arXiv:2301.04464v2 [math.NT] 3 Feb 2023

ThePUMP Journal of Undergraduate Research 6 (2023 年), 96–101

具有相同因子个数的连续整数序列

作者： Vlad-Titus Spătaru

摘要

我们的目标是给出小于 N 且具有相同因子个数的最长连续整数序列长度 ℓ_N 的上界。我们以初等方法证明，$\log \ell_N \ll (\log N \log\log N)^{\lambda}$，其中 $\lambda = 1/2$。随后利用雅各布斯塔尔函数的估计，将结果改进为 $\lambda = 1/3$。

1. 引言

令 $d(n)$ 表示 n 的正因数个数。方程 $d(n) = d(n+k)$ 得到了广泛研究。Spiro [Spi81] 证明了当$k = 5040$时，该方程有无穷多个解。随后，Heath-Brown [HB84]证明了 $k = 1$的情形，而 Pinner [Pin97]最终证明，对于 k 的所有取值，该方程都产生无穷多个解。

由于 $d(n)$ 无限多次等于 $d(n+1)$，人们自然会问：具有相同因子个数的连续整数最多可以有多少个。Erd˝os 和 Mirsky [EM52]猜想，这样的整数序列可以任意长。但他们无法对这类序列的长度给出任何估计：“一个相关问题是估计连续整数中最长的一段，使得 $\leqslant x$ 其中每个整数都具有相同的因子个数。这个问题似乎异常困难，而且我们 [Erd˝os 和 Mirsky] 尚未能在这个问题上取得任何进展。”

我们的主要目标是给出 ℓ_N 所讨论数列长度的上界。在第2节中，我们以初等方法估计 $d(n)$ 和 $\omega(n$函数的数量级，并得到以下估计：

Theorem 1. 令 ℓ_N 表示小于 N 的、具有相同因子个数的连续整数中最长一段的长度。那么，

$$\log \ell_N \ll \sqrt{\log N \cdot \log\log N}.$$

关键词：因数计数函数，连续等因数整数。2020 年数学主题分类：主要分类：11A25、11N37。

随后，在第 3 节中，我们基于素数定理给出定理 1 的一个更简洁的证明，并得到定理 1 的以下显式形式:

$$\log \ell_N \leqslant \sqrt{(1/2+o(1))\log N \log\log N}.$$

最后，在第 4 节中，我们利用由布朗筛法推导出的雅各布斯塔尔函数估计，证明定理 1 的一个更强版本。我们得到如下结果:

THEOREM 2. 设 ℓ_N 表示小于 N 且具有相同因子个数的连续整数中，最长整数段的长度。那么，

$$\log \ell_N \ll \sqrt[3]{\log N \cdot \log\log N}.$$

2. 定理 1 的一个初等证明

在证明定理 1时，我们将使用以下引理，其中第一个引理将在 [Far09] 中以初等方式证明，第二个引理则是梅滕斯界。

LEMMA 1. 设 n 为一个正整数。那么，$\operatorname{lcm}(1,2,\ldots,n+1) \geqslant 2^n$.

LEMMA 2. 不超过 n 的素数倒数之和满足

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p} = \log\log n + M + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \ll \log\log n.$$

注意，只需证明定理1 对足够大的 N成立。假设存在 $k>2$ 个小于 N的连续整数，它们的因子个数相同。设这些整数为 $n+1$， $n+2$，……， $n+k$并记

$$d(n+1) = d(n+2) = \cdots = d(n+k) = D.$$

我们首先给出 D关于 k的估计。为简便起见，令 $K = \lfloor \log_2 k \rfloor$。

由于 $k \geqslant 2^K$，模 2^K的所有剩余类都属于 $n+1$、 $n+2$、……、 $n+k$。因此，对所有$1 \leqslant i \leqslant K-1$，都存在某个 $1 \leqslant t_i \leqslant k$ 使得 $n+t_i \equiv 2^i \bmod 2^K$。于是，$\nu_2(n+t_i) = i$，所以 $i+1$ 整除 $d(n+t_i) = D$。

因此， D 能被 lcm(1、2、……、 K) 整除。利用引理1，我们推得

$$D \geqslant \operatorname{lcm}(1,2,\ldots,K) \geqslant 2^{K-1}.$$

回想一下， $K = \lfloor \log_2 k \rfloor \geqslant \log_2 k - 1$，因此 $D \geqslant k/4$。

令 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子个数。任取 $1 \leqslant l \leqslant k$ 。由于 $n+l \leqslant N$，可得对所有素数 p， $\nu_p(n+l) \leqslant \log_p N \leqslant \log_2 N$。因此，

$$D = d(n+l) = \prod_p (\nu_p(n+l)+1) \leqslant \prod_{p\mid n+l} (\log_2 N + 1) = (\log_2 N + 1)^{\omega(n+l)}.$$

取对数可得 $\omega(n+l) \geqslant \log D/\log(\log_2 N+1)$。此外，注意到一个素数 p至多能整除 $\lceil k/p\rceil \leqslant k/p+1$ 个数，这些数来自 $n+1,\ldots,\ n+k$。因此，利用引理 2，可得

$$\omega((n+1)\cdots(n+k)) \geqslant \sum_{i=1}^{k}\omega(n+i) - \sum_{p\leqslant k}\frac{k}{p} \geqslant \frac{k\log D}{\log(\log_2 N+1)} - C_1 k\log\log k,$$

对于某个适当的常数 C_1。此外，我们将记 $\log(\log_2 N+1) \leqslant C_2\log\log N$，其中 C_2 是某个常数。回想一下， $D \geqslant k/4$，因此我们有

$$\omega((n+1)\cdots(n+k)) \geqslant \frac{k\log(k/4)}{C_2\log\log N} - C_1 k\log\log k. \tag{1}$$

将方程 1 的右边写作 $k\cdot f_N(k)$。显然，若 $\omega(a) \geqslant b$，则 $a \geqslant b!$ 将这一观察应用于方程 1，可得 $(n+1)\cdots(n+k) \geqslant \lceil k\cdot f_N(k)\rceil!$ 此外，由于$N^k \geqslant (n+1)\cdots(n+k)$，应用著名不等式 $\log t! \geqslant t\log t - t$，我们有

$$\begin{aligned} k\log N &\geqslant \log\left((n+1)\cdots(n+k)\right) \geqslant \log\left(\lceil k\cdot f_N(k)\rceil!\right) \\ &\geqslant k\cdot f_N(k)\cdot\log(k\cdot f_N(k)) - k\cdot f_N(k). \end{aligned} \tag{2}$$

最后，将方程 2除以 k，我们得到

$$\log N \geqslant f_N(k)\cdot\log(k\cdot f_N(k)) - f_N(k). \tag{3}$$

定义区间 $I_N = [\exp(C_1\cdot C_2\cdot\log\log N)\ \ \infty)$。运用标准论证，可以推知 f_N 在 I_N 上递增。

为导出矛盾，假设 $k > \exp\left(C\sqrt{\log N\log\log N}\right)$，其中$C > \max(\sqrt{C_2}, C_1\cdot C_2)$。首先注意到，由于 $\log N > \log\log N$且 $C > C_1\cdot C_2$，因此 $\exp\left(C\sqrt{\log N\log\log N}\right)$和 k属于 I_N。因此，我们有

$$\begin{aligned} f_N(k) &> f_N\left(\exp\left(C\sqrt{\log N\log\log N}\right)\right) \\ &= \frac{C}{C_2}\sqrt{\frac{\log N}{\log\log N}} - \frac{\log 4}{C_2\log\log N} - C_1\log\left(C\sqrt{\log N\log\log N}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

将方程 4 视为 N中的函数后，很明显，当 N（大于某个 N_1）时，我们也有 $f_N(k) > e$。在下文中，我们假设 $N > N_1$。

由于 $f_N(k) > e$，由方程 3可知，$\log N \geqslant f_N(k)\cdot\log k$。此外，应用方程 4 以及对 k的估计，并分离出 $\log N$这一项，可得

$$\frac{C\log 4}{C_2}\sqrt{\frac{\log N}{\log\log N}} + C_1 C\sqrt{\log N\log\log N}\log\left(C\sqrt{\log N\log\log N}\right) \geqslant \left(\frac{C^2}{C_2}-1\right)\log N.$$

回想一下，$C > \sqrt{C_2}$，因此当 N(大于某个N_2) 足够大时，后一个不等式显然不成立，因为左侧渐近地远小于 log N。因此，定理 1对 $N > \max(N_1, N_2)$ 和 $C > \max(\sqrt{C_2}, C_1 \cdot C_2)$ 成立。

3. 定理 1的显式形式

令 $\Omega(n)$ 表示 n 的素因子个数，计入重数。注意，对所有正整数 n，$2^{\omega(n)} \leqslant d(n) \leqslant 2^{\Omega(n)}$。此外，我们有以下估计：

LEMMA 3. 不超过 n 的素数的乘积 $n\#$ 满足 $\log n\# \sim n$。

LEMMA 4. 对不超过 n 的素数取 $1/\log p$ 的和，满足 s

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{\log p} = \frac{n}{(\log n)^2} + O\left(\frac{n \log\log n}{(\log n)^3}\right) = o(1) \cdot \frac{n}{\log n}.$$

令 M 为满足 $M\# \leqslant k$ 的最大正整数。则存在 $1 \leqslant m \leqslant k$，使得 $M\#$ 整除 $n+m$。因此，对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$，我们有

$$2^{\Omega(n+i)} \geqslant d(n+i) = d(n+m) \geqslant d(M\#) \geqslant 2^{\omega(M\#)} = 2^{\pi(M)},$$

因此 $\Omega(n+i) \geqslant \pi(M)$。由此可得 $\Omega(n+1) + \Omega(n+2) + \cdots + \Omega(n+k) \geqslant k\pi(M)$。

固定一个素数 $p \leqslant k$。那么，对于每个指数 $t \leqslant \log_p N$，在 $n+1, n+2, \ldots, n+k$ 中，至多有 $\lceil k/p^t \rceil \leqslant k/p^t + 1$ 个数能被 p^t 整除。此外，若 $t > \log_p N$，则 $p^t > N$，因此 $n+1, n+2, \ldots, n+k$ 中没有数能被 p^t 整除。

按照 勒让德定理中的同一种双重计数技巧，我们可以推知

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_p(n+i) \leqslant \sum_{t=1}^{\lfloor \log_p N \rfloor} \left(1 + \frac{k}{p^t}\right) < \frac{\log N}{\log p} + \frac{k}{p-1}. \tag{5}$$

现在，注意到 $n+i$ 至多有 $\log_k N$ 个大于 k的素因子（包括重数）。结合这一观察与等式 5 以及引理 2 和4，可得

$$\begin{aligned} k\pi(M) &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \Omega(n+i) = \sum_{p>k} \sum_{i=1}^{k} \nu_p(n+i) + \sum_{p \leqslant k} \sum_{i=1}^{k} \nu_p(n+i) \\ &\leqslant \frac{k \log N}{\log k} + \sum_{p \leqslant k} \left(\frac{\log N}{\log p} + \frac{k}{p-1}\right) = (1+o(1))\frac{k \log N}{\log k} + O(k \log\log k). \end{aligned} \tag{6}$$

由引理 3 和素数定理可得 $\pi(M) \sim \log k / \log\log k$。此外，注意到 $k \log\log k = o(1) \cdot k \log k / \log\log k$。将这些观察用于方程6，得到

$$\frac{k \log k}{\log\log k} \sim k\pi(M) \leqslant (1+o(1))\frac{k \log N}{\log k} + o(1)\frac{k \log k}{\log\log k}.$$

两边同除以 k，并将 k 中剩余的函数移至左边，得到 $(\log k)^2/\log\log k \leqslant (1+o(1))\log N$.。利用标准论证，最终得到

$$\log k \leqslant \sqrt{(1/2+o(1))\log N \log\log N}.$$

4. 定理 2的证明

我们将保 持第 2节中使用的记号。我们需要以下估计 :

LEMMA 5. 不超过 n 的素数之和满足

$$\sum_{p\leqslant n} p = \frac{n^2}{2\log n} + O\left(\frac{n^2}{(\log n)^2}\right) \sim \frac{n^2}{2\log n}.$$

LEMMA 6. 设 n 是一个正整数， p_{min} 是它的最小素因子。那么，

$$\frac{\log n}{\log p_{min}} \geqslant \sum_p (p-1)\nu_p(d(n)).$$

证明。在证明的其余部分中，字母 p 和 q 严格表示素数。注意，由于 $p_{\min}$ 是 n 的最小素因子，取对数可得

$$\log n = \sum_q \nu_q(n)\log q \geqslant \log p_{\min} \sum_q \nu_q(n). \tag{7}$$

此外，利用对所有正整数都有 $m^n - 1 \geqslant n(m-1)$ 这一事实，我们可推知

$$k = \prod_p p^{\nu_p(k+1)} - 1 \geqslant \sum_p \left(p^{\nu_p(k+1)} - 1\right) \geqslant \sum_p (p-1)\nu_p(k+1) \tag{8}$$

对于任意正整数 k。在方程 7 中对 $\nu_q(n)$ 使用不等式 8，可进一步得到

$$\frac{\log n}{\log p_{\min}} \geqslant \sum_q \nu_q(n) \geqslant \sum_q \sum_p (p-1)\nu_p(\nu_q(n)+1) = \sum_p \left((p-1)\sum_q \nu_p(\nu_q(n)+1)\right)$$

$$= \sum_p (p-1)\nu_p\left(\prod_q (\nu_q(n)+1)\right) = \sum_p (p-1)\nu_p(d(n)),$$

由此得到所需结果。 □

现在，证明的关键在于找到一个指标 i，使得 $n+i$ 具有较大的最小素因子。雅各布斯塔尔 [Jac 60] 将函数 $j(n$定义为满足以下条件的最小整数：在任意 $j(n$ 个连续整数中，至少有一个与 n互素。

因此，若正整数 M满足 $j(M\#) \leqslant k$，则某个 $n+i$的最小素因子大于 M。正如 Erd˝os [Erd62], 所指出的，由布朗筛法可直接推出，对于某个适当的常数 C，有 $j(n) \ll \omega(n)^C$，因此 $\log j(n) \ll \log\omega(n)$。

由此可得 $\log j(M\#) \ll \log \omega(M\#) = \log \pi(M) \ll \log M$，因此在我们的 k 个连续整数中，可以找到一个数 $n+i$，其最小素因子 $p_{\min}$ 满足 $\log p_{\min} \gg \log k$。此外，回想一下，不超过 $\log_2 k$ 的每个素数都整除 $D = d(n+i)$。应用引理 5 和引理 6，便得到

$$\frac{\log N}{\log k} \gg \frac{\log(n+i)}{\log p_{\min}} \geqslant \sum_{p}(p-1)\nu_p(D) \gg \sum_{p \leqslant \log_2 k} p \sim \frac{(\log_2 k)^2}{2\log\log_2 k}.$$

Cons因此，$\log N \gg (\log k)^3/\operatorname{loglog} k$，由此定理 2 即可轻易推出 .

致谢

我谨向 Andrew Granville 表示深切感谢，感谢他的支持，以及他对 [Gra23] 第 3 节和4节全文所 प्रस्तुत材料的贡献。此外，我还要感谢 Alexandru Gica 一直以来的指导、富有洞察力的评论，以及他为我的论文进行校对。

参考文献

[Erd62] P. Erdős, 《与 n 互素的整数以及 jacobshtal 所研究的一个数论函数》，《斯堪的纳维亚数学》10（1962），163–170。[EM52] P. Erdős 和 L. Mirsky, 《因子函数 $d(n)$ 取值的分布》，《伦敦数学学会论文集》2，第 1 期（1952），257–271。[Far09] B. Farhi, 《涉及二项式系数最小公倍数的一个恒等式及其应用》，《美国数学月刊》116，第 9 期（2009），836–839。[Gra23] A. J. Granville，私人通信，2023 年。[HB84] D. R. Heath-Brown, 《连续整数上的因子函数》，《数学》31，第 1 期（1984），141–149。.[Jac 60] E. E. Jacobsthal, 《整数序列：其中没有一个数与 n 互素》，《挪威皇家科学学会论文集》33（1960），117–124。[Pin97] C. G. Pinner, 《因子函数的重复取值》，《数学季刊》48，第 4 期（1997），499–502。[Spi81] C. A. Spiro, 《一个整值、与素数无关的乘性或加性函数 n 整除多项式函数 n 的频率》，博士论文，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，1981 年。

V. T. Spătaru, Bucharest, Romania
电子邮件： vtspataru@gmail.com