arXiv:2301.04519v1 [math.DS] 11 Jan 2023

在 -2 处二次多项式朱利亚集的豪斯多夫维数的方向导数

LUDWIK JAKSZTAS

摘要。令 $d(\delta)$ 表示多项式 $f_\delta(z) = z^2 - 2 + \delta$ 的朱利亚集的豪斯多夫维数。

本文将研究函数d 沿着落在参数 0 处的方向的方向导数；在族 $p_c(z) = z^2 + c$ 的情形下，这对应于 -2。我们将考虑除 $\delta \in \mathbb{R}^+$之外的所有方向，因为该方向位于曼德博集合内。

我们将证明 d 的方向导数的渐近公式。此外，我们将看到，在闭左半平面内所有方向上的导数均为负。计算机计算表明，除 $\mathbb{R}^+$周围一个开角约为 74° 的锥形区域外，导数均为负。

1. 引言

设 f 是一个复变量多项式，其次数至少为 2。我们将填充朱利亚集 $\mathcal{K}_f$ 定义为在 f 的迭代下不会逃逸到无穷远的所有点所组成的集合，即

$$\mathcal{K}_f = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \nrightarrow \infty\}.$$

它是一个紧集，其边界称为朱利亚集。因此，记作

$$\mathcal{J}_f := \partial \mathcal{K}_f.$$

出于技术上的原因，我们将考虑以下对象，而非经典的二次族 $p_c(z) = z^2 + c$

$$f_\delta(z) = z^2 - 2 + \delta,$$

即 $\delta = c + 2$。我们将使用以下缩写：

$$\mathcal{J}_\delta := \mathcal{J}_{f_\delta}, \qquad \mathcal{K}_\delta := \mathcal{K}_{f_\delta}.$$

令 $d(\delta)$:=HD($\mathcal{J}_\delta$) 表示朱利亚集的豪斯多夫维数。本文将研究函数

$$\delta \mapsto d(\delta).$$

我们将曼德博集合（对应于族 f_δ）定义如下

$$\mathcal{M} := \{\delta \in \mathbb{C} : f_\delta^n(0) \nrightarrow \infty\}.$$

回顾一下，如果存在 $n \geqslant 1$ 使得对于每个 $z \in \mathcal{J}_f$， $|(f^n)'(z)| > 1$，则称多项式 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为双曲的（扩张的）。

2020 数学主题分类。主要分类37F44，次要分类37F35。关键词和短语。豪斯多夫维数、朱利亚集、二次族。作者部分受到国家科学中心资助项目2019/33/B/ST1/00275（波兰）的支持。

函数 $d(\delta)$ 在 $\operatorname{Int}\mathcal{M}$ 的每个双曲分支（由与双曲映射相关的参数组成）上，以及在 $\mathcal{M}$ 的外部（见 [14]）都是实解析的。对于 $\alpha \in [0, 2\pi)$，记

$$\mathcal{R}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha = \arg z\}.$$

我们将研究参数 $\delta \notin \mathcal{M}$ 沿射线 $\mathcal{R}(\alpha)$ 趋近于 $0 \in \partial\mathcal{M}$ 时，函数 $d(\delta)$ 的性质。因此，我们将考虑除位于 $\mathcal{M}$ 内部的 $\mathcal{R}(0)$ 以外的所有方向。

参数 $\delta = 0$ 对应于 $c = -2$，因此这是 Misiurewicz 参数。注意，如果临界点严格前周期（即前周期但非周期），则称该参数为 Misiurewicz 参数。在我们的情形 $0 \mapsto -2 \mapsto 2$ 中，2 是一个不动点。此外，朱利亚集 $\mathcal{J}_0$ 等于区间 $[-2, 2]$（例如参见 [1]）。

J. Rivera-Letelier 在 [14] 中证明了以下结论：

R-L 定理。 存在 $C_0 > 0$，使得若 $\delta_n \to 0$ 且

$$\operatorname{Re}(\delta_n) \leqslant 0 \quad \text{or} \quad |\operatorname{Im}(\delta_n)| > C_0 |\operatorname{Re}(\delta_n)|^{3/2},$$

于是 $\delta_n \notin \mathcal{M}$ 和 $d(\delta_n) \to d(0) = 1$。

上述定理的一个直接推论是，$d(\delta)$沿任意射线 $\mathcal{R}(\alpha)$收敛到 1，$\alpha \in (0, 2\pi)$。

在 [6], A. Fan、Y. Jiang 和 J. Wu 的研究中，他们给出了限制在实数轴上的 d 的估计。他们证明了：

FJW 定理。 存在常数 $K > 0$ 和 $\delta_1 < 0$，使得

$$1 - K^{-1}\sqrt{|\delta|} \leqslant d(\delta) \leqslant 1 - K\sqrt{|\delta|},$$

对所有 $\delta_1 \leqslant \delta < 0$均成立。

因此，可以预期，当$\delta \to 0^-$时，导数 $d'(\delta)$趋于 ∞，其速度类似于 $1/\sqrt{|\delta|}$。本文证明了一个更一般的结果。为陈述我们的主要定理，我们需要两个定义。

设 F 是定义在定义域 $U \in \mathbb{C}$ 上的实函数。若 $z \in U$ 且 $v \in \mathbb{C}^*$，则

$$F'_v(z) := \lim_{h \to 0} \frac{F(z + hv) - F(z)}{h},$$

如果极限存在。

对于 $\alpha \in (0, \pi]$，我们记

$$\Omega_{-2}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{6}\,\pi \log 2}\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{\sin\alpha}\int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\sin x}\,dx\right). \tag{1.1}$$

若 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$，则我们定义 $\Omega_{-2}(\alpha) := \Omega_{-2}(2\pi - \alpha)$。

本文的主要定理如下：

定理 1.1。 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$，都有

$$\lim_{\delta \to 0} \sqrt{|\delta|} \cdot d'_v(\delta) = \Omega_{-2}(\alpha),$$

其中 $\alpha =$ 辐角 δ 以及 $v = e^{i\alpha}$。

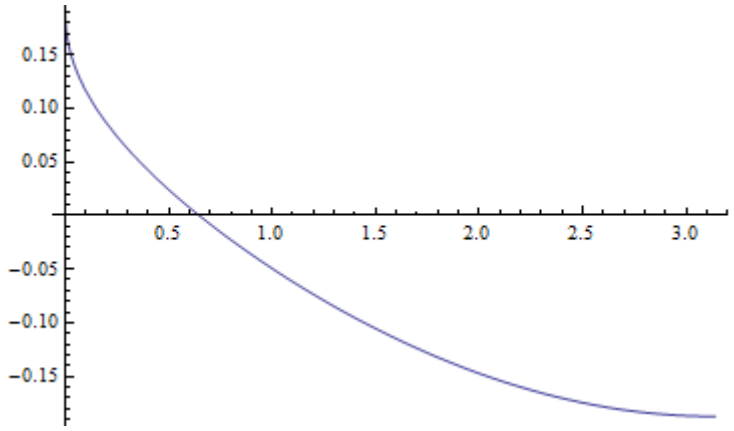

图1. 函数 $\Omega_{-2}(\alpha)$ 在 $\alpha \in (0,\ \pi]$ 上的图像。

由于对称性，只需证明定理对 $\alpha \in (0,\ \pi]$ 成立。函数 $\Omega_{-2}(\alpha)$ 显然为负，当 $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ 时；而当 α 足够小时则为正。此外，容易验证 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{-2}(\alpha) < 0$ 对 $\alpha \in (0,\ \pi/2)$ 成立。因此，存在唯一的 $\alpha_0 \in (0,\ \pi/2)$，使得 $\Omega_{-2}(\alpha_0) = 0$。于是，对每个 $\alpha \in (0,\ \alpha_0)$，都有 $d'_v(\delta) \to +\infty$；而对每个 $\alpha \in (\alpha_0,\ \pi]$，都有 $d'_v(\delta) \to -\infty$。

数值绘制的 $\Omega(\alpha)$ 图像（见图1。）表明，它在整个区间 $(0,\ \pi)$ 上是一个递减函数，而 α_0 略大于 $\pi/5$（接近 $37°$）。

在实数情形（即 $\alpha = \pi$）下，我们看到

$$\lim_{\delta\to 0} \sqrt{|\delta|} \cdot d'_{-1}(\delta) = \frac{-1}{\sqrt{6}\,\pi \log 2}.$$

请注意，这是方向导数，而 $d(\delta)$ 的导数符号相反。因此，积分可得：

推论1.2。 若 $\delta \in \mathbb{R}^-$，则当 $|\delta|$ 足够小时，我们有

$$d(\delta) = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3\,\pi \log 2}\sqrt{|\delta|} + o(\sqrt{|\delta|}).$$

注：沿射线 $\mathcal{R}(0)$（在曼德博集合内）的估计。

最近，N. Dobbs、J. Graczyk 和 N. Mihalache 在 [3] 中证明了以下重要结果：

DGM 定理。 存在常数 $\kappa_* > 0$ 和 $\delta_0 > 0$，使得对于每个 $\delta \in (0, \delta_0]$

$$d(\delta) \geqslant 1 + \kappa_*\sqrt{\delta}.$$

该论文还证明了一个上界，它在一组“较大”的参数上成立。

我们可以令 $\Omega_{-2}(\alpha)$ 在 $\alpha \to 0^+$ 趋于极限，即

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \Omega_{-2}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}\,\pi \log 2},$$

得出如下结论：

猜想。使 *DGM* 定理成立的所有常数 $\kappa_* > 0$ 的上确界（即存在 $\delta_0 > 0$ 使得 *DGM* 定理的陈述成立），等于 $\sqrt{6}/(3\,\pi\log 2)$。特别是

$$d(\delta) \geqslant 1 + \frac{\sqrt{6}}{3\,\pi\log 2}\sqrt{\delta} - o(\sqrt{\delta}),$$

当 $\delta \in \mathbb{R}^+$ 足够小时。

最近，A. Dudko、I. Gorbovickis 和 W. Tucker 在 [5]中计算出了 $\delta \in [0,4]$ （采用我们的参数化方式）下 $d(\delta)$ 的严格下界。他们估算了某些区间以及一些其他参数上的 $d(\delta)$。

现在，利用参数对应的 $d(\delta)$ 下界（这些下界大于包含这些参数的区间的估计值），我们作出如下观察：对于 $\delta_n \approx n \cdot 0.004$，其中 $1 \leqslant n \leqslant 25$，估计值的精确数值（由作者提供）导致

$$d(\delta_n) > 1 + 0.362\sqrt{\delta_n},$$

然而 $\sqrt{6}/(3\,\pi\log 2) \approx 0.375$。

这是第一篇研究非抛物参数附近维数函数导数的论文。另一方面，这是继 [10], 之后第二篇关于方向导数的论文；在该文中，研究了参数 $c = 1/4$ 附近的导数（具有一个花瓣的抛物参数）。

与 [10] 中一样，我们将使用导数公式（两个积分之商，见命题 2.1）。分母中的积分等于李雅普诺夫指数（若测度已归一化），并趋于一个正的常数。主要问题是估计分子中的积分。

请注意，我们的情况与 [10] 中的情况大不相同。在我们的情形中，靠近 0 的朱利亚集的一部分起着关键作用；为了详细研究 $\mathcal{J}_\delta$ 的位置以及共形测度与不变测度的行为，我们需要对集合 $\mathcal{J}_\delta$ 重新缩放。

记号：若 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，则 $\sqrt{z}$ 表示实部为正的平方根。若 $z \in \mathbb{R}^-$，则我们假设 $\sqrt{z}$ 的虚部为正。

2. 热力学形式主义

本节的主要目标是建立豪斯多夫维数方向导数的公式（见命题 2.1）（参见 [10, 第 2] 节）。

由于双曲性，朱利亚集在 $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ 的每个单连通子集上全纯移动。特别地，我们可以取集合 $\mathcal{U}$，它是 $B(0,\ 1/5) \setminus \mathcal{M}$ 的连通分支，包含 $\delta_0 = -1/10$。

ˆ 因此，存在单射族 $\varphi_\delta :\ \mathcal{J}_{\delta_0} \to \mathbb{C}$, $\delta \in \mathcal{U}$ ，使得$\varphi_{\delta_0} = \mathrm{id}^{\mathcal{J}_{\delta_0}}$, $\varphi_\delta(\mathcal{J}_{\delta_0}) = \mathcal{J}_\delta$ 且

$$\varphi_\delta \circ f_{\delta_0}(s) = f_\delta \circ \varphi_\delta(s),$$

对于 $s \in \mathcal{J}_{\delta_0}$ （即 φ_δ 将 f_{δ_0} 共轭到 f_δ）。此外，映射 $\delta \mapsto \varphi_\delta(s)$ 是全纯的，而对于每个 $\delta \in \mathcal{U}$，映射 φ_δ 都可延拓为球面到自身的拟共形（因而也是霍尔德）映射（见 [8]）。

注意，对于 $\delta = 0$，存在函数 φ_0，它将 f_{δ_0} 半共轭到 f_0。点 z 在 φ_0 下有两个原像，当且仅当对于某个 $n \geqslant 0$，$f_0^n(z) = 0$（见 [2, 定理 1.6]）。

现在我们使用适用于双曲有理映射的热力学形式主义（见 [12]）。令 $X = \mathcal{J}_{\delta_0}$、$T = f_{\delta_0}$，并令 $\phi : X \to \mathbb{R}$ 为如下形式的势函数：$\phi = -\tau \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|$，其中 $\delta \in \mathcal{U}$ 且 $\tau \in \mathbb{R}$。

拓扑压可以定义如下：

$$P(T, \phi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\overline{s}\in T^{-n}(s)} e^{S_n(\phi(\overline{s}))},$$

其中 $S_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k$。该极限存在且不依赖于 $s \in \mathcal{J}_{\delta_0}$（见 [12, 推论 12.5.13]）。若 $\phi = -\tau \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|$ 且 $\varphi_\delta(s) = z$，则 $e^{S_n(\phi(s))} = |(f_\delta^n)'(\overline{z})|^{-\tau}$，因此

$$P(T, -\tau \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\overline{z}\in f_\delta^{-n}(z)} |(f_\delta^n)'(\overline{z})|^{-\tau}.$$

函数 $\tau \mapsto P(T, -\tau \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|)$ 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 严格递减。因此，存在唯一的 τ_0 使得 $P(T, -\tau_0 \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|) = 0$。根据鲍恩定理（见 [12, 推论 9.1.7] 或 [15, 定理 5.12]），我们得到

$$\tau_0 = d(\delta).$$

因此，我们有 $P(T, -d(\delta) \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|) = 0$。记 $\phi_\delta := -d(\delta) \log |f'_\delta(\varphi_\delta)|$。

吕埃尔算子或转移算子 $\mathcal{L}_\phi : C^0(X) \to C^0(X)$，定义为

$$\mathcal{L}_\phi(u)(s) := \sum_{\overline{s}\in T^{-1}(s)} u(\overline{s}) e^{\phi(\overline{s})}. \tag{2.1}$$

佩龙–弗罗贝尼乌斯–吕埃尔定理 [15, 定理 4.1] 断言，$\beta = e^{P(T,\phi)}$ 是 $\mathcal{L}_\phi$ 的一个单特征值，对应于特征函数 $\tilde{h}_\phi > 0$。此外，存在唯一的概率测度 $\tilde{\omega}_\phi$ 使得 $\mathcal{L}_\phi^*(\tilde{\omega}_\phi) = \beta \tilde{\omega}_\phi$，其中 $\mathcal{L}_\phi^*$ 与 $\mathcal{L}_\phi$ 对偶。

对于 $\phi = \phi_\delta$，我们有 $\beta = 1$，于是 $\tilde{\mu}_{\phi_\delta} := h_{\phi_\delta} \tilde{\omega}_{\phi_\delta}$ 是一个 T-不变测度，称为平衡态（若经过归一化）。我们分别用 $\tilde{\omega_\delta}$ 和 $\tilde{\mu_\delta}$ 表示测度 $\tilde{\omega}_{\phi_\delta}$ 和 $\tilde{\mu}_{\phi_\delta}$（支撑在 $\mathcal{J}_{\delta_0}$ 上的测度）。接下来，取 $\mu_\delta := (\varphi_\delta)_* \tilde{\mu_\delta}$，以及 $\omega_\delta := (\varphi_\delta)_* \tilde{\omega_\delta}$（支撑在朱利亚集 $\mathcal{J}_\delta$ 上的测度）。

因此，测度 μ_δ 是 f_δ-不变的，而 ω_δ（归一化后）称为 f_δ-共形测度，其指数为 $d(\delta)$，即 ω_δ 是一个博雷尔概率测度，对每个博雷尔子集 $A \subset \mathcal{J}_\delta$，

$$\omega_\delta(f_\delta(A)) = \int_A |f'_\delta|^{d(\delta)} d\omega_\delta, \tag{2.2}$$

前提是 f_δ 在 A 上是单射。

然而，我们不会假设 μ_δ 和 ω_δ 是概率测度。因为 $\mathcal{J}_0 = [-2, 2]$ 我们将取 $\mu_\delta(\mathcal{J}_\delta) = \omega_\delta(\mathcal{J}_\delta) = 4$。

由 [15, 命题 6。11] 或 [12, 定理 5.6。5] 可知，对于每个 ˆ 赫尔德连续函数 ψ，$\psi\colon\ X \to \mathbb{R}$，在每个 $t \in \mathbb{R}$ 处，我们都有

$$\frac{\partial}{\partial t} P(T, \psi + t\hat{\psi}) = \int_X \hat{\psi}\, d\tilde{\mu}_{\psi + t\hat{\psi}}.$$

考虑形式为 $\delta = tv$ 的参数，其中 $v = e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg \delta$，且 $t > 0$。由于对于势函数 $\phi = -\tau \log |f'_{tv}(\varphi_{tv})|$，$\tau = d(tv)$ 是压力函数的唯一零点，结合上述公式应用隐函数定理可得（参见 [7, 命题 2.1] 或 [9, 命题 2.1]）：

命题 2.1. 若 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 且 $v = e^{i\alpha}$，则对每个满足 $tv \notin \mathcal{M}$ 的 $t > 0$，有

$$d'_v(tv) = -d(tv) \frac{\int_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \frac{\partial}{\partial t} \log |f'_{tv}(\varphi_{tv})| d\tilde{\mu}_{tv}}{\int_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \log |f'_{tv}(\varphi_{tv})| d\tilde{\mu}_{tv}}. \tag{2.3}$$

3. 不动点附近的共轭

假设 p 是全纯函数 f 的一个排斥（或吸引）不动点。众所周知，在 p 的某个邻域内，f 与 $z \mapsto f'(p)z$ 共轭。现在我们回顾如何构造这一共轭。

多项式 f_δ, $\delta \in \mathcal{U}$ 有两个排斥不动点。我们将考虑

$$p_\delta := \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\delta} = 2 - \frac{1}{3}\,\delta - \frac{1}{27}\,\delta^2 + O(\delta^3), \tag{3.1}$$

对于 $\delta = 0$，它变为 $p_0 = 2$。因此，p_δ 处的乘子 λ_δ 等于

$$\lambda_\delta = f'_\delta(p_\delta) = 2p_\delta.$$

为了构造共轭 Φ_δ，我们先将 p_δ “移到”0。令

$$\hat{f}_\delta(z) := f_\delta(z + p_\delta) - p_\delta.$$

ˆ ˆ 确实，0 是 f_δ的不动点。我们将记 $\mathcal{J}_\delta := \mathcal{J}_{\hat{f}_\delta}$。

ˆ ˆ ˆ 将收敛到函数 Φ_δ 的序列$\Phi_{n,\delta}$ 定义如下，该函数将 f_δˆˆ ˆ 共轭到 $z \mapsto \lambda_\delta z$（即 $\Phi_\delta \circ f_\delta = \lambda_\delta \Phi_\delta$）：

$$\hat{\Phi}_{n,\delta}(z) := \lambda_\delta^n \hat{f}_\delta^{-n}(z) = \lambda_\delta^n (f_\delta^{-n}(p_\delta + z) - p_\delta).$$

注意

$$\hat{\Phi}^{-1}_{n,\delta}(z) = \hat{f}^n_\delta\Big(\frac{z}{\lambda^n_\delta}\Big) = f^n_\delta\Big(p_\delta + \frac{z}{\lambda^n_\delta}\Big) - p_\delta. \tag{3.2}$$

我们有

$$\hat{\Phi}_{n,\delta}(z) \rightrightarrows \hat{\Phi}_\delta(z),$$

并且，无论参数 $\delta \in B$ 取何值，收敛都是一致的（0，$r_\triangle$），其中 $z \in B$（0，r_z），对于某些 $r_\triangle > 0$、$r_z > 0$。因此，Φ_δ 在 $\delta \in B$（0，$r_\triangle$）上解析地依赖于 $\delta \in B$（例如参见第 2] 章）。

可能需要改变 $r_z > 0$，我们可以假设两个函数 $\hat{\Phi}_\delta$ 和 $\hat{\Phi}_\delta^{-1}$ 都定义在 $B(0, r_z)$ 上。接下来，由于 $\hat{\Phi}'_\delta(0) = 1$，我们还可以假设这些函数与恒等映射相差不大，即

$$\left|\frac{\hat{\Phi}_\delta(z)}{z} - 1\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad \left|\frac{\hat{\Phi}_\delta^{-1}(z)}{z} - 1\right| < \frac{1}{2}, \tag{3.3}$$

对于 $z \in B(0, r_z)$ 和 $\delta \in B(0, r_\triangle)$。

最后，我们取 $\Phi_\delta(z) := \Phi_\delta(z - p_\delta)$，于是得到

$$\Phi_\delta \circ f_\delta = \lambda_\delta \Phi_\delta, \tag{3.4}$$

其中函数 Φ_δ 定义在 $B(p_\delta, r_z)$ 上。适当改变 r_z 和$r_\triangle$后，我们还可以假设 Φ_δ 对于 $\delta \in B(0, r_\triangle)$ 定义在 $B(2, r_z)$ 上。

4. 当 δ 接近 0 时的朱利亚集 $\mathcal{J}_\delta$

4.1. 豪斯多夫度量。 若 X 和 Y 是 $\mathbb{C}$ 的两个非空紧子集，则它们的豪斯多夫距离定义如下:

$$d_H(X, Y) = \max\Big(\sup_{x\in X} \operatorname{dist}(x, Y), \sup_{y\in Y} \operatorname{dist}(y, X)\Big).$$

现在我们陈述 [4, 第 5] 节中的一个重要定理。

定理 4.1。 如果 $\mathcal{K}_{\hat{\delta}}$ 的内部为空，即 $\mathcal{K}_{\hat{\delta}} = \mathcal{J}_{\hat{\delta}}$，那么函数

$$\delta \mapsto \mathcal{J}_\delta,$$

在 δ 处连续，其中它是从 $\mathbb{C}$ 到配备豪斯多夫度量的 $\mathbb{C}$ 非空紧子集空间的函数。

推论 4.2。 如果 $\delta \to 0$，那么

$$\mathcal{J}_\delta \to \mathcal{J}_0 = [-2, 2],$$

在配备豪斯多夫度量的 $\mathbb{C}$ 非空紧子集空间中。

4.2. 共轭与 的位置 $\mathcal{J}_\delta$。 已知函数$x \mapsto \frac{2}{\pi}\arcsin x$ 将定义在 $[-1, 1]$ 上的多项式 $g(x) = -2x^2 + 1$ 共轭为帐篷映射 $T\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$，其定义为 $T(x) = -2|x| + 1$（例如参见 [11, 第 II 章]）。

由于 $x \mapsto -x/2$ 将 f_0 共轭到 g，我们记为

$$\varphi_v(x) = \frac{4}{\pi}\arcsin\Big(\frac{x}{2}\Big), \qquad \varphi_v^{-1}(x) = 2\sin\Big(\frac{\pi}{4}x\Big),$$

接下来

$$V(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{if} \quad x \in [0, 2], \\ -2x - 2 & \text{if} \quad x \in [-2, 0). \end{cases}$$

因此， φ_v 将 f_0 共轭到 V。于是

$$f_0^n(x) = \varphi_v^{-1} \circ V^n \circ \varphi_v(x), \qquad x \in [-2, 2],\ n \in \mathbb{N}.$$

对上述等式求导，并利用$(\varphi_v^{-1})'(V \circ \varphi_v) = (\varphi_v^{-1})'(\varphi_v \circ f_0)$这一事实，可以得到

$$|(f_0^n)'(x)| = 2^n\sqrt{\frac{4 - (f_0^n(x))^2}{4 - x^2}}. \tag{4.1}$$

函数 $F(z) = z + \frac{1}{z}$ 是 $z \mapsto z^2$ 与f_0之间的半共轭。单位圆在 F 下的像等于朱利亚集 $\mathcal{J}_0 = [-2, 2]$。考虑圆族 $S(0, r)$，其中 $r > 1$。那么，像$F(S(0, r))$ =是椭圆，可参数化如下：

$$\xi_r(t) : re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}.$$

对于每个 $r > 1$，焦点为 ± 2。注意

$$f_0(\xi_r(t)) = \xi_{r^2}(2t).$$

若 $z = x + iy$，则有

$$\xi_r(t) : \begin{cases} x(t) = (r + 1/r)\cos t, \\ y(t) = (r - 1/r)\sin t. \end{cases}$$

因此，短半轴和长半轴分别等于 $(r-1/r)$ 和 $(r+1/r)$。

实心椭圆记作 E_r，即

$$E_r : \frac{x^2}{(r + 1/r)^2} + \frac{y^2}{(r - 1/r)^2} \leqslant 1.$$

注意，对于 $r \geqslant 1$，有

$$r + \frac{1}{r} \leqslant 2 + (r - 1)^2, \quad \text{and} \quad r - \frac{1}{r} \leqslant 2(r - 1). \tag{4.2}$$

现在我们给出关于集合 $\mathcal{J}_\delta$ 精确位置的一些估计。

引理 4.3. 对于每个 $\delta \neq 0$，我们有

$$\mathcal{J}_\delta \subset E_{1+\sqrt{|\delta|}} \subset \big\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant 2\sqrt{|\delta|}\big\}.$$

证明. 设 $r = 1 + \kappa\sqrt{|\delta|}$，其中 $\kappa \geqslant 1$。容易证明，椭圆 ξ_r 与 ξ_{r^2} 之间的距离等于半长轴之差，即

$$\Big(r^2 + \frac{1}{r^2}\Big) - \Big(r + \frac{1}{r}\Big) = \big(r - 1\big)^2\Big(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\Big) > \big(r - 1\big)^2 = \kappa^2|\delta|.$$

因为

$$f_\delta(\xi_r(t)) = \xi_{r^2}(2t) + \delta,$$

我们看到，E_r 包含于由 $f_\delta(\xi_r(t))$ 围成的区域内，而 E_r 的外部映射到 $f_\delta(\xi_r(t))$ 的外部。因此我们得出，若 $z \notin E_{1+\sqrt{|\delta|}}$，则 $f_\delta^n(z) \to \infty$，故

$$\mathcal{J}_\delta \subset E_{1+\sqrt{|\delta|}}.$$

由于 E_r 包含于 $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leqslant r - 1/r\}$，且对于 $r = 1 + \sqrt{|\delta|}$，我们有 $r - 1/r \leqslant 2\sqrt{|\delta|}$（参见 (4.2)），结论得证。□

引理 4.4. 存在 $\eta > 0$，使得如果 $z \in \mathcal{J}_\delta$，那么

(1)

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} p_\delta| < |\delta|^{17/16} \quad \textit{provided} \quad \operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} p_\delta - |\delta|^{15/16}, \\ &|\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} p_\delta| < |\delta|^{17/16} \quad \textit{provided} \quad \operatorname{Re} z \leqslant -\operatorname{Re} p_\delta + |\delta|^{15/16}, \end{aligned}$$

(2)

$$|\operatorname{Re} z| < \operatorname{Re} p_\delta + |\delta|^2,$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$。

ˆˆ证明。 证明将针对 f_δ 和 $z \in \mathcal{J}_\delta$ 进行（即将 p_δ 移至 0）。这些曲线

$$\gamma_{\delta,\beta}(t) = e^{i\beta} e^{t \log \lambda_\delta},$$

ˆ 其中 $\beta \in \mathbb{R}$ 在 $z \mapsto \lambda_\delta z$ 下保持不变，因此 f_δ 的轨道位于 $\hat{\Phi}_\delta^{-1}(\gamma_{\delta,\beta})$ 上（靠近 0）。

曲线 $\gamma_{\delta,0}(t)$ 与圆 $S(0, |\delta|^h)$ 相交，其中 $t = h \log_{|\lambda_\delta|} |\delta|$。我们将交点记为 $b_{\delta,h}$。那么，$\arg(b_{\delta,h}) = h \log_{|\lambda_\delta|} |\delta| \cdot \arg \lambda_\delta$。由于 $|\arg \lambda_\delta| < |\delta|$，我们看到

$$\arg(b_{\delta,h}) = h \log_{|\lambda_\delta|} |\delta| \cdot \arg \lambda_\delta \to 0,$$

当 $\delta \to 0$ 和 $2 \geqslant h \geqslant 3/10$ 时，一致地成立。此外

$$\operatorname{dist}(b_{\delta,h}, \mathbb{R}^+) \leqslant |\delta|^h \cdot h \log_{|\lambda_\delta|} |\delta| \cdot \arg \lambda_\delta,$$

因此，对于 $h \geqslant 3/10$，我们得到

$$\operatorname{dist}(b_{\delta,h}, \mathbb{R}^+) < |\delta|^{5/4},$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$，对于适当选取的 $\eta > 0$。

接下来，如果直线 $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ 在点 b_δ 与 $\gamma_{\delta,0}$ 相交，h' 其中 $2 \geqslant h' \geqslant 3/10$，我们也有

$$\operatorname{dist}(b_{\delta,h}, e^{i\theta}\mathbb{R}^+) < |\delta|^{5/4}, \tag{4.3}$$

对于 $h \geqslant h'$。此外，此估计经过旋转后仍然成立，因此我们可以令$\beta \neq 0$。

设 β_δ 和 t_δ 满足 $\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t_\delta) = -|\delta|^{5/16} + 3i|\delta|^{1/2}$（于是 $\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t_\delta)$ 位于圆 $S(0, |\delta|^{h_\delta})$ 上，其中 h_δ 接近 $5/16 > 3/10$）。由于 $\hat{\Phi}_\delta^{-1} = z + a_\delta z^2 + O(z^3)$，我们看到

$$\operatorname{Im}(\hat{\Phi}_\delta^{-1}(\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t_\delta))) > 2|\delta|^{1/2}.$$

对于接近 t_δ 的参数，同一估计也成立，因此由引理 4.3 可知，朱利亚集位于曲线 $\hat{\Phi}_\delta^{-1}(\gamma_{\delta,\beta_\delta})$ 下方。

设 $z = x + iy$，则 $l_\delta\colon y = -3|\delta|^{3/16}x$ 是一条在 t_δ 处与 $\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t)$ 相交的直线。我们有 $l_\delta(-|\delta|^{15/16}) = 3|\delta|^{9/8}$。设 t'_δ 满足 $\operatorname{Re}(\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t'_\delta)) = -|\delta|^{15/16}$。那么，$|\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t'_\delta) - 3|\delta|^{9/8}|$ 接近 $\operatorname{dist}(\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t'_\delta), l_\delta)$，因此由 (4.3) 得到

$$|\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t'_\delta) - 3|\delta|^{9/8}| < 2|\delta|^{5/4}.$$

由于 $\hat{\Phi}_\delta^{-1} = z + a_\delta z^2 + O(z^3)$，我们看到

$$\operatorname{Im}(\hat{\Phi}_\delta^{-1}(\gamma_{\delta,\beta_\delta}(t'_\delta))) < |\delta|^{17/16}.$$

对于小于 t'_δ的参数，同样的估计也成立。类似地，考虑一条经过点 $-|\delta|^{5/16} - 3i|\delta|^{1/2}$ 的曲线 $\gamma_{\delta,\beta_\delta^-}$，我们可以得到下界估计。因此，第一个结论由对称性得出。

第二个陈述以下事实可得：J_δ 位于曲线 $\hat{\Phi}_\delta^{-1}(\gamma_{\delta,\beta_\delta})$ 之间，而与 $S(0, |\hat{\delta}|^2)$ 的交点的辐角接近 π。

□

4.3. **一致收敛**。现在我们将证明 φ_δ 一致收敛到 φ_0。

设 U_δ，其中 $\delta \in \mathcal{U}$ 是 $\mathcal{J}_\delta$ 的一个单连通邻域，包含 0，且与后临界集 $P(f_\delta)$ 不相交，其中

$$P(f_\delta) := \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f_\delta^n(0)}.$$

若 $\delta = 0$，则我们假设 $(-2,\ 2) \subset U_0$，且 U_0 不包含 $\{-2, 2\}$。

设 $f_{\delta_0\,\nu}^{-n}$，是定义在 U_{δ_0} 上的 $f_{\delta_0}^n$ 的一个反分支。于是我们用 $f_{\delta\,\nu}^{-n}$，表示定义在 U_δ 上的 f_δ^n 的相关逆分支，其中 $\delta \in \mathcal{U} \cup \{0\}$（所谓相关，是指函数 $\delta \mapsto f_{\delta\,\nu}^{-n}$，(0) 连续）。设 V_n 为所有可能的逆分支选择所构成的集合。对于 $\nu \in V_n$，$\delta \in \mathcal{U}$，我们记作

$$\mathcal{C}_{\delta,\nu} := f_{\delta,\nu}^{-n}(\mathcal{J}_\delta).$$

若 $\delta = 0$，则取 $\mathcal{C}_{0,\ \nu} := f_{0\,\nu}^{-n}$，$\overline{(-2,\ 2)}$。

引理 4.5. 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 以及 $n \geqslant 1$，我们有

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\nu\in V_n} d_H(\mathcal{C}_{\delta,\nu}, \mathcal{C}_{0,\nu}) = 0,$$

其中 $\alpha = \arg\delta$。

证明. 固定 $n \geqslant 1$。若 $\arg\delta = \pi$，则每两个相邻的圆柱集（包含在 $\mathbb{R}$ 中）之间，都由相应的 0 的原像隔开。由于 $f_{\delta\,\nu}^{-n}$，(0) $\to f_{0\,\nu}^{-n}$，(0) 且 $p_\delta \to p_0$，断言得证。当然，圆柱集也被虚轴 Y 的原像隔开，这些原像与 $\mathcal{J}_\delta$ 不相交。

固定 $\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$。若我们证明当 $\arg\delta = \alpha$ 时，$f_{\delta\,\nu}^{-n}$，(Y) 也与 $\mathcal{J}_\delta$ 不相交，则由推论 4.2 可得断言。

我们有 $f_\delta(Y) = -2 + \delta + \mathbb{R}^-$，因此 $f_\delta(Y)$ 中每个点的虚部都等于 $\operatorname{Im}\delta$，而 $\operatorname{Im}(-p_\delta) \approx \operatorname{Im}\delta/3$。因此，由引理 4.4 可知，$f_\delta(Y)$ 与朱利亚集不相交，故 $f_{\delta\,\nu}^{-n}$，(Y) 也不相交。□

由于我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\nu\in V_n} \operatorname{diam}(\mathcal{C}_{0,\nu}) = 0,$$

由引理 4.5 可得：

命题 4.6. 若 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 且 $\delta \to 0$ 其中 $\alpha =$ 辐角 δ，则该收敛

$$\varphi_\delta \rightrightarrows \varphi_0,$$

在集合 $\mathcal{J}_{\delta_0}$上一致。

5. 后临界集

现在我们给出一个命题，以帮助控制后临界集$P(f_\delta)$。特别地，我们将看到 $P(f_\delta)$ 离 0 不太近。

命题5.1。对于每个 $\alpha \in (0,\ 2\pi)$ 以及 $\theta > 0$，都存在 $r > 0$ 和$\eta > 0$，使得

$$P(f_\delta) \subset \big((\mathbb{C} \setminus E_r) \cup B(-2, \theta) \cup B(2, \theta)\big),$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$ 和 $\alpha =$ 辐角 δ。

证明。 固定 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $\theta > 0$。令 δ_1，其中 $\arg \delta_1 = \alpha$，满足

$$|\delta_1| < \frac{3}{8} \min\Big(r_{\mathrm{z}}, \frac{\theta}{2}\Big), \tag{5.1}$$

and

$$\frac{3}{4} \operatorname{dist}\Big(-\frac{8}{3} t \cdot \delta_1, \mathbb{R}^-\Big) < \operatorname{dist}\Big(\hat{\Phi}_0^{-1}\Big(-\frac{8}{3} t \cdot \delta_1\Big), \mathbb{R}^-\Big), \tag{5.2}$$

对于 $t \in (0, 1]$。

设 $\delta_t := t \cdot \delta_1$。我们将考虑形如 $\delta_t/4^n$ 的参数序列，其中 $t \in (1/4, 1]$。

设 $v_{t,n} := f^2_{\delta_t/4^n}(0) - p_{\delta_t/4^n}$。于是，利用 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} f^{n+2}_{\delta_t/4^n}(0) &= f^n_{\delta_t/4^n}(p_{\delta_t/4^n} + v_{t,n}) \\ &= f^n_{\delta_t/4^n}\Big(p_{\delta_t/4^n} + \frac{v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}}{\lambda^n_{\delta_t/4^n}}\Big) = \hat{\Phi}^{-1}_{n,\delta_t/4^n}(v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}) + p_{\delta_t/4^n}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

若 $\hat{\Phi}^{-1}_{n,\delta_t/4^n}(v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n})$ 有定义，即 $|v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}| < r_{\mathrm{z}}$，则对足够大的 n 成立。

现在我们将计算 $v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}$ 在 $n \to \infty$ 时的极限。首先注意到

$$p_{\delta_t/4^n} + v_{t,n} = f^2_{\delta_t/4^n}(0) = 2 - 3\frac{\delta_t}{4^n} + \frac{\delta_t^2}{4^{2n}}.$$

因为

$$p_{\delta_t/4^n} = 2 - \frac{1}{3}\frac{\delta_t}{4^n} + O\Big(\frac{\delta_t^2}{4^{2n}}\Big),$$

我们得到

$$v_{t,n} = -\frac{8}{3}\frac{\delta_t}{4^n} + O\Big(\frac{\delta_t^2}{4^{2n}}\Big).$$

因此

$$v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n} = -\frac{8}{3}\frac{\lambda^n_{\delta_t/4^n}}{4^n}\delta_t + O\Big(\frac{\lambda^n_{\delta_t/4^n}}{4^{2n}}\delta_t^2\Big). \tag{5.4}$$

我们有

$$\lambda_\delta = f'_\delta(p_\delta) = 4 + 3\Big(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\delta} - 1\Big),$$

因此

$$\frac{\lambda^n_{\delta_t/4^n}}{4^n} = \Big(1 + \frac{3}{4}\Big(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\frac{\delta_t}{4^n}} - 1\Big)\Big)^n.$$

由于 $\big(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\frac{\delta_t}{4^n}} - 1\big) \to 0$，并且

$$\Big(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\frac{\delta_t}{4^n}} - 1\Big) n \to 0,$$

我们得到

$$\frac{\lambda^n_{\delta_t/4^n}}{4^n} = \Big(1 + \frac{3}{4}\Big(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\frac{\delta_t}{4^n}} - 1\Big)\Big)^n \to e^0 = 1.$$

将此与 (5.4) 结合，我们得到

$$v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n} \to -\frac{8}{3}\delta_t.$$

因此，当 n 足够大时，假设 (5.1) 导致$|v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}| < r_{\mathrm{z}}$。因此，$\hat{}$ $\Phi^{-1}_{n\ ,\delta_t/4^n}(v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n})$ 定义良好，并且利用 (5.3) 可得

$$f^{n+2}_{\delta_t/4^n}(0) = \hat{\Phi}^{-1}_{n,\delta_t/4^n}(v_{t,n}\lambda^n_{\delta_t/4^n}) + p_{\delta_t/4^n} \rightrightarrows \hat{\Phi}^{-1}_0\Big(-\frac{8}{3}\delta_t\Big) + 2, \tag{5.5}$$

其中，对 $t \in (1/4,\ 1]$ 的收敛是一致的。接下来，假设 (5.2) 给出

$$\frac{1}{2}\operatorname{dist}\Big(-\frac{8}{3}\delta_t + 2, [-2,2]\Big) < \operatorname{dist}\Big(f^{n+2}_{\delta_t/4^n}(0), [-2,2]\Big),$$

对于 $t \in (1/4,\ 1]$ 和 $n > n_0$，取适当的 $n_0 \in \mathbb{N}$。因此，存在 $r > 1$ 使得

$$f^{n+2}_{\delta_t/4^n}(0) \in \mathbb{C} \setminus E_r, \tag{5.6}$$

对于 $t \in (1/4,\ 1]$ 和 $n > n_0$。由于 $f_0(E_r) = E_{r^2}$，且 E_r 与 E_{r^2} 之间的距离等于 $(r^2 + 1/r^2) - (r + 1/r)$（半长轴长度差），我们得出

$$f_\delta(\mathbb{C} \setminus E_r) \subset \mathbb{C} \setminus E_r,$$

假设 $|\delta| < (r^2 + 1/r^2) - (r + 1/r)$。如有必要，改变 n_0，我们可以假设 $\delta_1/4^{n_0} < (r^2 + 1/r^2) - (r + 1/r)$，然后由 (5.6) 得到

$$f^{n+2+k}_{\delta_t/4^n}(0) \in \mathbb{C} \setminus E_r,$$

对于 $t \in (1/4,\ 1], n > n_0$ 和 $k \geqslant 0$。

利用 (5.5)、(3.3) 和假设 (5.1)，我们得到 $f^{n+2}_{\delta_t/4^n}(0) \in B(2,\ \theta)$。由于 $f_{\delta_t/4^n}(0) \in B(-2,\ \theta)$，进而 $f^{k+2}_{\delta_t/4^n}(0) \in B(2,\ \theta)$，其中 $0 \leqslant k < n$、$n > n_0$ 和 $t \in (1/4,\ 1]$)，该结论对 $\eta = |\delta_1|/4^{n_0}$ 成立。□

6. 圆柱集

本节定义圆柱集 $\mathcal{C}^{-2}_{\delta\ n\ ,}$、$\mathcal{C}^{0}_{\delta,\ n}$、$\mathcal{C}^{+2}_{\delta\ n\ ,}$，它们分别给出点 $-p_\delta$、0、p_δ 的邻域划分。不过，我们先讨论 f_δ 的逆分支。

由于 $\delta_0 \in \mathbb{R}^-$，朱利亚集 $\mathcal{J}_{\delta_0}$ 与虚轴不相交，因此我们记

$$f^{-1}_{\delta_0,+} : \mathcal{J}_{\delta_0} \to \mathcal{J}_{\delta_0,+} = \mathcal{J}_{\delta_0} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\},$$
$$f^{-1}_{\delta_0,-} : \mathcal{J}_{\delta_0} \to \mathcal{J}_{\delta_0,-} = \mathcal{J}_{\delta_0} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

利用全纯运动 φ_δ，我们可以定义 $f^{-1}_{\delta\pm,}$ 对于参数 $\delta \in \mathcal{U}$，即：$f^{-1}_{\delta\pm\ ,}$: $\mathcal{J}_\delta \to \varphi_\delta(\mathcal{J}_{\delta_0,\ \pm})$。

但是，当 δ 接近 0 时（即 $0 < |\delta| < \eta(\alpha)$），朱利亚集也与 $i\mathbb{R}$ 不相交（见引理 4.5 的证明），因此我们可以仿照 δ_0，类似地定义 $f^{-1}_{\delta\pm\ ,}$:

$$f^{-1}_{\delta,+} : \mathcal{J}_\delta \to \mathcal{J}_{\delta,+} = \mathcal{J}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\},$$
$$f^{-1}_{\delta,-} : \mathcal{J}_\delta \to \mathcal{J}_{\delta,-} = \mathcal{J}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

对于 $\delta = 0$，我们取 $f^{-1}_{0\ ,\ +}$: $[-2,2] \to [0,2]$，以及 $f^{-1}_{0\ ,\ -}$: $[-2,2] \to [-2,0]$。此外

$$f^{-n}_{\delta,+} := (f^{-1}_{\delta,+})^n, \quad f^{-n}_{\delta,-} := (f^{-1}_{\delta,-})^n.$$

现在定义从$\mathcal{J}_{\delta,\ +}$ 到圆柱集$\mathcal{C}^{+2}_{\delta\ n\ ,}$，$n \geqslant 0$的划分，可用于描述 $p_\delta \approx 2$ 的邻域。

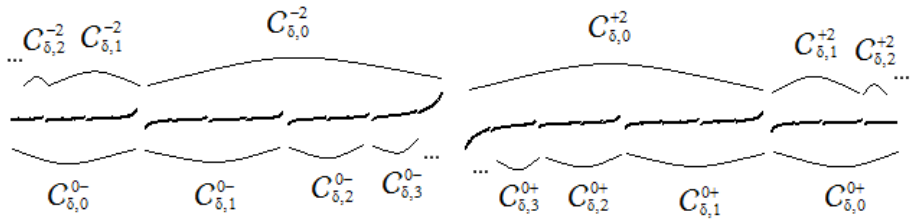

图2. 将 $\mathcal{J}_\delta$ 划分为圆柱集，其中 $\delta = \frac{1}{50} + \frac{1}{50}i$。 — —

首先，注意到$\mathcal{J}_{\delta,\,+} = \mathcal{J}_{\delta,\,+-} \cup \mathcal{J}_{\delta,\,++}$，其中$\mathcal{J}_{\delta,\,+-} := f^{-1}_{\delta+,}(\mathcal{J}_{\delta,\,-})$，且$\mathcal{J}_{\delta,\,++} := f^{-1}_{\delta+,}(\mathcal{J}_{\delta,\,+})$。我们取

$$\mathcal{C}^{+2}_{\delta,0} := \mathcal{J}_{\delta,+-}, \quad \text{and} \quad \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n} := f^{-n}_{\delta,+}(\mathcal{C}^{+2}_{\delta,0}).$$

特别地，我们有 $\mathcal{J}_{\delta,++} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n} \cup \{p_\delta\}$ 和

$$\mathcal{J}_{\delta,+} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n} \cup \{p_\delta\}.$$

圆柱集 $\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n}$, $n \geqslant 0$ 描述了 $-p_\delta \approx -2$ 的邻域，并关于 0 对称放置。因此我们得到

$$\mathcal{J}_{\delta,-} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^{-2}_{\delta,n} \cup \{-p_\delta\}.$$

为了描述 0 附近的 $\mathcal{J}_\delta$ 划分，我们取

$$\mathcal{C}^{0+}_{\delta,0} := \mathcal{J}_{\delta,++}, \quad \text{and} \quad \mathcal{C}^{0+}_{\delta,n} := f^{-1}_{\delta,+}(\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n-1}) \quad \text{for } n \geqslant 1,$$

因此 $\mathcal{J}_{\delta,+} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^{0+}_{\delta,n} \cup \{f^{-1}_{\delta,+}(-p_\delta)\}$，而圆柱集 $\mathcal{C}^{0-}_{\delta,n}$, $n \geqslant 0$ 关于 0 对称放置。最后

$$\mathcal{C}^{0}_{\delta,n} := \mathcal{C}^{0-}_{\delta,n} \cup \mathcal{C}^{0+}_{\delta,n}.$$

注意

$$\mathcal{J}_\delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^{0}_{\delta,n} \cup f^{-1}_{\delta}(\{-p_\delta\}).$$

我们有以下重要关系

$$f_\delta(\mathcal{C}^{0+}_{\delta,n}) = f_\delta(\mathcal{C}^{0-}_{\delta,n}) = \mathcal{C}^{-2}_{\delta,n-1}, \qquad f_\delta(\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n}) = \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n-1},$$

对于 $n \geqslant 1$，因此 $f^2_\delta(\mathcal{C}^{0+}_{\delta\,n,}) = f^2_\delta(\mathcal{C}^{0-}_{\delta\,n,}) = \mathcal{C}^{+2}_{\delta,\,n-2}$，对于 $n \geqslant 2$。

我们还将考虑以下集合：

$$\mathcal{M}^0_{\delta,N} = \bigcup_{n \geqslant N} \mathcal{C}^0_{\delta,n}.$$

接下来，取 $C^0_n := \varphi^{-1}_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,\,n})$ 和 $M^0_N := \varphi^{-1}_\delta(\mathcal{M}^0_{\delta,\,N})$（$\mathcal{J}_{\delta_0}$ 的子集）。

记号：令 $\mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta\,n,} := \mathcal{C}^{-2}_{\delta,n} \cup \mathcal{C}^{+2}_{\delta\,n,}$，而 $\mathcal{C}^{0\pm}_{\delta\,n,}$ 表示“$\mathcal{C}^{0-}_{\delta\,n,}$ 或 $\mathcal{C}^{0+}_{\delta\,n,}$”。

引理 6.1。 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$，存在 $K > 1$ 和 $\eta > 0$，使得若 $z \in \mathcal{C}^0_{\delta,n}$, $n \geqslant 0$，则

(1) $|z| > K^{-1}|\lambda_\delta|^{-n/2}$, (2) $|z| < K|\lambda_\delta|^{-n/2}$,
若 $|z| > \sqrt{|\delta|}$, (3) 直径 $\mathcal{C}^{0\pm}_{\delta,n} < K|\lambda_\delta|^{-n/2}$,

其中 $0 < |\delta| < \eta$ 且 $\alpha =$ 辐角 δ。

证明。 固定 $\alpha \in (0, 2\pi)$，并令 $\alpha =$ 辐角 δ。令 $n_0 \in \mathbb{N}$ 为满足 $f_0^2(\mathcal{C}^0_{0,n_0}) \subset B(2, r_z)$ 的最小数。于是，存在 $\eta > 0$，使得 $f_\delta^2(\mathcal{C}^0_{\delta,n_0}) \subset B(2, r_z)$，其中 $0 < |\delta| < \eta$。

步骤 *1.* 若 $z \in \mathcal{C}^0_{\delta,n}$，其中 $n \geqslant n_0$，则

$$|f_\delta(z) - f_\delta(0)| = |z|^2.$$

由于 $-p_\delta \approx -2 + \delta/3$（参见（3.1）），而 $f_\delta(0) = -2 + \delta$，利用引理 4.4 可得

$$K_1^{-1}|f_\delta(z) - (-p_\delta)| < |f_\delta(z) - f_\delta(0)|,$$

对于某个 $K_1 > 0$（取决于 α）。若 $|z| > \sqrt{|\delta|}$，则 $f_\delta(z) \notin B(-2+\delta, |\delta|)$，因此如有必要，改变 K_1，可得

$$|f_\delta(z) - f_\delta(0)| < K_1|f_\delta(z) - (-p_\delta)|.$$

因此

$$K_1^{-1}|f_\delta(z) - (-p_\delta)| < |z|^2 < K_1|f_\delta(z) - (-p_\delta)|, \tag{6.1}$$

其中，右侧的不等式在假设 $|z| > \sqrt{|\delta|}$ 下成立。

我们有 $f_\delta^{n-n_0+1}(f_\delta(z)) \in f_\delta^2(\mathcal{C}^0_{\delta,n_0})$，当然 $f_\delta^{n-n_0+1}(-p_\delta) = p_\delta$。由于 f_δ 在 $B(2, r_z)$ 上与 $z \mapsto \lambda_\delta z$ 共轭，因此可得

$$|f_\delta^{n-n_0+2}(z) - p_\delta| \asymp |\lambda_\delta|^{n-n_0+1}|f_\delta(z) - (-p_\delta)|.$$

$|f_\delta^{n-n_0+2}(z) - p_\delta|$ 与零分离这一事实，导出

$$|\lambda_\delta|^{n-n_0+1}|f_\delta(z) - (-p_\delta)| \asymp 1, \quad \text{hence} \quad |f_\delta(z) - (-p_\delta)| \asymp |\lambda_\delta|^{-n}.$$

因此，关于 $n \geqslant n_0$ 的前两个陈述由 (6.1) 得出。

步骤 *2.* 如果 $z \in \mathcal{C}^0_{\delta,n}$, $n \geqslant n_0$ 那么第一个陈述给出 $|f'_\delta(z)| > K_2^{-1}|\lambda_\delta|^{-n/2}$，因此我们得出

$$\operatorname{diam} f_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n}) = \operatorname{diam} f_\delta(\mathcal{C}^{0\pm}_{\delta,n}) > K_3^{-1}|\lambda_\delta|^{-n/2} \operatorname{diam} \mathcal{C}^{0\pm}_{\delta,n}.$$

由于 $f_\delta^{n-n_0+1}(f_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n})) = f_\delta^2(\mathcal{C}^0_{\delta,n_0})$，我们得到

$$|\lambda_\delta|^{n-n_0+1} \operatorname{diam} f_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n}) \asymp \operatorname{diam} f_\delta^2(\mathcal{C}^0_{\delta,n_0}).$$

因此

$$\operatorname{diam} \mathcal{C}^{0\pm}_{\delta,n} < K_4|\lambda_\delta|^{-n/2+n_0-1} \operatorname{diam} f_\delta^2(\mathcal{C}^0_{\delta,n_0}) < K_5|\lambda_\delta|^{-n/2},$$

所以这三个陈述对于 $n \geqslant n_0$ 都成立，且存在某个常数 $K > 0$。

接下来，在必要时改变 K，我们可以假设这些陈述对 $n \geqslant 0$ 成立。□

7. 0 附近的朱利亚集

为了计算公式 (2.3) 分子中的积分，我们需要关于朱利亚集在 0 附近位置的精确信息。推论 4.2 对于 $\delta \neq 0$ 并未给出任何精确信息，因此我们需要改变尺度以观察细节。由于点 $-p_\delta$ 的原像靠近 $\pm\sqrt[6]{3}\sqrt{-\delta}$，我们将各个方向的尺度都改变为因子 $1/\sqrt{|\delta|}$。因此，记

$$\mathcal{J}_\delta^* := \frac{1}{\sqrt{|\delta|}}\mathcal{J}_\delta.$$

接下来，我们定义 0 的小邻域及其缩放后的版本如下：

$$\mathcal{N}_{\delta,R} := \mathcal{J}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leqslant R\sqrt{|\delta|}\},$$
$$\mathcal{N}_{\delta,R}^* := \mathcal{J}_\delta^* \cap \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leqslant R\},$$

其中 $R \geqslant 1$。因此，我们有 $\mathcal{N}_{\delta,R} = \sqrt{|\delta|}\mathcal{N}_{\delta,R}^*$。记 $N_R := \varphi_\delta^{-1}(\mathcal{N}_{\delta,R}) \subset \mathcal{J}_{\delta 0}$。我们用 b_δ 表示一个靠近 $-p_\delta$ 的某个原像的点，即

$$b_\delta := \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{-\delta} = \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{|\delta|}\sin\frac{\alpha}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{|\delta|}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

事实上，$f_\delta(b_\delta) = -2 + \frac{1}{3}\delta \approx -p_\delta$（参见（3.1））。

我们需要定义以下集合：

$$H_{\delta,R} : \begin{cases} xy = -\frac{1}{3}\operatorname{Im}\delta = -\frac{1}{3}|\delta|\sin\alpha, \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{|\delta|}\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant |x| \leqslant R\sqrt{|\delta|}, \end{cases}$$

其中 $x = \operatorname{Re} z$、$y = \operatorname{Im} z$、$\delta \neq 0$、$\arg\delta = \alpha \in (0, 2\pi)$，以及 $R \geqslant 1$。包含于左、右半平面中的 $H_{\delta,R}$ 分支分别记为 $H_{\delta,R}^-$ 和 $H_{\delta,R}^+$。$H_{\delta,R}^+$ 的端点为 b_δ，而将记为 $z_{\delta,R}$ 的点（即 $\operatorname{Re} z_{\delta,R} = R\sqrt{|\delta|}$）。

将 x、y 替换为 $\sqrt{|\delta|}x$、$\sqrt{|\delta|}y$ 后，对于 $\alpha \in (0, 2\pi)$，我们得到

$$H_{\alpha,R}^* : \begin{cases} xy = -\frac{1}{3}\sin\alpha, \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant |x| \leqslant R. \end{cases}$$

因此我们有 $H_{\delta,R} = \sqrt{|\delta|}H_{\alpha,R}^*$，其中 $\alpha = \arg\delta$。我们将 $H_{\alpha,R}^{*-}$，和 $H_{\alpha,R}^{*+}$，分别类似地定义为 $H_{\delta,R}^{\pm}$。$H_{\alpha,R}^{*+}$ 的端点为

$$b_\alpha^* := \frac{1}{\sqrt{|\delta|}}b_\delta = \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\frac{\alpha}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad z_{\alpha,R}^* := R - i\frac{1}{3R}\sin\alpha. \tag{7.1}$$

注意，$\arg(z_{\alpha,R}^*) = \arg(z_{\delta,R}) = -\gamma_{\alpha,R}$，其中

$$\gamma_{\alpha,R} = \arctan\left(\frac{1}{3R^2}\sin\alpha\right). \tag{7.2}$$

因此，$\gamma_{\alpha,R} > 0$ 对于 $\alpha \in (0, \pi)$。

现在我们证明以下命题：

命题 7.1. 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $R \geqslant 1$，若 $\delta \to 0$ 其中 $\alpha = \arg\delta$，则

$$\mathcal{N}_{\delta,R}^* \to H_{\alpha,R}^*,$$

在配备豪斯多夫度量的 $\mathbb{C}$ 非空紧子集空间中。

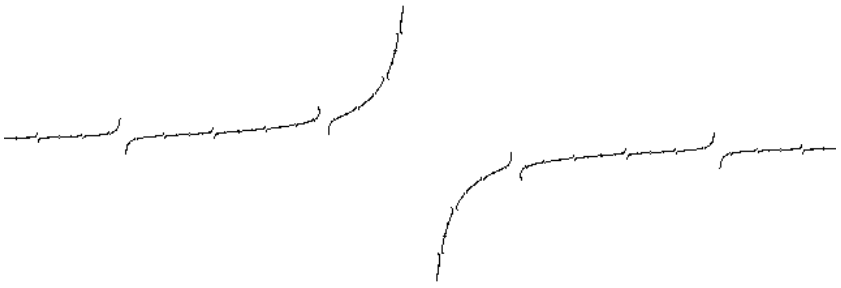

图 3. 接近 0 的朱利亚集 $\mathcal{J}_\delta$ for $\delta = \frac{1}{25} + \frac{1}{100}i$。

证明。 取定 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $R \geqslant 1$。

步骤 *1.* 首先我们将证明

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in\mathcal{N}^*_{\delta,R}} \operatorname{dist}(z, H^*_{\alpha,R}) = 0, \tag{7.3}$$

其中 $\alpha = \arg\delta$。

若 $z = x + iy$，则我们定义

$$l^+_\delta : xy = -\frac{1}{3}\operatorname{Im}\delta + |\delta|^{17/16}, \quad l^-_\delta : xy = -\frac{1}{3}\operatorname{Im}\delta - |\delta|^{17/16}.$$

$l^\pm_\delta$ 的像是水平直线，满足

$$\operatorname{Im}\big(f_\delta(l^\pm_\delta)\big) = \frac{1}{3}\operatorname{Im}\delta \pm 2|\delta|^{17/16}.$$

集合 $|\operatorname{Re} z| \leqslant R\sqrt{|\delta|}$ 被映射到半平面 $\operatorname{Re} z \leqslant -2 + R^2|\delta| + \operatorname{Re}\delta$中。由于 $-p_\delta = -2 + \delta/3 + O(\delta^2)$（参见 (3.1)），由引理 4.4 (1) 可知，集合 $\mathcal{N}_{\delta,R}$ 位于直线 $l^\pm_\delta$ 之间。

此外，$\mathcal{N}_{\delta,R}$由 $f_\delta^{-1}(k_\delta)$所界定，其中 k_δ: $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re} p_\delta - |\delta|^2$（见引理 4.4 (2)）。由于 $f_\delta(b_\delta) = -2 + \delta/3$，(3.1) 得出 $|-p_\delta - f_\delta(b_\delta)| \approx |\delta|^2/27$，而临界值等于 $-2 + \delta$。因此我们看到，$f_\delta^{-1}(k_\delta)$与点 $\pm b_\delta$ 之间的距离为 $|\delta|^{3/2}$量级。

因此，集合 $\mathcal{N}^*_{\delta,\,R}$ 位于这些曲线之间

$$xy = -\frac{1}{3}\sin\alpha \pm |\delta|^{1/16},$$

以及缩放后的曲线 $f_\delta^{-1}(k_\delta)$ 之间，它们与 $\pm b^*_\alpha$ 的距离为 $|\delta|$ 阶。因此，(7.3) 成立。

步骤 *2*。 现在我们将证明

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in H^*_{\alpha,R}} \operatorname{dist}(z, \mathcal{N}^*_{\delta,R}) = 0. \tag{7.4}$$

反之，假设存在 $z_0 \in H^*_{\alpha,\,R}$, $r_0 > 0$，以及一个序列$\delta_n \to 0$，使得 $B(z_0, r)\cap\mathcal{N}^*_{\delta_n,\,R} = \emptyset$。注意，$\pm b^*_\alpha$与 $f_\delta^{-1}(-p_\delta)$ 的缩放原像之间的距离为 $|\delta|$ 阶，因此缩放后的朱利亚集位于 $B(z_0,\ r_0)$“两侧”。我们可以假设 $0 \notin B(z_0,\ r_0)$。

接下来，我们有 $B(\sqrt{|\delta_n|}z_0,\ \sqrt{|\delta_n|}r_0)\cap\mathcal{N}_{\delta_n,\ R}=\emptyset$，于是

$$f_{\delta_n}\big(B(\sqrt{|\delta_n|}z_0,\sqrt{|\delta_n|}r_0)\big)\cap\mathcal{J}_{\delta_n}=\emptyset.$$

由于 $f'_{\delta_n}(\sqrt{|\delta_n|}z_0)=\kappa\sqrt{|\delta_n|}$，对于某个 $\kappa\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，由 Koebe 四分之一定理可得

$$B\big(f_{\delta_n}(\sqrt{|\delta_n|}z_0),\kappa r_0|\delta_n|/4\big)\subset f_{\delta_n}\big(B(\sqrt{|\delta_n|}z_0,\sqrt{|\delta_n|}r_0)\big).$$

由于 $\operatorname{Im} f_{\delta_n}(\sqrt{|\delta_n|}z_0)=\operatorname{Im}\ \delta_n/3$，点 $f_\delta(\sqrt{|\delta_n|}z_0)$ 位于直线 $\operatorname{Im}\ z=$ –$\operatorname{Im}\ p_{\delta_n}\pm|\delta_n|^{17/16}$ 之间。因此，由引理 4.4 (1) 可知，存在 $0<r_1\leqslant\kappa r_0/4$，使得

$$A_{\alpha,n}:=\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}(z-f_{\delta_n}(\sqrt{|\delta_n|}z_0))|\leqslant r_1|\delta_n|\}\cap\mathcal{J}_{\delta_n}=\emptyset.$$

集合 $f_{\delta_n}(\mathcal{N}_{\delta_n,R})$ 的直径接近 $R^2|\delta_n|$，而 $f_{\delta_n}(\mathcal{N}_{\delta_n,R})$ 可通过有界畸变映射到一个直径大于 $r_z/5$ 的集合。因此，$A_{\alpha,n}$ 的像的“宽度”与 0 分离。这与推论 4.2 矛盾。因此 (7.4) 成立，结论得证。□

8. 共形测度与不变测度

回顾第 2 节，ω_δ（归一化后）是指数为 d（δ）的共形测度（参见 (2.2)），而 μ_δ 是与 ω_δ 等价的 f_δ-不变测度。我们假设 μ_δ（$\mathcal{J}_\delta$）$=\omega_\delta$（$\mathcal{J}_\delta$）$=4$。

我们将重标度后的测度定义如下：

$$\omega^*_\delta(A):=\frac{1}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\,\omega_\delta(\sqrt{|\delta|}A),\quad\text{and}\quad\mu^*_\delta(A):=\frac{1}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\,\mu_\delta(\sqrt{|\delta|}A).$$

因此，ω^*_δ 和 μ^*_δ 的支集均为 $\mathcal{J}^*_\delta$。

本节的主要结果是命题 8.4，它讨论了当 $\delta\to0$ 时 ω^*_δ（因此 μ^*_δ 也如此）的极限。但首先，我们将讨论 ω_δ 和 μ_δ 的极限。

对于 $\delta=0$，情况如下：测度 ω_0 就是勒贝格测度 λ。接下来，我们知道映射 φ_v（z）$=(\frac{4}{\pi})\arcsin(\frac{z}{2})$ 将 f_0 共轭到 V（见第 4.2 节）。由于勒贝格测度是 V-不变的，由 $\varphi_v^*\lambda$（A）$=\lambda$（φ_v（A））定义的测度是具有如下密度的 f_0-不变测度

$$\frac{d\mu_0}{d\omega_0}(z)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(z/2)^2}},\tag{8.1}$$

（参见 [11,第 V 章]）。

第一个事实由 [13,第 5 节1]得出：

命题 8.1。对于每个 $\alpha\in(0,2\pi)$，测度 ω_0 等于 ω_δ的弱*极限，其中 $\delta\to0$ 且 $\alpha=\arg\delta$。

现在我们来证明：

命题 8.2。对于每个 $\alpha\in(0,2\pi)$，测度 μ_0 等于 μ_δ的弱*极限，其中 $\delta\to0$ 且 $\alpha=\arg\delta$。

证明。固定 $\alpha\in(0,\ 2\pi)$。

步骤 *1*。 由 [15, 定理 4.1、4.12]可知，密度 $h_\delta := d\mu_\delta/d\omega_\delta$等于极限 $\mathcal{L}^n_{\phi_\delta}(\mathbf{1})$, 其中 $\phi_\delta = -d(\delta)\log|f'_\delta(\varphi_\delta)|$, $n\to\infty$。因此，如果 $z=\varphi_\delta(s)$，则 (2.1) 导出

$$h_\delta(z)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}^n_{\phi_\delta}(\mathbf{1})(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\overline{s}\in T^{-n}(s)}|(f^n_\delta)'(\varphi_\delta(\overline{s}))|^{-d(\delta)}. \tag{8.2}$$

设 $\delta_k\to 0$，其中 $\arg\delta_k=\alpha$，为一个满足μ_{δ_k} 在弱*拓扑下趋于测度 $\hat{}\mu_0$ 的序列。

若 $z_0\in(-2,2)$，则可以找到 r ，使得当 k 足够大且 δ接近 0 时， $B(z_0,r)$ 与后临界集分离（参见命题5.1）。于是， $f^n_{\delta_k}$的所有逆分支 $n\geqslant 1$在 $B(z_0,r)$上都有一致有界的畸变。因此，由 (8.2) 可知，存在一个常数 $K_1>0$ 使得

$$h_{\delta_k}\big|_{B(z_0,r)\cap\mathcal{J}_{\delta_k}}<K_1. \tag{8.3}$$

取极限（并在必要时改变 K_1），我们得到

$$K_1^{-1}<h_0\big|_{(z_0-r,z_0+r)}<K_1, \tag{8.4}$$

或在 $B(z_0-r,z_0+r)$上 $h_0=0$。后一种情况下，我们在 $(-2,2)$ 上得到 $h_0=0$。

极限测度 $\hat{}\mu_0$ 是 f_0-不变的。因此可知，若 $\hat{}\mu_0$ 有原子，唯一的可能就是不动点 $p_0=2$。所以，只需证明 p_0处没有原子，因为在这种情况下，(8.4) 成立，且 $\hat{}\mu_0$ 相对于 ω_0绝对连续。于是，由唯一性可得 $\hat{}\mu_0=\mu_0$，因此μ_0 是唯一可能的极限，结论得证。

步骤 *2*。 因此，现在我们证明在 p_0 处不存在原子。若 $\varphi_\delta(s)=z\in\mathcal{C}^{+2}_{\delta\,n}$，，则利用 (8.2) 可得

$$h_\delta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}|(f^{-1}_{\delta,-}\circ f^{-k}_{\delta,+})'(z)|^{d(\delta)}\cdot h_\delta((f^{-1}_{\delta,-}\circ f^{-k}_{\delta,+})(z)), \tag{8.5}$$

其中 $(f^{-1}_{\delta,-}\circ f^{-k}_{\delta,+})(z)\in\mathcal{C}^{-2}_{\delta,\,n+k+1}$。因此，我们必须估计 h_δ 在圆柱集 $\mathcal{C}^{-2}_{\delta,\,n+k+1}$ 上的取值。我们有

$$h_\delta(z)=|(f^{-1}_{\delta,-})'(z)|^{d(\delta)}\cdot h_\delta(f^{-1}_{\delta,-}(z))+|(f^{-1}_{\delta,+})'(z)|^{d(\delta)}\cdot h_\delta(f^{-1}_{\delta,+}(z)). \tag{8.6}$$

若$z\in\mathcal{C}^{-2}_{\delta,\,n+k+1}$，则$f^{-1}_{\delta\pm,}(z)\in\mathcal{C}^{0\pm}_{\delta,\,n+k+2}$.

设 $z_0=0$，并令 r 满足 (8.3)。那么，引理 6.1 与命题 7.1 结合可推出，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $C^{0\pm}_{\delta,\,n+k+2}\subset B(0,\ r)$，其中 $n\geqslant n_0$、 $k\in\mathbb{N}$。

再次利用引理 6.1 (1)，我们得到

$$|(f^{-1}_{\delta,\pm})'(z)|^{d(\delta)}=|f'_\delta(f^{-1}_{\delta,\pm}(z))|^{-d(\delta)}<K_2|\lambda_\delta|^{d(\delta)(n+k+2)/2},$$

因此，由 (8.3) 和 (8.6) 可得

$$h_\delta(z)<K_3|\lambda_\delta|^{d(\delta)(n+k+2)/2},$$

其中$z\in\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n+k+1}$。

若 $z \in \mathcal{C}^{+2}_{\delta\, n}$，则结合上述估计、公式 (8.5) 以及 $|(f_\delta^{-1}{}_{,-} \circ f_{\delta+}^{-k}{}_{,})(z)|^{d(\delta)} \asymp |\lambda_\delta|^{-d(\delta)(k+1)}$，这一事实，可得

$$h_\delta(z) < K_4 \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_\delta|^{d(\delta)(n-k)/2} < K_5 |\lambda_\delta|^{d(\delta)n/2},$$

其中 $n \geqslant n_0$。

我们有 $\omega_\delta(\mathcal{C}^{+2}_{\delta\, n}{}_{,}) \asymp (\operatorname{diam} \mathcal{C}^{+2}_{\delta\, n}{}_{,})^{d(\delta)} \asymp |\lambda_\delta|^{-d(\delta)n}$。因此，若 $N \geqslant n_0$，则

$$\mu_\delta\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n}\Big) = \int\limits_{\bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n}} h_\delta \, d\omega_\delta < K_6 \sum_{n=N}^{\infty} |\lambda_\delta|^{d(\delta)n/2} |\lambda_\delta|^{-d(\delta)n}$$

$$< K_6 \sum_{n=N}^{\infty} 4^{-n/3} < 3K_6 \Big(\frac{1}{4}\Big)^{N/3} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

由于上述估计不依赖于 δ，结论得证。 □

引理 8.3. 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在邻域 $U \ni 0$和 $\eta > 0$，使得

$$\big(1-\varepsilon\big)\frac{2}{\pi} < \frac{d\mu_\delta}{d\omega_\delta}\Big|_{U \cap \mathcal{J}_\delta} < \big(1+\varepsilon\big)\frac{2}{\pi},$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$ 和 $\alpha = \arg \delta$ 或 $\delta = 0$。

证明。固定 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $\varepsilon > 0$。与之前一样，我们记作 $h_\delta = d\mu_\delta / d\omega_\delta$。

由 (8.1) 可知，存在一个区间 $(-\kappa, \kappa)$，使得

$$\frac{2}{\pi} \leqslant h_0(z) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon}{3}\Big)\frac{2}{\pi}, \tag{8.7}$$

其中 $z \in (-\kappa, \kappa)$。因此，该结论对 $\delta = 0$ 成立。

我们可以找到（足够小的）$0 < r < \kappa$，使得 f_δ^n、$n \geqslant 1$ 在 $B(0, r)$ 上所有逆分支的畸变都能任意接近 1。因此，考虑到公式 (8.2)，我们可以假设，对于每个 $z_1, z_2 \in B(0, r) \cap \mathcal{J}_\delta$，都有

$$\big|h_\delta(z_1) - h_\delta(z_2)\big| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{2}{\pi}. \tag{8.8}$$

由于 h_0 和 h_δ 分别在 $(-r, r)$ 和 $B(0, r) \cap \mathcal{J}_\delta$ 上接近常数函数，由命题 8.1、8.2 可知，存在 $z_3 \in (-r, r)$ 和 $z_4 \in B(0, r) \cap \mathcal{J}_\delta$，使得 $|h_0(z_3) - h_\delta(z_4)| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{2}{\pi}$。因此，由 (8.7) 和 (8.8) 可得该结论。□

记 $l_{\alpha,R}$ 为支撑在 $H^*_{\alpha,R}$ 上的弧长测度。现在我们证明本节的主要结果：

命题 8.4. 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 和 $R \geqslant 1$，我们有

$$\omega_\delta^*\Big|_{\mathcal{N}^*_{\delta,R}} \to l_{\alpha,R},$$

在弱* 拓扑中，其中 $\delta \to 0$ 和 $\alpha = \arg \delta$。

证明。固定 $\alpha \in (0, 2\pi)$，$R \geqslant 1$，并令 $\alpha = \arg \delta$。只需考虑集合 $\mathcal{N}^*_{\delta,R}$，$\mathcal{N}^+_{\delta,R} := \mathcal{N}^*_{\delta,R} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$。记 $\mathcal{N}^+_{\delta,R} = \sqrt{|\delta|}\mathcal{N}^*_{\delta,R}$。

步骤 *1.* 设 U' 是 $H^*_{\alpha,R}$ 的一个小邻域，且与 0 分离。设 $U = U' \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < R\}$。对于任意博雷尔集 $A \subset U$，若 f^{n+1}_δ 在 $\sqrt{|\delta|}A$ 上是单射，则有

$$\omega^*_\delta(A) = \frac{1}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\,\omega_\delta(\sqrt{|\delta|}A) = \frac{1}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}} \int\limits_{f^{n+1}_\delta(\sqrt{|\delta|}A)} \left|(f^{-n-1}_{\delta,\nu})'\right|^{d(\delta)} d\omega_\delta$$

$$= \int\limits_{f^{n+1}_\delta(\sqrt{|\delta|}A)} \left|\frac{(f^{-n-1}_{\delta,\nu})'}{\sqrt{|\delta|}}\right|^{d(\delta)} d\omega_\delta, \quad (8.9)$$

其中 $f^{-n-1}_{\delta\,\nu}$，表示将 $f^{n+1}_\delta(\sqrt{|\delta|}U)$ 映射到 $\sqrt{|\delta|}U$ 的反分支。

我们的目标是证明，若 $\delta \to 0$，则可以找到 $n(\delta)$，使得对于每个满足 $l_{\alpha,R}(\partial A) = 0$ 的博雷尔集 $A \subset U$，上述积分趋于 $l_{\alpha,R}(A)$。

步骤 *2.* 设 $r_\delta > 0$ 为满足以下条件的最小数：存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^{n+1}_\delta(\mathcal{N}^+_{\delta,R}) \subset \overline{B(p_\delta, r_\delta)}, \quad \text{and} \quad f^{n+2}_\delta(\mathcal{N}^+_{\delta,R}) \not\subset \overline{B(p_\delta, r_z/2)}. \quad (8.10)$$

特别地，我们看到 $r_\delta \leqslant r_z/2$，而 r_δ 的可能取值与 0 分离。由命题 7.1 可知，当 δ 足够小时，$\mathcal{N}^+_{\delta,R} \subset U$。

设 (δ_k) 是一个趋于 0 的参数序列，且当 $k \to \infty$ 时满足 $r_{\delta_k} \to q$。设 n_k 满足 (8.10)，其中 δ_k。

我们有 $f^{n_k+1}_\delta(\sqrt{|\delta_k|}U) \subset B(p_\delta, r_z)$。若 $z \in f_\delta(\sqrt{|\delta_k|}U)$，则 $-z \in B(p_\delta, r_z)$，因此利用 (3.4) 得到

$$f^{n_k}_{\delta_k}(z) = f^{n_k}_{\delta_k}(-z) = \Phi^{-1}_{\delta_k}\big(\lambda^{n_k}_{\delta_k}\Phi_{\delta_k}(-z)\big).$$

因此，若 $z \in U$，则有

$$F_{\alpha,q,k}(z) := f^{n_k+1}_{\delta_k}\big(\sqrt{|\delta_k|}z\big) = \Phi^{-1}_{\delta_k}\big(\lambda^{n_k}_{\delta_k}\Phi_{\delta_k}(-|\delta_k|z^2 + 2 - \delta_k)\big). \quad (8.11)$$

步骤 *3.* 我们将证明序列 $F_{\alpha,q,k}$ 在 U 上一致收敛。记

$$g_\delta(z) := \frac{1}{|\delta|}\Phi_\delta\big(-|\delta|z^2 + 2 - \delta\big) = \frac{1}{|\delta|}\Phi_\delta\big(p_\delta - |\delta|z^2 + 2 - \delta - p_\delta\big),$$

因此我们有

$$F_{\alpha,q,k}(z) = \Phi^{-1}_{\delta_k}\big(|\delta_k|\lambda^{n_k}_{\delta_k} g_{\delta_k}(z)\big). \quad (8.12)$$

注意

$$2 - \delta_k - p_{\delta_k} = -\frac{2}{3}\delta_k + O(|\delta_k|^2).$$

因此

$$g_{\delta_k}(z) = \frac{\Phi_{\delta_k}\big(p_{\delta_k} + |\delta_k|(-z^2 - \frac{2}{3}v + O(|\delta_k|))\big)}{|\delta_k|},$$

其中 $v = e^{i\alpha}$。由于 $\Phi'_{\delta_k}(p_{\delta_k}) = 1$，$\delta_k \to 0$ 而 U 有界，我们得出

$$g_{\delta_k}(z) \rightrightarrows -z^2 - \frac{2}{3}v. \quad (8.13)$$

由命题 7.1 及事实 $\Phi_\delta \rightrightarrows \Phi_0$，可得

$$\operatorname{diam}(g_{\delta_k}(\mathcal{N}^{*,+}_{\delta_k,R})) \to K_1,$$

对于某个常数 K_1 （它不依赖于 q，且接近 R^2）。另一方面

$$\operatorname{diam}(F_{\alpha,q,k}(\mathcal{N}^{*,+}_{\delta_k,R})) \to q.$$

因此，由 (8.12) 以及 $\arg(\lambda_{n_k}) = O(\delta_k)$ 这一事实，可得

$$|\delta_k|\lambda^{n_k}_{\delta_k} \to \kappa \in \mathbb{R}.$$

因此，结合 (8.13) 与上述内容，可得 (8.12) 给出

$$F_{\alpha,q,k}(z) \rightrightarrows \Phi_0^{-1}\Big(\kappa\Big(-z^2 - \frac{2}{3}v\Big)\Big) := F_{\alpha,q}(z),$$

其中 $k \to \infty$。

步骤 4. 由于 $(b^*_\alpha)^2 = -\frac{2}{3}v$，我们有 $F_{\alpha,\,q}(b^*_\alpha) = p_0 = 2$。因此，根据命题 7.1 以及 (δ_k) 的选取，我们得出

$$F_{\alpha,q}\big|_{H^+_{\alpha,R}} : H^+_{\alpha,R} \to [2-q, 2] \subset \mathcal{J}_0.$$

此外，$F_{\alpha,\,q}\big|_{H^+_{\alpha}\,,\,R}$ 是一个双射，于是

$$\int\limits_{F_{\alpha,q}(A)} \big|(F^{-1}_{\alpha,q})'\big| d\omega_0 = l_{\alpha,R}(A). \tag{8.14}$$

因此，假设 $l_{\alpha,\,R}(\partial A) = 0$ 导致 $\omega_0(F_{\alpha,\,q}(\partial A)) = 0$。

我们有（参见 (8.11)）

$$F^{-1}_{\alpha,q,k}(z) = \frac{f^{-n_k-1}_{\delta_k}(z)}{\sqrt{|\delta_k|}} \to F^{-1}_{\alpha,q}(z).$$

因此，(8.9) 给出

$$\omega^*_{\delta_k}(A) = \int\limits_{F_{\alpha,q,k}(A)} \big|(F^{-1}_{\alpha,q,k})'\big|^{d(\delta_k)} d\omega_{\delta_k}.$$

由于 $\omega_0(F_{\alpha,\,q}(\partial A)) = 0$ 且 $F_{\alpha,\,q,\,k}$ 一致收敛到 $F_{\alpha,\,q}$，对称差的测度 $\omega_{\delta_k}(F_{\alpha,\,q,\,k}(A)\Delta F_{\alpha,\,q}(A))$ 趋于 0。因此，$|(F^{-1}_{\alpha\,,\,q,\,k})'|^{d(\delta_k)}$的一致收敛、命题 8.1 和 (8.14) 得出

$$\int\limits_{F_{\alpha,q,k}(A)} \big|(F^{-1}_{\alpha,q,k})'\big|^{d(\delta_k)} d\omega_{\delta_k} \to \int\limits_{F_{\alpha,q}(A)} \big|(F^{-1}_{\alpha,q})'\big| d\omega_0 = l_{\alpha,R}(A).$$

因此，如果 $r(\delta_k) \to q$，该结论成立。但是，$l_{\alpha,\,R}$ 是唯一可能的极限，因为对于每个 δ_k，我们总能找到一个子序列 δ_{j_k}，使得$r(\delta_{j_k}) \to q$。□

9. 关键积分

9.1. 定理 1.1 的证明中的主要问题是估计公式 (2.3) 分子中的积分，即：

$$\int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \frac{\partial}{\partial t} \log |f'_{tv}(\varphi_{tv})| d\tilde{\mu}_{tv}. \tag{9.1}$$

令 $\dot{\varphi}_\delta := \frac{\partial}{\partial \delta}\varphi_\delta$。我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(f'_{tv}(\varphi_{tv})) = \frac{\partial}{\partial t}(2\varphi_{tv}) = 2v\dot{\varphi}_\delta\big|_{\delta=tv}.$$

因此，被积函数可以改写如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \log |f'_{tv}(\varphi_{tv})| = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}(f'_{tv}(\varphi_{tv}))}{f'_{tv}(\varphi_{tv})}\right) = \mathrm{Re}\left(v\frac{\dot{\varphi}_\delta\big|_{\delta=tv}}{\varphi_{tv}}\right). \tag{9.2}$$

9.2. 现在我们推导 $\dot{\varphi}_\delta$ 的公式。函数 φ_δ 将 $f_{\delta_0} = T$ 共轭为 f_δ，因此 $\varphi_\delta(T(s)) = \varphi_\delta^2(s) - 2 + \delta$。对两边关于 δ 求导，得到

$$\dot{\varphi}_\delta(T(s)) = 2\varphi_\delta(s)\dot{\varphi}_\delta(s) + 1,$$

因此

$$\dot{\varphi}_\delta(s) = -\frac{1}{2\varphi_\delta(s)} + \frac{\dot{\varphi}_\delta(T(s))}{2\varphi_\delta(s)}. \tag{9.3}$$

接下来，将 s 替换为 $T(s)$、$T^2(s)$、.....、$T^{m-1}(s)$，得到

$$\dot{\varphi}_\delta(s) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\varphi_\delta(s)\cdot 2\varphi_\delta(T(s))\cdot \ldots \cdot 2\varphi_\delta(T^k(s))} + \\ + \frac{\dot{\varphi}_\delta(T^m(s))}{2\varphi_\delta(s)\cdot 2\varphi_\delta(T(s))\cdot \ldots \cdot 2\varphi_\delta(T^{m-1}(s))}.$$

由于 $2\varphi_\delta(s) = f'_\delta(\varphi_\delta(s))$，由链式法则可得

$$\dot{\varphi}_\delta(s) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(f_\delta^k)'(\varphi_\delta(s))} + \frac{\dot{\varphi}_\delta(T^m(s))}{(f_\delta^m)'(\varphi_\delta(s))}. \tag{9.4}$$

9.3. 假设 $z \in \mathcal{J}_\delta$ 接近 0，且 $z = \varphi_\delta(s)$。那么 (9.2) 的分母很小；此外，由 (9.3) 可知

$$\dot{\varphi}_\delta(s) = -\frac{1}{2z}(1 - \dot{\varphi}_\delta(T(s))).$$

由于 $\varphi_\delta(T(s))$ 接近 -2，由公式 (9.4) 可知，$\dot{\varphi}_\delta(T(s))$ 通常也应接近 $1/3$。若确实如此，则有（参见 (9.2)）

$$\left(v\frac{\varphi_\delta}{\varphi_\delta}\right) \overset{\text{实部}}{\approx} \frac{1}{3}\left(-\frac{v}{z^2}\right) \overset{\text{实部}}{}.$$

因此，我们可以预期，函数 $d'_v(tv)$ 与关于 μ_δ 在 0 的某个邻域上的 $\mathrm{Re}(-v/z^2)$ 积分具有相同的阶。

事实上，$\mathrm{Re}(-v/z^2)$ 的积分对 $d'_v(tv)$ 有决定性影响，我们将在命题 9.1 中对集合 $\mathcal{N}_{\delta,\,R}$ 进行计算。不过首先，对于 $\alpha\in(0,\ \pi)$ 和 $R\geqslant 1$，我们定义

$$I_{\alpha,R}:=\sqrt{6}\cos\alpha\Big(\sqrt{\frac{\sin(2\gamma_{\alpha,R})}{\sin\alpha}}-1\Big)+\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\sin\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\sqrt{\sin\beta}\,d\beta,\quad(9.5)$$

其中 $\gamma_{\alpha,R}$ 由公式 (7.2) 给出。对于 $\alpha=\pi$，我们取

$$I_{\pi,R}=\sqrt{6}\Big(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{1}{R}\Big)=\sqrt{6}-\frac{2}{R}.\quad(9.6)$$

注意

$$\sqrt{\frac{\sin(2\gamma_{\alpha,R})}{\sin\alpha}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\sin\alpha}{3R^2})^2}},$$

因此，当 $\alpha\to\pi^-$ 时，$I_{\alpha,R}\to I_{\pi,R}$。

命题 9.1. 对于每个 $\alpha\in(0,\ \pi]$ 和 $R\geqslant 1$，我们有

$$\lim_{\delta\to 0}|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)d\mu_\delta(z)=\frac{2}{\pi}I_{\alpha,R},$$

其中 $\alpha=\arg\delta$，且 $v=e^{i\alpha}$。

证明。固定 $\alpha\in(0,\pi)$ 和 $R\geqslant 1$。首先，利用命题 8.4，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{|\delta|}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)d\omega_\delta(z)&=\frac{1}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{(z/\sqrt{|\delta|})^2}\Big)d\omega_\delta(z)\\&=\int\limits_{\mathcal{N}^*_{\delta,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)d\omega^*_\delta(z)\to\int\limits_{H^*_{\alpha,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)dl_{\alpha,R}(z).\end{aligned}$$

因此，考虑到引理 8.3，我们需要证明在$H^*_{\alpha,R}$ 上的积分等于 $I_{\alpha,R}$。只需考虑将积分限制在$H^{*,\alpha}_{R}$,上的情形，因为在 $H^{*,\alpha}_{R}$,上的积分值相同。

我们有

$$\int\limits_{H^{*,+}_{\alpha,R}}\mathrm{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)dl_{\alpha,R}(z)=-\int\limits_{H^{*,+}_{\alpha,R}}\frac{(x^2-y^2)\cos\alpha+2xy\sin\alpha}{(x^2+y^2)^2}\,dl_{\alpha,R}(z),\quad(9.7)$$

其中 $x=\mathrm{Re}(z)$ 和 $y=\mathrm{Im}(z)$。

若 $\alpha\in(0,\ \pi)$，则 $H^{*,\alpha}_{R}$，是双曲线弧 $xy=-\frac{1}{3}\sin\alpha$，它位于 IV 象限，并连接点 b^*_α 和 $z^*_{\alpha,\,R}$（见 (7.1)）。因此，在极坐标 $H^{*,\alpha}_{R}$，中可写为:

$$H^{*,+}_{\alpha,R}:\begin{cases}x(t)=h_\alpha(t)\cdot\cos t,\\ y(t)=h_\alpha(t)\cdot\sin t.\end{cases}\quad t\in\Big[\arctan\frac{\mathrm{Im}\,b^*_\alpha}{\mathrm{Re}\,b^*_\alpha},\arctan\frac{\mathrm{Im}\,z^*_{\alpha,R}}{\mathrm{Re}\,z^*_{\alpha,R}}\Big],$$

其中 $h_\alpha^2(t)\cdot\frac{1}{2}\sin(2t) = -\frac{1}{3}\sin\alpha$，并且

$$\frac{\operatorname{Im} b_\alpha^*}{\operatorname{Re} b_\alpha^*} = -\cot\frac{\alpha}{2} = \tan\Big(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\Big), \quad \frac{\operatorname{Im} z_{\alpha,R}^*}{\operatorname{Re} z_{\alpha,R}^*} = -\frac{1}{3R^2}\sin\alpha.$$

因此，我们得到（参见（7.2））

$$H_{\alpha,R}^{*,+}: \begin{cases} x(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin(2t)}}\cdot\cos t, \\ y(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin(2t)}}\cdot\sin t, \end{cases} \quad t\in\Big[\frac{1}{2}(\alpha-\pi), -\gamma_{\alpha,R}\Big].$$

接下来，我们可以得到

$$dl_{\alpha,R} = \sqrt{h_\alpha^2(t)+(h_\alpha'(t))^2}\,dt = \sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin^3(2t)}}\,dt.$$

由于 $x(t)y(t) = -\frac{1}{3}\sin\alpha$，且 $x^2(t)+y^2(t) = h_\alpha^2(t)$，此外

$$x^2(t)-y^2(t) = h_\alpha^2(t)\big(\cos^2 t-\sin^2 t\big) = -\frac{2}{3}\sin\alpha\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)},$$

（9.7）中的积分等于

$$-\int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}} \frac{-\frac{2}{3}\sin\alpha\cos\alpha\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}-\frac{2}{3}\sin^2\alpha}{\frac{4}{9}\sin^2\alpha\frac{1}{\sin^2(2t)}}\sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin^3(2t)}}\,dt.$$

化简后得到

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}}\Big(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}+1\Big)\sin^2(2t)\sqrt{-\frac{\sin\alpha}{\sin^3(2t)}}\,dt.$$

代入 $\beta = 2t+\pi$，并结合上述计算，得到

$$\int\limits_{H_{\alpha,R}^{*,+}}\operatorname{Re}\Big(-\frac{v}{z^2}\Big)dl_{\alpha,R}(z) = \frac{\sqrt{6}}{4}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\Big(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+1\Big)\sin^2\beta\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin^3\beta}}\,d\beta.$$

我们将被积函数分成两部分。首先计算:

$$\frac{\sqrt{6}}{4}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\sin^2\beta\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin^3\beta}}\,d\beta = \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin\beta}}\,d\beta$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}\big(2\sqrt{\sin\beta}\big)\Big|_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\alpha\sqrt{\frac{\sin 2\gamma_{\alpha,R}}{\sin\alpha}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\alpha.$$

接下来有

$$\frac{\sqrt{6}}{4}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\sin^2\beta\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin^3\beta}}\,d\beta = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{\sin\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\pi-2\gamma_{\alpha,R}}\sqrt{\sin\beta}\,d\beta.$$

因此，在 $H^{*,+}_{\alpha,R}$ 上的积分等于 $\frac{1}{2}I_{\alpha,R}$（参见（9.5）），所以该结论对 $\alpha\in(0,\pi)$ 成立。

若 $\alpha=\pi$，则 $H^{*,+}_{\pi,R}$：$\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant x\leqslant R$，并且

$$\int\limits_{H^{*,+}_{\pi,R}} \mathrm{Re}\Big(-\frac{-1}{z^2}\Big)dl_{\pi,R}(z)=\int\limits_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{R}\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{R}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{R}=\frac{1}{2}I_{\pi,R},$$

（参见（9.6））至此证明完成。 □

现在我们给出两个技术性推论。

推论 9.2. 对于每个 $\alpha\in(0,\ \pi]$ 和 $R\geqslant 1$，都存在 $K_{\alpha,R}\in\mathbb{R}$，使得

$$\lim_{\delta\to 0}|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\frac{1}{|z|^2}\,d\mu_\delta(z)=K_{\alpha,R},$$

其中 $\alpha=$ 辐角 δ。

证明。与命题 9.1 的证明类似，只需计算积分 $\int_{H^{*,\alpha}{}^{+}{}_{,R}}|z|^{-2}dl_{\alpha}{}_{,R}(z)$。对于 $\alpha\in(0,\pi)$，按照前面的方法，我们得到

$$\int\limits_{H^{*,+}_{\alpha,R}}\frac{1}{|z|^2}\,dl_{\alpha,R}(z)=\int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}}-\frac{3}{2}\frac{\sin(2t)}{\sin\alpha}\sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin^3(2t)}}\,dt$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}}\frac{1}{\sqrt{-\sin(2t)}}\,dt:=\frac{1}{2}K_{\alpha,R}.$$

如果 $\alpha=\pi$，那么

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{R}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{R}:=\frac{1}{2}K_{\pi,R},$$

证明至此完成。 □

推论 9.3。 对于每个 $\alpha\in(0,\pi]$ 和 $R\geqslant 1$，存在 $K_{\alpha,R}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{\delta\to 0}|\delta|^{\frac{1}{2}(1-d(\delta))}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\frac{1}{|z|}\,d\mu_\delta(z)=K_{\alpha,R},$$

其中 $\alpha=$ 幅角 δ。

证明。利用命题 8.4，仿照命题 9.1 的证明，我们得到

$$\frac{\sqrt{|\delta|}}{\sqrt{|\delta|}^{d(\delta)}}\int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}}\frac{1}{|z|}\,d\omega_\delta(z)=\int\limits_{\mathcal{N}^{*}_{\delta,R}}\frac{1}{|z|}\,d\omega^{*}_{\delta}(z)\to\int\limits_{H^{*}_{\alpha,R}}\frac{1}{|z|}\,dl_{\alpha,R}(z).$$

对于 $\alpha \in (0,\ \pi)$，按前述方法进行，可得

$$\int\limits_{H^{*,+}_{\alpha,R}} \frac{1}{|z|}\, dl_{\alpha,R}(z) = \int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}} \sqrt{-\frac{3}{2}\frac{\sin(2t)}{\sin\alpha}}\sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin^3(2t)}}\, dt$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}} \frac{1}{|\sin(2t)|}\, dt = -\frac{1}{2}\log|\tan t|\Big|_{\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}^{-\gamma_{\alpha,R}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} + \log\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} =: \frac{1}{2}K_{\alpha,R}.$$

如果 $\alpha = \pi$，我们得到

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{R} \frac{1}{x}\, dx = \log R + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} =: \frac{1}{2}K_{\pi,R},$$

证明至此完成。 □

10. 关于 $\mathcal{J}_{\delta_0} \setminus N_R$ 的积分

本节的主要结果是命题 10.5，它表明 (9.2) 在 $\mathcal{J}_{\delta_0} \setminus N_R$ 上的积分很小（除以 $|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)}$之后）。这一结果与命题11.1（关于 N_R的积分）共同构成了证明定理1.1的主要要素。

不过，我们先介绍一些关于 $(f^n_\delta)'$ 的事实，以及命题 10.4；这两者将在上述两个命题的证明中使用。

由于 f_δ 在集合 $B(2, r_z)$ 上与 $z \mapsto \lambda_\delta z$ 共轭，我们得出：

引理 10.1。对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$，存在 $K > 1$，使得若 $z \in \mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta\, n}$，$n \geqslant 1$ 且 $1 \leqslant j \leqslant n$，则

$$K^{-1}|\lambda_\delta|^j < |(f^j_\delta)'(z)| < K|\lambda_\delta|^j,$$

其中 $\alpha =$ 辐角 δ 且 $0 < |\delta| < \eta$。

若 U是 0 的一个邻域且 $z \in \mathcal{J}_\delta \setminus U$，则 $f'_\delta(z)$ 与 $f'_0(\mathrm{Re}\ z)$ 接近，其中 $\mathrm{Re}\ z \in \mathcal{J}_0$，条件是 $|\mathrm{Re}\ z| \leqslant 2$。圆柱集 $C_{\delta,\nu} \ni z$和 $C_{0,\nu}$彼此接近（参见引理 4.5），因此有限轨道 $f^n_\delta(z)$ 和$f^n_0(\mathrm{Re}\ z)$ 也彼此接近。于是公式 (4.1) 得出：

引理 10.2. 对于任意 $\alpha \in (0, 2\pi)$、$\varepsilon > 0$、$N \in \mathbb{N}$ 以及开集 $U \ni 0$，存在 $\eta > 0$，使得若 $z \in \mathcal{J}_\delta$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant 2$, $\{z, f_\delta(z) \ldots, f^{n-1}_\delta(z)\} \cap U = \emptyset$, $n \leqslant N$，则

$$(1-\varepsilon)\, 2^n \sqrt{\frac{4-(\mathrm{Re}\, f^n_0(z))^2}{4-(\mathrm{Re}\, z)^2}} < |(f^n_\delta)'(z)| < (1+\varepsilon)\, 2^n \sqrt{\frac{4-(\mathrm{Re}\, f^n_0(z))^2}{4-(\mathrm{Re}\, z)^2}},$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$ 且 $\alpha = \arg\delta$。

由关于 $n = i$ 的引理 10.2、引理 6.1 (1) 以及关于 $n = j-1$ 的引理 10.1 可得：

推论 10.3. 对于每个 $\alpha \in (0, 2\pi)$， $N \in \mathbb{N}$ 存在 $K > 1$ 和 $\eta > 0$，使得如果 $z \in f_\delta^{-i}(\mathcal{C}^0_{\delta,m})$， $m \geqslant 0$，那么

$$|(f_\delta^{i+j})'(z)| > K^{-1} 2^i |\lambda_\delta|^{j-1-\frac{m}{2}},$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 < |\delta| < \eta$ 和 $\alpha =$ 辐角 δ。

命题 10.4。 对于每个 $\alpha \in (0, \pi]$ 和 $s > 0$，我们有

$$\lim_{\delta \to 0} |\delta|^s \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} |\dot{\varphi}_\delta| \, d\tilde{\mu_\delta} = 0,$$

其中 $\alpha =$ 辐角 δ。

证明。 固定 $\alpha \in (0, \pi]$, $s > 0$ 和 $N_0 \geqslant 4$ 使得 $2^{N_0} \geqslant 8K$，其中 K 是推论 10.3 中的一个常数。

步骤 *1*。 首先，我们定义集合$\mathcal{X}_{\delta,N_0}$，在该集合上很容易证明 $|(f_\delta^{N_0})'| > 10$。

若 $f_\delta^{N_0}(z) \in \mathcal{M}^0_{\delta,1}$ （注意 $\mathcal{M}^0_{0,1} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$），那么引理 10.2 告诉我们

$$|(f_\delta^{N_0})'(z)| > 2^{N_0} \frac{9}{10} \sqrt{\frac{2}{4}} \geqslant 2^4 \frac{9}{10} \frac{\sqrt{2}}{2} > 10.$$

对于 $z \in \mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,N_0+n}$, $n \geqslant 1$ 和 $z = \pm p_\delta$，导数也会大于 10，因此我们定义

$$\mathcal{X}_{\delta,N_0} := f_\delta^{-N_0}(\mathcal{M}^0_{\delta,1}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,N_0+n} \cup \{-p_\delta, p_\delta\}.$$

记 $X_{N_0} := \varphi_\delta^{-1}(\mathcal{X}_{\delta,N_0})$。令 $s \in X_{\delta,N_0}$，则对 $m = N_0$，由（9.4）可得:

$$\dot{\varphi}_\delta(s) = -\sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{(f_\delta^k)'(\varphi_\delta(s))} + \frac{\dot{\varphi}_\delta(T^{N_0}(s))}{(f_\delta^{N_0})'(z)}.$$

由于 $f_\delta^{N_0}(z) \in \mathcal{M}^0_{\delta,1}$，轨道 $\{z, f_\delta(z) \ldots, f_\delta^{N_0-1}(z)\}$ 与$\mathcal{M}^0_{\delta,N_0}$不相交，因此与 0 分离。因此，导数 $(f_\delta^k)'(\varphi_\delta(s))$ 也与 0 分离（分离程度由一个依赖于 N_0 的常数决定）。所以，测度 $\tilde{\mu_\delta}$ 是 T-不变的这一事实推出

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X_{N_0}} |\dot{\varphi}_\delta| \, d\tilde{\mu_\delta} &< K_1(N_0) + \frac{1}{10} \int\limits_{X_{N_0}} |\dot{\varphi}_\delta(T^{N_0})| \, d\tilde{\mu_\delta} \\
&< K_1(N_0) + \frac{1}{10} \int\limits_{T^{N_0}(X_{N_0})} |\dot{\varphi}_\delta| \, d\tilde{\mu_\delta} < K_1(N_0) + \frac{1}{10} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} |\dot{\varphi}_\delta| \, d\tilde{\mu_\delta}. \quad (10.1)
\end{aligned}$$

步骤 *2*. 现在，我们来处理集合

$$\mathcal{J}_\delta \setminus \mathcal{X}_{\delta,N_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f_\delta^{-N_0}(\mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,n}) \setminus \mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,n+N_0}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{-N_0}_{\delta,n},$$

其中 $\mathcal{G}^{-N_0}_{\delta,n} := f_\delta^{-N_0}(\mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,n}) \setminus \mathcal{C}^{\pm 2}_{\delta,n+N_0}$。令 $G^{-N_0}_{\delta,n} := \varphi_\delta^{-1}(\mathcal{G}^{-N_0}_{\delta,n})$。

若 $\varphi_\delta(s) = z \in \mathcal{G}^{-N_0}_{\delta\, n}$，则我们将对 $m = N_0 + n$ 使用公式 (9.4)：

$$\dot\varphi_\delta(s) = -\sum_{j=1}^{N_0+n} \frac{1}{(f^j_\delta)'(\varphi_\delta(s))} + \frac{\dot\varphi_\delta(T^{N_0+n}(s))}{(f^{N_0+n}_\delta)'(z)}. \tag{10.2}$$

在进行估计之前，我们先重写集合 $\mathcal{G}^{-N_0}_{\delta\, n}$。我们有

$$f^{-N_0}_\delta(\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n}) = f^{-(N_0-1)}_\delta(f^{-1}_\delta(\mathcal{C}^{-2}_{\delta,n})) = f^{-(N_0-1)}_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n+1}),$$

接下来

$$\begin{aligned} f^{-N_0}_\delta(\mathcal{C}^{+2}_{\delta,n}) &= \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n+N_0} \cup \bigcup_{k=0}^{N_0-1} f^{-(N_0-k-1)}_\delta(f^{-1}_{\delta,-}(\mathcal{C}^{+2}_{\delta,n+k})) \\ &= \mathcal{C}^{+2}_{\delta,n+N_0} \cup \mathcal{C}^{-2}_{\delta,n+N_0} \cup \bigcup_{k=0}^{N_0-2} f^{-(N_0-k-2)}_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n+k+2}). \end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{G}^{-N_0}_{\delta,n} = \bigcup_{k=-1}^{N_0-2} f^{-(N_0-k-2)}_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n+k+2}) = \bigcup_{k=1}^{N_0} f^{-(N_0-k)}_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n+k}). \tag{10.3}$$

步骤 *3.* 现在我们将估计式 (10.2) 中“尾项”的积分。如果 $z \in \mathcal{G}^{-N_0}_{\delta\, n}$，那么我们可以看到存在 $k \in \{1, \dots, N_0\}$，使得 $f^{N_0-k}_\delta(z) \in \mathcal{C}_{\delta,n+k}$。因此，推论 10.3 对于 $N = N_0 - 1$、$i = N_0 - k$、$m = n + k$ 和 $j = n + k$ 给出

$$\begin{aligned} |(f^{N_0+n}_\delta)'(z)| &> K^{-1} 2^{N_0-k} |\lambda_\delta|^{\frac{1}{2}(n+k)-1} \\ &= K^{-1} 2^{N_0} |\lambda_\delta|^{\frac{n}{2}-1} \Big(\frac{\sqrt{|\lambda_\delta|}}{2}\Big)^k > \frac{9}{40} K^{-1} 2^{N_0} \Big(\frac{19}{10}\Big)^n. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int\limits_{G^{-N_0}_n} \left| \frac{\dot\varphi_\delta(T^{N_0+n})}{(f^{N_0+n}_\delta)'(\varphi_\delta)} \right| d\tilde\mu_\delta &< \frac{40}{9} K 2^{-N_0} \Big(\frac{10}{19}\Big)^n \int\limits_{G^{-N_0}_n} |\dot\varphi_\delta(T^{N_0+n})|\, d\tilde\mu_\delta \\ &< \frac{40}{9} K 2^{-N_0} \Big(\frac{10}{19}\Big)^n \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} |\dot\varphi_\delta|\, d\tilde\mu_\delta. \end{aligned}$$

根据假设 $2^{N_0} > 8K$，可得

$$\frac{40}{9} K 2^{-N_0} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{10}{19}\Big)^n = 4K 2^{-N_0} \Big(\frac{10}{9}\Big)^2 < \frac{1}{2} \Big(\frac{10}{9}\Big)^2 < \frac{5}{8}.$$

因此我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{G^{-N_0}_n} \left| \frac{\dot\varphi_\delta(T^{N_0+n})}{(f^{N_0+n}_\delta)'(\varphi_\delta)} \right| d\tilde\mu_\delta < \frac{5}{8} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} |\dot\varphi_\delta|\, d\tilde\mu_\delta. \tag{10.4}$$

步骤 *4.* 我们需要估计式 (10.2) 中的有限和。如果 $\varphi_\delta(s)=z\in\mathcal{G}_{\delta\,n}^{-N_0}$,并且 $f_\delta^{N_0-k}(z)\in\mathcal{C}_{\delta,n+k}^0$ （参见式 (10.3)），那么我们可以写成

$$-\sum_{j=1}^{N_0+n}\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}=-\sum_{j=1}^{N_0-k}\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}-\sum_{j=N_0-k+1}^{N_0+n}\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}. \tag{10.5}$$

现在我们来估计右侧的第一个和。若 $k=N_0$，则假设它等于 0。

由于 $f_\delta^{N_0-k}(z)\in\mathcal{C}_{\delta,\ n+k}^0$，轨道 $\{z,f_\delta(z)\ldots,\ f_\delta^{N_0-k-1}(z)\}$与 $\mathcal{M}_{\delta,\ N_0}^0$ 不相交，因此与 0 分离。因此，导数与 0 分离，且该和由一个常数 $K_2(N_0)$ /4所界。于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N_0}\int\limits_{f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{C}_{\delta,n+k}^0)}\sum_{j=1}^{N_0-k}\left|\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}\right|d\mu_\delta(z)<K_2(N_0). \tag{10.6}$$

步骤 *5.* (10.5) 中最右侧的和可以改写为如下形式

$$\begin{aligned}-\sum_{j=N_0-k+1}^{N_0+n}\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}&=-\sum_{j=1}^{n+k}\frac{1}{(f_\delta^j)'(f_\delta^{N_0-k}(z))\cdot(f_\delta^{N_0-k})'(z)}\\&=-\frac{1}{(f_\delta^{N_0-k})'(z)}\cdot\frac{1}{f_\delta'(f_\delta^{N_0-k}(z))}\left(1+\sum_{j=1}^{n+k-1}\frac{1}{(f_\delta^j)'(f_\delta^{N_0-k+1}(z))}\right).\end{aligned}$$

若 $f_\delta^{N_0-k}(z)\in\mathcal{C}_{\delta,\ n+k}^0$，则 $|(f_\delta^{N_0-k})'(z)|>1$ （参见引理 10.2）。此外，$f_\delta^{N_0-k+1}(z)\in\mathcal{C}_{\delta}^{-2}{}_{,\ n+k-1}$，因此利用引理 10.1，我们可以找到 $K_3>1$ 使得

$$\left|\sum_{j=N_0-k+1}^{N_0+n}\frac{1}{(f_\delta^j)'(z)}\right|<2K_3\frac{1}{|f_\delta'(f_\delta^{N_0-k}(z))|}=K_3\frac{1}{|f_\delta^{N_0-k}(z)|}. \tag{10.7}$$

步骤 *6.* 为了估计上述表达式，我们将分两种情况讨论。首先，考虑集合 $\mathcal{G}_{\delta\,n}^{-N_0}$,使得如果 $z\in\mathcal{G}_{\delta\,n}^{-N_0}$，那么轨道 $\{z,\ldots,f_\delta^{N_0-1}(z)\}$ 与 $\mathcal{N}_{\delta,1}$不相交。只需检查是否有 $z\in\mathcal{C}_{\delta,n+N_0}^0$，从而 $|\mathrm{Re}(z)|>\sqrt{|\delta|}$。由于 $|z|<K|\lambda_\delta|^{-\frac{1}{2}(n+N_0)}$（见引理 6.1 (2)），我们得到 $\sqrt{|\delta|}<K|\lambda_\delta|^{-\frac{1}{2}(n+N_0)}$，进而有 $1\leqslant n<\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K^2}{|\delta|}\right)-N_0$。我们有

$$K_3\int\limits_{f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{C}_{\delta,n+k}^0)}\frac{1}{|f_\delta^{N_0-k}(z)|}\,d\mu_\delta(z)=K_3\int\limits_{\mathcal{C}_{\delta,n+k}^0}\frac{1}{|z|}\,d\mu_\delta(z). \tag{10.8}$$

因此，利用 (10.7)、(10.8)、 $\mu_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n}) \asymp \omega_\delta(\mathcal{C}^0_{\delta,n}) \asymp (\mathrm{diam}(\mathcal{C}^0_{\delta,n}))^{d(\delta)}$这一事实以及引理 6.1，我们得到

$$\sum_{k=1}^{N_0} \int\limits_{f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{C}^0_{\delta,n+k})} \Big| \sum_{j=N_0-k+1}^{N_0+n} \frac{1}{(f_\delta^j)'(z)} \Big| d\mu_\delta(z) < K_3 \sum_{k=1}^{N_0} \int\limits_{\mathcal{C}^0_{\delta,n+k}} \frac{1}{|z|} d\mu_\delta(z)$$

$$< K_4 \sum_{k=1}^{N_0} |\lambda_\delta|^{\frac{1}{2}(n+k)} |\lambda_\delta|^{-\frac{1}{2}d(\delta)(n+k)} < K_5(N_0) |\lambda_\delta|^{\frac{1}{2}(1-d(\delta))n}.$$

我们可以假设 $1 - d(\delta) \leqslant |1 - d(\delta)| < s/2$，因此，对所有集合 $\mathcal{G}_{\delta\, n}^{-N_0}$，上的积分，其中 $1 \leqslant n \leqslant \log_{|\lambda_\delta|} \left(\frac{K^2}{|\delta|}\right) - N_0$，可估计为

$$K_5(N_0) \sum_{n=1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K^2}{|\delta|}\right)-N_0} |\lambda_\delta|^{\frac{1}{2}|1-d(\delta)|n} < K_5(N_0) \Big(\frac{K^2}{|\delta|}\Big)^{\frac{s}{4}} \log_{|\lambda_\delta|}\Big(\frac{K^2}{|\delta|}\Big)$$

$$< |\delta|^{-\frac{s}{4}} |\delta|^{-\frac{s}{4}} = |\delta|^{-\frac{s}{2}}. \quad (10.9)$$

步骤 *7.* 设 n_δ 为满足以下条件的最小数：存在 $z \in \mathcal{G}_{\delta,\ n_\delta}^{-N_0}$ 使得 $\{z, \ldots, f_\delta^{N_0-1}(z)\} \cap \mathcal{N}_{\delta,\ 1} \neq \emptyset$，因此 $\mathcal{C}^0_{\delta,\ n_\delta+N_0} \cap \mathcal{N}_{\delta,\ 1} \neq \emptyset$。于是，存在 $R > 1$ ($R \asymp 2^{N_0}$) 使得 $\mathcal{M}^0_{\delta,\ n_\delta} \subset \mathcal{N}_{\delta,\ R}$。因此，利用 (10.3)，我们得到

$$\bigcup_{n=n_\delta}^{\infty} \mathcal{G}_{\delta,n}^{-N_0} \subset \bigcup_{k=1}^{N_0} f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{M}^0_{\delta,n_\delta}) \subset \bigcup_{k=1}^{N_0} f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{N}_{\delta,R}).$$

利用 (10.7)、(10.8)（与步骤 *5*类似），再结合推论 9.3，我们得到

$$\sum_{k=1}^{N_0} \int\limits_{f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{N}_{\delta,R})} \Big| \sum_{j=N_0-k+1}^{N_0+n} \frac{1}{(f_\delta^j)'(z)} \Big| d\mu_\delta(z)$$

$$< K_3 \sum_{k=1}^{N_0} \int\limits_{f_\delta^{-N_0+k}(\mathcal{N}_{\delta,R})} \frac{1}{|f_\delta^{N_0-k}(z)|}\, d\mu_\delta(z) = K_3 \cdot N_0 \int\limits_{\mathcal{N}_{\delta,R}} \frac{1}{|z|}\, d\mu_\delta(z) < |\delta|^{-\frac{s}{2}}. \quad (10.10)$$

步骤 *8.* 由估计 (10.1)、(10.4)、(10.6)、(10.9) 和 (10.10)，可得

$$\int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \left|\dot\varphi_\delta\right| d\tilde\mu_\delta < K_1(N_0) + K_2(N_0) + \Big(\frac{1}{10} + \frac{5}{8}\Big) \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \left|\dot\varphi_\delta\right| d\tilde\mu_\delta + 2|\delta|^{-\frac{s}{2}}.$$

由于 $\frac{1}{10} + \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$，我们得到

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \left|\dot\varphi_\delta\right| d\tilde\mu_\delta < K_1(N_0) + K_2(N_0) + 2|\delta|^{-\frac{s}{2}},$$

由此得出该结论。 □

命题 10.5。 对每个 $\alpha \in (0,\ \pi],\ \ \varepsilon > 0$ ，都存在 $R \geqslant 1$ 和 $\eta > 0$使得

$$|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0} \setminus N_R} \left|\frac{\dot{\varphi}_\delta}{\varphi_\delta}\right| d\tilde{\mu}_\delta < \varepsilon,$$

其中 $0 < |\delta| < \eta$ 和 $\alpha = \arg\delta$。

证明。 由命题 10.4 可知，只需估计集合 $M_1^0 \setminus N_R$ 上的积分。

取 $\alpha \in (0, \pi]$ 和 $\varepsilon > 0$。若 $\varphi_\delta(s) = z \in \mathcal{C}_{\delta,n}^0$，则 $m = n$ 的公式 (9.4) 得出

$$\frac{\dot{\varphi}_\delta(s)}{\varphi_\delta(s)} = -\frac{1}{z \cdot f_\delta'(z)}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(f_\delta^k)'(f_\delta(z))}\right) + \frac{\dot{\varphi}_\delta(T^n(s))}{\varphi_\delta(s) \cdot (f_\delta^n)'(\varphi_\delta(s))}.$$

其中 $\alpha = \arg\delta$。

对于足够大的某个 R，我们有 $|z| > R\sqrt{|\delta|}$；另一方面，引理 6.1 给出 $|z| < K_1|\lambda_\delta|^{-\frac{1}{2}n}$。因此我们将考虑 $1 \leqslant n \leqslant \log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)$。 ——

由于 $f_\delta(z) \in \mathcal{C}_\delta^{-2}$，$n-1$，利用引理 10.1 和引理 6.1，我们得到

$$|z \cdot (f_\delta^n)'(z)| = |z \cdot f_\delta'(z) \cdot (f_\delta^{n-1})'(f_\delta(z))| > K_2|\lambda_\delta|^{-n}|\lambda_\delta|^{n-1} > K_2.$$

因此，由上述不等式以及 $T^n(C_n^0) = M_1^0$ 这一事实可得

$$\sum_{n=1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)} \int\limits_{C_n^0} \left|\frac{\dot{\varphi}_\delta(T^n)}{\varphi_\delta \cdot (f_\delta^n)'(\varphi_\delta)}\right| d\tilde{\mu}_\delta < K_3 \log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right) \int\limits_{M_1^0} |\dot{\varphi}_\delta|\, d\tilde{\mu}_\delta.$$

由于 $1 - d(\delta)/2$ 接近 $1/2$，命题 10.4 给出

$$\lim_{\delta \to 0} |\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} K_3 \log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right) \int\limits_{M_1^0} |\dot{\varphi}_\delta|\, d\tilde{\mu}_\delta = 0.$$

由于 $f_\delta(z) \in \mathcal{C}_\delta^{-2}$，$n-1$，利用引理 10.1、接下来的引理 6.1，以及 $\mu_\delta(\mathcal{C}_{\delta,\ n}^0) \asymp \omega_\delta(\mathcal{C}_{\delta,\ n}^0) \asymp (\operatorname{diam}(\mathcal{C}_{\delta,\ n}^0))^{d(\delta)}$ 这一事实，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)} \int\limits_{\mathcal{C}_{\delta,n}^0} \left|\frac{1}{z \cdot f_\delta'(z)}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(f_\delta^k)'(f_\delta(z))}\right)\right| d\mu_\delta$$

$$< K_4 \sum_{n=1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)} \int\limits_{\mathcal{C}_{\delta,n}^0} \frac{1}{|z|^2}\, d\mu_\delta < K_5 \sum_{n=1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)} |\lambda_\delta|^{(1-\frac{1}{2}d(\delta))n}.$$

最右侧的和可以用积分估计：

$$K_6 \int\limits_{1}^{\log_{|\lambda_\delta|}\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)} |\lambda_\delta|^{(1-\frac{1}{2}d(\delta))x} dx < K_7\left(\frac{K_1^2}{R^2|\delta|}\right)^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} < \varepsilon|\delta|^{-1+\frac{1}{2}d(\delta)}.$$

当 R 足够大时，最后一个不等式成立，因为 K_1 和 K_7 不依赖于 R。因此断言得证。□

11. 关于 N_R 的积分及主定理的证明

现在，利用命题 9.1，我们估计式 (9.2) 在 N_R上的积分，该积分对式 (9.1) 有决定性影响。接下来我们将证明定理 1.1。

命题11.1。对于每个 $\alpha \in (0,\pi]$ 和 $R \geqslant 1$，我们有

$$\lim_{\delta\to 0} |\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \int\limits_{N_R} \operatorname{Re}\Big(v\frac{\dot\varphi_\delta}{\varphi_\delta}\Big) d\tilde\mu_\delta = \frac{1}{3}\frac{2}{\pi} I_{\alpha,R},$$

其中 $\alpha =$ 辐角 δ 和 $v = e^{i\alpha}$。

证明。固定 $\alpha \in (0,\pi]$, $R \geqslant 1$ 和 $\varepsilon_1 > 0$。令 $\varepsilon = \varepsilon_1/K_{\alpha,R}$，其中 $K_{\alpha,R}$ 是推论 9.2 中的常数。

步骤 *1.* 存在 $0 < r_\varepsilon \leqslant r_z$ 使得

$$\left|\frac{(\Phi_\delta^{-1})'(z)}{(\Phi_\delta^{-1})'(w)} - 1\right| < \varepsilon, \tag{11.1}$$

对于 $z,\ w \in B(0,\ r_\varepsilon)$ 和 $\delta \in B(0,\ r_\triangle)$。

若 $z \in \mathcal{N}_{\delta,\ R}$，则 $-f_\delta(z)$ 接近 $p_{\delta\circ}$ 令 n_δ 为满足以下条件的最大数：对于所有点 $z \in \mathcal{N}_{\delta,\ R}$，均有 $\lambda_\delta^{n_\delta}\Phi_\delta(-f_\delta(z)) \subset B(0,\ r_\varepsilon)$，其中 $\alpha = \arg\ \delta_\circ$ 由于当 $\delta \to 0$ 时，$\operatorname{diam}(\mathcal{N}_{\delta,\ R}) \to 0$，我们得出 $n_\delta \to \infty_\circ$

关于 $m = n_\delta + 1$ 的公式 (9.4) 得出

$$\dot\varphi_\delta(s) = -\frac{1}{f_\delta'(\varphi_\delta(s))}\left(1 + \sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{1}{(f_\delta^k)'(f_\delta(\varphi_\delta(s)))}\right) + \frac{\dot\varphi_\delta(T^{n_\delta+1}(s))}{(f_\delta^{n_\delta+1})'(\varphi_\delta(s))}. \tag{11.2}$$

现在我们估计上述公式中的有限和。若 $\Phi(z) \in B(0,\ r_\varepsilon/\lambda_\delta^{n_\delta})$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n_\delta$，则有（参见 (3.4)）

$$f_\delta^k(z) = \Phi_\delta^{-1}(\lambda_\delta^k \Phi_\delta(z)),$$

and

$$(f_\delta^k)'(z) = (\Phi_\delta^{-1})'(\lambda_\delta^k\Phi_\delta(z)) \cdot \lambda_\delta^k \cdot \Phi_\delta'(z).$$

因此，由（11.1）可得

$$\left|\frac{\lambda_\delta^k}{(f_\delta^k)'(z)} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{and} \quad \left|\frac{1}{(f_\delta^k)'(z)} - \frac{1}{\lambda_\delta^k}\right| < \frac{\varepsilon}{|\lambda_\delta^k|}. \tag{11.3}$$

由于 $n_\delta \to \infty$ 和 $\lambda_\delta \to 4$，我们得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{1}{\lambda_\delta^k} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

因此，由（11.3）和上述估计可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{1}{(f_\delta^k)'(z)} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{\varepsilon}{|\lambda_\delta^k|} < 2\varepsilon.$$

若 $z \in \mathcal{N}_{\delta,R}$，则 $\Phi(-f_\delta(z)) \in B(0, r_\varepsilon/\lambda_\delta^{n_\delta})$。此外，$(f_\delta^k)'(-f_\delta(z)) = -(f_\delta^k)'(f_\delta(z))$，因此我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{1}{(f_\delta^k)'(f_\delta(z))} + \frac{1}{3} \right| < 2\varepsilon. \tag{11.4}$$

步骤 *2.* 现在我们根据公式 (11.2) 估计一个“尾项”的积分。在 $\mathcal{N}_{\delta,R}$ 上 $f_\delta^{n_\delta+1}$ 的畸变有界，且其界由依赖于 α 和 R 的常数给出。由于 $\operatorname{diam}(\mathcal{N}_{\delta,R}) < K_1\sqrt{|\delta|}$ 且 $\operatorname{diam}(f_\delta^{n_\delta+1}(\mathcal{N}_{\delta,R})) > K_2\varepsilon$，我们得到

$$\left|(f_\delta^{n_\delta+1})'(z)\right| > K_3(\alpha, R, \varepsilon)\frac{1}{\sqrt{|\delta|}},$$

对于 $z \in \mathcal{N}_{\delta,R}$。另一方面 $|z| > K_4\sqrt{|\delta|}$（参见命题 7.1），因此若 $\varphi_\delta(s) = z \in \mathcal{N}_{\delta,R}$，我们得到

$$\left| \operatorname{Re}\Big(\frac{v}{\varphi_\delta(s)} \frac{\dot\varphi_\delta(T^{n_\delta+1}(s))}{(f_\delta^{n_\delta+1})'(\varphi_\delta(s))}\Big)\right| < K_5(\alpha, R, \varepsilon)\left|\dot\varphi_\delta(T^{n_\delta+1}(s))\right|.$$

因此，命题 10.4 推出

$$|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \int\limits_{N_R} \left| \operatorname{Re}\Big(\frac{v}{\varphi_\delta(s)} \frac{\dot\varphi_\delta(T^{n_\delta+1}(s))}{(f_\delta^{n_\delta+1})'(\varphi_\delta(s))}\Big)\right| d\tilde\mu_\delta \to 0. \tag{11.5}$$

步骤 *3.* 我们有 $f_\delta'(z) = 2z$，因此 (11.4) 推出

$$\left| \operatorname{Re}\left(\frac{v}{z} \cdot \frac{-1}{f_\delta'(z)}\left(1 + \sum_{k=1}^{n_\delta} \frac{1}{(f_\delta^k)'(f_\delta(z))}\right)\right) - \operatorname{Re}\left(-\frac{v}{2z^2}\frac{2}{3}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{|z|^2}.$$

接下来，我们对 N_R（其中 $z = \varphi_\delta(s)$）两边关于 $\tilde\mu_\delta$ 积分，并乘以 $|\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)}$。因此，公式 (11.2) 结合 (11.5)、命题 9.1 和推论 9.2，给出

$$\left| \lim_{\delta\to 0} |\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \int\limits_{N_R} \operatorname{Re}\Big(v\frac{\dot\varphi_\delta}{\varphi_\delta}\Big) d\tilde\mu_\delta - \frac{1}{3}\frac{2}{\pi} I_{\alpha,R}\right| < \varepsilon K_{\alpha,R} = \varepsilon_1.$$

由于 ε_1 是任意的，断言得证。 □

定理 ***1.1*** 的证明. 固定 $\alpha \in (0, \pi]$。我们有（参见（9.5）、（9.6））

$$\lim_{R\to\infty} I_{\alpha,R} = -\sqrt{6}\cos\alpha + \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\sin\alpha} \int\limits_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\sin\beta}\, d\beta := I_\alpha.$$

令 $\alpha = \arg\delta$ 并令 $v = e^{i\alpha}$。那么，命题 11.1 和 10.5 得出

$$\lim_{\delta\to 0} |\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \operatorname{Re}\Big(v\frac{\dot\varphi_\delta}{\varphi_\delta}\Big) d\tilde\mu_\delta = \frac{1}{3}\frac{2}{\pi} I_\alpha. \tag{11.6}$$

由于 f_0 与 V 共轭，熵 $h_{\mu_0}(f_0)$ 等于 $\log 2$。接下来，由 [12, 定理 11.4.1] 可得 $1 = \operatorname{HD}(\mu_0) = h_{\mu_0}(f_0)/\chi_{\mu_0}(f_0)$（其中 $\chi_{\mu_0}(f_0)$ 是李雅普诺夫指数）。因此 $\chi_{\mu_0}(f_0) = \log 2$，故

$$\int\limits_{\mathcal{J}_0} \log|f_0'| d\mu_0 = 4\chi_{\mu_0}(f_0) = 4\log 2.$$

由于 $f'_\delta(\varphi_\delta) = 2\varphi_\delta$，命题 4.6、8.2 给出

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\mathcal{J}_{\delta_0}} \log|f'_\delta(\varphi_\delta)| d\tilde{\mu}_\delta = 4\log 2.$$

因此，将公式 (2.3) 与 (9.2)、(11.6) 以及上述极限结合，可得

$$\lim_{\delta\to 0} |\delta|^{1-\frac{1}{2}d(\delta)} \cdot d'_v(\delta) = -\frac{1}{6\pi\log 2} I_\alpha, \tag{11.7}$$

其中 $\alpha = \arg\delta$，并令 $v = e^{i\alpha}$。

为了完成证明，我们必须将指数中的 $1 - d(\delta)/2$ 替换为 $1/2$。由于 I_α 有界，上述结果给出

$$|d'_v(tv)| < K_1 \cdot t^{\frac{1}{2}d(tv)-1}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\big|d(tv) - 1\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|d'_v(sv)\big|\, ds < K_1 \int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}d(sv)-1} ds < K_1 \int\limits_0^t s^{-2/3} ds \\ = 3K_1 \cdot t^{1/3} < t^{1/4},\end{aligned}$$

进而

$$1 \geqslant t^{|d(tv)-1|} \geqslant t^{t^{1/4}} = e^{t^{1/4}\log t} \to e^0 = 1.$$

因此，我们得到

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\frac{1}{2}d(tv)}}{t^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}(1-d(tv))} = 1,$$

最后，(11.7) 和 (1.1) 得出

$$\lim_{\delta\to 0} |\delta|^{\frac{1}{2}}\, d'_v(\delta) = -\frac{1}{6\pi\log 2} I_\alpha = \Omega_{-2}(\alpha),$$

其中 $\alpha = \arg\delta$，并令 $v = e^{i\alpha}$。 □

参考文献

[1] L. Carleson，T.W. Gamelin，《复动力系统》，Springer-Verlag，纽约，1993。[2] Y.-C. Chen，T. Kawahira，沿外射线从康托集到半双曲参数，美国数学会汇刊**372** (2019) 7959–7992。https://doi.org/10.1090/tran/7839。[3] N. Dobbs，J. Graczyk，N. Mihalache，逻辑斯蒂族中朱利亚集的豪斯多夫维数，arXiv:2007.07661。[4] A. Douady，朱利亚集是否连续依赖于多项式?，载于：R. De- vaney（编），《复动力系统》，应用数学专题讨论会论文集**49**，美国数学会，1994，第91–135页。https://doi.org/10.1090/psapm/049/1315535。[5] A. Dudko，I. Gorbovickis，W. Tucker，某些朱利亚集豪斯多夫维数的下界，arXiv:2204.07880。[6] A. Fan，Y. Jiang，J. Wu，与渐近非双曲族相关的康托集的渐近豪斯多夫维数，遍历理论与动力系统**25** (2005) 1799-1808。https://doi.org/10.1017/S014338570500009X。[7] G. Havard，M. Zinsmeister，二次朱利亚集豪斯多夫维数的热力学形式主义与变化，数学物理通讯**210** (2000) 225–247。https://doi.org/10.1007/s002200050778。[8] J. H. Hubbard，《泰希米勒理论及其在几何、拓扑与动力学中的应用》第**1**卷：泰希米勒理论，Matrix Editions，伊萨卡，纽约州，2006。

[9] L. Jaksztas，二次朱利亚集豪斯多夫维数的导数，美国数学会汇刊**363** (2011) 5251–5291。https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05208-6。[10] L. Jaksztas，二次多项式朱利亚集在 $1/4$处豪斯多夫维数的方向导数，非线性**33** (2020) 5919–5960。https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab9a1a。[11] W. de Melo，S. van Strien，《一维动力学》，Springer-Verlag，柏林，1993。[12] F. Przytycki，M. Urbanski，《平面分形：遍历理论方法》，剑桥大学出版社，第371卷，2010。[13] J. Rivera-Letelier，朱利亚集豪斯多夫维数的连续性及曼德博集合与朱利亚集之间的相似性，数学基础**170** (2001) 287–317。https://doi.org/10.4064/fm170-3-6。[14] D. Ruelle，实解析映射的排斥子，遍历理论与动力系统**2** (1982) 99–107。https://doi.org/10.1017/S0143385700009603。[15] M. Zinsmeister，《热力学形式主义与全纯动力系统》，SMF/AMS 文本与专著，第2卷，1996。

波兰华沙 00-662，Koszykowa 街 75 号，华沙理工大学数学与信息科学学院，
ORCID：0000-0002- 9283-8841电子邮件地址：jaksztas@impan.pl