arXiv:2301.04530v1 [math.DS] 11 Jan 2023

ACTI关于 $\mathbb{R}$叶状结构的无穷远圆

CHRISTIAN BONATTI

Abstract. 本文为平面 $\mathbb{R}^2$ 构造了一种典范紧化：添加一个与可数族奇异叶状结构或层状结构相关联的无穷远圆（在满足某些假设的情况下），推广了 Mather [Ma]的一个思想。此外，任何保持这些叶状结构的 $\mathbb{R}^2$ 自同胚都可延拓到无穷远圆上。

随后，本文给出了如下条件：当一个作用保持一个叶状结构或两个横截叶状结构时，该作用在无穷远圆上诱导的作用具有极小性。

特别地，与闭三维流形上的阿诺索夫流 X 相关联的无穷远圆上的作用具有极小性，当且仅当 X 是非$\mathbb{R}$覆盖的。

关键词：平面的叶状结构、阿诺索夫流、紧化。AMS分类号：
37D20-37E10-37E35-37C86 2023年1月12日

1. Introduction

1.1. 一般介绍。对平面 $\mathbb{R}^2$ 进行紧化有许多方法，最简单的是通过无穷远点进行 Alexandrov紧化，而 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 是拓扑球面 $\mathbb{S}^2$。这种紧化是规范的，不依赖于我们在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予的任何额外结构。这是它的优点，但也是它的缺点，因为它不会为我们在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予的任何结构提供任何信息。

对 $\mathbb{R}^2$ 进行紧化的另一种非常自然且常用的方法，是添加一个无穷远圆，从而使 $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{S}^1$ 成为圆盘 $\mathbb{D}^2$。这种紧化不是规范的：它由一个同胚 h：$\mathbb{R}^2 \to \mathring{\mathbb{D}}^2$ 构成，其中 $\mathring{\mathbb{D}}^2$ 是开圆盘。若 h_1、h_2 满足 $h_2 \circ h_1^{-1}$：$\mathring{\mathbb{D}}^2 \to \mathring{\mathbb{D}}^2$ 可延拓到 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$，并成为 $\mathbb{D}^2$ 的同胚，则这两个同胚定义相同的紧化。这样的紧化有不可数多个。

这里，我们首先回顾 Mather [Ma] 关于赋予叶状结构 $\mathcal{F}$的平面 $\mathbb{R}^2$通过无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$进行典范紧化的构造。随后，我们探讨这一构造的灵活性，以便将其推广到更一般的对象。因此，我们给出一种初等的（不涉及高深内容）、简单的（没有过于复杂之处）且统一的构造：它将由圆盘 $\mathbb{D}^2$ 对平面 $\mathbb{R}^2$ 进行的紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 与一个可数族 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}$ 叶状结构联系起来；这些叶状结构可以是非奇异的，也可以带有鞍型奇点，并且它们两两横截，或者至少在无穷远处满足某种弱横截性条件，详见下方的精确表述。边界 $\partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 称为 $\mathcal{F}$ 的无穷远圆，并记为 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$。这种紧化是唯一的，其含义是：$\mathbb{R}^2$ 上的恒等映射可延拓为两个此类紧化的无穷远圆之间的同胚。

为了给出一个具体例子，推论 5.1 构造了与任意可数族 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}$ 奇异叶状结构相联系的这一典范紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$；其中每个 $\mathcal{F}_i$ 都由 $\mathbb{R}^2$ 上的一个多项式向量场导出，且其奇点都是双曲鞍点。

紧化的唯一性意味着，任何保持 $\mathbb{R}^2$ 的同胚 $\mathcal{F}$（即置换 $\mathcal{F}_i$）都可以延拓为紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 的同胚，并诱导出无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$的同胚。

1.2. 构造无穷远圆的 Mather 思想。这个统一构造的共同设定是射线族，其中射线是 $[0,+\infty)$在 $\mathbb{R}^2$上的真拓扑嵌入。我们要求族中射线的芽两两不相交，也就是说，任意两条不同射线的交集都是紧的。关键思想是，在 $\mathbb{R}^2$ 中，芽两两不相交的射线集合是完全循环有序的，我们将利用这种循环序来构造无穷远圆。

关键技术结果（本质上归功于 [Ma]）如下：

定理 1. 设 $\mathcal{R}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族射线，其芽两两不相交。设 $\mathcal{E}\subset\mathcal{R}$ 为一个关于循环序具有分离性的可数子集，即任意非退化区间都包含 $\mathcal{E}$中的一个点（见定义 2.1）。

那么，存在 $\mathbb{R}^2$ 的一个以圆盘 $\mathbb{D}^2$ 为边界的紧化，使得：

- 中的任意射线都趋于无穷远圆 $\partial\mathbb{D}^2=\mathbb{S}^1$上的一个点。
- 中的任意两条不同射线都趋于 $\mathbb{S}^1$上的不同点
- $\mathbb{S}^1$ 中作为 $\mathcal{R}$ 内某条射线极限点的点在 $\mathbb{S}^1$中稠密。

此外，该紧化在 $\mathbb{D}^2$ 的同胚意义下唯一，且不依赖于分离可数集 $\mathcal{E}$。

那么，定理 6 为可数并 $\mathcal{R}=\bigcup\mathcal{R}_i, i\in I\subset\mathbb{N}$的射线族提供了这样一种典范紧化，前提是 $\mathcal{R}$ 中射线的芽两两不交，并且每个 $\mathcal{R}_i$ 都含有一个可数分离子集 $\mathcal{E}_i$。这里的困难在于， $\mathcal{R}$ 本身可能不存在任何分离族。解决这一问题的思路是考虑 $\mathcal{R}$上的一个自然等价关系，将无法彼此分离的射线视为等同。

1.3. 横截叶状结构的可数族。我们将应用这一一般构造的一种自然情形，是平面 $\mathbb{R}^2$上的（至多可数个）横截叶状结构族。注意， $\mathbb{R}^2$ 上任意一个（非奇异）叶状结构的半叶都是一条射线。叶端是半叶在无穷远处的芽。在这种情形下，我们得到：

定理 2. 设 $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ 是平面上至多可数的两两横截叶状结构族
平面 $\mathbb{R}^2_\circ$ 存在一种紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}\simeq\mathbb{D}^2$，通过添加一个圆 $\mathbb{S}^1$对 $\mathbb{R}^2$ 进行紧化 $\mathcal{F}=\partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 并具有以下性质：

- 叶的任意一个叶端都趋向无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的某个点，
- 趋向 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上同一点的叶端集至多可数，
- 对于任意非空开子集 $O\subset\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，其极限位于 O 的叶端集合是不可数的。

具有这三个性质的紧化在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 的同胚意义下是唯一的。

圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 称为族 $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ 的无穷远圆。

注 1. 趋于同一点的端点集的可数性意味着 t

- 给定叶的两个端在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的极限总是不同的。
- 如果同一叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 的两片叶 L_1、L_2 具有相同的叶端极限对，则它们相等（见引理 4.2）。

回想一下， $\mathbb{R}^2$ 的叶状结构中可能存在彼此不分离的叶。与其他任何叶都分离的叶称为正则叶。非正则叶至多可数（参见引理 3.2）。我们将看到，

命题 1.1. 设 $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上一个至多可数的两两横截叶状结构族。同一叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 的正则叶的任意两个不同的端，都趋向于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上两个不同的点。

现在，在定理 2 的设定下，我们可以将此定理应用于每个叶状结构 $\mathcal{F}_i, i\in I$，从而得到一个紧化族 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}_i\circ}$。事实上，对于任意子族 $J\subset I$，我们都能得到一个紧化 $\mathbb{D}^2_J$，由此得到一个由圆盘 $\mathbb{D}^2$ 紧化 $\mathbb{R}^2$ 的（可能彼此不同的）不可数集（例 5 提供了

一个简单的例子，其中这些紧化 $\mathbb{D}^2_J$（对于 $J \subset I$）两两不同，且有不可数多个）。

这些紧化很容易建立联系：对于任意子族 $J \subset I$， $\mathbb{R}^2$ 上的恒等映射都能以唯一的方式通过连续性延拓为投影 $\Pi_{I,\ J}\colon \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}} = \mathbb{D}^2_I \to \mathbb{D}^2_J$；这个投影所做的仅仅是压缩 $\mathbb{S}^1_I$ 中不包含任何叶状结构 $\mathcal{F}_j, j \in J$的叶端极限的区间。

我们还将通过一个简单的例子看到，叶状结构族 I 至多可数这一假设不能省略：例如，对于由 $\mathbb{RP}^1$ 参数化的 $\mathbb{R}^2$上所有仿射叶状结构（由平行直线构成）所组成的族，定理 2 的结论并不成立（见例 4）。

例 8 和引理 4.8 给出了一个简单的例子：叶状结构 $\mathcal{F}$ 的无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的一般点（即剩余集中的点）并非 $\mathcal{F}$任何叶端的极限。相反，在这个例子中， $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 的一个稠密子集中的点都是两个不同叶端的极限。

引理 4.4 和 4.5 刻画了无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的点 p：其中 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的叶状结构，且这些点是多个叶端的极限；到达 p 的射线按 $\mathbb{Z}$ 的区间顺序排列，两个相邻的端围成一个双曲扇区。

推论 5.3 将引理 4.4 和 4.5 推广到可数族 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}$ 横截叶状结构的情形，并完整描述了 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中作为同一 $\mathcal{F}_i$ 的多个叶端极限的点。

1.4. 非横截或奇异叶状结构的可数族。这一构造很容易推广到非横截或奇异叶状结构族的情形。下面介绍我们在此考虑的最一般情形。

我们考虑的叶状结构允许存在奇点，这些奇点是具有 k 条分离曲线的鞍点（也称为 k 叉奇点）， $k > 1$，其中 $k = 2$ 对应于非奇异点。

在这种设定 下，叶端是 $\mathbb{R}^2$ 中一条避开所有奇点并包含于某个叶中的射线 f.

定理 3. 设 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}, i \in I \subset \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个奇异叶状结构族，其奇点均为具有 k 条分离曲线且带有 $k > 2$ 的鞍点。我们假设，对于任意两个叶的端 L_1, L_2，以下情形必居其一：

- L_1 和 L_2 的芽彼此不相交
- 或者 L_1 和 L_2 的芽重合。

那么，可以通过添加一个圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}} = \partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$，将 $\mathbb{R}^2$ 紧化为 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{D}^2$，并满足以下性质：

- 叶的任一端趋向无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的一个点，
- 趋向 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上同一点的叶端集至多可数，
- 对于任意非空开子集 $O \subset \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，极限落在 O 中的叶端集不可数。

This 具有这三个性质的紧化在同胚意义下唯一，其中同胚定义在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$上 .

叶端芽相等或不相交这一假设意味着：如果两片叶的交集无界，那么这两片叶在某个半叶上重合。容易验证，横截叶状结构满足这一假设，因此定理 2 直接由定理 3 推出。

作为一个简单而自然的例子，我们将看到， $\mathbb{R}^2$ 上由多项式向量场导向、且奇点均为双曲鞍点的任意可数族 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}$ 奇异叶状结构，都满足定理 3 的假设：这将证明上文已提及的推论 5.1。

1.5. 层状结构。对于叶状结构的无穷远圆，若无假设则无法将其构造推广到层状结构的情形，因为层状结构的叶可能不是直线，甚至可能是回归的，参见例13。

定理 8 和定理 10 将这一构造推广到了没有紧叶且叶不可数的闭可定向层状结构。这一推广不如叶状结构情形下令人满意，相关问题将在第 6 节讨论。特别地，定理 9 给出了另一种典范紧化，它也适用于没有紧叶的可数定向层状结构。

1.6. 无穷远圆上作用的极小性。接下来我们考虑在 $\mathbb{R}^2$ 上保留 1 个或 2 个横截叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 的群作用 $H \subset Homeo(\mathbb{R}^2)$。$H$ 的作用典范地延拓到无穷远圆上，我们将考察以下问题：

问题 1.1. 对 H 以及叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 有什么条件，才能确保由其在 $\mathbb{S}^1_{\{\mathcal{F}_i\}}$ 上诱导的作用是极小的?

对于只有一个叶状结构的情形，我们的主要结果如下：

定理 4. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个叶状结构，$H \subset Homeo(\mathbb{R}^2)$ 是一个保持 $\mathcal{F}$的同胚群。我们假设对于任意叶 L，其像的并集 $H(L)$ 在 $\mathbb{R}^2$中稠密。

那么，以下两个性质等价：

(1) H 在无穷远圆上诱导的作用是极小的；(2) 存在不同叶对（L_1, L_2）和（L_3, L_4），使得 L_1 和 L_2 上方不分离，且 L_3 和 L_4 下方不分离。

我们还将把定理 4 推广到横截叶状结构族。

1.7. 阿诺索夫流在无穷远圆上的作用。最后，我们将考虑闭三维流形 M 上的阿诺索夫流 X。

备注 2. 在这一情形下，已知 $\pi_1(M)$ 通过保定向同胚作用于 $\mathbb{S}^1$，参见 Calegari Dunfield [CaDu]，其工作受到 Thurston [Th] 一篇未发表作品的启发。这项工作完全遵循了不同于本文所述思想的方法。

关于这个无穷远圆（称为理想圆边界）的另一种构造见 [Fe4]，适用于伪阿诺索夫流。

Barbot 和 Fenley [Ba1, Fe1] 证明，X 的提升 $\tilde{X}$ 与 $\mathbb{R}^3$ 上的常向量场 $\frac{\partial}{\partial x}$ 共轭，因此 $\tilde{X}$-轨道空间是一个平面 $\mathcal{P}_X \simeq \mathbb{R}^2$。该平面 $\mathcal{P}_X$ 带有两个横截叶状结构 F^s、F^u，它们分别是 X 在 $\mathbb{R}^3$ 上提升后的稳定叶状结构和不稳定叶状结构的投影。因此，$(\mathcal{P}_X, F^s, F^u)$ 是与 X 相关的双叶状平面。此外，基本群 $\pi_1(M)$ 作用于 $\mathcal{P}_X$，且其作用保持叶状结构 F^s 和 F^u。这一作用在无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{F^s}$、$\mathbb{S}^1_{F^u}$ 和 $\mathbb{S}^1_{F^s, F^u}$ 上诱导出 $\pi_1(M)$ 的自然作用。

一个民间猜想断言，当且仅当两个 Anosov流在 $\{F^s, F^u\}$ 的无穷远圆上诱导相同的作用时，它们才轨道等价；参见 [Ba1] 中沿此方向的一个结果。最近有人宣布，该猜想已在 [BFM] 中得到证明。

[Ba1, Fe1] 证明，F^s 的每个叶都是正则的，当且仅当 F^u 的每个叶都是正则的；于是称阿诺索夫流 X 为 $\mathbb{R}$-覆盖的。我们在这一情形下的主要结果如下：

定理 5. 设 X 是定义在闭三维流形上的阿诺索夫流，且 $(\mathcal{P}_X, F^s, F^u)$ 是其双叶状平面。设 $\mathbb{D}^2_{F^s,F^u}$, $\mathbb{D}^2_{F^s}$ 和 $\mathbb{D}^2_{F^u}$ 分别是与叶状结构对 (F^s, F^u) 、叶状结构 F^s 和叶状结构 F^u 相关的紧化。那么

(1) $\mathbb{D}^2_{F^s,F^u} = \mathbb{D}^2_{F^s} = \mathbb{D}^2_{F^u}$，除非 X 与环面上的阿诺索夫微分同胚的悬挂轨道等价 $\mathbb{T}^2$。(2) $\pi_1(M)$ 在无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{F^s,F^u}$ 上的作用（或等价地，在 $\mathbb{S}^1_{F^s}$ 或 $\mathbb{S}^1_{F^u}$ 上的作用）是极小的，当且仅当 X 不是 $\mathbb{R}$-覆盖的。

当 X 被假设为传递时，这一结果是上文定理 4 和 Fenley [Fe3] 的一个结果的直接推论：该结果保证，若假设 X不是非-$\mathbb{R}$-覆盖的，则 F^s和 F^u都有来自上方的非分离叶，而非分离叶则从下方形成。定理 5 的证明在不假设 X 传递的情况下，无疑是本文技术上最困难的论证，其依据是对三维流形上流的双曲基本集的描述。

定理 5 表明，无穷远圆上作用的极小性与流的传递性无关。然而，根据 [BFM]，无穷远圆上的作用刻画了流的动力学。这引出了以下问题：

问题 1.2. $\pi_1(M)$ 在无穷远圆上的作用具有什么性质 $\mathbb{S}^1_{F^s,\ F^u}$才能蕴含 X 的传递性?

Can 我们通过考察 $\pi_1(M)$ 在无穷远圆上的作用来寻找横截环面吗?

1.7.1. 致谢。我谨向 Sebastien Alvarez 致谢，感谢他邀请我在蒙得维的亚以短期课程的形式介绍本文的研究结果。这门短期课程促使我完成了本文。我还要感谢 Kathrin Mann 指出定理 1 的论证实质上已包含在 [Ma]，中，并感谢 Michele Triestino 提供康托尔-本迪克松定理的表述和出处。

2. Circles at infinity for families of rays on the plane

2.1. 循环序。设 X 是一个集合。 X 上的全循环序是一个映射 θ: $X^3 \to \{-1, 0, +1\}$，满足以下性质

- $\theta(x, y, z) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 或 $y = z$ 或 $x = z$。
- $\theta(x, y, z) = -\theta(y, x, z) = -\theta(x, z, y)$ 对每个 (x, y, z)
- 对每个 $x \in X$，由 $X \setminus \{x\}$ 定义的关系

$$y < z \Leftrightarrow \theta(x, y, z) = +1$$

是一个全序。

典型的例子是:

例 1. 定向圆 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在关系 θ 下是完全循环有序的，该关系定义如下：$\theta(x, y, z) = +1$ 当且仅当 y属于从x 出发并在 z结束的正向定向的简单弧的内部。

如果 θ 是一个全循环序，那么对于 $x \neq z$，我们将区间（x, y）定义为

$$(x, z) = \{y, \theta(x, y, z) = 1\}.$$

我们通过将相应的端点 x 或 z 添加到区间（x, z）中，定义半闭区间和闭区间 $[x, z)$、$(x, z]$以及 $[x, z]$ 。

我们称 y 在 x 和 z 之间为 $y \in$ (x, z).

以下分离集的概念将贯穿本文:

定义 2.1. 设 X 是一个带有全循环序的集合。若子集 $\mathcal{E} \subset X$ 满足：对任意两个不同的 x、$z \in X$，都存在 $y \in \mathcal{E}$（与 x 和 z不同），位于 x 和 z之间，则称 $\mathcal{E} \subset X$ 为分离集。

我们将用到关于 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{S}^1$的一个简单的拓扑练习:

命题 2.1. 设 X 是一个带有全循环序的集合。假设存在一个可数子集 $\mathcal{E} \subset X$，它是分离集。

那么存在一个从 φ 到 X 的双射，其像为稠密子集 $Y \subset \mathbb{S}^1$，并且相对于 X 和 $\mathbb{S}^1$的循环序严格递增。此外，该双射在相差一个 $\mathbb{S}^1$的同胚的意义下唯一。

这个论证是经典的，但简短而优美；对于这一确切表述，我没有可供引用的参考文献。因此让我来陈述它:

证明。通过归纳法，可以如下构造从 ϕ 到一个可数稠密子集 $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^1$ 的双射：先对 $\mathcal{E} = \{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{D} = \{d_i, i \in \mathbb{N}\}$ 分别进行编号。定义

- $\phi(e_0) = d_0$, $\phi(e_1) = d_1$ $i(0) = j(0) = 0$ $i(1) = j(1) = 1$
- 考虑 e_2，它属于 (e_0, e_1) 或 (e_1, e_0)，我们选取 $\phi(e_2)$ 为 $d_{j(2)}$，其中 $j(2)$ 是相应区间 (d_0, d_1) 或 (d_1, d_0) 中 d_i 的下确界。记 i(2)=2。
- 现在考虑 $j(3) = \inf \mathbb{N} \setminus \{0, 1, i(2)\}$，并定义 $\phi^{-1}(d_{j(3)}) = e_{i(3)}$，其中 $i(3)$ 是满足以下条件的 $i \notin \{0, 1, 2\}$ 的下确界：$e_{i(3)}$ 相对于 e_0、e_1、e_2 的位置，与 $d_{j(3)}$ 相对于 d_0、d_1、$d_{j(2)}$的位置相同。
- ...

- 选取 $i(2n)$ = 下确界 $\mathbb{N}\setminus\{i(k)\ k<2n\}$ 以及 $\phi(e_{i(2n)}$ 是 $d_{j(2n)}$，其中 $j(2n)$ 是满足条件的 j 的下确界：d_j 相对于 $d_{j(k)}k<2n$ 的位置与 $e_{i(2n)}$ 相对于 $e_{i(k)}$的位置相同。
- 选取 $j(2n+1)$ = 下确界 $\mathbb{N}\setminus\{j(k)\ k<2n+1\}$ 以及 $\phi^{-1}(d_{j(2n+1)}$ 是 $e_{i(2n+1)}$ 其中 $i(2n+1)$ 是满足以下条件的 i 的下确界：e_i 相对于 $e_{i(k)}k<2n+1$ 的位置与 $d_{j(2n+1)}$ 相对于 $d_{j(k)}$ 的位置相同。

在这一构造的每一步中，都要利用 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{D}$ 的分离性质，以确保存在处于所述相同位置的点。

一旦我们在 $\mathcal{E}$ 上构造出 ϕ，它就能以唯一的递增方式扩展到 X 上。然后，$\mathcal{E}$ 的分离性质表明，这个扩展是单射的。□

注3。假设 Z,θ 是一个赋有全循环序的集合，且 $\mathcal{E}\subset X\subset Z$ 是满足以下条件的子集：$\mathcal{E}$ 对 X,θ 具有分离性质。

令 $\varphi\colon X\to Y$ 为命题 2.1 给出的映射。那么，ϕ 可唯一地延拓为一个（非严格）递增映射 $\Phi\colon Z\to\mathbb{S}^1$：$\Phi(y)$ 位于 $\Phi(x)$ 和 $\Phi(z)$ 之间，当且仅当 y 位于 x 和 z之间。

映射 Φ 的非单射性如下确定。取 Z中的不同点 $x\neq y$，则$\Phi(x)=\Phi(y)$ 当且仅当 (x,y) 或 (y,x) 中至多包含 X 的一个元素

2.2. 射线族上的循环序。直线是在 $\mathbb{R}^2$中对 $\mathbb{R}$的真嵌入。直线 L 将 $\mathbb{R}^2$ 分成两个半平面。若 L 带有定向，则存在一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 h 的保向同胚，将L 映到 $\mathbb{R}^2$ 的带定向 x轴上（赋予坐标 (x,y)）。这使我们能够将上、下半平面 Δ_L^+ 和 Δ_L^- 定义为 h 分别对 $\{y\geq 0\}$ 和 $\{y\leq 0\}$ 的原像。

射线是从 $[0,+\infty$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的真嵌入。若两条射线的像在某个紧球之外重合，则它们定义相同的射线芽。若两个射线芽存在不相交的实现，则称它们不相交。

Exa例 2. (1) 若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的叶状结构，则每个叶都定义两个射线芽，称为该叶的端。固定 $\mathcal{F}$ 的一个定向后，我们将谈论叶的右端和左端。

(2) 若 $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一族两两横截的叶状结构，则这些叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 中所有叶的端所构成的集合是一族两两不相交的射线芽。(3) 考虑集合 $\mathcal{S}$，它由所有包含在鞍型仿射（次数为 $=1$ 的多项式）向量场轨道中的射线芽 γ 构成。那么 $\mathcal{S}$ 是一族两两不相交的射线芽。

下面的引理是平面拓扑中的简单练习 gy:

引理 2.1. 设 γ_0、γ_1、γ_2 是三条互不相交的射线。

假设 C_1 和 C_2 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的简单闭曲线，使得 $\gamma_i\cap Cj$ 是唯一的点 $p_{i,\ j}$、$i\in\{0,1,2\}$、$j\in\{1,2\}$。我们赋予 C_i 与由 C_i 围成的紧圆盘相对应的边界定向。那么，按 C_1 的定向，三个点 $p_{0,\ 1}$、$p_{1,\ 1}$、$p_{2,\ 1}$ 的循环序，与按 C_2 的定向，三个点 $p_{0,\ 2}$、$p_{1,\ 2}$、$p_{2,\ 2}$ 的循环序相同。

我们称之为射线 γ_0、γ_1、γ_2 上的循环序。

引理 2.2. 三个互不相交的射线芽 R_0、R_1、R_2 上的循环序，不依赖于实现这些芽 R_0、R_1、R_2 的互不相交射线 γ_0、γ_1、γ_2 的选取。

推论 2.1. 设 γ_0、γ_1、γ_2 是三条互不相交的射线，C 是任意一条简单闭曲线，其定向与由 C围成的紧圆盘的边界定向一致，并且与每条 γ_i都有非空交集。

设 p_i 是 γ_i 在 C中的最后一个点。那么，对于定向 C，γ_i 的循环序与 p_i 的循环序一致。

推论 2.2. 设 R_0、R_1、R_2 是三个互不相交的射线芽。设 L 是一条定向直线，其右端为 R_0，左端为 R_2。那么，按照上文定义的循环序（记为 $R_1\in(R_0,R_2)$），R_1 位于 R_0 和 R_2 之间，当且仅当它存在一个包含于由 L围成的上半平面 Δ_L^+ 中的实现。

下一个命题概括了通过这一系列简单引理得到的结论。

命题 2.2. 考虑 $\mathcal{R}$ 一族两两不相交的射线芽。那么 $\mathcal{R}$ 按照以下关系完全循环有序：

给定三个互不相同的射线芽 R_0、 R_1、 $R_2 \in \mathcal{R}$，若芽 R_2 存在一个位于上半平面 Δ_L^+ 内的实现，其中 L是一条定向直线，其右端为 R_0 ，左端为 R_3，则称芽 R_2 位于 R_1 与 R_3 之间。

2.3. 用无穷远圆紧化射线族。本文中，平面 $\mathbb{R}^2$ 通过圆盘 $\mathbb{D}^2$ 进行紧化，按定义是指 $\mathbb{R}^2$ 与开圆盘 $\mathring{\mathbb{D}}^2$之间的一个同胚。

本节旨在证明定理 1，该定理为与射线族 $\mathcal{R}$ 相关联的 $\mathbb{R}^2$构造一种典范紧化，并假设该射线族存在一个可数的分离子集（关于循环序）$\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$。证明定理 1 的主要要素之一是以下引理，它是平面拓扑中的一个简单练习。

引理 2.3. 设 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 为 n 条互不相交的射线， $n > 0$，且 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为一个紧集。那么存在一条与 K 不相交的简单闭曲线 C ，它围成一个紧圆盘 D ，使 K 位于其内部，并且 $C \cap \gamma_i$ 仅由一个点 p_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$组成。

证明。只需注意，存在一个同胚，将 $\mathbb{R}^2$ 映射到以 γ_i、 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 为径向（半直线）射线的对象上。于是证明显然。□

定理 1 的证明概要。我们考虑带有循环序的射线集合，并根据命题 2.1 将其嵌入圆 $\mathbb{S}^1$ 中。我们用 $E \subset \mathbb{S}^1$ 表示与 $\mathcal{E}$ 对应的稠密可数子集。我们通过为 $\mathbb{S}^1$ 中的点选取邻域基，在 $\mathbb{R}^2 \coprod \mathbb{S}^1$ 上定义一个拓扑；这些邻域基由边界为直线 L 的半平面构成，而这些直线的两端分别是 $\mathcal{E}$ 中的射线 R_-、 R_+（每个半平面都对应 $\mathbb{S}^1 \setminus \{R_-, R_+\}$ 中的一个线段）。

该拓扑不依赖于可数分离子集，$\mathcal{E}$ 的选取：如果 $\mathcal{E}$ 是另一个可数分离子集，那么，对于 $\mathbb{S}^1$ 中的任意一点，使用一族得到的每个邻域都包含一个使用另一族得到的邻域。

现在按如下方式构造一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{D}^2$ 内部的映射：

(1) 考虑半径为 $\rho_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ 的圆 C_n、 $n \geq 1$（即 $C_n = \rho_n \cdot \mathbb{S}^1$），并赋予其有限点集 $\rho_n \cdot x_1$、……、 $\rho_n \cdot x_n$，其中 $E = \{x_n, n \geq 1\}$ 是可数集 E 的一种编号。(2) 通过归纳法，选取 $\mathcal{E}$ 中射线的一种实现 R_n ，以及一族简单闭环 γ_n，使其满足以下性质：

- γ_n 是紧圆盘 D_n 的边界，该圆盘的内部包含 D_{n-1} ，且包含 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 n 的圆盘。特别地，$\bigcup_n D_n = \mathbb{R}^2$。
- γ_n 与射线 R_m、 $m < n$ 相交于唯一一点。
- 选取 R_n 的一个代表元，使其与 R_m、 $m < n$ 不相交，起点位于 γ_n 上，且与 γ_n 没有其他交点。根据射线上循环序的定义，点 $\gamma_n \cap R_i$、 $i \leq n$ 在 γ_n 上的循环顺序与点 $\rho_n \cdot x_1$、……、 $\rho_n \cdot x_n$ 在 C_n 上的循环顺序相同。(3) 这使我们能够选取一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{D}^2$ 内部的同胚，将闭环 γ_n 映到圆 C_n 上，并将射线 R_n 映到线段 $[\rho_n, 1$ 上）$\cdot x_n$。

这个同胚可延拓到无穷远圆上 $\mathbb{S}^1$ 至 $\partial\mathbb{D}^2$。

□

2.4. 可数多个射线族的并：圆。

命题 2.3. 设 $\{X_i, i \in I\}, I \subset \mathbb{N}$ 是一个有限或可数的集合族，使得 $\bigcup_i X_i$ 赋有全循环序。假设对于每个 i，都存在 $E_i \subset X_i$ 可数分离子集。

在并集 $X = \bigcup_i X_i$ 上，我们考虑关系

$$x \sim y \Leftrightarrow ([x, y] \cap E_i \textit{ is finite for every } i, \textit{ or } [y, x] \cap E_i \textit{ is finite for every } i).$$

换言之， $x \sim y$ 如果由 x 和 y 界定的两个线段（按循环序）之一与每个族 E_i 至多相交于有限多个点。

于是， $\sim$ 是一个等价关系，并且每个等价类在每个 X_i中至多包含 1 个点。

令表示

$$\pi\colon X \to \mathcal{X} = \bigcup_i X_i/\sim .$$

我们将 $E = \bigcup E_i$ 在 $\mathcal{X}$ 上的投影 $\pi(E)$ 记作 $\mathcal{E}$。

于是 $\sim$ 在 $\mathcal{X}$ 上给出了一个完备循环序，而 $\mathcal{E}$ 是一个可数的分离子 $t.$

证明。$\sim$ 是一个等价关系这一事实相当容易，因为两个与 X_i 相交于有限集的区间之并，与 X_i 的交集也是有限集。

注意，假设 $x \sim y$，区间 $[x,y]$ 或 $[y,x]$（与每个 E_i 都只有有限个点相交）包含在 x 和 y 的等价类中。因此，等价类 $[x]_\sim$ 是循环序下的一个（真）区间。

考虑 x、$y \in X$，并假设对每个 j，$[x,y] \cap E_j$ 都是有限集。假设存在 i 以及互不相同的 z、$t \in [x,y] \cap X_i$。那么，E_i 对 X_i 的分离性质保证 $[x,y] \cap E_i$ 是无限集，这与区间 $[x,y]$ 的选取矛盾。我们由此得出，每个等价类与每个 X_i 至多相交于 1 个点。

注意，这意味着 E_i 到 $\mathcal{X}$ 的投影是单射。

考虑等价类互不相同的 x、y、$z \in X$，并假设 $z \in (x,y)$。现在考虑 $a \sim x$、$b \sim y$ 和 $c \sim z$。设 I_a、I_b、I_c 分别为与 E_i 交集有限的区间 $[x,a]$ 或 $[a,x]$、$[y,b]$ 或 $[b,y]$、$[z,c]$ 或 $[c,z]$。由于这些区间包含在互不相交的等价类中，因此彼此不相交。因此，I_a、I_b、I_c 中各点的循环序不依赖于 I_a、I_b、I_c 中的点，从而 $c \in (a,b)$。

这表明商集 $\mathcal{X}$ 具有全循环序。

现在考虑点 x、$y \in X$ 所属的两个不同等价类 $[x]_\sim$、$[y]_\sim \in \mathcal{X}$。因此存在 i，使得 $[x,y] \cap X_i$ 是无限的。现在，E_i 的分离性质意味着 $[x,y] \cap E_i$ 是无限的。

由于 π 在 E_i 上是单射，因此 $([x]_\sim,[y]_\sim) \cap \pi(E_i)$ 是无限的，进而 $([x]_\sim,[y]_\sim) \cap \mathcal{E}$ 是无限的。由此证明了 $\mathcal{E}$ 对 $\mathcal{X}$ 具有分离性，证明完毕。□

2.5. 可数多个射线族的并：紧化。

定理 6. 设 $\mathcal{R} = \coprod_{i\in I} \mathcal{R}_i$，$I \subset \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个射线族，其芽两两不相交。假设对每个 $i \in I$，都存在一个可数子集 $E_i \subset \mathcal{R}_i$，它对 $\mathcal{R}_i$ 具有分离性。

那么，可以用圆盘 $\mathbb{D}^2$ 对 $\mathbb{R}^2$ 进行紧化，使得：

- $\mathcal{R}$ 中的任意射线都趋向无穷远圆 $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ 上的一个点。
- 对每个 i，$\mathcal{R}_i$ 中的任意两条不同射线都趋向 $\mathbb{S}^1$ 上的不同点。
- 对于任意非空开区间 $J \subset \mathbb{S}^1$，都存在 $i \in I$，使得 $\mathcal{R}_i$ 中至少有两条射线的极限点位于 J。

此外，该紧化在 $\mathbb{D}^2$ 的同胚意义下是唯一的，且不依赖于分离的可数集 E_i。

下面讨论第 3 条，其表述可能令人惊讶。

注 4。(1) 第三条意味着，$\bigcup E_i$ 中作为射线极限点的 $\mathbb{S}^1$ 中的点在 $\mathbb{S}^1$ 中稠密。(2) 若 I 有限，则第 3 条等价于：$\mathbb{S}^1$ 中作为射线极限的点稠密。(3) 当存在一个不可数的等价类集合 $[c]$ 时，第 3 条是必要的；这里的等价类是关于等价关系 $\sim$（定义见第 2.4 节）的无限（必然可数）等价类，并且包含一个集合 $\mathcal{C}([c])$，该集合对循环序具有分离性。在这种情况下，若用 $\mathbb{S}^1$ 中作为射线极限的点稠密来替代第 3 条，则定理 6 中所述的唯一性将不成立。例 3 简单地说明了这一问题。

定理 6 的证明。记 $X = \mathcal{R}$、$X_i = \mathcal{R}_i$ 和 $E = \bigcup E_i$。令 $\sim$ 为命题 2.3 中定义在 $X = \mathcal{R}$ 上的等价关系，并令 π 表示投影 $\pi\colon X \to \mathcal{X} = X/\sim$。我们选取一个子集 $Y \subset X$，使其具有以下性质

- 每个关于 $\sim$ 的等价类 $[\gamma]$ 在 Y 中恰好包含 1 个点 y_γ
- 如果关于 $\sim$ 的一个等价类包含 E 中的一个点，那么 $y_\gamma \in E$。

选择公理当然蕴含这类子集 Y 的存在，但这种存在性并不需要选择公理。例如，我们可以固定

- 若 $[\gamma]_\sim \in \pi(\bigcup \mathcal{E}_i)$，则 y_γ 是 E_i 中 $[\gamma]_\sim$ 内唯一的点，其中 i 是使 $[\gamma]_\sim \in \pi(\mathcal{E}_i)$ 成立的最小指数。
- 若 $[\gamma]_\sim \notin \pi(E)$，那么 y_γ 是 $X_i \cap [\gamma]_\sim$ 中唯一的点；在此处，i 是满足$[\gamma]_\sim \cap X_i) \neq \emptyset$的最小指数。

我们记作 $F = Y \cap E$。注意，根据构造，$\pi(F) = \pi(E)$。

现在，投影 π: $Y \to \mathcal{X}$ 是一个双射，并且关于循环序严格递增。由于 $\mathcal{E} = \pi(E)$ 是 $\mathcal{X}$ 的分离子集（见命题 2.3），因此 F 是 Y的分离子集。

现在，我们可以将定理 1 应用于射线集 Y 和可数分离子集 F。由此可得 $\mathbb{R}^2$ 的一个圆盘紧化 $\mathbb{D}^2$，使得 Y 中的每条射线都趋于无穷远圆上的一个点，Y 中的两条不同射线趋于两个不同的点，并且 F 中射线的极限无穷远点集在无穷远圆上稠密。

现在我们来验证，每条射线 $\gamma \in \mathcal{R}$ 都趋于一个无穷远点。根据 Y 的构造，存在$\sigma \in \mathcal{R}$ 使得 $\sigma \sim \gamma$。我们将证明 γ 趋于 σ的极限点 $s \in \mathbb{S}^1$。为此，我们回顾一下，s 的邻域基由半平面 Δ_n 组成，这些半平面由直线 L_n 围成，直线的两端均为σ_n^-、$\sigma_n^+ \in Y$，且满足 $\sigma \in (\sigma_n^-, \sigma_n^+)$。注意，当区间$(\sigma, \gamma)$或$(\gamma, \sigma)$之一有限时，区间$(\sigma, \sigma_n^+)$和$(\sigma_n^-, \sigma)$均为无限区间。由此可得 $\gamma \in (\sigma_n^-, \sigma_n^+)$，因此 γ的端包含在 Δ_n中。于是 γ 趋于 s。

现在考虑两条不同的射线 γ、$\gamma' \in \mathcal{R}_i$。由于 $\sim$ 中的每个等价类至多包含 $\mathcal{R}_i$ 中的一个点，γ 和 γ' 的等价类彼此不同。因此，存在 $\sigma \neq \sigma' \in Y$，分别与 γ 和 γ'等价。γ 和 γ' 的极限点分别是 σ 和 σ' 的极限点，而这两个极限点彼此不同。我们刚才已经验证，$\mathcal{R}_i$ 中的不同射线趋于不同的无穷远点。

断言 1. 设 φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}^2$ 是满足所述性质的一个紧化。那么，$\mathcal{R}$中的 2 条射线趋于该紧化的无穷远圆上的同一点，当且仅当它们对于 $\sim$是等价的

证明。如果两条射线 a、b不等价，那么根据 $\sim$的定义，$(a$、$b)$ 和 $(b$、$a)$ 中的每一个都包含同一组 $\mathcal{R}_i$ 中的无限多条射线。由于同一 R_i 中的不同射线的极限各不相同，因此可推出 a 和 b 的极限不同。

反之，如果 a 和 b 在紧化的 $\mathbb{S}^1$ 中具有不同的极限点 r 和 s，那么条目 3 表明，存在 $i \in I$（分别为 $j \in I$），使得 $(a$、$b)$（分别为 $(b$、$a)$）包含 $\mathcal{R}_i$（分别为 $\mathcal{R}_j$）中至少 2 条射线的端。由于 $\mathcal{R}_i$和 $\mathcal{R}_j$具有分离子集，这意味着 $(a$、$b) \cap \mathcal{R}_i$和 $(b$、$a) \cap \mathcal{R}_j$都是无限的，因此 $a \nsim b$。□

现在考虑无穷远圆的一个非空开区间 J。我们已经说明，存在 i，使得 J 中至少包含 $\mathcal{R}_i$内射线的两个极限。回想一下，根据定理 1，J中作为 Y 内射线极限的点在 J中稠密。因此，J 中至少有两个点，它们是 R_1、R_2 中射线的极限，且位于 Y内。这意味着，交换 R_1 和 R_2 后，$\mathcal{R}$ 中介于 R_1 与 R_2 之间的任意射线都趋向于 J中的一个点。现在，根据断言 1，射线 R_1、R_2 对于 $\sim$ 并不等价。根据 $\sim$的定义，存在 i，使得 R_1 与 R_2之间有无穷多条射线。这证明了定理 6 的第 3 项。

现在假设还存在另一种紧化 ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}^2$，它也满足前面所述的性质。由断言 1 可知，在用于构造第一种紧化 φ的集合 Y 中，任意两条不同射线经 ψ 映射后的像有两个不同的极限点；并且，Y 中射线经 ψ 映射后的像的极限点在 $\mathbb{S}^1$中稠密。因此，这种新的紧化在射线集合 Y 上满足与我们构造的紧化相同的性质。现在，定理 1 断言，这些紧化之间相差一个 $\mathbb{D}^2$的同胚 φ，证明至此完成。□

~引理2.4. 假设 $\mathcal{R}$ 满足定理 2.3的假设，并设 $\mathcal{R}$ 是一个射线集合，使得~ $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}$ 中的射线芽两两不相交。

令$\mathcal{R}$趋向一个无穷远点。~ 应用于 $\mathcal{R}$所得的紧化。那么，任意射线 $\tilde{\gamma}$ 都

证明。极限的候选是 $\mathbb{S}^1$ 中所有闭区间的交集，这些区间由射线 a、$b \in \mathcal{R}$ 的极限所界定，因此 $\tilde{\gamma} \in (a, b)$。我们展示的该点的邻域基表明，确实 $\tilde{\gamma}$ 趋向该无穷远点。

□

2.6. 一个具有不可数多个紧化的例子。下方的例子表明，在可数无穷族 $\mathcal{R}=\{\mathcal{R}_i\}$、$i\in\mathbb{N}$ 的情况下，如果将定理 6 结论中的第 3 条替换为射线 $\mathcal{R}$ 的极限在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{R}}$ 中稠密，那么定理 6 所宣称的紧化就不再唯一。下方的例子中，

例 3。设 $B\subset\mathbb{R}^2$ 是开条带 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,|x-y|<1\}.$。设 I 是斜率为有理数的直线集合 $\neq 1$。对于任意 $i\in I$，设 $\mathcal{F}_i$ 是由方向为 $i\in\mathbb{RP}^1$ 的平行直线构成的平凡叶状结构在 B 上的限制。对于任意 i，设 $\mathcal{R}_i$ 是 $\mathcal{F}_i$ 的叶的端点集。每个 $\mathcal{R}_i$ 都有一个可数分离子集。因此，$\mathcal{R}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ 满足定理 6 的假设。

于是，存在不可数多个不同的 $\mathbb{R}^2$ 紧化，使得

- $\mathcal{R}$ 的任意射线都趋向无穷远圆 $\partial\mathbb{D}^2=\mathbb{S}^1$ 上的一点。
- 对每个 i，$\mathcal{R}_i$ 中任意两条不同的射线都趋向 $\mathbb{S}^1$ 中不同的点
- $\bigcup E_i$ 中某条射线的极限点（属于 $\mathbb{S}^1$ ）在 $\mathbb{S}^1$ 中稠密。

证明。令 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{R}}$ 为通过添加无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{R}}$对 $B\simeq\mathbb{R}^2$ 进行的紧化 .

对于任意 $i\in I$，$\sim$中的每个等价类 C 在 $\mathcal{R}_i$ 中恰好包含1条射线。按照循环序，C 中的射线如同 $\mathbb{RP}_1$中 I 的各点一样有序。因此，C 是自身的分离集。

通过构造$\mathbb{S}^1_{\mathcal{R}}$，等价类 C 对应于一个点$c\in\mathbb{S}^1_{\mathbb{R}}$。我们可以通过将 c 处的点展开为线段 I_C，构造另一个圆$\mathbb{S}^1_{\mathcal{R},\ C}$。然后，我们可以构造一个紧化$\mathbb{D}^2_{\mathcal{R},\ C}$，使得$C$ 中的射线趋近于 I_C中彼此不同且稠密的点。特别地，对于任意 i，I_C 恰好包含 $\mathcal{R}_i$中一条射线的1个极限点。

我们可以重复这一论证，不仅将$\mathbb{S}^1_{\mathcal{R}}$ 中的一个点展开，还将$\sim$的等价类的一个可数子集 $\mathcal{C}$ 展开：我们构造一个紧化$\mathbb{D}^2_{\mathcal{R},\ c}$，其中无穷远圆包含互不相交的区间 I_C、$C\in\mathcal{C}$，使得对于任意 i，每个 I_C 恰好包含 $\mathcal{R}_i$ 中一条射线的1个极限点，而这些点在 I_C中稠密。

由于这样的可数子集 $\mathcal{C}$ 有不可数多个，因此这就给出了一个不可数族，其中包含两两不同的 B 的紧化，它们满足前两项以及射线极限点的稠密性。□

这表明，如果我们用 $\mathbb{S}^1$ 中射线极限集合的稠密性替换第 3 项，那么定理 6 的唯一性部分就不再成立。

2.7. 射线族的不可数族。对于不可数个射线集合的并集，定理 6 不成立，如下方的例 4 所示。

例 4. 我们考虑赋予了所有常值叶状结构 $\mathcal{F}_\theta$、$\theta\in\mathbb{RP}^1$ 的 $\mathbb{R}^2$，其中 $\mathcal{F}_\theta$ 是叶状结构，其叶为平行于 θ 的直线。

那么，对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意一个使每个叶端趋向于一个无穷远点的 $\mathbb{D}^2$ 紧化，除去 θ 的一个可数集，$\mathcal{F}_\theta$ 的叶的右端都趋向于同一个无穷远点。

证明。叶状结构 $\mathcal{F}_\theta$ 的右侧 F^+_θ 叶端与左侧 F^-_θ 叶端是互不相交的区间，并随不可数参数 theta 变化。在圆上，至多只有可数个互不相交的区间可以是非平凡的，证明完毕。

□

2.8. 投影到与各族相关的紧化上。先来看一个非常简单的例子，它表明，与可数族横截叶状结构的子集相关的无穷远圆，可能会产生不可数多个不同的紧化；这些紧化都是与整个族相关的紧化的商集。

例 5. 现在考虑一个无限可数子集 $I\subset\mathbb{RP}^1$，并考虑叶族 $\mathcal{R}_I$：它们是实数集 $\mathbb{R}^2$ 上常值叶状结构 $\mathcal{F}_\theta$、$\theta\in I$ 的叶，正如例 4 中所讨论的那样。

现在，每个叶状结构 $\mathcal{F}_\theta$ 的叶端点集对应于 $\mathbb{S}^1_I$ 中 2 个（因为每片叶有 2 个端）非空开区间，且这些区间不包含任何其他叶状结构的叶端。

因此，如果 J、$K \subset I$ 是不同的子集，那么无穷远圆 $\mathbb{S}^1_J$ 和 $\mathbb{S}^1_K$ 是通过压缩 $\mathbb{S}^1_I$ 中不同的区间得到的，因而彼此不同。

由于 $\mathcal{P}(I)$ 中所有 I 的子集构成不可数集，因此这会导出由无穷远圆对 $\mathbb{R}^2$ 进行紧化的不可数族 $\{\mathbb{D}^2_J\}_{J\in\mathcal{P}(I)}$。

这种情况相当普遍。

设 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \coprod \cdots \coprod \mathcal{R}_k$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个射线族，其芽两两不相交。假设对于每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，都存在一个具有分离性的可数子集 $E_i \subset \mathcal{R}_i$。

因此，对于每个子集 $I \subset \{1,\dots,k\}$，定理 6 都给出 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧化 $\mathbb{D}^2_I$，它由与 $\mathcal{R}_i$ 中射线对应的无穷远圆构成，$i \in I$。

命题2.4. 若 $J \subset I$，则 $\mathbb{R}^2$ 上的恒等映射可由连续性延拓为投影 $\Pi_{I,\,J}\colon\ \mathbb{D}^2_I \to \mathbb{D}^2_J$。此投影通过压缩 $\mathbb{S}^1_I = \partial\mathbb{D}^2_I$ 的区间实现，这些区间不包含射线 $\mathcal{R}_j, j \in J$ 的任何极限点。

此外，如果 $K \subset J$ 那么

$$\Pi_{I,K} = P_{J,K} \circ P_{I,J}.$$

证明。我们首先利用注3定义一个投影 $\pi_{I,\,J}\colon\ \mathbb{S}^1_I \to \mathbb{S}^1_J$。根据注3，$\mathcal{R}_J$ 中射线极限的子集 $R_J \subset \mathbb{S}^1_I$ 与 $\mathcal{R}_J$之间存在一个严格递增的双射。因此，$\mathcal{R}_J$ 在 $\mathbb{S}^1_J$ 的稠密子集上的递增双射，在该稠密子集中诱导出 R_J 到 $\mathbb{S}^1_J$的一个递增双射。现在，注3断言，该双射可延拓到整个 $\mathbb{S}^1_I$ 上，得到一个非严格递增映射 $\pi_{I,\,J}\colon\ \mathbb{S}^1_I \to \mathbb{S}^1_J$。具有稠密像的递增映射总是连续的，因此 $\pi_{I,\,J}$ 是连续的。

最后，注3断言，$\pi_{I,\,J}$ 的非单射性表现为将 $\mathbb{S}^1_I$ 的区间压缩为在 R_J中至多包含一个点的集合，这与将不含 R_J中任何点的区间压缩是同一种拓扑操作。

为结束证明，我们将验证 $\pi_{I,\,J}$ 是 $\mathbb{R}^2$的恒等映射到无穷远圆的连续延拓。

回忆一下，我们将无穷远圆上每个点$\mathbb{S}^1_I$（分别为$\mathbb{S}^1_J$）的邻域基定义为由直线界定的半平面 Δ^+_L，这些直线的两个端都位于 $\mathcal{R}_I$（分别为 $\mathcal{R}_J$）。特别地，由于 $J \subset I$，DD^2_J 中无穷远点的邻域仍然是 $\mathbb{D}^2_I$ 中无穷远点的邻域，这证明了从 $\mathbb{R}^2 = \mathring{\mathbb{D}}^2_I$ 到 $\mathbb{R}^2 = \mathring{\mathbb{D}}^2_J$ 取恒等映射、从 $\mathbb{S}^1_I$ 到 $\mathbb{S}^1_J$ 取连续J 的映射是连续的。证明至此结束。

□

3. BACKGROUNG ON FOLIATIONS: REGULAR LEAVES, NON-SEPARATED LEAVES

3.1. 非奇异叶状结构。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$的一个叶状结构。那么

(1) 由于 $\mathbb{R}^2$ 是单连通的，$\mathcal{F}$ 可定向并且具有横向定向。固定 $\mathcal{F}$ 的一个定向和一个横向定向。(2) 每个叶都是一条直线（即 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$中的真嵌入）。(3) 叶 L 的一个邻域基可通过取经过 L中一点的横截线段 σ 所穿过的叶的并集得到。

Defi定义 3.1. • 如果两个叶 L_1、L_2 没有不相交邻域，则称它们彼此不可分离。

- 如果存在一个与L不可分离的叶 L'，则称叶 L 不可分离或非正则。
- 如果一个叶与其他所有叶都可分离，则称其为正则叶。

有时我们需要给出更具体的说明。

设 L_1和 L_2是 $\mathcal{F}$的不同叶。考虑两条线段 $\sigma_i\colon\ [-1,1]$与 $\mathcal{F}$横截，且相对于 $\mathcal{F}$的横向定向为正向定向，并且使得 $\sigma_i(0) \in L_i$, $i = 1, 2$。于是，L_1 上方不分离于 L_2 意味着存在序列 t^i_n, $i = 1, 2$，当 $n \to +\infty$ 时趋于 0，使得 $\sigma_1(t^1_n)$ 和 $\sigma_2(t^2_n)$ 属于同一叶 L^n。于是

- 由于 $\mathcal{F}$ 是横向定向的，且 σ_i 是正向定向的，因此对于每个 n， t_n^1 与 t_n^2符号相同。此外，所有 t_n^i 的符号都相同。若 t_n^i 为正（分别为负），则称 L_1 和 L_2 上方不分离（分别为下方不分离）。

- 必要时缩短线段 σ_i，即可假设它们互不相交。现在，通过交换 L_1 和 L_2，可假设在定向叶 L^n上，$\sigma_1(t_n)$ 位于 $\sigma_2(t_n)$ 的左侧。我们称 L_1 （分别为 L_2）在其右侧（分别在其左侧）与 L_2 不分离。

考虑一条叶 L和 σ: $[-1,1]\to\mathbb{R}^2$是一条横截线段（正向定向），且 $\sigma(0)\in L$。令 L_t为经过 $\sigma(t)$ 的叶。令 $U_t, t\in(0,1)$ 为 $\mathbb{R}^2\setminus(L_t\cup L_{-t})$ 中包含 L 的连通分支的闭包。于是

引理 3.1. 叶 L是正则的，当且仅当

$$\bigcap_t U_t = L.$$

交集 $\bigcap_t U_t$ 与线段 σ 无关，记作 $\mathfrak{U}(L)$。

如果 L不是正则的，则 $\mathfrak{U}(L)$ 有非空内部，并且所有与 L 不分离的叶，恰好是 $\mathfrak{U}(L)$ 的边界中的叶。

˜证明。一个与 L 不分离的叶 L 包含于每个 U_t 中，并且被 L_{t_n} 中的叶所聚积，这些叶位于 U_{t_n}的˜边界。因此， L 包含于 $\mathfrak{U}(L)=\bigcap_t U_t$的边界中。此外，由 L 界定的两个半˜平面之一包含于 U_t 中，因此也包含于 $\mathfrak{U}(L)$中。

反过来，$\bigcap_t U_t$ 由 $\mathcal{F}$ 中的整叶组成，其边界也是如此。现在，任何穿过$\bigcap_t U_t$ 边界上一片叶的横截线段，当 t 足够小时，都会穿过 U_t 的边界 $L_t\cup L_{-t}$：这就是与 L不分离的定义。□

引理 3.2。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$的一个叶状结构。不分离的叶至多可数。

证明。我们考虑一个横截直线的可数族 Σ，其并集与 $\mathcal{F}$的每一片叶都相交。只需证明，这样一条横截直线 Σ 至多与一个可数的非正则叶集合 L 相交，这些叶从下方存在一个与之不˜分离的叶 L 。

为此，只需注意到，对于 $L\cap\Sigma\neq\emptyset$， $\mathfrak{U}(L)$ 两两不相交。因此，其中内部非空的至多可数个，证明完毕。□

注意， L将条带 $U_t, t\in(0,1]$ 分成两个条带 U_t^+ 和 U_t^-，它们分别由 $L_t\cup L$ 和 $L_{-t}\cup L$ 围成，记

$$\mathfrak{U}^+(L)=\bigcap_t U_t^+ \text{ and } \mathfrak{U}^-(L)=\bigcap_t U_t^-$$

Then

引理 3.3。 L 从上方非分离（分别地，从下方非分离），当且仅当 $\mathfrak{U}^+(L)\neq L$ （分别地， $\mathfrak{U}^-(L)\neq L$），并且当且仅当 $\mathfrak{U}^+(L)$（分别地， $\mathfrak{U}^-(L)$）具有非空内部。

同理， σ 根据 $\mathcal{F}$ 的定向将条带 U_t 分成两个半条带 U_t^{left} 和 U_t^{right}。于是，若满足以下条件，则称 L 的右端 L^+ （分别地，左端L^-）为正则：

$$\mathfrak{U}_{right}=(L)\bigcap_t U_t^{right}=L^+ \text{ (resp. } \mathfrak{U}_{left}(L)=\bigcap_t U_t^{left}=L^-).$$

通过考察 U_t^+与 U_t^-和U_t^{right}与U_t^{left}的交集，还可以更精确地考虑由此得到的四个象限 $U^{+,}{}_t{}^{right}$、$U^{+,}{}_t{}^{left}$、$U^{-,}{}_t{}^{right}$、$U^{-,}{}_t{}^{left}$。这样，我们就可以用显而易见的方式，讨论未与上方或下方分离的叶的右端或左端。

3.2. 奇异叶状结构：具有 k条分离曲线的鞍点。 $\mathcal{F}$ 上的奇异叶状结构是 $\mathbb{R}^2 \setminus Sing$（$\mathcal{F}$）上的叶状结构，其中 $Sing$（$\mathcal{F}$）是 $\mathbb{R}^2$的闭子集。 $\mathcal{F}$ 的一条叶是$\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus Sing$（$\mathcal{F}$）上的限制的叶。现在回顾一下具有 k条分离曲线的鞍点的概念，它们也称为 k棱奇点。

我们将 A_0 记为 $[-1,1]^2$ 关于对合 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ 的商集。从 (0, 0) 到 A_0 的投影仍记为 0, 0。注意，水平叶状结构（其叶是线段 $[-1,1] \times \{t\}$ ）在 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ 下保持不变，因此可下推到 $A_0 \setminus$ (0, 0) 上，我们将 $A_0 \setminus \{$(0, 0)$\}$上诱导的叶状结构记为 $\mathcal{H}_1$。

$\mathcal{F}$ 的一个 1-尖奇点 p 是 $Sing(\mathcal{F})$ 中的一个点，它存在一个邻域 U 和一个同胚 h，将 U 映到 A_0，使得 $h(p) =$ (0,0)，且 h 将 $\mathcal{F}$ 映到 $\mathcal{H}_1$。

我们用 $A_k, \mathcal{H}_k$ 表示 A_0 在点 (0, 0) 处的循环分歧覆盖，其具有 k 个叶，并配备 $\mathcal{H}_1$ 的提升。

一个 k 叉奇点 p，等价地说，是一个具有 k 条 $\mathcal{F}$ 分离曲线的鞍点，它是一个奇点，存在一个邻域到 A_k 的同胚，将 p 映到 (0, 0)，并将 $\mathcal{F}$ 映到 $\mathcal{H}_k$。鞍点 p 的一条分离曲线是 $\mathcal{F}$ 的一片叶，它包含 $]0,1] \times \{0\}$ 的提升的一个连通分支。

注 5.● 若 p 是 $\mathcal{F}$ 的一个 2 叉奇点，则可将叶状结构 $\mathcal{F}$ 延拓到 p，使得 p 不是奇点。

- 一个 k 叉奇点的庞加莱-霍普夫指数为 $1 - \frac{k}{2}$。

$\mathbb{R}^2$ 上具有鞍型奇点的叶状结构，是一种奇异叶状结构，其中每个奇点都是具有 k 条分离曲线的鞍点，$k > 2$。

3.3. 奇异叶状结构的叶。

引理 3.4. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个叶状结构，其奇点均为鞍型。设 σ：$[0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus Sing(\mathcal{F})$ 是一条横截于 $\mathcal{F}$ 的线段。那么对于每个叶 γ，有

$$\#\sigma \cap \gamma \leq 1,$$

其中 # 表示基数。

证明。假设（反证） $\sigma \cap \gamma \geq 2$。设 x, y 是与 σ 的两个相邻交点（按 γ 的参数化顺序）。线段 $[x,y]_\gamma$ 与 $[y,x]_\sigma$ 拼接成 $\mathbb{R}^2 \setminus Sing(X)$ 中的一条简单闭曲线 c。根据若尔当定理， c 围成 $\mathbb{R}^2$ 中的一个圆盘 D，而 $\mathcal{F}$ 在 D 上的庞加莱-霍普夫指数为 1（若 γ 在 x 和 y 处以相同定向截交 σ），否则为 $_1{}_2$：无论如何，该指数都严格为正。然而，这个指数等于 D 中所含 $\mathcal{F}$ 的奇点的庞加莱-霍普夫指数之和。由于这些指数均为负数，因此矛盾，证明完毕。□

同样的论证表明

引理 3.5. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个叶状结构，其奇点均为鞍型。则 $\mathcal{F}$ 没有紧叶

证明. 紧叶所围圆盘上的 $\mathcal{F}$ 的指数应为 1，这与具有负指数的奇点相矛盾。□

推论 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的奇异叶状结构，其奇点均为鞍点，且至少有 3 条分离曲线。那么 $\mathcal{F}$ 的每个半叶要么是一条射线，要么趋于 $\mathcal{F}$ 的一个奇点 p，并包含在 p的一条分离曲线中。

证明. 将 $\mathbb{R}^2$ 通过一个无穷远点作 Alexandrov 紧化。考虑一条叶 γ，并选取一个参数化 $\gamma(t)$。考虑

$$\limsup_{t \to +\infty} \gamma(t) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma([t, +\infty)},$$

其中闭包是在 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$中取的。它是一个递减的连通紧集交集，因此是一个非空的连通紧集。

如果 $\limsup_{t\to+\infty}\gamma(t)$ 不只是一个点，若它包含 $\mathcal{F}$的一个正则点 x，那么它就会无限多次横截任何经过 x的横截线段，这与引理 3.4 矛盾。

现在，$\limsup_{t\to+\infty}\gamma(t)$ 要么是点 ∞，要么是 $\mathcal{F}$ 的奇点，这就是所述的两种可能。□

3.4. 奇异叶状结构的正则叶。设 $\mathcal{F}$ 是具有鞍型奇点的叶状结构，L_0 是 $\mathcal{F}$ 的一片叶，且 σ 是一条经过点 $\sigma(0)\in L_0$ 的横截线段。

使得 $\sigma(t)$ 包含于某个奇点的分离曲线中的 t 至多可数。对于任意满足 $\sigma(t)$ 和 $\sigma(-t)$ 不在奇点的分离曲线中的 t，经过 $\sigma(t)$ 和$\sigma(-t)$ 的叶 L_t 和 L_{-t} 是互不相交的直线，因此将 $\mathbb{R}^2$ 分成 3 个连通分支。我们将包含 L_0 的 $\mathbb{R}^2\setminus(L_t\cup L_{-t})$ 的连通分支的闭包记为 U_t。注意，U_t 是一个条带（同胚于 $\mathbb{R}\times[-1,1]$），其边界由 $L_t\cup L_{-t}$ 构成，并且关于 $\mathcal{F}$ 饱和。

引理 3.6. 使用上述记号，$\bigcap_t U_t$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空闭子集，对 $\mathcal{F}$ 饱和，并且满足以下二者之一：

- 要么$\bigcap_t U_t = L_0$，且 L_0 是 $\mathcal{F}$的一个非奇异叶，
- 要么 $\bigcap_t U_t$ 有非空内部。

此外，$\bigcap_t U_t$ 与穿过 L_0 的横截线段 σ 的选择无关，记作 $\mathfrak{U}(L_0)$。

证明. $\mathfrak{U}(L_0)$对 $\mathcal{F}$饱和。若它包含一个非奇异叶，则它包含由该叶界定的某个半平面。若它包含一个奇异叶，则它包含相应的奇点，进而至少包含由分离曲线界定的某个扇形区域。□

定义 3.2. 使用上述记号，若 $\mathfrak{U}(L_0)=L_0$，则称叶 L_0 为正则叶；否则称其为非正则叶。

注 6. 若 L_0 是奇点的分离曲线，则它是非正则的。

与非奇异叶状结构的情形一样，我们有：

命题 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 是具有鞍型奇点的叶状结构。那么非正则叶的集合至多可数。

证明. 对任意横截线段 σ，记经过 σ_t 的叶为 L_t。由构造可知，闭集 $\mathfrak{U}(L_t)$ 两两不相交。因此，其中至多可数个具有非空内部，也就是说，至多可数个叶 L_t 是非正则的。注意到 $\mathcal{F}$ 有一个由横截线段 σ_n，$n\in\mathbb{N}$ 构成的可数族，使得 $\mathcal{F}$ 的每个叶都至少与一条线段 σ_n 相交，由此即可完成证明。□

叶状结构的叶有两个端，而正则叶的概念可以通过分别考察每个端来进一步精确化。

更确切地说，设 $L_{0,+}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一条半叶，并设 σ 是一条横截线段，使得 $\sigma(0)$ 是 $L_{0,+}$ 的起点。对于任意满足 $\sigma(t)$ 和 $\sigma(-t)$ 不属于某个奇点的分离曲线的 t，我们考虑 $L_{t,+}$ 和 $L_{t,-}$，它们分别是在 σ 与 $L_{0,+}$ 同侧、从 $\sigma(t)$ 和 $\sigma(-t)$ 出发的半叶。记 $U_t(L_{0,+})$ 为 $\subset\mathbb{R}^2$，即包含 $L_{0,+}$ 且以连接 $L_{t,+}$, $\sigma([-t,t])$ 和 $L_{t,-}$ 所得到的直线为边界的闭半平面。记 $\mathfrak{U}(L_{0,+})=\bigcap_t U_t(L_{0,+})$。于是：

- 或者 $\mathfrak{U}(L_{0,\ +})=L_{0,\ +}$，并称半叶 $L_{0,\ +}$（或者等价地，L_0 中对应于 $L_{0,\ +}$ 的端）是正则的
- 或者 $\mathfrak{U}(L_{0,\ t})\neq L_{0,\ t}$ 是一个具有非空内部的闭子集。

叶是正则的，当且仅当它的两个端都是正则的；叶的非正则端集至多可数。

3.5. 定向。具有鞍型奇点的叶状结构在奇点 x 的邻域内局部可定向（且横向可定向），当且仅当 x 的分离曲线数量为偶数。

因此， $\mathbb{R}^2$ 的奇点若均为鞍型，且分离曲线的数目为偶数，则该叶状结构是局部可定向且横向可定向的；由于$\mathbb{R}^2$ 是单连通的，所以它也是整体可定向且横向可定向的。

设 $\mathcal{F}$ 是一个叶状结构，其奇点均为鞍型，且分离曲线的数目为偶数，并固定 $\mathcal{F}$的一个定向和横向定向。

因此，每个叶 L 都有一个右端和一个左端。我们定义了 $\mathfrak{U}^{right}(L)$和 $\mathfrak{U}^{l}eft(L)$，使得 L 在右侧或左侧都可以是正则的。

若 L_0 是一个非分离曲线的叶，且 σ 是满足 $\sigma(0) \in L_0$的横截线段，则可以用同样的方式定义从上方和从下方正则的概念，这些概念适用于 L_0 或其两个端中的每一个。

例如，若 L_0^{right} 从上方正则，则 $\mathfrak{U}_+(L_0^{right}) = \bigcap_t U_{t,\ +}(L_0^{right}) = L_0^{right}$ ，其中$U_{t,\ +}(L^{right})$由 L_0^{right} 、 $\sigma([0,t])$和 L_t^{right} 所界定。

4. The circle at infinity of a family of foliations

4.1. $\mathbb{R}^2$叶状结构的无穷远圆：陈述。本节旨在回顾以下基本归功于 [Ma] 的结果，并给出一个简短的证明。

定理7. 设 $\mathcal{F}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$上的一个叶状结构，允许存在鞍型奇点。那么，可以通过添加一个无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}} = \partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ ，将 $\mathbb{R}^2$ 紧化为 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}} \simeq$ ，且具有以下性质：

- 任意半叶要么趋向一个鞍点，要么趋向一个无穷远点。
- 给定一点$\theta \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ ，趋向 θ 的叶的端所构成的集合至多可数。
- 对应于叶的正则端极限的 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 子集在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$中稠密。

此外，满足这三个性质的 $\mathbb{R}^2$ 由 $\mathbb{D}^2$ 作出的这种紧化是唯一的，唯一性以圆盘 $\mathbb{D}^2$的一个同胚为准。

注 7. 如果 $L_1^+ \neq L_2^+$ 是趋向同一点 $\theta \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$的两个叶端，那么 $L_2 \subset \mathfrak{U}^+$。特别地，端 L_1^+和 L_2^+不是正则的。

推论 4.1. 如果平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个同胚 f 保持叶状结构 $\mathcal{F}$ ，那么它可以唯一地延拓为紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$的一个同胚 F 。

此外， F 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的限制是恒等映射，当且仅当 f 保持 $\mathcal{F}$的每一条叶，并保持每条叶上的定向。

证明. 第一部分正如前面所指出的，是唯一性紧化的直接推论。

如果 f 保持每一条叶及叶的定向，那么它就保持每个叶端。因此，延拓 F 固定 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中每个作为叶端极限的点。由于叶端的极限点在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中稠密，可推知 F 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的限制是恒等映射。

反之，假设 F 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上是恒等映射。如果 $\theta \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 是叶 L_+ 的唯一一个端的极限，那么 L_+ 被 f 保持不变。

因此， f 保持每个叶的正则端。由于正则叶在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，由此可推知 f 保持每个定向叶，证毕。

□

4.2. 定理7的证明。我们用 $Reg(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的正则叶集，用 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ 表示正则叶的端点集（任何非奇异叶，尤其是任何正则叶，都有两个端）。回顾一下， $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一族互不相交的射线，因此是循环有序的。

引理 4.1. 如果 D 是一族正则叶，且其在 $\mathbb{R}^2$ 中的并集稠密，那么 D 中各叶的端点集 $\mathcal{D}$ 是正则叶的端点集 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ 的一个分离族。

证明。设 L_0 是 $\mathcal{F}, \sigma$ 的正则叶： $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$ 是与 $\mathcal{F}$ 横截的线段，满足 $\sigma(0) \in L_0$； U_t 是与横截线段 σ 相关联的 L_0 的邻域族。我们的假设意味着，对于 $t \in [-1,1]$的一个稠密子集，叶 L_t 属于 $\mathcal{D}$。考虑一个序列 $t_n \in [-1,1], n \in \mathbb{Z}$，使得

- $L_n = L_{t_n} \in \mathcal{D}$
- $t_n \to 0$ 与 $|n| \to \infty$相同
- t_n 与 $n \in \mathbb{Z}$符号相同

设 L_n^+和 L_n^-是 L_n的半叶（按照由 σ诱导的横向定向所给出的定向）。由于 L_0是正则的，可得 $\mathfrak{U}(L_0^+) = L_0^+$. 这意味着，$L_0^+$（分别地，$L_0^-$）是区间（按循环序）$[L_{-n}^+, L_n^+]$（分别地，$[L_n^-, L_{-n}^-]$）对 $n > 0$的交集。换言之，射线 L_{-n}^+、L_n^+（分别地，L_n^-、L_{-n}^-）将射线 L_0^+（分别地，L_0^-）与 $\mathcal{R}$（$\mathcal{F}$）中的任何其他射线分离（事实上，也与叶的任何其他射线分离，无论其是否正则），由此完成证明。

□

现在我们可以证明定理7

定理7的证明。我们选取了一个由 E 个正则叶组成的可数集，其并集在 $\mathbb{R}^2$中稠密。根据引理 4.1，E 中叶端的集合 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{R}$（$\mathcal{F}$）的一个可数分离子集。因此，我们可以应用定理 1。

由此得到 $\mathbb{R}^2$ 的紧化，紧化所用的圆盘为 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{D}^2$，使得正则叶的任意两个不同的端趋向无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的两个不同点，并且这些点在圆上稠密；此紧化与所选的族无关。这证明了定理的第2项和第3项，也证明了这两项足以保证此紧化的唯一性。

尚待证明第一项，即证明非正则叶中包含的射线也趋向 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的点。这由引理2.4得证。□

注8. 设 $\mathcal{F}$ 为一个叶状结构（可能含有鞍点）。那么，每条与 $\mathcal{F}$ 横截的直线 L 在无穷远处都有两个不同的极限点，分别对应于它的两个端。

证明。 L 的两个端是与 $\mathcal{R}$（$\mathcal{F}$）中的端（即 $\mathcal{F}$的叶端）不相交的射线，因为任意横截线段与任意叶至多相交于一点。现在由引理2.4可知，L的端趋向 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的点。这些点彼此不同，因为经过 L 的正则半叶位于这两个端之间。□

引理 4.2. 设 $\mathcal{F}$ 是一个叶状结构（可能带有鞍点）。给定任意两条（非奇点）叶 L_1、L_2，如果 L_1 和 L_2 的叶端趋向于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中相同的两个点，那么 $L_1 = L_2$。

证明。假设 $L_1 \neq L_2$ 共享相同的端点。那么由 $L_1 \cup L_2$ 围成的条带中的叶，其叶端都会趋向于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中相同的点，这与在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上至多可数个叶端共享同一个端点这一事实矛盾。□

作为引理 4.1 证明的一个附带结果，我们得到如下结论：

引理 4.3. 设 $\mathcal{F}$ 是一个叶状结构（可能带有鞍点型奇点），且 le σ: $[-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus Sing(\mathcal{F})$ 是一条横截线段。设 $\{L_t^+\}$ 和 $\{L_t^-\}$ 是从 σ（t）出发的半叶。考虑将 $t \in$（-1, 1）映射为 L_t^+ 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的极限点的映射。那么，当且仅当 L_t^+ 是一个正规端时，t 是该映射的连续点。

4.3. 多个叶端的 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 极限点：双曲扇区。

引理 4.4 。设 A 和 B 是不同的叶端。则以下性质等价

- 在 A 和 B之间不存在正则叶的端。
- 在 A 和 B 之间的叶端集至多是可数的。
- 在 A 和 B 之间的叶端集是有限的。

证明。首先，假设正则叶 L 在 A 和 B之间有一个端 L^+。我们将证明区间（A, B）是不可数的。

考虑与横截线段 σ 相关联的 L 的邻域 U_t，其中 $\sigma(0) \in L$。由于 L 是正则的，可得 $\mathfrak{U}(L) = \bigcap_t U_t = L$。因此，存在 t，使得 A 和 B 都在 U_t之外。

首先假设 A和 B属于 $\mathbb{R}^2 \setminus U_t$的同一个连通分支。那么存在一条直线 L，其左端为 B，右端为 A，且与 U_t不相交。由此可得，以下两个区间之一

(A, B) 和 (B, A) 不包含 U_t 中的任何叶端（根据假设，这不可能是包含 L^+ 的 (A, B)），而另一个则包含 U_t中的所有叶端，因此，正如所述，(A, B) 包含不可数多个叶端。

现在假设 A 和 B 属于 $\mathbb{R}^2 \setminus U_t$ 的不同连通分支。那么存在一条直线 Γ，其左端为 B，右端为 A，且与 U_t 的交集为 $\sigma([-t, t])$。由于 L^+ 位于区间（A，B）内，且 $L^+ \subset \Delta_\Gamma^+$，由此可推得所有正半叶 L_r^+、$r \in [-t, t]$ 都包含在上半平面 Δ_Γ^+ 中，因此位于 A 和 B 之间。所以区间（A，B）（以及（B，A））是不可数的，这正是我们先前所述的。

反过来，如果区间（A，B）内有不可数多个端，其中一个必定是正则叶的端，因为非正则叶至多可数。

这证明了前两项等价。第三项显然推出第二项，因此现在我们来证明第二项推出第三项。

设 A 和 B 是叶的两个端，使得 (A, B) 至多可数。我们考虑满足以下性质的直线 δ：

- A and B are the right and left ends of δ，分别 tively,
- $\delta \setminus (B \cup A)$ 是线段 σ，由有限条横截线段 $a_0, \dots a_k$ 和有限条叶线段 $b_1, \dots, b_k$组成，其中 $a_0(0) \in B$ 且 $a_k(1) \in A$。

设 $\Delta = \Delta^+(\delta)$ 是以 δ 为边界、对应于区间 $(A$ 的上半平面 $, B)$ 。注意，n ds 没有任何整条叶可以包含在 Δ 中，否则就会有不可数多个端在 A 和 B.

我们考虑经由 Δ 进入 a_0 的半叶 $L^+_{0,t}$。由于 A 和 B 之间只有可数多个端，因此存在一个 $t_n \to 0$ 序列，使得 L^+_{0,t_n} 经由点 $\sigma(s_n)$ 离开 Δ。注意，半叶 $L^+_{0,t}$, $t \in [t_{n+1}, t_n]$ 需要离开 Δ。

因此，每个 $L^+_{0,t}$, $t \le t_0$ 都在点 $\sigma(s(t))$ 处离开 Δ，其中 $t \mapsto s(t)$ 是一个递减函数。令 s_0 为极限

$$s_0 = \lim_{t \to 0} s(t).$$

注意，经由 a_0 进入 Δ 的半叶不能经由 a_0 离开 Δ，因为一条横截线段与一条叶最多相交于一点。因此我们推知，s_0 属于某个 $a_i, i > 0$。

我们考虑连接 $a_0(t)$ 与 $\sigma(s(t))$ 的紧致线段 $I_t \subset L^+_{0,t}$。我们考虑

$$\limsup_{t \to 0} I_t.$$

这是 $\mathbb{R}^2$ 的一个闭子集，由 B、包含在 Δ 中的完整叶以及一条终止于 $\sigma(s_0)$ 的半叶 $\tilde{B}_1$ 组成。我们已经注意到，没有整叶可以包含在 Δ 中。因此，这个极限由 ~ ~ ~ $B \cup B_1$ 组成。由此可知，端 B 和 B_1 是相邻的端，$B_1 \in (A, B)$，因此 (B_1, A) 至多可数。

我们考虑 σB_1 注意，$\tilde{B}_1$ 从某条线段 a_i 上的点开始的半叶，其中 $i > 0$。 ~

因此，如果 $B_1 \neq A$，就可以重复这一论证，得到一系列半叶 B_i，它们从某条横截线段 $a_{j(i)}$ 上的点开始，其中 $i \mapsto j(i)$ 严格递增。由于线段 a_i 的数量有限，因此这一归纳论证必定会终止。换言之，存在 i，使得 $B_i = A$，从而完成证明：$[A, B] = A = B_i, A_{i-1}, \dots, B_1, B$。

这证明第二项与第三项等价。 □

引理 4.4 的证明顺带证明了以下结论：

引理 4.5. 假设 A 和 B 是相邻的叶端，也就是说：区间 (A, B) 为空。那么，存在一个 ψ 的嵌入：$[-1, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$，使得：

- 线段 $\psi([-1, 1] \times \{t\})$、$0 \le t < 1$ 是叶线段
- $A = \psi([-1, 0) \times \{1\})$ 和 $B = \psi((0, 1] \times \{1\})$
- 点 $\psi(0, 1)$ 是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 端，也就是 A 和 B 的端。

定义 4.1. 嵌入 ψ：$[-1, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 称为双曲扇区。

如果 $[A,B]$ 或 $[B,A]$ 不包含正则叶的任何端，我们就称两个半叶 A、B 渐近。我们已经证明了以下引理:

引理 4.6。渐近关系是 $\mathcal{F}$ 的叶端集合上的一个等价关系。每个等价类要么是有限的，要么是可数的，并且作为有序集同构于 $(\mathbb{Z},<)$ 的一个区间。非平凡等价类至多可数。

我们还已经证明:

引理 4.7。设 $\mathcal{F}$ 是一个叶状结构（可能带有鞍型奇点）。那么，两个半叶趋向同一个点 $\theta\in\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，当且仅当它们渐近；并且每个趋向 θ 的半叶都属于它们的渐近等价类。

特别地，如果 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中的一个点是某个叶的正则端的极限，那么它就是唯一一个叶端的极限。注意，作为唯一一个叶端极限的无穷远点，也可能是一个非分离叶端的极限，正如下例所示:

例6。设 $K\subset\mathbb{R}$ 是一个康托集，并考虑

$$\mathcal{P}_K=\mathbb{R}^2\setminus(K\times[0,+\infty)).$$

因此， $\mathcal{P}_K$ 与 $\mathbb{R}^2$同胚。

设 $\mathcal{F}_K$是 $\mathbb{R}^2$ 上的水平叶状结构（其叶为 $\mathbb{R}\times\{y\}$）在 $\mathcal{P}_K$上的限制。因此，所有形如 $I\times\{0\}$ 的叶（其中 I是 $\mathbb{R}\setminus K$的一个连通分支）都两两下方不分离。

然而， $\mathcal{F}_K$ 的任意两个不同叶端在$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}_K}$中趋向不同的点。

注9. 假设 $\mathcal{F}$ 定向。

若 A_0、$\dots A_k$是相邻的叶端，并且假设 A_0是右半叶，则 A_1是左半叶，且 A_0 和 A_1 上方不分离。

那么 A_2 是右半叶，且 A_1 和 A_2 下方不分离，依此类推。

因此，渐近关系的每个非平凡等价类都由非分离叶的右端和左端交替组成，并且这些叶交替地位于上方和下方。

4.4. 非叶极限点的无穷远点：类中心点。本节假设叶状结构是非奇异的。

注10. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个叶状结构， $o\in\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 是一个点，使得 $o=\bigcap_n(a_n,b_n)$， $n\in\mathbb{N}$ 其中a_n、b_n 是同一叶 L_n的两个端的极限点。

那么 a_n 和 b_n 趋于 o，并且 o 不是 $\mathcal{F}$的叶端的极限点。

证明。考虑 Δ_n，它是 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$的紧圆盘，其边界（作为圆盘）为 $L_n\cup[a_n,b_n]$。那么这些 Δ_n按包含关系全序排列，并且 $o\in\bigcap_n\Delta_n$。如果一条叶 L 有一个端落在 o上，它就应包含在每个 Δ_n 中，因此也包含在 $\bigcap_n\Delta_n$中。因此， L 的两个端是 $\bigcap_n[a_n,b_n]$中的不同点，这与假设矛盾。□

我们称满足注10假设的点 $o\in\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 为类中心点。下面给出一个非常简单的例子:

例7。平凡的水平叶状结构 $\mathcal{H}$ 在无穷远处有两个类中心点，它们是（竖直） y 轴的极限点（该轴与 $\mathcal{H}$ 横截）。

确实很容易验证:

注11。任意给定的 $\mathcal{F}$ 的叶状结构， $\mathbb{R}^2$ 至少含有两个类中心点。为此，只需考虑对于包含关系下的一条极大链（由佐恩引理给出），半平面 $\Delta^{\pm}_L$ 在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 中的闭包的（递减）交集。

但情况可能复杂得多，下面的例子便说明了这一点。

例 8. 考虑一条 $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ $\mathbb{R}^2$ 的简单闭曲线，其中 γ^+ 和 γ^- 分别是连续函数 $\varphi\colon [-1,1] \to [0,1]$ 和 $-\varphi$ 的图像，其中

- $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$,
- $\varphi(t) > 0$ 对于 $t \in (-1,1)$,
- φ 的局部极大值和极小值在 $[-1,1]$ 中稠密（某种魏尔斯特拉斯函数）。

设 Δ 为由 γ 围成的开圆盘，并赋予其常值水平叶状结构 $\mathcal{F}$。

那么，$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}} = \gamma$ 以及 γ^+ 的任意局部极大点和 γ^- 的任意局部极小点都是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$的类中心点

The 本节的目的是说明，例 8 中的情形实际上十分常见。

引理 4.8. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{R}^2$ 上的一个叶状结构。假设在右侧不分离的叶的并集在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，并且同样地，在左侧不分离的叶的并集在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密。

那么，$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的类中心点集是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 的一个剩余子集。

证明. 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上固定一个度量。令 $\mathcal{O}_n \subset \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 为属于某个长度小于 $\frac{1}{n}$ 的区间 (a,b) 的点集，其中 a、b 是同一叶的两个端。

我们将证明 $\mathcal{O}_n$ 是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 的一个稠密开子集。于是 $\bigcap_n O_n$ 就是所述的剩余子集。

根据定义， $\mathcal{O}_n$ 是开集。我们只需证明 $\mathcal{O}_n$ 的稠密性。

回顾一下，正则叶的端在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中稠密。因此，我们只需证明正则叶的端包含于 $\mathcal{O}_n$ 的闭包中。

设 L 是一条正则叶， $\sigma\colon [-,1,1] \to \mathbb{R}^2$ 是一条满足 $\sigma_0 \in L$ 的正向横截线段。我们将 L_t 记为经过 σ_t 的叶，并回顾一下，由于 L 是正则的， L_t^+、L_t^- 的右端和左端 L_t 分别趋近于 L^+ 和 L^- 的右端和左端，当 $t \to 0$ 时。

给定任意 $r < s \in [-1,1]$，我们用 $U_{r,s}$、$U^{right}_{r\,s}$, 和 $U^{left}_{r\,s}$, 分别表示由 L_r 和 L_s 界定的条带，以及沿线段 σ（$[r,s]$）切割 $U_{r,s}$ 所得到的两个闭半条带。令 $I^{right}_{r\,,s} \subset \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 和 $I^{left}_{r\,,s} \subset \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 为 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的对应区间。注意，由于 L 是正则的，当 r、s 趋近于 0 时，这些区间的长度小于 $\frac{1}{n}$。

我们的假设意味着存在 $t^{right}, t^{left} \in (r,s)$，使得 $L_{t^{right}}$ 在右侧非分离，且 $L_{t^{left}}$ 在右侧非分离。

这意味着 $U^{right}_{r\,s}$、和 $U^{left}_{r\,s}$, 都包含整叶。因此，$I^{right}_{r\,s}$, 和 $I^{left}_{r\,s}$, 都包含这样的区间：其两个极端点是同一叶的端。取足够小的 r, s ，这些区间包含于 $\mathcal{O}_n$ 中，这表明 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中对应于 L^+ 和 L^- 的点位于 $\mathcal{O}_n$的闭包中。证明至此结束。□

然而，并非每个不是叶端极限的点 o 都是中心型的。

例9。设 $\mathcal{F}_K$ 为例6中通过将水平叶状结构限制在$\mathbb{R}^2 \setminus (K \times [0,+\infty))$上所定义的叶状结构，其中 K是一个康托集 $K \subset \mathbb{R}$。考虑一个点 $x \in K$，它不是 $\mathbb{R} \setminus K$的某个连通分支的端点。那么，点 $(x,0)$对应于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$中的一个点，该点不是叶端的极限，也不是中心型的。

考虑一个点 $o \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，并假设它不是任何叶端的极限点。对于任意叶 L，我们用 $\Delta_L \subset \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 表示包含 o、且其在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 中的边界为 $\bar{L}$ 的闭包的紧圆盘。于是 $\Delta_L \cap \mathbb{S}^1_L$ 是一个线段 I_L，其端点是 L的各端的极限点。注意，闭线段 I_L 按包含关系全序排列，圆盘 Δ_L也如此。令

$$I_o = \bigcap_L I_L \text{ and } \Delta_o = \bigcap_L \Delta_L$$

Then

- 若 $o = I_o$，则 o 是一个类中心点。。
- 否则，$\partial\Delta_o \cap \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 由无穷多个（可数个）两两不分离的叶组成，并且其中存在一个子序列，其极限为 o。

5. The circle at infinity of a countable family of foliations

本节旨在证明定理 3，即构造与带鞍点的可数叶状结构族相关的紧化，并证明其唯一性。

Remark 12. 例 4 已经向我们表明，定理 3 对不可数族并不成立。

与定理 7 相比，新的困难在于：对于所有叶状结构的端点集，已不存在更多的分离族。

例 10. 考虑将常值水平叶状结构和垂直叶状结构限制在条带$\{(x,y)\ |x-y|<1\}$上，这对于研究阿诺索夫流十分重要。此时，水平叶的每个端都有一个唯一的后继或前驱，而它是某个垂直叶的端。因此，没有任何族能够做到分离。

为了避开这一困难，我们将应用定理 6，而不是定理 1。

定理 3 的证明。所有叶状结构 $\mathcal{R}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ 中的正则叶 $\mathcal{F}_i$的端构成一个由互不相交的射线端组成的族。

我们已经看到，对于每个叶状结构 $\mathcal{F}_i$ ，正则叶 $\mathcal{R}_i$ 的端点集都存在一个可数分离族，例如，考虑经过 $\mathbb{R}^2$中一个稠密子集的正则叶即可。

因此，定理 6 给出了 $\mathbb{R}^2$ 关于 $\mathbb{D}^2$ 的一个紧化，满足所述的正则叶性质，也就是性质 2 和 3。

对于性质 1，需要证明非正则叶的端也趋向无穷远点。这由引理2.4给出。

唯一性来自定理 6 中的唯一性，至此证明完毕。 □

5.1. 示例：多项式向量场的可数族。

推论 5.1. 设 $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}, I\subset\mathbb{N}$ 是由定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的多项式向量场所定向的可数叶状结构族，且其奇点均为鞍型。那么，叶端要么互不相交，要么重合。

因此，根据定理 3，存在唯一的紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}=\mathbb{R}^2\cup\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，使得同一叶状结构的正则叶的叶端趋向无穷远圆上两两不同的点，并且这些叶端在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中稠密。

证明. 我们只需证明两个这样的不同叶状结构 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的情形。考虑 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的相切轨迹。这是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个代数集，它要么是 $\mathbb{R}^2$ （因此 $\mathcal{F}=\mathcal{G}$，这与假设矛盾），要么至多是一维的。因此，它由一个紧部分和一族互不相交的射线 $\delta_1,\dots,\delta_k$ 构成。

如果它是紧致的，那么 $\mathcal{F}$ 的每个叶端都与 $\mathcal{G}$ 横截，因此与 $\mathcal{G}$ 的每个叶至多相交于 1 个点：这些端彼此不相交。

否则，每条射线 δ_i 要么与两个叶状结构都相切，因而是它们的公共叶（这是已列出的可能性之一）；要么除有限多个点外，与 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 横截（因为 δ_i 上的相切点构成一个代数子集）。

因此，经过适当缩小非相切的 δ_i，我们可以假设它们与两个叶状结构都横截，因而与 $\mathcal{F}$ 的每个叶至多相交于 1 个点。这意味着，$\mathcal{G}$的叶端中，任何不是 $\mathcal{F}$ 叶端的端都与 $\mathcal{G}$ 横截，从而与 $\mathcal{G}$的任意叶端不相交，结论得证。□

注 13. 例 5.1 中的紧化通常不同于 $\mathcal{F}_i$ 在 $\mathbb{RP}^2$ 上的代数延拓：例如，考虑赋予水平与垂直叶状结构的 $\mathbb{R}^2$ 这一平凡例子。在这种情况下，通过代数延拓得到的紧化中，水平（分别为垂直）叶状结构的所有叶都趋向于 $\mathbb{RP}^1$ 上的同一点（这与无穷远圆上的两个点相对应）。

5.2. $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 在$\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}_i}$ 上的投影及无穷远圆上的类中心点。

例11. 考虑赋予平凡水平与垂直叶状结构的 $\mathbb{R}^2$， $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别对应水平与垂直方向。则紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{H},\ \mathcal{V}}$ 与赋予平凡水平与垂直叶状结构的正方形 $[-1,1]^2$ 共轭。除四个顶点外，每个点 $p \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{H},\ \mathcal{V}}$ 都恰为一个叶端的极限：若 p 位于垂直边上，则该叶端为水平叶端；若 p 位于水平边上，则该叶端为垂直叶端。

投影 $\Pi_{\mathcal{H}}$: $\mathbb{D}^2_{\mathcal{H},\ \mathcal{V}} \to \mathbb{D}^2\mathcal{H}$ 是通过将两条水平边压缩为 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{H}}$的中心型点而得到的。

投影 $\Pi_{\mathcal{H}}$: $\mathbb{D}^2_{\mathcal{H},\ \mathcal{V}} \to \mathbb{D}^2\mathcal{V}$ 是通过将两条垂直边压缩为 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{H}}$的中心型点而得到的。

例12. 考虑条带 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < 1\}$，其上分别赋有水平和垂直叶状结构 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$。然后$\mathbb{D}^2_{\mathcal{H},\ \mathcal{V}} = \mathbb{D}^2_{\mathcal{H}} = \mathbb{D}^2_{\mathcal{V}}$，其构造方法是在闭条带 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq 1\}$上添加两个点 $\pm\infty$。边 $|x-y|=1$ 上的每个点恰好是 $\mathcal{H}$ 的一条叶端和 $\mathcal{V}$的一条叶端的极限，而点 $\pm\infty$对于两种叶状结构都是中心型点。

这两个例子表明，两种非常简单的叶状结构组成的有序对，可能会导致该有序对所关联的紧化在各叶状结构的紧化上的投影呈现不同的行为。

下方的命题 5.1 表明，对于复杂的叶状结构，两种叶状结构组成的有序对的紧化通常与各叶状结构的紧化一致。

命题 5.1. 设 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的两个横截叶状结构。假设

- $\mathcal{G}$ 中那些在右侧与另一叶不分离的叶的并集在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密
- $\mathcal{G}$ 中那些在左侧与另一叶不分离的叶的并集在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密。

那么，该识别 在 $\mathbb{R}^2$ 上的映射可从 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}} \to \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 延拓为一个同胚；换言之 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}} = \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$.

证明。假设 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$ 中存在一个开区间 I，其中的点不对应于 $\mathcal{F}$ 的任何叶端。那么 $\mathcal{G}$ 的叶端在 I 中稠密，因此 I 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{G}}$ 上的投影是单射。

现在，引理 4.8 表明， $\mathcal{G}$ 上存在叶 L，其两个端点都在 I 上。因此，将正向改为负向后，经过 L 的 $\mathcal{F}$ 的每条正半叶的叶端都在 I 上，这与 I 的定义矛盾。

因此， $\mathcal{F}$ 的叶端所对应的 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$ 上的点是稠密的。于是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}} = \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$，证明完毕。□

由命题 5.1 和引理 4.8 可直接推出

推论 5.2。设 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的两个横截叶状结构，使得 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的叶在右侧均非分离，且在左侧也均非分离。

于是，$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}} = \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^1_{\mathcal{G}}$ 中的一般点对两种叶状结构都是中心型。

5.3. 双曲扇区。对于一种叶状结构，我们已经看到，如果多个叶端在无穷远圆上有相同的极限点，那么它们会按 $\mathbb{Z}$ 的一个线段排列，且相邻的两个叶端围成一个双曲扇区。这些双曲扇区有一个非常精确的模型，使我们能够理解横截叶状结构的位置。

引理 5.1. 设 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}^2$上的两个横截叶状结构，并考虑 $\pi_{\mathcal{F}}$: $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}} \to \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$。假设 $p \in \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 是由 $\mathcal{F}$的叶端 A 和 B 围成的双曲扇区的角点。

那么，存在一个非空区间 $I_{\mathcal{G}}$，由在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$中终止于 p 的 $\mathcal{G}$ 的叶端组成。此外

- 要么 $I_{\mathcal{G}}$仅由 $\mathcal{G}$的唯一叶端 C组成，并且 A、 B、 C趋向于$\mathbb{D}^2_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$中的同一个无穷远点
- 或 $\pi^{-1}_{\mathcal{F}}(I_G)$ 是圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\ \mathcal{G}}$ 其内部由 $\mathcal{G}$ 的叶的正则端组成。

证明。只需使用模型 $[-1,1]\times[0,1]$，其中 p 是点 $(0,1)$， $A=[-1,0)\times\{1\}$ 和 $B=(0,1]\times\{1\}$，而水平线段 $[-1,1]\times\{t\}$, $0 \leq t < 1$ 是 $\mathcal{F}$- 叶线段。我们可以选择该模型，使垂直边 $\{-1\}\times[0,1]$ 和 $\{1\}\times[0,1]$ 是 $\mathcal{G}$ 的叶线段。考虑穿过$[-1,1]\times\{0\}$的 $\mathcal{G}$-叶。到达 A 的叶与到达 B 的叶是两个非空区间，在

$[-1,1]$ 中是开集且互不相交。根据连通性，存在一些叶，它们对应于 $[-1,1]$ 的一个闭区间，既不抵达 A，也不抵达 B，而这些叶终止于 $p \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$。

假设该区间不缩减为 $\mathcal{G}$ 的单个叶端，并取该区间内部的一个端 C，再假设 C 是例如一个右端。考虑第3节中定义的 U_t^{right} 的邻域 C。那么 $\bigcap_t U_t^{right}$ 由 C 以及包含在双曲扇区内的 $\mathcal{G}$ 的一组（可能为空的）整叶组成。假设该集合非空，并令 D 为 $\mathcal{G}$ 的这样一片叶。每一片与 $\mathcal{F}$ 相交的叶 D 都有一个包含在双曲扇区内的半叶，这与双曲扇区的定义矛盾。因此 $C = \bigcap_t U_t^{right}$，也就是说，$C$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个叶的正则端，证明完毕。□

由此可直接得到：

推论 5.3. 设 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$，$I \subset \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个至多可数的两两横截的叶状结构族。考虑一个点 $p \in \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$。则

- 每个 $\mathcal{F}_i$ 至多有一个叶端以 p 为极限。
- 或者趋向 p 的端点集按 $\mathbb{Z}$ 的区间顺序排列，并且，同一 $\mathcal{F}_i$ 的任意两个相邻叶端之间，恰好有一个分别属于 $\mathcal{F}_j$、$j \neq i$ 的叶端。

6. The circle at infinity for orientable laminations.

6.1. 层状结构的无穷远圆。我们提出的紧化 $\mathbb{R}^2$ 的方法，可以推广到任何具有射线族且该射线族拥有一个分离集的对象。

例如，层状结构又如何呢？若没有假设，这一理论便无法推广。一个明显的障碍是，叶的数量可能太少，无法在无穷远圆上形成稠密子集。但正如下方的例13所示，还存在更微妙的问题。

例13。有些闭层状结构的叶是回归的。例如，考虑实数集 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 Plykin吸引子：它是一个紧致极小层状结构（由不稳定流形构成）。

现在考虑 $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 上的一个 Plykyn 吸引子，其中 ∞ 属于该吸引子，我们得到 $\mathbb{R}^2$ 上的一个闭层状结构，其中每个叶都是无界但回归的。

注意，例13中的回归层状结构并非可定向。下面说明 Poincar´e-Bendixson 论证适用于可定向层状结构：

引理 6.1. 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个闭可定向层状结构。给定任意叶 L，其闭包 $\bar{L}$ 要么包含一条紧叶，要么 L 是一条直线。

证明. 若 $\bar{L} = L$，则 L 要么是一条紧叶，要么是一条直线（即真嵌入于 $\mathbb{R}^2$）。现在假设 $\bar{L}\setminus L$ 包含一个点 $x \in \mathbb{R}^2$。我们固定 $\mathcal{L}$ 的一个定向。选取一条线段 σ：$[-1,1]$ 横截 $\mathcal{L}$，使得 $\sigma(0) = x$，并且使 σ 与每一条叶都正向相交。根据假设，L 与 σ 有无穷多个交点。取沿叶 L 的顺序相邻的两个交点 z_0、z_1。于是，将线段 $[z_0, z_1]_L$ 和 $[z_1, z_0]_\sigma$ 首尾相接（它们分别在 L 和 σ 中连接 z_0 与 z_1），便得到 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单闭曲线 δ。

考虑由 δ 围成的圆盘 Δ。每条叶都以相同的定向穿过 δ，也就是说，要么每条叶都进入 Δ，要么每条叶都离开 Δ。将定向反向后，不妨假设每条叶都进入 Δ，特别是 L 进入 Δ。换句话说，存在一个包含在 Δ 中的正半叶 L_+。这个半叶不可能是回归的（否则它会再次穿过 $[z_0, z_1]_\sigma$，而要做到这一点，它就必须离开 Δ）。此外：

断言 2. 没有其他叶 $L' \neq L$ 能聚积到 L 上：$L \cap \bar{L}' = \emptyset$，如果 $L' \neq L$。

证明. 如果 L' 聚积到 L 上，它会在一个无限集合上穿过 $[z_0, z_1]_\sigma$。 □

因此，ω-极限集为 $\omega(L) = L_+ \setminus L_+$，且非空。考虑 $y \in L_+ \setminus L_+$。叶 L_y 包含于 Δ中。要么 L_y 是紧的，且 $\omega(L) = L_y$，于是结论成立；要么 $\bar{L}_y \setminus L_y \not\subset \emptyset$。在这种情况下，断言 2 蕴含 L_y 不被任何叶聚积，特别是不被 L聚积，这与 L_y的定义矛盾。□

现在我们可以将定理7推广到可定向层状结构的情形:

定理 8. 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭可定向层状结构，且没有紧叶，并假设 $\mathcal{L}$ 的叶的集合不可数。那么，通过添加一个无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}} = \partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$，可以将 $\mathbb{R}^2$ 紧化为 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{L}} \simeq$，并具有以下性质:

- 任意半叶都趋向一个无穷远点。
- 给定一点 $\theta \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$，趋向 θ 的叶端集至多可数。
- 对于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$ 的任意非空开子集 I， I 中对应于叶端极限的点集不可数。

此外，具有这三种性质的、通过 $\mathbb{D}^2$ 对 $\mathbb{R}^2$ 进行的紧化是唯一的，差别至多为圆盘 $\mathbb{D}^2$ 的一个同胚。

我这里只给出证明的概要。

证明。假设层状结构 $\mathcal{L}$ 定向且不含紧叶，因此根据引理 6.1，每个叶都是一条直线。

根据康托尔-本迪克松定理（例如参见 [Ke], ），层状结构 $\mathcal{L}$ 可以唯一地写成两个互不相交的层状结构的并集 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$，其中 $\mathcal{L}_0$ 是没有孤立叶的闭层状结构，而 $\mathcal{L}_1$ 由可数个叶组成。

如果叶 $L \in \mathcal{L}_0$ 两侧都有 $\mathcal{L}_0$ 中的叶聚积，且与 $\mathcal{L}_0$中的任何其他叶分离，则称其为正则叶。与叶状结构的情形相同的证明表明， $\mathcal{L}_0$ 中非正则的叶至多可数。

最后，与叶状结构的情形相同，我们考虑包含在 $\mathcal{L}_0$的正则叶中的射线芽集合 $\mathcal{R}$。我们取 $\mathcal{L}_0$中一个可数的正则叶集合 $\mathcal{D}$，其并集在 $\mathcal{L}_0$中稠密；与叶状结构的情形相同，可以证明 $\mathcal{D}$ 中的射线将 $\mathcal{R}$分离。

然后应用定理 1，我们便得到所述的典范紧化。 □

当 $\mathcal{L}$ 在横截方向上是一个完美紧集时（也就是说，每个点 $x \in \mathcal{L}$ 都经过一条横截线段 σ，使得 $\sigma \cap \mathcal{L}$ 是一个没有孤立点的紧集），定理 8 给出的紧化显得十分自然：任何保持 $\mathcal{L}$ 的 $\mathbb{R}^2$ 的同胚 h 都可以延拓为 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{L}}$上的同胚 H，而且当且仅当 h 保持 $\mathcal{L}$的每一片叶时，限制映射 $H|_{\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}}$ 才是恒等映射。若 $\mathcal{L}$ 有孤立叶，情况便不再如此。

对于具有孤立叶的层状结构，定理 8 完全忽略了 $\mathcal{L}$的康托尔-本迪克松分解中的可数部分 $\mathcal{L}_1$（即 $\mathcal{L}$ 的可数部分）。现在我们将提出一种考虑这一可数部分的典范紧化。

我们先来看两个截然不同的可数定向层状结构例子 .

例 14。考虑层状结构 $\mathcal{L} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$。那么 $\mathcal{L}$ 无法通过无穷远圆进行紧化，使得任何保持 $\mathcal{L}$ 的同胚 h 都能延拓到无穷远圆上。

例 15. 设 S 是一有限体积的双曲曲面，并设 ℓ 是 S 上一组本质互不相交简单闭测地线。那么， ℓ 在万有覆盖 $\tilde{S} = \mathring{\mathbb{D}}^2$ 上的提升 $\mathcal{L}$ 是庞加莱圆盘上的一个可数、离散的测地层状结构，其叶端分别趋向无穷远圆 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ 上的点；由于 $\pi_1 S$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的作用是极小的，这些极限点的集合在 $\mathbb{S}^1$ 上稠密。

在这个例子中，层状结构在横截方向上是离散的，但叶端的集合相对于循环序而言是自身的一个分离集。

在上面的例 15 中，之所以存在一个分离集，是因为作用在自然紧化的无穷远圆上的作用具有极小性。

为了给没有紧叶的闭定向层状结构提出一种规范紧化，我们需要确定循环全序集的哪一部分存在分离子集。下面这个简单命题正是要解决这个问题，其证明留给读者。

命题 6.1. 设 X 是一个带有全循环序的集合。考虑 X 上的关系，定义如下： $x \approx y$，如果区间 $[x, y]$ 或 $[y, x]$ 中有一个不包含任何自分离子集 E（其中 $\#E \geq 2$）。那么

- 关系 $\approx$是一个等价关系
- 每个等价类都是一个区间
- X 上的循环序在商集 $X/\approx$上诱导出一个全循环序

此外， $X/\approx$ 要么是单个点，要么是一个无限的自分离集。

注意，自分离集中的任意两个不同点都属于不同的等价类，因此 $\#(X/\approx) = 1$当且仅当 X 不包含任何（非平凡的）自分离子集。否则 $\#(X/\approx) = \infty$。典范紧化现在由下方的定理 9 给出：

定理 9. 设 $\mathcal{L}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$上的一个闭定向层状结构，没有紧叶，并设 $\mathcal{R}$是 $\mathcal{L}$的叶端集。由于叶端是互不相交的射线，集合 $\mathcal{R}$ 完全循环有序。假设 $\#(\mathcal{R}/\approx) > 1$。

Th因此，通过添加无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$， $\mathbb{R}^2$ 存在唯一的紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{L}}$，使得 hat

- $\mathcal{L}$ 的每个叶端都趋向于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$ 上的一个点
- $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$ 中叶端的端点集在 $\mathbb{S}^1$ 上稠密
- 两个叶端趋向于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$ 中同一个点，当且仅当它们属于 $\mathcal{R}/\approx$ 中同一个等价类。

证明。只需将定理 1 应用于子集 $E \subset \mathcal{R}$，该子集在 $\approx$的每个等价类中恰好包含一个代表元。容易验证，所得紧化满足所述性质，且不依赖于 E 的选择。□

注 14。 $\mathcal{R}$ 中 $\approx$ 的每个等价类至多可数，因为 $\mathcal{L}_0$ 的完美部分中正则叶的端点集具有自分离性。

这种紧化考虑的叶比定理 8 给出的紧化更多，但仍可能出现意料之外的情形：

例 16。考虑一个有限体积的非紧双曲曲面 S，以及一个闭层状结构 ℓ，它由两条互不相交且自由同伦的本质闭曲线，以及一条闭合但非紧的叶构成；这条叶的两个端都趋向 S的同一个尖点。

$\tilde{}$那么，ℓ 在万有覆盖 $S=$上的提升 $\mathcal{L}$ $^\circ$

$\mathbb{D}^2$ 是庞加莱圆盘上的一个可数离散层状结构，其叶端各自趋向圆 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$上的点；这类极限点的集合在 $\mathbb{S}^1$ 上稠密（同样是因为 $\mathbb{S}^1$ 上 $\pi_1 S$ 的作用是极小的）。

然而，在这个例子中，有些叶成对地共享两端的相同极限点，也有些叶的两端都趋向同一个点。

给定一个没有紧叶的闭定向层状结构 $\mathcal{L}$ 及其康托尔-本迪克松分解$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$ （$\mathcal{L}_0$ 是一个没有孤立叶的闭层状结构，且 $\mathcal{L}_1$ 可数），定理 9 考虑了 $\mathcal{L}_1$ 中带有分离子集的叶端部分，这与定理 8 不同。就我个人而言，定理 9 的主要问题在于，我没有找到任何自然准则来计算 $\mathcal{L}_1$中 $\approx$ 的等价类。事实上，下面的引理 6.2 似乎揭示了这样一个悖论：$\mathcal{L}_1$ 可能具有分离子集：

引理 6.2。设 $D \subset \mathbb{R}$ 是一个按 $\mathbb{R}$排序的可数紧子集。那么 D 不包含任何自分离子集 $\mathcal{E} \subset D$（也就是说，$\#\mathcal{E} > 2$，并且对于每个 $x < z$、 x、 $z \in \mathcal{E}$，都存在 $y \in \mathcal{E}$ 使得 $x < y < z$）。

证明。如果 $\mathcal{E}$ 是一个非平凡的分离子集，那么存在一个从 $\mathcal{E}\backslash\{\min\mathcal{E}$、$\max\ \mathcal{E}\}$ 到 $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ 的递增双射。该递增双射以唯一方式延拓为从 $\mathbb{R} \to [0,1]$到 D 的（非严格）递增映射。此映射是连续的，且 D 的像为 $[0,1]$。

因此， D 不可数。 □

引理 6.2 告诉我们，闭的可数层状结构的分离性质无法在局部获得（即无法在该层状结构的叶状图表中获得）。由此可推出：

$^\circ$命题 6.2. 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{D}^2$ 的一个闭可数定向层状结构，使得每个叶端都趋向于 $\mathbb{S}^1$ 上的某一点，且这些极限点的集合在 $\mathbb{S}^1$中稠密。

那么，对于任意非空开区间 $I \subset \mathbb{S}^1$，都存在 $L \in \mathcal{L}$，其两端的极限都属于 I。更准确地说， $\mathbb{D}^2$ 中的 I 的任意邻域都包含 $\mathcal{L}$的一整条叶。

证明。考虑 I 的一个邻域，该邻域由两条半叶围成，它们的极限为点 $x \neq y \in I$；另有一条与 $\mathcal{L}$ 横截、并连接这两条半叶的线段 σ。若该邻域中不包含任何叶，那么每一条在 I 处有一个端的叶都会切割 σ。

另一方面，区间 J 中的任意稠密子集 $\mathbb{R}$ 都是自分离的。由此可推得 $\sigma \cap \mathcal{L}$ 包含一个自分离子集，但它是一个可数紧集，这与引理 6.2 矛盾。

□

这个命题指出，可数定向层状结构的分离性质是由无穷远点的小邻域中的叶所产生的。

6.2. 横截层状结构族。横截性通常并不意味着横截层状结构中两条叶的交集是紧致的。但这种紧致性是与叶状结构族相关的紧化所需的主要假设。

然而，如果两条直线 $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}$ 总是以相同的定向相交，那么 $\#L_1 \cap L_2 \leq 1$。由此可得，定理 2 无需困难即可推广到两两横截相交且始终具有相同定向的可数族定向闭层状结构。

定理 10. 设 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_i\}$, $i \in I \subset \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个闭可定向层状结构族，不含紧叶，且 $\mathcal{L}_i$ 的叶的集合不可数。我们假设这些层状结构两两横截，且交点的定向恒定。则存在 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{L}} \simeq$，通过添加一个无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}} = \partial\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 实现，并具有以下性质：

- 任意半叶都趋向一个无穷远点。
- 给定一点 $\theta \in \mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$，趋向 θ 的叶端点集至多可数。
- 对于$\mathbb{S}^1_{\mathcal{L}}$ 的任意非空开子集 I， I 中对应于叶端极限的点集是不可数的。

此外，具有这三个性质的 $\mathbb{R}^2$ 由 $\mathbb{D}^2$ 作出的这种紧化是唯一的，差一个圆盘 $\mathbb{D}^2$的同胚。

7. Actions on a bifoliated plane

我们已经看到，任何保留至多可数族横截叶状结构 $\mathcal{F}$ 的同胚 $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$，都可以唯一地扩张为紧化 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$上的一个同胚。

因此，如果 $H \hookrightarrow Homeo(\mathbb{R}^2)$是一个作用于 $\mathbb{R}^2$ 并保留横截叶状结构（至多可数）族 $\mathcal{F}$ 的群，那么此作用可扩张为$\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$上的一个作用。将其限制到无穷远圆上，便得到 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的一个作用。

如果 $H \hookrightarrow Homeo(\mathbb{R}^2)$是一个作用于 $\mathbb{R}^2$ 并保留叶状结构族 $\mathcal{F}$的群，那么若对于该族 $\mathcal{F}$中任意一个叶状结构的每个叶 L， $H(L)$在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，我们就称此作用在 $\mathcal{F}$ 的叶上极小。

7.1. 忠实性。

命题 7.1. 设 $\mathcal{F}$ 是一个叶状结构，且 $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$ 是一个保持 $\mathcal{F}$ 的同胚。那么， h 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的作用是恒等映射，当且仅当对任意叶 L， $h(L) = L$，并且 h 保持叶的定向。

证明. 若 h 保持每个叶及其定向，则它保持其端点极限。由于这些端点极限在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中稠密，因此由 h 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上诱导的同胚是恒等映射。

反之，若 h 在 $SS^1_{\mathcal{F}}$ 上诱导恒等映射，则对每个叶 L，叶 $h(L)$ 与 L 具有相同的端点极限。根据引理 4.2，这意味着 $h(L) = L$，正如所述。□

推论 7.1. 设 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}, i \in I \subset \mathbb{N}$ 是至少包含 2 个横截叶状结构的一个族。设 $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$ 是一个保持每个叶状结构 $\mathcal{F}_i$ 的同胚。当且仅当 h 本身是恒等映射时， h 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的作用才是恒等映射。

证明. 如果 h 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上诱导的同胚是恒等映射，那么 h 在每个 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}_i}$ 上诱导的同胚也如此（因为它们是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 的商集）。因此，命题 7.1 表明 h 保持每个 $\mathcal{F}_i$ 的每一叶。由于 $\mathbb{R}^2$ 中每个点都是经过该点的叶的唯一交点，因此可知 $\mathbb{R}^2$ 中每个点都被 h 固定，且 h 是恒等映射。

□

7.2. 定向与投影的单射性。设 $\mathcal{F}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$上的一个叶状结构，赋有一个定向和一个横向定向。设 $\mathcal{G} \subset Homeo(\mathbb{R}^2)$是一个整体保持 $\mathcal{F}$的同胚群。设 $\mathcal{G}^+$ （分别是 $\mathcal{G}_+$）为 $\mathcal{G}$ 中保持 $\mathcal{F}$的元素所构成的指数至多为 2 的子群（分别保持其横向定向），而 $\mathcal{G}^+_+ = \mathcal{G}^+ \cap \mathcal{G}_+$）为同时保持两种定向的元素所构成的子群。则：

引理 7.1. 如果群 $\mathcal{G}$、$\mathcal{G}^+$、$\mathcal{G}_+$、$\mathcal{G}^+_+$ 中的一个在 $\mathcal{F}$的叶上极小作用，那么这 4 个群中的每一个也都如此。

我们将证明引理 7.2，而引理 7.1 是它的一个特例。

引理 7.2. 设群 $\mathcal{G}$ 在实数集 $\mathbb{R}^2$上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶上极小作用，且 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ 是一个有限指数子群。那么 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{F}$的叶上极小作用。

证明。 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$的叶上极小作用，并考虑这样一片叶 L。由于 $\mathcal{H}$ 是有限指数子群，因此存在 g_1，..， $g_n \in \mathcal{G}$，使得对任意 $g \in \mathcal{G}$，都存在 $i \in \{1, \dots, n\}$，满足 $g.\mathcal{H} = g_i\mathcal{H}$。令 $\mathcal{H}_i = g_i \cdot \mathcal{H}$。特别地，$\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{H}_i$，于是$\mathbb{R}^2 = \bigcup_i \mathcal{H}_i(L)$。

考虑 $\mathbb{R}^2$的任意开子集 O 。

$$O = O \cap \bigcup_i \overline{\mathcal{H}_i(L)} = \bigcup_i (O \cap \overline{\mathcal{H}_i(L)})$$

开集 O 是一个贝尔空间，因此有限个空内部闭集的并集仍为空内部：由此可推出，至少一个 $O \cap \mathcal{H}_i(L)$ 具有非空内部。进而可得，$\circ$并集 $\bigcup_i \mathcal{H}_i(L)$（即 $\mathcal{H}_i(L)$的内部之并）在 $\mathbb{R}^2$中稠密。

注意，对每个 i 和每个 g，都存在 j，使得 $g(\mathcal{H}_i(L)) = \mathcal{H}_j(L)$。
考虑 $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_i$
$\mathcal{H}_i(L)$。它是一个 $\mathcal{G}$不变闭集，对叶状结构 $\mathcal{F}$是饱和的，且内部为空。由于每个 $\mathcal{G}$轨道都是稠密的，可推知该集合为空。

Thus

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_i \overline{\mathcal{H}_i(L)}.$$

开集 $\overline{\mathcal{H}_i(L)}$是通过 $\mathcal{G}$中的同胚相互映射得到的，因此它们都非空。

由于 $\mathbb{R}^2$ 是连通的，可推知开集 $\overline{\mathcal{H}_i(L)}$并非两两不相交。令 $k \in \{1, \dots, n\}$为满足存在互不相同的 i_1、.....、 i_k的最大数，使得

$$\bigcap_1^k \overline{\mathcal{H}_{i_j}(L)} \neq \emptyset.$$

由于 $\overline{\mathcal{H}_i(L)}$并非两两不交，我们知道 $k \geq 2$。我们将用反证法证明：

断言 3. $k = n$。

证明。为此，我们假设 $k < n$。

接着，我们取这些开集的所有交点 k 的并集。该并集是一个 $\mathcal{F}$-饱和的$\mathcal{G}$-不变非空集，因此是稠密的。其补集是一个 $\mathcal{F}$-饱和的不变闭集，且内部为空，因此必为空集。

因此， $\mathbb{R}^2$ 是这些开集的并集。再次，由于 $\mathbb{R}^2$ 的连通性，这些开集并非两两不相交。这意味着其中两个不同的开集有非空交集，也就是说，存在一个非

。个$\mathcal{H}_i(L)$的空交集，且其数量超过 k，这与 k的选取相矛盾。这表明 $k=n$，从而证明了这一断言。□

Thus

$$\bigcap_1^n \overline{\mathcal{H}_i(L)}.$$

是一个非 空集，且是 $\mathcal{G}$ 不变的开集，并且关于叶状结构 $\mathcal{F}$ 饱和，因此它在 $\mathbb{R}$ 中稠密 ^{2}.

我们刚刚证明了 $\mathcal{H}(L)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，从而完成证明。 □

我们将使用引理 7.1 的下述直接推论

推论 7.2. 设 $H \subset Homeo(\mathbb{R}^2)$ 是一个保持叶状结构 $\mathcal{F}$ 并在叶上极小作用的群。假设 L 是一片在右侧和下方均非分离的叶。那么，在右侧和下方均非分离的叶 $h(L)$、 $h \in H$ 的并集在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密（将右侧换成左侧和／或将下方换成上方，结论同样成立）。

由命题 5.1 和推论 7.2 可直接得到：

命题 7.2. 设 $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 和 $H \subset Homeo(\mathbb{R}^2)$ 的两个横截叶状结构，且保持 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。假设 $\mathcal{G}$ 中每个叶的轨道在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密。

若 $\mathcal{G}$ 有一个非分离叶，则 $\Pi_{\mathcal{F}}$: $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 的投影是单射。

证明. 若 $\mathcal{G}$ 在右侧有一个非分离叶 L_1，则它与一个叶 L_2 非分离，而后者在左侧非分离。现在，推论 7.2 断言， $\mathcal{G}$ 中在左侧非分离的叶以及在右侧非分离的叶在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密。接着，命题 5.1 断言 $\Pi_{\mathcal{F}}$ 是一个同胚，得证。□

7.3. 无穷远圆上作用的极小性。

定理 11。 设 $\mathcal{F}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的叶状结构，且 $H \subset Homeo$（$\mathbb{R}^2$）保持叶状结构 $\mathcal{F}$。

（1）若 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的作用是极小的，则叶状结构 $\mathcal{F}$ 存在从上方和从下方的非分离叶。（2）反之，若叶状结构 $\mathcal{F}$ 存在从上方和从下方的非分离叶，且每个叶的轨道在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，则 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的作用是极小的。

我们将通过定理 14 看到，叶上的作用的极小性并非无穷远圆上的作用的极小性的必要条件。

定理 11 的第 1 项是下方命题 7.3 的推论。

命题 7.3。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个叶状结构，并假设 $\mathcal{F}$ 没有从下方的非分离叶。给定任意叶 L，记 Δ^+_L 为 $\mathbb{R}^2$ 中由 L 界定的上半平面在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 上的闭包。

于是 $\bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta^+_L$ 非空，且由 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的唯一一个点 $O_{\mathcal{F}}$ 组成。因此，任何保持 $\mathcal{F}$ 的$h \in Homeo$（$\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$）都以 $O_{\mathcal{F}}$ 为不动点：

$$h(O_{\mathcal{F}}) = O_{\mathcal{F}}.$$

证明。我们在 $\mathcal{F}$ 的叶集合 $\mathcal{L}$ 上引入如下关系：若存在一条相对于 $\mathcal{F}$的横向定向正向定向的横截线段 σ，其起点为 L_1，终点为 L_2，则有 $L_1 \preceq L_2$。容易验证， $\preceq$ 是 $\mathcal{L}$上的偏序关系。

由于 $\mathbb{R}^2$的连通性，可得：

˜断言 4. 任取叶 L、$L \in \mathcal{L}$，存在 $k \geq 0$和 L_0、.....、$L_k \in \mathcal{L}$，使得：

- 对于任意 $i \in \{0,\ldots,k-1\}$，叶 L_i和 L_{i+1}在 $\preceq$下可比较（即 $L_i \preceq L_{i+1}$或$L_{i+1} \preceq L_i$）
- $L = L_0$ 和 $L' = L_k$

证明。存在一个由线段组成的可数族，它们在 $\mathbb{R}^2$ 中与 $\mathcal{F}$ 横截，并且每个叶 L 至少与其中一条线段相交。与给定线段相交的叶的集合在$\mathbb{R}^2$中诱导出一个连通开集。给定 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两个点，取一条连接这两点的紧路径。根据紧致性，这条路径可由有限个这样的开集覆盖。由此容易得出结论。□

我们用 $\prec L, L' \succ \in \mathbb{N}$ 表示此类数的最小值 k。容易验证，$\prec \cdot, \cdot \succ$ 是叶的集合 $\mathcal{L}$ 上的一个距离。

到目前为止，这对任意叶状结构 $\mathcal{F}$ 都可以做到。在此情形下，我们的假设—— $\mathcal{F}$ 不存在从下方彼此不分离的叶——可表述如下：

断言5. 假设 $L_0, L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ 是三条叶，满足 $L_0 \preceq L_1$ 和 $L_0 \preceq L_2$。那么对于 $\preceq$，L_1 和 L_2 是可比较的。

证明. 假设叶 L_i 彼此不同，否则无需证明。令 σ_i: $[0,1] \to \mathbb{R}^2, i = 1$ 横截于 $\mathcal{F}$ 且正向定向，使得 $\sigma_i(0) \in L_0$ 且 $\sigma_i(1) \in L_i$。

设 $I = \{t \in [0,1], L(\sigma_1(t)) \cap \sigma_2 \neq \emptyset\}$ 和 $J = \{t \in [0,1], L(\sigma_1(t)) \cap \sigma_2 \neq \emptyset\}$。由于 $\mathbb{R}^2$ 是单连通的，可以证明 I 和 J 是连通的，且各自都包含 0。

设 $t_1 = \sup I$ 和 $t_2 = \sup J$。对于任意 $t \in [0, t_1)$，令 $\tilde{t} \in J$，使得 $L(\sigma_1(t)) = L(\sigma_2(\tilde{t}))$。特别地，当 t 趋于 t_1时，$\tilde{t}$ 趋于 t_2。

因此，叶 $L(\sigma_1(t_1))$ 和 $L(\sigma_2(t_2))$ 从下方被叶 $L(\sigma_1(t)) = L(\sigma_2(\tilde{t}))$ 聚积，故从下方不分离。根据关于 $\mathcal{F}$ 的假设，这意味着它们相等：

$$L(\sigma_1(t_1) = L(\sigma_2(t_2))$$

如果 $t_1 < 1$ 且 $t_2 < 1$，那么对于靠近 t 的 $t > t_1$，叶 $L(\sigma_1(t))$ 会在点 $\sigma_2(\tilde{t})$ 处截交 σ_1，且 $\tilde{t} > t_2$，并且靠近 t_2。这与我们对 t_1 和 t_2 的选择矛盾。

因此，$t_1 = 1$ 或（但不互斥）$t_2 = 1$。在第一种情况下，$L_1 = L(\sigma_1(t_1))$ 截交 σ_2，进而截交 $L_1 \preceq L_2$；在第二种情况下，L_2 截交 σ_1 和 $L_2 \preceq L_1$。证明至此结束。

□

由断言4和断言5可推得

断言7.1. 任取两条叶 L、L，存在一条叶 L，使得 $L \preceq L$ 且 $L \preceq L$。特别地，$\prec \cdot, \cdot \succ$ 之间的距离不超过 2。

证明。考虑一个有限的叶序列 $L = L_0, \ldots, L_k = L$, $k = \prec L, L \succ$，且 L_i 与L_{i+1}可比较。

k 极小性意味着 L_{i-1} 和 L_{i+1} 不可比较（否则可以删去 L_i，得到一个严格更短的序列）。

假设存在 $i \in \{1, \ldots k-1\}$ 使得 $L_{i-1} \succeq L_i$。若 $L_i \succeq L_{i+1}$，则 $L_{i-1} \succeq L_{i+1}$，这与上述观察相矛盾。因此 $L_i \preceq L_{i+1}$，而断言5再次推出 L_{i-1} 和 L_{i+1} 可比较，这同样不可能。这就证明了

$$\forall i \in \{1, \ldots k-1\}, L_{i-1} \preceq L_i$$

□

由此可推出

断言6。存在一个递增序列 $L_i \prec L_{i+1}$ $i \in \mathbb{N}$, $L_i \in \mathcal{L}$，使得对任意叶 $L \in \mathcal{L}$，都存在n 满足 $L \prec L_n$。

证明。选取一个可数集，由紧致正向定向线段 σ_i 组成：$[0,1] \to \mathbb{R}^2$ 横截于 $\mathcal{F}$，使得每一片叶都与其中一条 σ_i 相交（因此对于 $\preceq$，其长度小于 $L(\sigma_i(1))$）。然后归纳构造序列 L_i：L_{i+1} 是对叶 L_i 和 $L(\sigma_i(1)$ 应用断言7.1 得到的。□

断言 7. 紧致圆盘 Δ_L^+ 随着 L 递减，其中 $\prec$: 更确切地说，若 $L \prec \tilde{L}$，则

$$\Delta_{\tilde{L}}^+ \subset \overset{\circ}{\Delta}{}_L^+,$$

w 。这里 Δ_L^+ 表示 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 拓扑下的内部（它并不表示开圆盘).

证明。假设蕴含 L_{i+1} 包含于 $\Delta_{L_i}^+$的内部，因此 $\Delta_{L_{i+1}}^+ \cap \mathbb{R}^2$ 包含于 $\Delta_{L_i}^+$的内部。我们需要证明 $\Delta_{L_{i+1}}^+ \cap \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 包含于 $\Delta_{L_i}^+ \cap \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$的内部。换言之，我们需要证明 L_{i+1} 的叶端与 L_i的叶端没有共同的极限。

回忆一下， $L_i \prec L_{i+1}$，也就是说，存在一条线段 $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$，它与 $\mathcal{F}$横截且正向定向，并且 $\sigma(0) \in L_i$ ， $\sigma(1) \in L_{i+1}$。如果 L_i 与 L_{i+1} 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中有共同的极限点，那么任意叶$L(\sigma(t))$也如此，这与 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中的点至多是可数多个叶端的极限这一事实矛盾。证明至此结束。

□

因此，断言6和7意味着

$$\bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta_L^+ = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Delta_{L_n}^+.$$

现在， $\bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta_L^+ = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Delta_{L_n}^+$ 是一个由连通紧致度量集构成的递减序列，这些集合关于 $\mathcal{F}$是饱和的，因此其交集是非空的连通紧集，并且关于 $\mathcal{F}$是饱和的。由于它不包含$\mathcal{F}$的任何叶，可推出 $\bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta_L^+ \cap \mathbb{R}^2 = \emptyset$，也就是说， $\bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta_L^+$ 是 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$中的一个紧区间 U。

接下来只需证明这个区间 $U = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} \Delta_L^+$ 缩减为一个点。否则，存在一条半叶 L_+，其极限属于 U 的内部。根据断言7，这意味着对于每个 i，都有 $L_+ \cap \Delta_{L_i}^+ \neq \emptyset$。这与以下事实矛盾：当 n 足够大时，叶 L_n 比（就 $\prec$而言）承载半叶 L_+ 的叶L 更大，因此$L \cap \Delta_{L_n}^+ = \emptyset$。

这个矛盾结束了命题 7.3 的证明。 □

定理 11 的第 1 项的证明。假设 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 上的作用是极小的。叶状结构 $\mathcal{F}$ 不可能与平凡叶状结构共轭，否则集合 $\{N, S\}$ （ $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中不是叶的极限的唯一点）将是 H-不变的。

因此， $\mathcal{F}$ 存在非分离叶，并且我们可以假设它们来自上方（通过改变 $\mathcal{F}$ 的横向定向）。如果它们不从下方出现非分离叶，那么命题 7.3 给出的 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中的点 $O_{\mathcal{F}}$ 就是 H 的全局不动点。

□

定理 11 的第 2 项的证明。假设 H 是一个群，在具有非分离叶的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶上极小地作用，其中一些非分离叶来自上方，另一些来自下方。根据引理 7.1，考虑 H 的一个有限指数子群，使其在 $\mathcal{F}$ 的叶上极小地作用后，可以假设 H 保持 $\mathcal{F}$ 的定向和横向定向。

回想一下，正则叶的端在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中稠密。因此，只需验证：任意正则叶的端的任意邻域，都包含 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 中任意一点在 H 下的轨道上的点。考虑正则叶 L 和 $\sigma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ 是一条与 $\mathcal{F}$ 横截的线段，且 $\sigma(0) \in L$。我们将证明， L_+ 的端属于任意 H-轨道的闭包（对 L^- 的端也可用相同的论证）。

我们用 L_t 表示经过 t 的叶。考虑端 L^+ 的邻域基 U_t^+，它由 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 中半平面的闭包内的紧致圆盘给出，该半平面由 L^+_{-t}、 $\sigma([-t,t])$ 和 L_t^+ 围成。

我们的假设意味着

断言 8. 存在一组稠密的 t 取值，使得 L_t 在右侧不分离。因此，对每个 t ，拓扑圆盘 U_t^+ 都包含整叶。

证明。第一句话可直接由以下事实推出：存在右侧非分离的叶， H 保持叶的定向，并在 $\mathcal{F}$的叶上极小作用。

第二句话已在第 4 节中见过。 □

任意叶 L 将 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 切成两个圆盘， Δ_L^+ 和 Δ_L^- （沿着 $\mathcal{F}$的横向定向），它们的并集$\Delta_L^+ \cup \Delta^- L$ 是 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$。

断言 9. 在这些假设下，给定任意 L，存在 g_1、 $g_2 \in H$，使得 $g_1(\Delta_L^+) \subset \mathring{\Delta}_L^-$ 且 $g_2(\Delta_L^-) \subset \mathring{\Delta}_L^+$

因此， Δ_L^+ 和 Δ_L^- 都包含 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$中任意 H-轨道上的点。

证明。我们证明第一个包含关系；另一个可通过反转 $\mathcal{F}$ 的横向定向得到。

考虑 L 一条叶和 σ： $[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ 一条横截于 $\mathcal{F}$ 的线段（相对于 $\mathcal{F}$ 的横向定向为正向定向），使得 $\sigma(0)\in L$。存在 $-t\in[-1,0)$，使得叶 L_{-t} 从下方与一条叶 L_2 非分离，因为从下方非分离的叶在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密，这归因于 H 在叶上的作用的极小性，以及 H 保持了 $\mathcal{F}$ 的横向定向。因此 $L_{-t}\subset\Delta_L^-$， $L_2\subset\Delta_L^-$。此外，$\Delta^-_{L_2}$ 包含 L_{-t}，因而包含 L。由此可得：

$$\Delta^+_{L_2}\subset\Delta^-_L.$$

现在，存在 $h\in H$，使得 $h(L_2)=L_{-s}$。其中 $-s\in(-1,0)$。特别地，可得 $\Delta^+_L\subset\mathring{\Delta}^+(h(L_2))$，因此

$$h^{-1}\Delta^+_L=\Delta^+_{h^{-1}(L)}\subset\mathring{\Delta}^+(L_2)\subset\mathring{\Delta}^-_L.$$

证明结束。 □

我们已经可以结束定理 11 的证明： $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 中任意 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$点的任意邻域都包含一整条叶 L （上方的断言 8），因此包含 Δ_L^+ 或 Δ_L^-。根据断言 9，该邻域包含 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$中任意点的任意 H-轨道上的点。这表明 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$上的作用具有极小性，证毕。□

定理 12. 设 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两个横截叶状结构。设 $H\subset Homeo(\mathbb{R}^2)$ 是一个同时保持两个叶状结构 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 不变的群。

(1) 如果 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 上的作用是极小的，那么两个叶状结构 $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}$ 都具有来自上方的非分离叶和来自下方的非分离叶。(2) 反之，如果两个叶状结构 $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}$ 都具有来自上方的非分离叶和来自下方的非分离叶，并且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 中每条叶的轨道都是稠密的 $\mathbb{R}^2$，那么 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 上的作用是极小的。

证明。对于第 1 项，如果 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\,\mathcal{G}}$ 上的作用是极小的，那么 H 在 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 和 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{G}}$ 上的两个作用都是极小的。因此，第 1 项由定理 11 的第 1 项得出。

反过来，由于假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 上叶的作用是极小的，且它们存在不分离的叶，因此命题 7.2 表明两个投影 $\Pi_{\mathcal{F}}$ 和 $\Pi_{\mathcal{G}}$ 都是单射。也就是说$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F},\,\mathcal{G}}=\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}=\mathbb{S}^1_{\mathcal{G}}$。定理 11 的第 2 项给出了 H 在这个无穷远圆上的作用的极小性。

□

8. Acton of the fundamental group on the bifoliated plane of an Anosov flow

8.1. 与阿诺索夫流相关的双叶状平面。设 X 是闭 3 维流形 M 上的一个阿诺索夫流。随后，Fenley 和 Barbot 证明， X 在 M 的万有覆盖上的提升与 $\mathbb{R}^3$、 $\frac{\partial}{\partial x}$ 共轭；特别地，这个提升流的轨道空间是一个平面 $\mathcal{P}_X\simeq\mathbb{R}^2$。于是， X 的中心稳定叶状结构和中心不稳定叶状结构（通过提升到万有覆盖并投影到 $\mathcal{P}_X$）在平面 $\mathcal{P}_X$ 上诱导出一对横截叶状结构 $\mathcal{F}^s$、$\mathcal{F}^u$。三元组（$\mathcal{P}_X$， $\mathcal{F}^s$， $\mathcal{F}^u$）称为与 X 相关的双叶状平面。最后，基本群 $\pi_1(M)$ 的自然作用在 M 的万有覆盖上的投影，在 $\mathcal{P}_X$ 上给出一个同时保留叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 的作用。

Fenley 和 Barbot 证明，若叶状结构 $\mathcal{F}^s$、$\mathcal{F}^u$ 中有一个是平凡的（也就是说，没有非分离叶，因此与由平行直线构成的仿射叶状结构共轭），那么另一个也平凡。在这种情况下，称 X 是 $\mathbb{R}$-覆盖的。此时，双叶状平面与以下两种可能模型之一共轭：

- 赋有平凡水平与垂直叶状结构的平面 $\mathbb{R}^2$ ； Solodov 证明，这等价于 X 与环面 $\mathbb{T}^2$ 上一个线性自同构的悬挂流轨道等价；
- 平凡水平与垂直叶状结构在条带 $|x-y|<1$ 上的限制。

8.2. $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}^s,\mathcal{F}^u}$ 在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}^s}$ 和 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}^u}$ 上的投影的单射性。本节旨在证明定理 5，该定理在下方重述为命题8.1，并证明定理 13（见下一节）。

Prop命题 8.1。设 X 是一个阿诺索夫 f在一个 3-流形上的流 f形。则：

- 或者 X 与 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的某个双曲元素的悬挂流拓扑等价
- 或者紧化 $\mathbb{D}^2_{F^s,\ F^u}$在 $\mathbb{D}^2_{F^s}$ 和 $\mathbb{D}^2_{F^u}$ 上的两个投影都是同胚。

证明。假设在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}^u}$ 上的投影不是单射。因此，$\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s,\mathcal{F}^u}$ 中存在一个非平凡开区间 I，其点不是 $\mathcal{F}^u$中叶端的极限。因此，I 中的点有一个稠密子集是 $\mathcal{F}^s$中叶端的极限。此外，$\mathcal{F}^s$ 在 I 中的每个叶端都是正规端。考虑 $\mathcal{F}^s$ 中叶 L^s_{right} 的一个正规端（例如右端），其极限位于 I的内部。那么，存在一条经过 L^s_{right} 中某点的小不稳定线段 σ，使得 $\mathcal{F}^s$ 的每条右半叶 $L^s_{right,t}$ 都是正则的，且其极限位于 I中。所有这些半叶的并集就是 Fenley 在[Fe2] 中所称的乘积区域。现在，[Fe2，定理 5.1] 断言，任何包含乘积区域的阿诺索夫流都是悬挂流，证毕。□

8.3. 无穷远圆上作用的极小性。为了证明定理 5，尚需证明下方的定理 13：

定理 13. 设 X 为闭三维流形 M 上的阿诺索夫流。则 X 非-$\mathbb{R}$-覆盖，当且仅当 $\pi_1(M)$ 在无穷远圆 $\mathbb{S}^1_{F^s,\ F^u}$上的作用是极小的。

注 15. 如果流形 M 不可定向，且 X 是 $\mathbb{R}$-覆盖的，那么 [Fe1] 注意到 X 是一个悬挂流。因此，在不可定向流形 M 上，定理 13 断言其在无穷远圆上的作用是极小的，但 M 是悬挂流形的情形除外。

注 16. 当我们考虑 X 在有限覆盖上的提升时，双叶状平面（$\mathcal{P}_X$，$\mathcal{F}^s$，$\mathcal{F}^u$）保持不变。因此，只需在 M 可定向且 $\pi_1(M)$ 保持两个叶状结构 $\mathcal{F}^s$、$\mathcal{F}^u$ 的定向和横向定向的情况下证明定理 13。

因此，jusqu'à 目前我们将假设 M 是可定向的，并且 $\pi_1(M)$ 保持两个叶状结构 $\mathcal{F}^s$、$\mathcal{F}^u$ 的定向和横向定向。

注 17. 如果 X 是 $\mathbb{R}$-覆盖的，那么 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s}$ 恰有 2 个类中心点，因此它们在 $\pi_1(M)$ 对 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s}$的作用下保持不变：这个作用不是极小的，因而对 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s,\ \mathcal{F}^u}$ 的作用也不是极小的。

因此，剩下要证明的是 X 不是 $\mathbb{R}$-覆盖时的定理 13。我们先处理较容易的情形，即假设 X 是传递的。非传递的情形将在下一整节中处理。

X 是传递情形下的定理 13 的证明。当 X 是非 $\mathbb{R}$-覆盖的且传递时，[Fe 3] 证明了 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 都存在来自上方的非分离叶以及来自下方的非分离叶。由于（考虑 M 的有限覆盖后）$\pi_1(M)$ 的作用保持 $\mathcal{F}^s$ 的定向和横向定向，且该作用在 $\mathcal{F}^s$ 的叶的集合上是极小的，因此定理 11 断言，$\pi_1(M)$ 对 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s}$ 的作用是极小的。由于 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s}=\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}^s,\ \mathcal{F}^u}$，这就完成了证明。

□

9. Minimality of the action on the circle at infinity for non-transitive Anosov flows: ending the proof of Theorem 5

为完成定理 5 的证明，我们还需证明：

定理 14. 设 X 是闭合连通三维流形 M 上的非传递阿诺索夫流。那么，M 的基本群在无穷远圆上的作用是极小的。

这一结果不那么直观，因为基本群 $\pi_1(M)$ 在 M 的叶上的作用并非极小；而且，如果 X 有多个吸引子，甚至可能不存在轨道稠密的叶。

证明无穷远圆上作用的极小性，需要一些关于阿诺索夫流的背景知识，尤其是关于非传递阿诺索夫流的知识。在本节中，X 是一个非传递

定义在可定向闭连通流形 M 上的阿诺索夫流，并且 $\pi_1(M)$在双叶状平面（$\mathcal{P}_X, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$）上的自然作用保持两个叶状结构的定向及横向定向。回想一下，我们已经看到，两个叶状结构的紧化与各自叶状结构的紧化相同。我们用 $\mathbb{D}^2_X, \mathbb{S}^1_X$ 表示这个紧化及相应的无穷远圆。我们用 $*$ 指代这一组假设和记号。

9.1. 非传递阿诺索夫流的背景。设 X 是一个非传递阿诺索夫流。Thurston，根据 [Fe1，Ba1] X 不是 $\mathbb{R}$-覆盖的。

X 是一个结构稳定流，因此 Smale 谱分解定理将 X 的非游荡集分解为若干按 Smale 序排列的基本块：若一个基本块的不稳定流形与另一个基本块的稳定流形相交，则前者高于后者。按照这一序，极大基本块是排斥子，极小基本块是吸引子。在 [Br], Brunella 注意到，基本块由与流横截的不可压缩环面彼此分隔。

考虑 X 的一个吸引子 $\mathcal{A}$ 。它是一个由 X 的不稳定叶状结构中的叶组成的紧集，因此是由不稳定叶构成的紧层状结构。此外， $\mathcal{A}$ 与横截线段 σ 的交集是一个康托集。若不稳定叶 W^u 中的 $\mathcal{A}$ 满足 $W^u \cap \sigma$ 属于 $\sigma \setminus \mathcal{A}$ 某个连通分支的边界，则称该叶为边界型。

双曲理论中的一项经典结果（例如参见 [BeBo]）断言，$\mathcal{A}$ 中边界型的不稳定叶是不稳定流形，它们对应于有限个称为边界型周期轨道的周期轨道。

排斥子 $\mathcal{R}$ 也有同样的性质：它们是由稳定叶构成的紧层状结构，横截方向上是康托集，并且有有限个边界叶，即有限个称为边界型的周期轨道的稳定流形。

本节将重点研究吸引子和排斥子在双曲平面 $\mathcal{P}_X$ 上的投影 $\mathcal{A}$，该投影是由 $\mathcal{F}^s$ 的叶构成的闭层状结构，并且它将每条横截曲线切割成一个康托集。为方便起见，我们仍将 $\mathcal{P}_X$上的这一层状结构记作 $\mathcal{A}$ ： 因此， $\mathcal{A}$ 既表示 M 上的二维层叠，也表示 $\mathcal{P}_X$上的一维层叠。

排斥子的情形也一样。

设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_X$ 和 $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}_X$ 分别是与 X的一个吸引子和一个排斥子相对应的不稳定层状集和稳定层状集。那么

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$。这看起来显而易见，但对我们而言将是一条至关重要的性质：给定一条不稳定叶L^u 和一条稳定叶 L^s，这是判断它们不相交的唯一标准。
- 包含在 $\mathcal{A}$ （分别为 $\mathcal{R}$）中的周期点在 $\mathcal{A}$ （分别为 $\mathcal{R}$）中稠密。
- X 的每个周期轨道在 $\mathcal{P}_X$中都有一个离散的 $\pi_1(M)$-轨道
  $\pi_1(M)$-轨道的边界型周期轨道是有限个 X-轨道的轨道，因此在 $\mathcal{P}_X$中构成一个离散集。

- Fenley [Fe2] 证明， $\mathcal{F}^s$ （分别为 $\mathcal{F}^u$）的非分离稳定叶对应于 X的有限个轨道，因此对应于 $\mathcal{P}_X$中的一个离散周期点集。
- 因此， $\mathcal{A}$ （分别为 $\mathcal{R}$）中不属于边界型且其不稳定叶（分别为稳定叶）正则的周期点 p 在 $\mathcal{A}$中稠密。

- 若 $\mathcal{A}_1$、……、 $\mathcal{A}_k$ 是 X 的吸引子，那么穿过 $\mathcal{A}_1$、……、 $\mathcal{A}_K$ 这些 $\mathcal{P}_X$ 的层状结构的 $\mathcal{F}^s$ 的稳定叶之并集，是 $\mathcal{P}_X$ 中两两不相交的开子集，其并集在 $\mathcal{P}_X$中稠密。排斥子也有相同的结论。由此可直接得到：

引理 9.1. $\mathcal{P}_X$ 中存在一个稠密点集，其中的点 x的稳定叶 $L^s(x)$包含一个位于吸引子 $\mathcal{A}$中的周期点p ，该吸引子不属于边界型，且 $L^u(p)$是正则的。排斥子也有对称的结论。

9.2. 定理 13 的证明。定理 13 证明的两个主要步骤是下方的命题 9.1 和命题 9.2。

命题 9.1. 设 L^u 是 $\mathcal{F}^u$ 的一条叶，对应于包含在 X 的一个吸引子中的 X 的一条不稳定叶。设 Δ_+ 和 Δ_- 是 $\mathbb{D}^2_X$ 中由 L^s 界定的 $\mathbb{R}^2$ 中半平面的闭包。那么存在 g^+、$g^- \in \pi_1(M)$，使得 $g^-(\Delta^-) \subset \Delta^+$ 且 $g^+(\Delta^+) \subset \Delta^-$。

对于排斥子中的稳定叶，同样的结论也成立。

推论 9.1. 设 L^s 和 L^u 分别是排斥子中的 $\mathcal{F}^s$ 和吸引子中的 $\mathcal{F}^u$ 。设 $I \subset \mathbb{S}^1_X$ 是一条内部非空的线段，其端点是同一条叶的两端的极限， L^s 或 L^u。

那么， $\pi_1(M)$的作用的每个轨道都包含 I中的点。

证明。根据命题 9.1，存在 $g \in \pi_1(M)$，使得 $g(\mathbb{S}^1 \setminus I) \subset I$，证毕。 □

命题 9.2. 给定任意非空开区间 $J \subset \mathbb{S}^1_X$，存在一条 L ，它要么是排斥子中的 $\mathcal{F}^s$，要么是吸引子中的 $\mathcal{F}^u$ ，且其两端的极限都在 J中。

在假设命题 9.1 和 9.2 成立的情况下证明定理 14。根据命题 9.2，每个具有非空内部的区间 J 都包含一个区间 I ，其两个端点分别是排斥子或吸引子中某个稳定叶或不稳定叶的端的极限点。现在，根据推论 9.1，区间 I 在 $\mathbb{S}^1_X$ 中的每个 π_1（M）轨道上都包含一个点。因此， $\mathbb{S}^1_X$ 中的任意 π_1（M）轨道，在每个具有非空内部的区间内都有点：换句话说， $\pi_1(M)$ 的每个轨道在 $\mathbb{S}^1_X$ 中都稠密；否则，$\pi_1(M)$ 在 $\mathbb{S}^1_X$ 上的作用就是极小的，证明至此结束。□

9.3. 命题 9.1 的证明。设 L^u_0 是吸引子 $\mathcal{A}_0$ 中的一条不稳定叶， Δ^+_0 是由 L^u_0 围成的上半平面的闭包。为证明命题 9.1，我们要证明存在 $f \in \pi_1(M)$ ，使得 $f(\Delta^-_0) \subset \Delta^+_0$（另一个所述的包含关系证明相同）。

考虑一点 $p_0 \in L^u_0$ 以及经过 p_0的稳定叶 L^s_0 。

断言 10。存在一条不稳定叶 L^u_1 ，具有以下性质：

- $L^u_1 \subset \Delta^+_0$
- L^u_1 包含在排斥子 $\mathcal{R}_1$的吸引域中
- L^u_1 包含排斥子 $\mathcal{R}_1$的一个非边界周期点 $p_1 \in L^u_1$ 。
- L^u_1 与稳定叶 L^s_0 相交于一点 $L^u_1 \cap L^s_0 = q_0$。

证明。排斥子吸引域中包含该排斥子的非边界周期点的不稳定叶的并集在 $\mathbb{R}^2$中稠密。因此，我们可以在 Δ^+_0 中选取这样一条叶，使其与 L^s_0相交。□

令 L^s_1 为经过 p_1 的稳定叶。它是一条非边界稳定叶，包含于排斥子 $\mathcal{R}_1$ 中。注意， L^s_1 与吸引子 $\mathcal{A}_0$ 不相交。因此

- L^s_1 与 $L^u_0 \in \mathcal{A}_0$ 不相交。
- 稳定叶 L^s_1 不同于稳定叶 L^s_0，因此与之不相交。

换言之，并集 $L^s_0 \cup L^u_0$ 将 $\mathcal{P}_X$ 分成 4 个象限，而 L^s_1 包含于其中一个象限。记这 4 个象限为 $C^{\pm,\pm}$，使得 $\Delta^+_0 = C^{-,+} \cup C^{+,+}$ 且 $L^s_1 \subset C^{+,+}$。

记 $\Delta^+_1 = \Delta^+(L^s_1)$ 为由 L^s_1 围成且包含于 Δ^+_0 的半平面的闭包。因此，Δ^+_1 与 L^s_1 一样包含于同一个象限 $C^{+,+}$ 中。我们将由 L^s_1 围成的另一个半平面的闭包记为 Δ^-_1。注意，Δ^-_1 包含其余 3 个象限，特别是包含 Δ^-_0 和 $C^{-,+}$。

由于叶 L^s_1 按假设并非 $\mathcal{R}_1$ 的边界叶，因此它在两侧都被其 $\pi_1(M)$-轨道聚积。于是，在其轨道中存在一片叶 $L^s_2 = g(L^s_1)$ ，在任意接近 p_1 的一点 $x \in \Delta^-_1$ 处切割 L^u_1 ，从而有 $x \in C^{+,+}$。注意， L^s_2 包含于排斥子 $\mathcal{R}_1$ 中，因而与 $L^u_0 \cup L^s_0$ 不相交。因此它包含于某个象限中。由于它包含 $x \in C^{+,+}$ ，所以有

$$L^s_2 \subset C^{+,+}.$$

设 $h \in \pi_1(M)$ 为稳定子 p_1 的生成元，使得 L^u_1 在 h 作用下膨胀。我们考虑叶的序列 $h^n(L^s_2)$ ，这些叶在点 $h^n(x)$ 处切割 $L^u_{1,-}$。

断言11. 对于足够大的 n ， $h^n(L^s_2)$ 包含于象限 $C^{-,+}$.

证明. 每个叶 $h^n(L_2^s)$ 都与 $L_1^u \subset \Delta_0^+$ 相交，并且与 L_0^u 不相交（因为 $h^n(L_2^s)$ 包含于排斥子中）。因此，$h^n(L_2^s)$ 包含于 Δ_0^+，且与 L_0^s不同，故不相交。因此， $h^n(L_2^s)$ 包含于 $C^+, ^+$ 的四个象限之一中， $C^-, ^+$。

点 x_n 趋于无穷大，在 L_1^u 中因此继续向前延伸 $q_0 = L_0^s \cap L_1^u$。因此，当 n 足够大时$x_n \in C^-, ^+$。我们证明了当 n 足够大时 $h^n(L_2^s) \subset C^-, ^+$，从而证明了该断言。□

我们通过证明以下内容来完成命题 9.1 的证明:

断言 12. 取 n 足够大，使得 $h^n(L_2^u) \subset C^-, ^+$。那么，要么 $g(\Delta_1^-) \subset C^+, ^+ \subset \Delta_0^+$，要么 $h^n g(\Delta_1^-) \subset C^-, ^+ \subset \Delta_0^+$

由于 Δ_1^- 包含 Δ_0^-，该断言意味着要么 $g(\Delta_0^-) \subset \Delta_0^+$，要么 $h^n g(\Delta_0^-) \subset \Delta_0^+$，由此完成命题 9.1 的证明。

断言的证明。假设 $g(\Delta_1^-)$ 不包含于 $C^+, ^+$ 中。由于 $g(\Delta_1^-)$ 是由 $g(L_1^u)$ 界定的半平面之一 $= L_2^u \subset C^+, ^+$ 可知， $g(\Delta_1^+)$ 是由 L_2^u 界定且包含于 $C^+, ^+$ 中的半平面。特别地，$g(\Delta_1^+)$ 不包含 q_0。由于 p_1 和 q_0 位于 L_2^u 的不同侧，可推出 $p_1 \in g(\Delta_1^+)$。

由于 p_1 是 h 的不动点，可推出

$$p_1 \in h^n g(\Delta_1^+)$$

因此， $h^n g(\Delta_1^+)$ 是由 $h^n(L_2^u)$ 界定的半平面，而该半平面不包含于象限 $C^-, ^+$ 中。因此，$h^n g(\Delta_1^-)$ 是由 $h^n(L_2^u)$ 界定的另一个半平面，并且包含于 $C^-, ^+$ 中，证明完毕。

□

9.4. 命题 9.2 的证明。我们要证明，圆 $\mathbb{S}_X^1$ 中的任意开区间 I 都包含吸引子中的某条不稳定叶的两个端，或排斥子中的某条稳定叶的两个端。

引理 9.2. 假设 $*$，则存在 $\mathbb{S}_X^1$ 的稠密子集 E_0^s, E_0^u，使得

- 任意一个 $p \in E_0^s$ 都是包含一个周期点 x 的 $\mathcal{F}^s$ 正则叶的极限；该周期点属于一个吸引子 $\mathcal{A}(p)$，且不是边界型。
- 任意一个 $q \in E_0^u$ 都是包含一个周期点 y 的 $\mathcal{F}^u$ 正则叶的极限；该周期点属于一个排斥子 $\mathcal{R}(p)$，且不是边界型。

证明. 根据引理 9.1，包含非边界型周期点的吸引子的正则稳定叶的并集在 $\mathcal{P}_X$中稠密。因此，根据引理 3.1，这个族是分离的。由此，这些叶的端的极限在 $\mathbb{S}_X^1$ 中构成一个稠密子集，正如所述。

□

引理 9.3. 假设 $*$，则存在一个稠密子集 $E \subset \mathbb{S}_X^1$，使得每个 $x \in E$ 都是 $\mathcal{F}^s$ （分别为 $\mathcal{F}^u$）中一条正则叶的端的极限；该叶包含在一个排斥子 $\mathcal{R}$ （分别为一个吸引子 $\mathcal{A}$）中，并带有一个非边界型周期点。

证明。考虑一个非空开区间 $I \subset \mathbb{S}_X^1$。根据引理 9.2，存在一点 $x \in I$，它是吸引子 $\mathcal{A}$中一条含有周期点 p_0 的非边界类型不稳定叶 $L^u(p_0)$ 上一条正则叶的一个端 $L_+^s(p_0)$ 的极限。

点 p_0 的两侧都有 $\mathcal{A}$中的周期点聚积。我们选择 p_1，使得 $L_+^s(p_1)$ 的极限 y属于 I （这是可能的，因为 $L_+^s(p_0)$ 是正则的），且 $L_+^s(p_1)$ 与 $L^u(p_0)$ 在一点 q_1相交。因此，令 $J \subset I$ 为包含在 I 中的线段，其端点为 x 和 y。注意，$y \neq x$，也就是说， J 具有非空内部，因为 $L^s(p_0)$ 是一条正则叶。

现在， $L^u(p_0)$ 的两侧都有吸引子 $\mathcal{A}$ 中包含周期点且为非边界类型的正则不稳定叶聚积。令 L_0^u 为这样一条与$L_+^s(p_0)$ 有非空交集的叶。

如果L_0^u 不与$L_+^s(p_1)$相交，那么其中一个端包含在由$L_+^s(p_0)$、 $[p_0, q_1]^u$ 的线段和$L_+^u(q_1)$围成的半条带内。因此，该端的极限属于 I，证明完毕。

因此，我们现在可以假设 L_0^u 切割 $L_+^s(p_1)$。

设 h_0 和 h_1 分别是 p_0 和 p_1的稳定子的生成元，使得 h_0 展开为 $L^s_+(p_0)$，且 h_1 展开为 $L^s_+(p_1)$。

我们考察叶 L^u_0在 h_0和h_1的正迭代作用下的像 $\{h_0^n(L^u_0)\ h_1^n, n \in \mathbb{N}(L^u_0)\}$。这些像都是 $\mathcal{A}$中的正则不稳定叶，并且与$L^s_+(p_0)$或 $L^s_+(p_1)$有非空交集。如果其中一条叶不同时与 $L^s_+(p_0)$和 $L^s_+(p_1)$相交，那么它在 $J \subset I$这条线段上有一个端，结论即得。

现在假设 $\{h_0^n(L^u_0)\ h_1^n, n \in \mathbb{N}(L^u_0)\}$ 中的每条叶都同时与 $L^s_+(p_0)$和 $L^s_+(p_1)$相交。这些像是 $\mathcal{F}^u$的叶，因此它们要么互不相交，要么相等。对于 $L \in \{h_0^n(L^u_0)\ h_1^n, n \in \mathbb{N}(L^u_0)\}$，令$D(L) \subset \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 为如下得到的圆盘：沿 L 切开由 $L^s_+(p_0)$和 $L^s_+(p_1)$围成的条带后，得到两个连通分支；取这些连通分支在 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 中的闭包；此时，包含线段 $J \subset \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$的那个就是 $D(L)$。

圆盘 $D(L)$ 按包含关系自然构成全序，我们按照此顺序固定编号 $\{h_0^n(L^u_0)\ h_1^n(L^u_0)\ n \in \mathbb{N}\} = \{L^u_n\}$： $D(L^u_{n+1} \subset D(L^u_n)$。

考虑 $D = \bigcap_n (D(L^u_n)$。它是 $\mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 的一个紧子集，其与 $\mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$ 的交集是线段 J.

断言 13. $D \cap (L^s_+(p_0) \cup L^s_+(p_1)) = \emptyset$

证明。叶 $h_0^n(L^u_0)$ 与 $L^s(p_0)$ 的交集趋于 x，当 $n \to \infty$ 时：由此可得 $D \cap L^s(p_0) = \emptyset$。叶 $h_1^n(L^u_1)$ 与 $L^s(p_1)$ 的交集趋于 y，因此 $D \cap L^s(p_1) = \emptyset$。□

断言 14. $D \setminus \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$。

证明。存在一点 z 位于 J 的内部，它是 $\mathcal{F}^u$的一个叶端的极限。因此，存在一条半不稳定叶 L^u_+，包含于由 L^s_+（p_0）和 L^s_+（p_1）围成的条带内，且其极限为 z。现在L^u_+ 与所有 L^u_n不相交，因此

$$L^u_+ \subset D(L^u_n), \forall n$$

这就完成了该断言的证明。 □

现在考虑一点 $t \in D \setminus \mathbb{S}^1_{\mathcal{F}}$。叶 L^u（t）与任意 n对应的叶 L^u_n 不相交。因此，它与（L^s_+（p_0） $\cup L^s_+$（p_1））的交集为空。由此可得

$$L^u(t) \subset D$$

特别地， L^u（t）的两个端都在 J上。

现在假设点 $t \in D \setminus \mathbb{S}^1_X$ 选在 D的边界上。因此， t 是 $L^u_n \subset \mathcal{A}$中的点的极限。由于 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{D}^2_{\mathcal{F}}$ 的闭子集，可推得 $t \in \mathcal{A}$，因此 L^u（t） $\subset \mathcal{A}$。

我们刚刚找到一条包含于 $\mathcal{A}$ 且两端都位于 $J \subset I$ 中的叶 $L^u(t)$。令 $D_t \subset D$ 为由 $L^u(t)$ 围成的圆盘。证明尚未完成，因为 L^u_t 可能不是正则叶。

现在，命题 9.1 推出每条不稳定叶都存在一个由元素 $k \in \pi_1(M)$ 映出的像，该像包含于 D_t 中，例如 L^u_0。现在， $k(L^u_0)$ 是吸引子中的一条正则不稳定叶，其两端的极限都包含于 $J \subset I$ 中，证明至此完成。

□

现在我们可以结束命题 9.2 的证明，从而结束定理 14 的证明；定理 14 的证明结束了定理13 和定理 5 的证明。

命题 9.1 的证明。设 $I \subset \mathbb{S}^1_X$ 是一个非空开区间。根据引理 9.3，存在一条正则不稳定叶 L^u_0，它包含于吸引子 $\mathcal{A}$ 中，含有一个非边界型周期点 p_0，并且有一端（记作 $L^u_{0,\ +}$），其极限是点 $x \in I$。

由于 L^u_0 不是 $\mathcal{A}$ 的边界叶，因此在 $\mathcal{A}$ 中， L^u_0两侧都有任意靠近 L^u_0的不稳定叶。此外，由于 L^u_0 是正则叶，可以选取一片叶 $L^u_1 \subset \mathcal{A}$，使得

- 端 $L^u_{1,\ +}$ 的极限是一个点 $y \in I$，且 $[x, y] \subset I$。
- 存在一条稳定叶的线段 σ，其两个端 a 和 b 分别位于 L^u_0 和 L^u_1 上。

我们将由 σ、 $[x,y]$、 $L^u_+(a)$、 $\subset L^u_0$和 $L^u_+(b)$ 围成的 $\mathbb{D}^2_X$ 中的圆盘记为 $D_\sigma \subset L^u_1$.

根据引理 9.2，存在一点 $z \in [x,y]$，它是某条不稳定叶 L^u 的端 L^u_+ 的极限；该不稳定叶包含排斥子 $\mathcal{R}$中的一个周期点 q，且 q 不是边界型。我们用$h \in \pi_1(M)$表示 q 的稳定子的生成元，它沿着 L^u扩张。

稳定叶 L^s (q) 包含在排斥子 $\mathcal{R}$ 中，并且其两侧均有稳定叶聚积在 $\mathcal{R}$中。我们用 L^s表示 $\mathcal{R}$ 中的一条稳定叶，它与 L^u相交$_+$ 于一点 x_0。

We c考察 $L^s_n = h^n(L^s_0)$。它是 $\mathcal{R}$ 中的一条稳定叶，在点 $x_n = h^n(x_0)$ 处与 L^u_+ 相交 .

注意， $x_n \to z$ 如 $n \to +\infty$。特别地，当 n 足够大时， x_n 属于圆盘 D_σ。

当 $\mathcal{R} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ 时，叶 L^s_n 与 L^u_0 和 L^u_1不相交。由于两条不同的稳定叶互不相交，因此它们（除至多一条外）均与 σ 不相交。

因此，当 n 足够大时，叶 L^s_n 包含于 D_σ 中，故其两端都位于 $[x,y] \subset I$ 上。

我们只需在一个排斥子中找出一条稳定叶，其两端都位于 I；这样便完成了命题9.2的证明。□

References

[Ba1] Barbot, Thierry. 通过弱叶状结构刻画三维阿诺索夫流，Ergodic Theory Dynam. Systems 15 (1995) 247-270.[BFM] Barthelm´e, Thomas; Frankel, Steven; Mann, Kathryn 伪阿诺索夫流的轨道等价，预印本 arXiv:2211.10505[BeBo] B´eguin, Fran¸cois, Bonatti Christian. 三维斯梅尔流：鞍集不变邻域的有限表示。（法文） [三维斯梅尔流：鞍集不变邻域的有限表示] Topology 41 (2002), no. 1, 119-162.[Br] Brunella, Marco. 分离非传递阿诺索夫流的基本集。Bull. London Math. Soc. 25 (1993), no. 5, 487-490.[CaDu] Calegari, Danny; Dunfield, Nathan M. 圆的层状结构与同胚群。Invent. Math. 152 (2003), no. 1, 149–204.[Fe1] Fenley, Sergio. 三维流形中的阿诺索夫流，Ann. of Math. (2) 139 (1) (1994) 79-115.[Fe2] Fenley, Sergio. 三维流形阿诺索夫流中的分支结构，Comment. Math. Helv. 73 (2) (1998) 259-297.[Fe3] Fenley, Sergio. 阿诺索夫叶状结构中的单侧分支，Comment. Math. Helv. 70 (2) (1995) 248-266.[Fe4] Fenley, Sergio. 伪阿诺索夫流的理想边界与一致收敛群：及其与大尺度几何的联系和应用，Geom. Topol. 16 (2012), no. 1, 1–110.[Ke] Alexander S. Kechris, 《经典描述集合论》，柏林、纽约，施普林格出版社，1995年，第150页。[Ma] Mather, J. 曲面叶状结构 I：理想边界，Annales inst. Fourier 32 (1982), 第235-261页[Th] Thurston, William P. 三维流形、叶状结构与圆，II。未完成的手稿，1998

CHRISTIAN BONATTI bonatti@u-bourgogne.fr
勃艮第数学研究所，法国国家科学研究中心 UMR 5584，勃艮第大学，21000，第戎，法国。

[1]勃艮第数学研究所得到 EIPHI研究生院（合同 ANR-17-EURE-0002）的支持