}{\varepsilon}\right) dx \le \int_\Omega \omega\left(\frac{f(x)}{\varepsilon}\right) dx.$$

现在我们将使用傅里叶反演公式，并将最后一个积分改写为

$$\int_\Omega \omega\left(\frac{f(x)}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \check{\omega}(\xi) e^{i\xi\frac{f(x)}{\varepsilon}} d\xi dx.$$

由于 $\check{\omega}(\xi)$ 是施瓦茨函数，我们可以使用富比尼定理并改变积分次序。因此有

$$\int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \check{\omega}(\xi) e^{i\xi\frac{f(x)}{\varepsilon}} d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\omega}(\xi) \int_\Omega e^{i\xi\frac{f(x)}{\varepsilon}} dx d\xi.$$

我们对内层积分使用不等式（3.2），得到

$$\left|\int_\Omega e^{i\xi\frac{f(x)}{\varepsilon}} dx\right| \le \frac{C|\ln(2+\frac{\xi}{\varepsilon})|^m}{(1+|\frac{\xi}{\varepsilon}|)^\delta}.$$

由于 $\check{\omega}(\xi)$ 是施瓦茨函数，我们还有

$$|\check{\omega}(\xi)| \le \frac{C}{1+|\xi|}.$$

So

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C\check{\omega}(\xi)|\ln(2+\frac{\xi}{\varepsilon})|^m}{(2+|\frac{\xi}{\varepsilon}|)^\delta} d\xi\right| \lesssim \int_0^\infty \frac{2C|\ln(\frac{\xi}{\varepsilon})|^m}{(1+|\xi|)(2+|\frac{\xi}{\varepsilon}|)^\delta} d\xi.$$

现在我们作变量代换 $\xi = \eta\varepsilon$，得到

$$\int_0^\infty \frac{|\ln(\frac{\xi}{\varepsilon})|^m}{(1+|\xi|)(2+|\frac{\xi}{\varepsilon}|)^\delta} d\xi = \int_0^\infty \frac{\varepsilon|\ln\eta|^m}{(1+|\varepsilon\eta|)(2+|\eta|)^\delta} d\eta.$$

现在我们针对 $\delta$ 的不同取值估计最后一个积分。

若 $\delta < 1$，则有

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon|\ln\eta|^m}{(1+|\varepsilon\eta|)(2+|\eta|)^\delta} d\eta \le C\varepsilon\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta} + C\varepsilon\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{\varepsilon\eta^{\delta+1}}.$$

我们表示 $\frac{1}{(2+\eta)^\delta} = \frac{1}{\eta^\delta}\frac{1}{(1+\frac{2}{\eta})^\delta} = \frac{1}{\eta^\delta} + O(\frac{1}{\eta^{\delta+1}})$。因此

$$C\varepsilon\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta} = \varepsilon\int_0^2 \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta} + \varepsilon\int_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta}.$$

通过分部积分，我们得到

$$\varepsilon\int_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta} \le \varepsilon\int_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{\eta^\delta} \le C\varepsilon^\delta|\ln\varepsilon|^m.$$

当 $\delta<1$ 时，积分 $\int_0^2 \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{(2+\eta)^\delta}$ 和 $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty \frac{|\ln\eta|^m d\eta}{\varepsilon\eta^{\delta+1}}$ 收敛。

若 $\delta>1$，则可直接得到

$$\left|\int_0^\infty \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{(1+|\varepsilon\eta|)(2+|\eta|)^\delta}d\eta\right|\le C\varepsilon.$$

若 $\delta=1$，则假设 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，可得 $|\varepsilon\eta|<1$（当 $|\eta|<2$ 时），接着将积分写成三个积分之和，并得到

$$\left|\int_0^\infty \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{(1+|\varepsilon\eta|)(1+|\eta|)}d\eta\right|\le\left|\int_0^2 C\varepsilon|\ln\eta|^m d\eta\right|+$$
$$\left|\int_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{\eta}d\eta\right|+\left|\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{\eta}d\eta\right|.$$

于是我们有

$$\left|\int_0^2 C\varepsilon|\ln\eta|^m d\eta\right|\le C\varepsilon,$$

经过简单计算，我们得到

$$\left|\int_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{\eta}d\eta\right|\le C\varepsilon|\ln\varepsilon|^{m+1}.$$

我们多次使用分部积分公式，得到

$$\left|\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty \frac{C\varepsilon|\ln\eta|^m}{\eta}d\eta\right|\le C\varepsilon|\ln\varepsilon|^m,$$

从而完成证明。 □

由命题 3.2 可得以下推论。

推论 3.3. 设 $f(x_1,x_2)$ 是一个光滑函数，满足 $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=0$，且 $h$ 是函数 $f(x_1,x_2)$ 的高度，其牛顿多面体的重数为 $m=0,1$。另设 $a(x)=\begin{cases}1,\end{cases}$

当 $|x|\le\sigma$ 时为 0，当 $|x|\ge 2\sigma$ 时为 $\sigma>0$，且 $a(x)\ge 0$，其中 $a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$。若对所有实数 $\lambda\gg 1$ 以及任意正的 $\delta\ne 1$，下列不等式成立

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda f(x)}a(x)dx\right|\le C|\lambda|^{-\delta}|\ln\lambda|^m, \tag{3.3}$$

则有

$$||x|\le\sigma:|f(x)|\le\varepsilon|\le C\varepsilon^\delta|\ln\varepsilon|^m,$$

其中 $m\ge 0$. 见 [8, 12, 14, 22]。

推论 3.4. 设 $f(x_1,x_2)$ 是一个光滑函数，满足 $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=0$，并设 $\Omega$ 是原点周围一个足够小的紧集。再设 $h$ 是函数 $f(x_1,x_2)$ 的高度，且 $m=0,1$ 是其牛顿多面体的重数。那么对于所有 $0<\varepsilon\ll 1$，都有

$$|x\in\Omega:|f(x)|\le\varepsilon|\le C\varepsilon^{\frac{1}{h}}|\ln\varepsilon|^m,$$

其中 $h$ 是 $f$ 的高度，$m$ 是其重数 [8]。

## 4. Proof of the main result

定理证明 **2.2**。 至于 $\lambda < 2$ 积分 (2.3) 只是有界的情形，我们考虑 $\lambda \geq 2$。不失一般性，我们可以考虑在 $U$.利用不等式 (3.1)，可得

$$|E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))| \leq \frac{C}{1+\lambda|f(x)|}. \tag{4.1}$$

接下来我们对积分（4.1）使用（2.3），得到

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\int_U E_{\alpha,\beta}(i\lambda f(x))\psi(x)dx\right| \leq C\int_U \frac{|\psi(x)|dx}{1+\lambda|f(x)|}. \tag{4.2}$$

现在，我们分别在集合 $\Omega_1 := \Omega \cap \{\lambda|f(x_1,x_2)| < M\}$ 和 $\Omega_2 := \Omega \cap \{\lambda|f(x_1,x_2)| \geq M\}$ 的并集上表示积分 $I_{\alpha,\beta}$，其中 $M$ 是一个正实数。

我们分别估计集合 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$, 上的积分 $I_{\alpha,\beta}$，

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq C\int_U \frac{|\psi(x)|dx}{1+\lambda|f(x)|} = J_1 + J_2 := C\int_{\Omega_1} \frac{|\psi(x)|dx}{1+\lambda|f(x)|} + C\int_{\Omega_2} \frac{|\psi(x)|dx}{1+\lambda|f(x)|}.$$

首先，我们估计集合 $\Omega_1$上的积分。利用论文（[17]第 31 页）中的结果（另见推论 3.4），我们得到

$$|J_1| = C\int_{\Omega_1} \frac{|\psi(x)|dx}{1+\lambda|f(x)|} \leq \frac{C|\ln\lambda|^m\|\psi\|_{L^\infty(\overline{\Omega_1})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}.$$

引理 4.1。设 $f \in C^\infty$ 和 $h$ 为函数 $f$的高度， $m = 0$，1 为其牛顿多面体的重数。对于任意支集充分小的光滑函数 $a = a(x,y)$，当 $h > 1$ 时，以下不等式成立

$$I := \int_{\{|f(x,y)|\geq\frac{M}{\lambda}\}} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|}dxdy \leq \frac{C|\ln\lambda|^m\|a\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}, \tag{4.3}$$

其中 $\operatorname{supp}\{a(x,y)\} = U$.

证明。设 $h > 1$。考虑集合

$$A_k = \left\{x \in U : \frac{2^k}{\lambda} \leq |f(x)| \leq \frac{2^{k+1}}{\lambda}\right\}.$$

对于较小值集合的测度，我们使用引理 $1'$（另见论文 [16] 中的推论3.4），于是有

$$\mu\left(|f(x)| \leq \frac{2^{k+1}}{\lambda}, x \in U\right) \leq C\left(\frac{2^{k+1}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{h}}\left(\ln\left|\frac{\lambda}{2^{k+1}}\right|\right)^m.$$

Let

$$I_k := \int_{A_k} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|}dxdy.$$

对于该积分

$$\sum_{2^k\leq\lambda|f(x)|\leq 2^{k+1}} I_k = \int_{\Omega_2} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|}dxdy,$$

我们得到以下估计：

$$|I_k| = \left| \int_{A_k} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|f(x,y)|} dxdy \right| \le C\|a\|_{L^\infty(\overline{U})} \left(\frac{2^{k+1}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{h}} \left| \ln \frac{2^{k+1}}{\lambda} \right|^m 2^{-k}.$$

由此我们得到 $I_k$ 的和，并通过估计积分 $I$，得到

$$I \le \|a\|_{L^\infty(\overline{U})} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \le \|a\|_{L^\infty(\overline{U})} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{h}} \left| \ln \frac{2^{k+1}}{\lambda} \right|^m 2^{-k}$$

$$\le \|a\|_{L^\infty(\overline{U})} \frac{|\ln\lambda|^m}{\lambda^{\frac{1}{h}}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k+1}{h}-k} k^m.$$

由于 $h > 1$，最后一个级数收敛，从而证明了引理。 □

注记 4.2. 考虑情形 $h = 1$。当且仅当 $h = 1$ 时，该光滑函数在原点处有非退化临界点。由于 $f(x, y)$ 是一个满足$\nabla f(0, 0) = 0$的光滑函数，根据莫尔斯引理，我们有 $f \sim x^2 \pm y^2$。因此，在这种情形下，我们估计两个集合 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$，其中 $\Delta_1 := \{(x, y) : \lambda|x^2 \pm y^2| \le M, |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 和$\Delta_2 := \{(x, y) : \lambda|x^2 \pm y^2| > M, |x| \le 1, |y| \le 1\}$。首先考虑在集合 $\Delta_1$ 上的积分。于是有

$$\left| \int_{\Delta_1} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|x^2 \pm y^2|} dxdy \right| \le C\|a\|_{L^\infty(\Delta_1)} \left| \int_{\Delta_1} dxdy \right|.$$

现在我们对最后一个积分进行估计，得到

$$\left| \int_{\lambda|x^2+y^2|\le M} dxdy \right| \le \frac{C}{\lambda}.$$

接下来我们估计集合 $\{|x^2 - y^2| \le \varepsilon M\}$ 的测度，其中 $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$。为简便起见，令 $M = 1$，则有

$$\left| \int_{|x^2-y^2|\le\varepsilon M} dxdy \right| \le C \left| \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} dy \int_{\sqrt{y^2-\varepsilon}}^{\sqrt{y^2+\varepsilon}} dx \right| = \left| \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} \left( \sqrt{y^2+\varepsilon} - \sqrt{y^2-\varepsilon} \right) dy \right| =$$

$$= \left( \frac{y}{2}\sqrt{y^2+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \ln|y + \sqrt{y^2+\varepsilon}| \right) \Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} - \left( \frac{y}{2}\sqrt{y^2-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} \ln|y + \sqrt{y^2-\varepsilon}| \right) \Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{\sqrt{1-\varepsilon}+1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \ln|\sqrt{\varepsilon}(1+\sqrt{2})| - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\sqrt{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \ln|\sqrt{1-\varepsilon} + \sqrt{1-2\varepsilon}| + \frac{\varepsilon}{2} \ln\sqrt{\varepsilon}| \right) \right| \le C\varepsilon \ln\varepsilon.$$

现在我们考虑在集合 $\Delta_2$ 上的积分。在这种情况下，我们将变量换成极坐标系，经过简单计算可得

$$\left| \int_{\{\lambda|x^2+y^2|\ge M\}} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|x^2+y^2|} dxdy \right| \le \frac{C|\ln\lambda|\|a\|_{L^\infty(\Delta_2)}}{\lambda} \tag{4.4}$$

and

$$\left| \int_{\{\lambda|x^2-y^2|\ge M\}} \frac{a(x,y)}{1+\lambda|x^2-y^2|} dxdy \right| \le \frac{C|\ln\lambda|^2\|a\|_{L^\infty(\Delta_2)}}{\lambda}. \tag{4.5}$$

现在我们继续证明定理 2.2。设 $h > 1$。我们对积分 $J_1$使用命题 3.2 ，得到

$$|J_1| \leq \frac{C|\ln\lambda|^m \|a\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}.$$

考虑积分 $J_2$。若 $h > 1$，则利用引理4.1 可得

$$|J_2| \leq \frac{C|\ln\lambda| \|a\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda^{\frac{1}{h}}}.$$

若 $h = 1$，利用注4.2 可得不等式（2.5）。证明完毕 .

定理2.2 的证明表明，若 $h = 1$，则可以得到一个更精确的结果。

命题 4.3. 若 $h = 1$ 和 $f$ 在点 (0,0) 处有一个极值点（则 $f$ 与 $x_1^2 + x_2^2$ 或 $-x_1^2 - x_2^2$微分同胚等价），则有

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \frac{C|\ln\lambda| \|\psi\|_{L^\infty(\overline{U})}}{\lambda},$$

对于所有 $\lambda \geq 2$。

利益冲突声明

本研究不存在任何利益冲突。

## Acknowledgements

第二作者部分获得了 FWO Odysseus 1 项目资助 G.0H94.18N：分析与偏微分方程，以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem 计划（资助编号 01M01021）的支持，同时还获得了 EPSRC 项目资助 EP/R003025/2。

数据可用性。本手稿没有相关数据。

## References

[1] R. P. Agarwal，关于 P. Humbert 先生的一篇短文，巴黎科学院院刊，236，2031-2032（1953年）。[2] G.I. Arkhipov，A. A. Karatsuba，V. N. Chubarikov，《多重三角和理论》，莫斯科：Nauka，1987年，第357页。[3]V. I. Arnold，S. M. Gusein-Zade，A. N. Varchenko，《可微映射的奇点》，Birkhauser，波士顿、巴塞尔、斯图加特，1985年。[4] M. M. Dzherbashyan，关于 Mittag-Leffler 型函数的渐近展开，亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院学报，19，65-72（1954年，俄文）。[5] M. M. Dzherbashyan，关于在给定射线上连续函数的积分表示（傅里叶积分的推广），苏联科学院通报，数学辑，18，427-448（1954年，俄文）。[6] M. M. Dzherbashyan，关于广义积分变换的阿贝尔求和，亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院通报，物理-数学、自然科学与技术科学辑，7(6)，1-26（1954年，俄文）。[7] J. Green，通过次水平集估计对凸相位的振荡积分作一致估计，arXiv：2111.05395v1。[8] M. Greenblat，振荡积分衰减、次水平集增长与牛顿多面体，《数学年刊》，2010年，第346卷，第4期，第857-890页。[9] R. Gorenflo，A. Kilbas，F. Mainardi，S. Rogosin，《Mittag-Leffler 函数、相关主题及应用》，施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林、海德堡（2014年）。[10] P. Humbert，关于 Mittag-Leffler 函数的一些结果，巴黎科学院院刊，236，1467-1468（1953年）。

[11]P. Humbert，R. P. Agarwal，关于 Mittag-Leffler 函数及其若干推广，《数学科学通报》（第二辑），77，180-185（1953年）。[12] I. A. Ikromov 和 D. Müller，关于适配坐标系，《美国数学会汇刊》，2011年，363(6)，第2821—2848页。[13] I. A. Ikromov，M. Kempe，D. Müller，关于超曲面相关的极大函数估计及调和分析中的相关问题，《数学学报》，2010年，204（2），151–271。[14] I. A. Ikromov 和 D. Müller，《三维超曲面的傅里叶限制与牛顿多面体》，《数学年刊研究》第194卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿和牛津，2016年。[15] I. A. Ikromov，二维三角积分的不变估计，《苏联数学文摘》，76（1990），473–488。[16] V. N. Karpushkin，抛物型或双曲相位振荡积分的一致估计，载于《I. G. Petrovsky 研讨会论文集》第9卷，1983年，第3-39页。（俄文）[17] V. N. Karpushkin，$\mathbb{R}^2$中的振荡积分一致估计，苏联科学院院刊，254（1980），第1期，28–31页。（俄文）[18] M. G. Mittag-Leffler，关于拉普拉斯-阿贝尔积分，巴黎科学院院刊，135，937–939（1902年）。[19] M. G. Mittag-Leffler，拉普拉斯-阿贝尔积分的一种推广，巴黎科学院院刊，136，537-539（1903年）。[20] M. G. Mittag-Leffler，关于新函数 $E_\alpha(x)$，巴黎科学院院刊，137，554-558（1903年）。[21] M. G. Mittag-Leffler，关于函数 $E_\alpha(x)$，意大利皇家林琴科学院院刊（第五辑），13，3-5（1904年）。[22] D. H. Phong 和 E. M. Stein，牛顿多面体与振荡积分算子，《数学学报》179(1)，1997年，105-152页。[23] I. Podlubny，《分数阶微分方程》，学术出版社，纽约，1999年。[24] M. Ruzhansky，多变量函数的逐点范德科普特引理，《泛函分析及其应用》，43（2009），第1期，75–77页。[25] M. Ruzhansky，范德科普特引理中的多维衰减，《数学研究》，208（2012），第1期，1–9页。[26] M. Ruzhansky，B. Torebek，米塔-莱夫勒函数的范德科普特引理，《分数阶微积分与应用分析》，23（6）（2021），1663–1677页。[27]M. Ruzhansky，B. Torebek，米塔-莱夫勒函数的范德科普特引理。II.$\alpha-$方向，《数学科学通报》，171（2021），103016，共23页。[28] M. Ruzhansky，A. R. Safarov，G. A. Khasanov，四次齐次多项式相位振荡积分的一致估计，《分析与数理物理》，12(130)（2022）。[29] A. Safarov，二维振荡积分的不变估计，《数学札记》，104，2018年，第293–302页。[30] A. Safarov，关于多项式相位振荡积分的不变估计，《西伯利亚联邦大学数学与物理学报》，9（2016），第102–107页。[31] A. Safarov，关于超曲面上傅里叶变换限制问题，《俄罗斯数学》，63（4），第57-63页。[32] A. R. Safarov，具有依赖于两个变量的光滑相位的 Mittag-Leffler 函数估计，《西伯利亚联邦大学数学与物理学报》，15(4)（2022），第459–466页。[33] A. N. Varchenko，牛顿多面体与振荡积分估计，《泛函分析及其应用》，第10卷，第175–196页（1976年）。[34] Van der Korput，关于驻相位方法，《Compositio Mathematica》，第1卷，1934年，第15-38页。

Isroil A. Ikromov
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan
Olmazor district, University 46, Tashkent, Uzbekistan
Samarkand State UniversityDepartment of Mathematics,
15 University BoulevardSamarkand, 140104, Uzbekistan电子邮箱:
ikromov1@rambler.ru

Michael RuzhanskyDepartment of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Krijgslaan 281,
Ghent, Belgium, School of Mathematical Sciences,
Queen Mary University of London, United Kingdom电子邮箱:
michael.ruzhansky@ugent.be

Akbar R.Safarov
Uzbek-Finnish Pedagogical InstituteSpitamenshox 166,
Samarkand, UzbekistanSamarkand State University
Department of Mathematics, 15 University Boulevard
Samarkand, 140104, Uzbekistan电子邮箱:
safarov-akbar@mail.ru