arXiv:2301.04532v1 [math.NT] 11 Jan 2023

蝌蚪图的 Nahm 和的模性

ANTUN MILAS 和 LIUQUAN WANG

ABSTRACT. 我们证明了与秩3棒槌型Cartan矩阵相关的 Nahm 和满足 Rogers-Ramanujan型恒等式。这些恒等式揭示了这些和的模性，从而在这一情形下证实了 Penn、Calinescu 和第一作者提出的猜想。我们证明，这些 Nahm 和与一些移位和可以组合成全模群上的向量值模函数。我们还提出了一些关于一般秩的猜想。

1.

著名的 Rogers-Ramanujan恒等式指出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}, \tag{1.2}$$

其中（本文以下均如此），我们总是假设 $|q|<1$ 并采用标准的q-级数记号:

$$(a;q)_0:=1,\quad (a;q)_n:=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\quad (a;q)_\infty:=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \tag{1.3}$$

$$(a_1,\dots,a_m;q)_n:=(a_1;q)_n\cdots(a_m;q)_n,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{1.4}$$

当底数 q 可由上下文明确得知时，我们有时会省略它，简写为（$a;q$）$_n$ 为（a）$_n$ （$n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$）。

Rogers-Ramanujan恒等式最早见于 Rogers [17]的1894年论文，后来在1913年之前由 Ramanujan 重新发现。除了 (1.1) 和 (1.2) 之外，Rogers [17, 第 330-332]页还证明了一些类似的和积恒等式，例如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}}=\frac{(q^2,q^8,q^{10};q^{10})_\infty(q^6,q^{14};q^{20})_\infty}{(q;q)_\infty}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n}}=\frac{(q,q^9,q^{10};q^{10})_\infty(q^8,q^{12};q^{20})_\infty}{(q;q)_\infty}, \tag{1.6}$$

2010年数学主题分类。11P84，33D15，33D45。关键词和短语。Rogers-Ramanujan恒等式；和积恒等式；Nahm 和；蝌蚪图卡当矩阵；向量值模形式。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{(q^3,q^7,q^{10};q^{10})_\infty(q^4,q^{16};q^{20})_\infty}{(q;q)_\infty}, \tag{1.7}$$

后来，Rogers [18,第 330 页（3），第 2 个等式]）证明了另一个相关恒等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{(q^4,q^6,q^{10};q^{10})_\infty(q^2,q^{18};q^{20})_\infty}{(q;q)_\infty}. \tag{1.8}$$

Rogers-Ramanujan恒等式也是 q级数与模形式之间密切关系的重要例子。乘积侧本质上是某些广义戴德金η函数的倒数（见（3.32）），因而是模函数。这一点无法从和式侧看出，后者是一个基本的 q超几何级数。一个自然的问题是：基本的 q超几何级数何时会成为模形式？特别地，纳姆提出的一个著名问题是：对于哪些正定 $r\times r$ 有理矩阵 A、 r维有理向量 B以及有理标量 C，使得

$$f_{A,B,C}(q):=\sum_{n=(n_1,\dots,n_r)^{\mathrm{T}}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^r}\frac{q^{\frac{1}{2}n^{\mathrm{T}}An+n^{\mathrm{T}}B+C}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_r}}$$

是模形式。这样的（A， B， C）称为秩为 r的模三元组。因此，级数$f_{A,\ B,\ C}(q)$被称为 Nahm 和。

若干重要的 q级数恒等式族（例如 Andrews-Gordon 恒等式）也可以利用顶点算子和无限维李代数的表示来研究。这一方法由莱波夫斯基和威尔逊于20世纪80年代开创， [10, 11], 是顶点算子代数发展历程的起点之一，也是物理学中二维共形场论（共形场论）发展的重要组成部分。在这一框架下，由模的组合基得到的分次维数通常可以解释为 Nahm 和。与有理共形场论相关的 Nahm 和几乎总是具有如下形式$A=G\otimes G'^{-1}$，其中 G和 G'是 ADET型卡当矩阵，并且所有这类 Nahm 和矩阵都被预期给出模函数（带有适当的 B 和 C）。有趣的是，任意 Nahm 和 $f_{A,\ 0,\ 0}$ 都可以解释为一种特殊顶点代数（称为主子空间 [15]）的分次维数。

Zagier [25] 研究了 Nahm 问题，并在秩$r\leq 3$方面取得了重大进展。特别是，他证明了恰好存在七个秩一模三元组。在秩二和秩三的情形中，Zagier 提出了一些猜想性的模三元组。文献中已验证了大多数秩二例子。例如，弗拉先科和兹韦赫斯 [20] 验证了 Zagier 列表中的一个模三元组，并发现了一些新例子。最近，第二作者 [22] 验证了 Zagier 列表中的更多例子。因此，在 Zagier [25, 表 2], 中发现的十一个秩二例子里，只有一个尚未得到证明。在秩三的情形中，Zagier [25, 表 3]列出了十二个可能的模三元组，并证明了其中三个。其余九个例子已由第二作者 [23]验证。

本文主要关注与蝌蚪图 T相关的纳姆和的模性。Penn、Calinescu 和第一作者曾在关于主子空间顶点代数的扭模的研究中考察过棒槌 Nahm 和 T。给定一个正整数，令 为棒槌型Cartan矩阵，即 (), 满足

Penn、Calinescu 和第一作者曾在关于主子空间顶点代数的扭模的研究中考察过棒槌 Nahm 和 [6]。给定一个正整数 r，令 T_r 为棒槌型Cartan矩阵，即 $T_r = (a_{ij})_{r\times r}$，满足

$$a_{rr} = 1, a_{ii} = 2, 1 \le i \le r-1, a_{ij} = -1 \ (|i-j| = 1), \quad \text{and} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{otherwise.}$$

令

$$\chi_0(x_1, \dots, x_r) = \chi_0(x_1, \dots, x_r; q) := \sum_{n=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \frac{q^{\frac{1}{2}n^{\mathrm{T}}T_r n} x_1^{n_1}\cdots x_n^{n_r}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_r}}$$

为一个广义蝌蚪 Nahm 和。容易看出

$$q^C \chi_0(q^{B_1}, \dots, q^{B_r}) = f_{A,B,C}(q)$$

是具有 $A = T_r$ 和 $B = (B_1, \dots, B_r)$ 的 Nahm 和。一级标准 $A_{2n}^{(2)}$ -模（在同构意义下）只有一个，因此，与唯一的一级标准模相对应的一级主子空间也只有一个，其特征为 $\chi_0(1, 1, \dots, 1)$，即对所有 i 都有 $x_i = 1$。在 [6] 中，通过特化 $x_i = q$ 和 $x_j = 1$（其中 $j \ne i$），引入了所谓的移位特征 χ_i。Penn、Calinescu 和第一作者 [6]提出了一个关于特征$\chi_0(x_1, \dots, x_r)$ 的模性的猜想。

猜想 1.1。（参见 *[6,* 猜想 *1]*。）对于某个有理数 a，特征 $q^a\chi_0(1, \dots, 1)$ 是模的。

秩二情形（$r = 2$）已在 [6]中得到证明。本文的主要目标是探讨 $r = 3$ 情形下的猜想。在这种情形下，我们明确写出

$$\chi_0(x_1, x_2, x_3) = \chi_0(x_1, x_2, x_3; q) = \sum_{i,j,k\ge 0} \frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}k^2-ij-jk} x_1^i x_2^j x_3^k}{(q)_i (q)_j (q)_k}. \tag{1.9}$$

我们记录下此处感兴趣的四个平移后的 q-特征:

$$F_1(q) := \chi_0(1, 1, 1), \quad F_2(q) := \chi_0(1, 1, q^{\frac{1}{2}}),$$
$$F_3(q) := \chi_0(q, q^{-1}, q^{\frac{1}{2}}), \quad F_4(q) := \chi_0(q^{-1}, q, 1).$$

我们主要关注这些和的模性质。首先写出棒槌型Cartan矩阵 T_3 及其逆矩阵:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

注意， T_3^{-1}是 Zagier 列表 [25, 表格3] 中第六个例子的矩阵部分（另见 [23, 例 6]），只是将第一行/列与第三行/列互换了。Zagier 列出了六个可能的模三元组，其矩阵部分为 T_3^{-1}。向量部分为

$$B \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1.10}$$

这里，每个向量中的第一项和第三项已互换，并且我们重新排列了这些向量。Zagier 在 [25, 第 50] 页猜想，模三元组之间存在某种对偶性。也就是说，他提到，当（A, B, C）是一个秩为 r 的模三元组时，很可能有

$$(A^\star, B^\star, C^\star) = (A^{-1}, A^{-1}B, \frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}A^{-1}B - \frac{r}{24} - C)$$

也是一个秩为 r 的模三元组。这促使我们考虑与 T_3^{-1} 相关的六个模三元组的对偶情形。具体而言，对偶向量为

$$B^\star \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

我们发现，对于适当的 C，它们确实是模三元组。这是以下一组 Rogers-Ramanujan型恒等式的推论。在陈述这些恒等式之前，我们先引入简洁的记号

$$J_m := (q^m; q^m)_\infty, \quad J_{a,m} := (q^a, q^{m-a}, q^m; q^m)_\infty.$$

定理 1.2. 有

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2+k^2-2ij-2jk}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k} = \frac{J_4^5 J_{40}}{J_1 J_2^2 J_8^2 J_{8,40}} + 2q\frac{J_8^2 J_{6,20} J_{8,40}}{J_1 J_4^2 J_{40}}, \tag{1.11}$$

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}(k^2+k)-ij-jk}}{(q;q)_i(q;q)_j(q;q)_k} = \frac{J_2^6 J_{1,10} J_{8,20}}{J_1^5 J_4^2 J_{20}} + 2q\frac{J_4^2 J_{4,10} J_{2,20}}{J_1^3 J_{20}}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}(k^2+k)-ij-jk+i-j}}{(q;q)_i(q;q)_j(q;q)_k} = 2\frac{J_2 J_4^2 J_{20}}{J_1^3 J_{4,20}} + \frac{J_2^6 J_{3,10} J_{4,20}}{J_1^5 J_4^2 J_{20}}, \tag{1.13}$$

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2+k^2-2ij-2jk-2i+2j}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k} = 2\frac{J_8^2 J_{2,20} J_{16,40}}{J_1 J_4^2 J_{40}} + q\frac{J_4^4 J_{8,20} J_{4,40}}{J_1 J_2^2 J_8^2 J_{40}}, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}(k^2-k)-ij-jk-i+j}}{(q;q)_i(q;q)_j(q;q)_k} = 4\frac{J_2 J_4^2 J_{20}}{J_1^3 J_{4,20}} + 2\frac{J_2^6 J_{3,10} J_{4,20}}{J_1^5 J_4^2 J_{20}}, \tag{1.15}$$

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}(k^2-k)-ij-jk-2i+2j}}{(q;q)_i(q;q)_j(q;q)_k} = 2q^{-1}\frac{J_2^6 J_{1,10} J_{8,20}}{J_1^5 J_4^2 J_{20}} + 4\frac{J_4^2 J_{4,10} J_{2,20}}{J_1^3 J_{20}}. \tag{1.16}$$

注意，(1.11)–(1.16) 的左侧分别是纳姆 和

$$F_1(q^2), F_2(q), F_3(q), F_4(q^2), \chi_0(q^{-1}, q, q^{-\frac{1}{2}}; q) \text{ and } \chi_0(q^{-2}, q^2, q^{-\frac{1}{2}}; q),$$

鉴于函数 J_m 和 $J_{a,m}$ 的模性，很容易验证（例如，使用 [8] 中的算法），(1.11)–(1.16) 中的纳姆 和乘以因子 q^C（其中 C 为）后，都是模函数

$$-\frac{7}{40}, \quad \frac{1}{40}, \quad \frac{9}{40}, \quad \frac{17}{40}, \quad \frac{9}{40}, \quad \frac{41}{40},$$

分别地。特别是，我们看到恒等式 (1.11) 在 $r = 3$ 的情形下证实了猜想 1.1。有趣的是，这六个 Nahm 和实际上对应着四种不同的模函数

。事实上，比较 (1.13) 与 (1.15) 的右侧，以及 (1.12) 与 (1.16) 的右侧，我们看到

$$\chi_0(q^{-1},q,q^{-\frac{1}{2}};q)=2\chi_0(q,q^{-1},q^{\frac{1}{2}};q), \tag{1.17}$$

$$\chi_0(q^{-2},q^2,q^{-\frac{1}{2}};q)=2q^{-1}\chi_0(1,1,q^{\frac{1}{2}};q). \tag{1.18}$$

从它们的原始定义中并不能显而易见地看出这一点。我们将在该定理的证明中对此作出解释。

接下来，我们将从向量值模形式的角度研究棒槌 Nahm 和。这样一来，我们便能更清楚地了解它们的模变换性质。

令 $\mathbb{H}$表示上半复平面。本文中，我们记$q = e^{2\pi i\tau}$、 $\tau \in \mathbb{H}$。由于移位特征 $\chi_0(1, 1, 1)$和 $\chi_0(q^{-1}, q, 1)$在$\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 中含有q次幂，因此考虑以下对象较为方便

$$F_5(q):=\chi_0(1,1,1)|_{\tau\to\tau+1}=\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}k^2-ij-jk}}{(q)_i(q)_j(q)_k}, \tag{1.19}$$

$$F_6(q):=\chi_0(q^{-1},q,1)|_{\tau\to\tau+1}=\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{i^2+j^2+\frac{1}{2}k^2-ij-jk-i+j}}{(q)_i(q)_j(q)_k}. \tag{1.20}$$

对于 $1\leq i\leq 6$ ，我们定义 $\tilde{F}_i(q):=q^{\lambda_i}F_i(q)$，其中

$$\lambda_1=-\frac{7}{80},\ \lambda_2=\frac{1}{40},\ \lambda_3=\frac{9}{40},\ \lambda_4=\frac{17}{80},\ \lambda_5=-\frac{7}{80},\ \lambda_6=\frac{17}{80}.$$

我们定义 Weber 模函数 [24]:

$$\mathfrak{f}(\tau):=q^{-1/48}(-q^{1/2};q)_\infty,\ \ \mathfrak{f}_1(\tau):=q^{-1/48}(q^{1/2};q)_\infty,\ \ \mathfrak{f}_2(\tau):=q^{1/24}(-q;q)_\infty. \tag{1.21}$$

对于 $k>0$ 和 $j\in\mathbb{Q}$ ，我们令

$$(\partial\Theta)_{j,k}(\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+j)q^{(2kn+j)^2/(4k)}, \tag{1.22}$$

$$(\partial G)_{j,k}(\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n(2kn+j)q^{(2kn+j)^2/(4k)}. \tag{1.23}$$

当 k、 $j\in\mathbb{Q}$ 时，这些本质上是权为 $3/2$ 的 Jacobi theta 级数。

定理 1.3。我们有以下 q恒等式:

$$\tilde{F}_1(q)=\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{1,\frac{5}{2}}(\tau),$$

$$\tilde{F}_2(q)=2\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}}(\tau),$$

$$\tilde{F}_3(q)=2\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(\tau),$$

$$\tilde{F}_4(q)=\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{2,\frac{5}{2}}(\tau),$$

$$\tilde{F}_5(q) = \frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{1,\frac{5}{2}}(\tau),$$
$$\tilde{F}_6(q) = \frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{2,\frac{5}{2}}(\tau).$$

˜特别地， $F_i(q)$ 是 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的某些同余子群上的模函数。˜此外，$(F_i(q))_{1\le i\le 6}$ 在 SL(2, $\mathbb{Z}$) 上按向量值模函数的方式变换。

这尤其证明并推广了关于 $r = 3$ 的猜想 1.1。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出定理 1.2 的证明。其思路是使用常数项方法将三重和化为若干单重和，并利用罗杰斯恒等式 (1.5)–(1.8)。第 3 节给出定理 1.3 的两种不同证明。最后，第 4 节证明，与棒槌型Cartan矩阵相关的一些其他纳姆和不是模的，并提出关于模纳姆和的一个一般猜想。

˜注 1. 值得注意的是， $V = \mathrm{Span}\{F_i(q)$ 有另一个基： $1 \le 1 \le 6\}$:

$$g_1(q) := \tilde{F}_1(q) + \tilde{F}_5(q) = q^{-7/80}(2 + 12q + 30q^2 + \cdots) \in q^{-7/80}\mathbb{C}[[q]],$$
$$g_2(q) := \tilde{F}_1(q) - \tilde{F}_5(q) = q^{33/80}(6 + 18q + 54q^2 + \cdots) \in q^{33/80}\mathbb{C}[[q]],$$
$$g_3(q) := \tilde{F}_4(q) + \tilde{F}_6(q) = q^{17/80}(4 + 6q + 30q^2 + \cdots) \in q^{17/80}\mathbb{C}[[q]],$$
$$g_4(q) := \tilde{F}_4(q) - \tilde{F}_6(q) = q^{57/80}(6 + 16q + 42q^2 + \cdots) \in q^{57/80}\mathbb{C}[[q]],$$
$$g_5(q) := \tilde{F}_2(q) = q^{1/40}(1 + 6q + 15q^2 + \cdots) \in q^{1/40}\mathbb{C}[[q]],$$
$$g_6(q) := \tilde{F}_3(q) = q^{9/40}(3 + 11q + 30q^2 + \cdots) \in q^{9/40}\mathbb{C}[[q]].$$

注意，现在首项 q-级数的幂模 $\mathbb{Z}$ 不同余 .

2. Proof of Theorem 1.2

回顾 q 二项式定理 [4, 定理 1.3。1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}, \quad |z| < 1. \tag{2.1}$$

作为该定理的重要推论，欧拉的 q 指数恒等式表明：[4,推论 1.3。2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(q;q)_n} = (-z;q)_\infty, \quad |z| < 1. \tag{2.2}$$

雅可比三重乘积恒等式 [4, 定理 1.3。3]为

$$(q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n. \tag{2.3}$$

它给出了两个重要的一元雅可比 theta 函数的乘积表示:

$$\theta_2(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4}\frac{J_4^2}{J_2}, \tag{2.4}$$

$$\theta_3(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = \frac{J_2^5}{J_1^2 J_4^2}. \tag{2.5}$$

我们将使用常数项方法。对于任意级数 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^n$，我们定义算子

$$\mathrm{CT}[f(z)] = a(0),$$

它提取 $f(z)$ 的常数项。显然，对于任意复数 α 和满足 $\alpha\beta\neq 0$ 的整数 β，我们有

$$\mathrm{CT}[f(\alpha z^\beta)] = \mathrm{CT}[f(z)]. \tag{2.6}$$

定理 1.2 的证明。将 (1.9) 中的 q 替换为 q^2 后，我们得到

$$\chi_0(x_1,x_2,x_3;q^2) = \sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2+k^2-2ij-2jk} x_1^i x_2^j x_3^k}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_k}. \tag{2.7}$$

由 (2.2) 和 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}\chi_0(x_1,x_2,x_3;q^2) &= \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2-2ij} x_1^i x_2^j}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} \sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2-k}\cdot q^{(1-2j)k} x_3^k}{(q^2;q^2)_k} \\ &= \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2-2ij} x_1^i x_2^j}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-x_3 q^{1-2j};q^2)_\infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

(1) 由（2.8）可得

$$\begin{aligned}\chi_0(1,1,1;q^2) &= \sum_{i\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2-2ij}}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-q^{1-2j};q^2)_\infty \\ &= (-q;q^2)_\infty \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+j^2-2ij}(-q;q^2)_j}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} \\ &= (-q;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2} z^i}{(q^2;q^2)_i} \sum_{j\geq 0} \frac{(-q;q^2)_j z^{-j}}{(q^2;q^2)_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} q^{k^2}\right] \\ &= (-q;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-qz,-q/z,-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(1/z;q^2)_\infty}\right] \quad \text{(by (2.2) and (2.3))} \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \mathrm{CT}\left[\frac{(-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty^2}{(1/z;q^2)_\infty}\right] \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \mathrm{CT}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(q^2;q^2)_n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i q^{i^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j q^{j^2}\right] \quad \text{(by (2.2) and (2.3))} \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^2;q^2)_n} \sum_{i+j=n} q^{i^2+j^2} \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{2i^2-2ni} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(S_0(q)+S_1(q)). \tag{2.9}$$

这里， $S_0(q)$ 和 $S_1(q)$ 分别对应 n 为偶数和奇数时的求和。我们有

$$\begin{aligned} S_0(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(i-n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2} \\ &= \frac{J_4^6 J_{40}}{J_2^3 J_8^2 J_{8,40}}. \quad \text{(by (1.5) and (2.5))} \end{aligned} \tag{2.10}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} S_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2+4n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4in-2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(i-n)^2-2(i-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-2i} = 2q\frac{J_8^2 J_{6,20}J_{8,40}}{J_2 J_4 J_{40}}. \quad \text{(by (1.7) and (2.4))} \end{aligned} \tag{2.11}$$

将 (2.10) 和 (2.11) 代入 (2.9)，得到 (1.11)。

(2) 由 (2.8) 可知

$$\begin{aligned} \chi_0(1,1,q;q^2) &= \sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+2j^2-2ij}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-q^{2-2j};q^2)_\infty \\ &= (-q^2;q^2)_\infty\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+j^2+j-2ij}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-1;q^2)_j \\ &= (-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq 0}\frac{q^{i^2}z^i}{(q^2;q^2)_i}\sum_{j\geq 0}\frac{q^j z^{-j}(-1;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^{-k}q^{k^2}\right] \\ &= (-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-qz,-q/z,-q/z,-qz,q^2;q^2)_\infty}{(q/z;q^2)_\infty}\right] \quad \text{(by (2.2) and (2.3))} \\ &= \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\mathrm{CT}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}z^i q^{i^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^j q^{j^2}\right] \quad \text{(by (2.2) and (2.3))} \\ &= \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i+j=n}q^{i^2+j^2} \\ &= \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-2ni} \\ &= \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(S_0(q)+S_1(q)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

(2.13)

这里， $S_0(q)$ 和 $S_1(q)$ 分别对应 n 为偶数和奇数时的求和。

我们有

$$S_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4ni}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(i-n)^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2}=\frac{J_4^5J_{2,20}J_{16,40}}{J_2^3J_8^2J_{40}}.\quad\text{(by (1.6) and (2.5))}\qquad(2.14)$$

同样,

$$S_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2+6n+2}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4ni-2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+4n+2}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(n-i)^2+2(n-i)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+4n+2}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2+2i}=2q^2\frac{J_8^2J_{8,20}J_{4,40}}{J_2J_4J_{40}}.\quad\text{(by (1.8) and (2.4))}\qquad(2.15)$$

将 (2.14) 和 (2.15) 代入 (2.13)，得到 (1.12)。

(3) 由 (2.8) 可知

$$\chi_0(q^2,q^{-2},q;q^2)=\sum_{i,j\geq0}\frac{q^{2i^2+2j^2-2ij+2i-2j}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-q^{2-2j};q^2)_\infty$$
$$=(-q^2;q^2)_\infty\sum_{i,j\geq0}\frac{q^{2i^2+j^2-j-2ij+2i}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-1;q^2)_j$$
$$=(-q^2;q^2)_\infty\mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq0}\frac{q^{i^2+2i}z^i}{(q^2;q^2)_i}\sum_{j\geq0}\frac{q^{-j}z^{-j}(-1;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^{-k}q^{k^2}\right]$$
$$=(-q^2;q^2)_\infty\mathrm{CT}\left[\frac{(-q^3z,-1/(qz);q^2)_\infty(-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(1/(qz);q^2)_\infty}\right]\quad\text{(by (2.2) and (2.3))}\qquad(2.16)$$
$$=\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\mathrm{CT}\left[\frac{(-q^3z,-1/(qz),q^2;q^2)_\infty(-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(1/(qz);q^2)_\infty}\right]$$
$$=\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\mathrm{CT}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{-n}z^{-n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{i^2+2i}z^i\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{j^2}z^j\right]\quad\text{(by (2.2) and (2.3))}$$
$$=\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{-n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i+j=n}q^{i^2+2i+j^2}$$
$$=\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2-n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-2ni+2i}$$
$$=\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(S_0(q)+S_1(q)).\qquad(2.17)$$

这里，$S_0(q)$ 和 $S_1(q)$ 分别对应 n 为偶数和奇数时的求和。

我们有

$$S_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2-2n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4ni+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(i-n)^2+2(i-n)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2+2i}=2\frac{J_8^2J_{40}}{J_2J_{8,40}}.\quad\text{(by (1.5) and (2.4))}\tag{2.18}$$

同样,

$$S_1(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4in}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(i-n)^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n+1}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2}=\frac{J_4^5J_{6,20}J_{8,40}}{J_2^3J_8^2J_{40}}.\quad\text{(by (1.7) and (2.5))}\tag{2.19}$$

将（2.18）和（2.19）代入（2.17），得到（1.13）。

（4）由（2.8）可得

$$\chi_0(q^{-2},q^2,1;q^2)=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+2j^2-2ij-2i+2j}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-q^{1-2j};q^2)_\infty$$
$$=(-q;q^2)_\infty\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+j^2-2ij-2i+2j}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j}(-q;q^2)_j$$
$$=(-q;q^2)_\infty\mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq 0}\frac{q^{i^2-2i}z^i}{(q^2;q^2)_i}\sum_{j\geq 0}\frac{q^{2j}z^{-j}(-q;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^{-k}q^{k^2}\right]$$
$$=(-q;q^2)_\infty\mathrm{CT}\left[\frac{(-z/q,-q^3/z,-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(q^2/z;q^2)_\infty}\right]\quad\text{(by (2.2) and (2.3))}$$
$$=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\mathrm{CT}\left[\frac{(-z/q,-q^3/z,q^2;q^2)_\infty(-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(q^2/z;q^2)_\infty}\right]$$
$$=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\mathrm{CT}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}z^{-n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}z^iq^{i^2-2i}\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^jq^{j^2}\right]\quad\text{(by (2.2) and (2.3))}$$
$$=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i+j=n}q^{i^2+j^2-2i}$$
$$=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(q^2;q^2)_n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-2ni-2i}$$
$$=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(S_0(q)+S_1(q)).\tag{2.20}$$

这里， $S_0(q)$ 和 $S_1(q)$ 分别对应 n 为偶数和奇数的求和。我们有

$$S_0(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n^2+4n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2i^2-4in-2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^{2(n-i)^2+2(n-i)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{2i^2+2i} = 2\frac{J_8^2 J_{2,20} J_{16,40}}{J_2 J_4 J_{40}}. \quad \text{(by (1.6) and (2.4))} \quad (2.21)$$

同理,

$$\begin{aligned} S_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{4n^2+8n+3}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{2i^2-4ni-4i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+4n+3}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{2(n-i)^2+4(n-i)} \\ &= q\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+4n}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{2(i+1)^2} = q\frac{J_4^5 J_{8,20} J_{4,40}}{J_2^3 J_8^2 J_{40}}. \quad \text{(by (1.8) and (2.5))} \end{aligned} \quad (2.22)$$

将 (2.21) 和 (2.22) 代入 (2.20)，得到 (1.14)。

(5) 由 (2.8) 可得

$$\begin{aligned} &\chi_0(q^{-2}, q^2, q^{-1}; q^2) = \sum_{i,,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2-2ij-2i+2j}}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-q^{-2j};q^2)_\infty \\ &= (-1;q^2)_\infty \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+j^2+j-2ij-2i}}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-q^2;q^2)_j \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2-2i} z^i}{(q^2;q^2)_i} \sum_{j\geq 0} \frac{(-q^2;q^2)_j q^j z^{-j}}{(q^2;q^2)_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} q^{k^2}\right] \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-q^3/z, -z/q, -qz, -q/z, q^2;q^2)_\infty}{(q/z;q^2)_\infty}\right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

现在，在 (2.23) 中将 z 替换为 $q^2 z$，根据 (2.6)，这不会改变结果；然后将 q^2 替换为 q后与 (2.16) 比较，得到 (1.17)。鉴于 (1.13)，得到 (1.15)。

(6) 由 (2.8) 可得

$$\begin{aligned} &\chi_0(q^{-4}, q^4, q^{-1}; q^2) = \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+2j^2-2ij-4i+4j}}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-q^{-2j};q^2)_\infty \\ &= (-1;q^2)_\infty \sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{2i^2+j^2-2ij-4i+3j}}{(q^2;q^2)_i (q^2;q^2)_j} (-q^2;q^2)_j \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2-4i} z^i}{(q^2;q^2)_i} \sum_{j\geq 0} \frac{q^{3j} z^{-j} (-q^2;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} q^{k^2}\right] \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-q^{-3}z, -q^5/z, -qz, -q/z, q^2;q^2)_\infty}{(q^3/z;q^2)_\infty}\right] \quad \text{(by (2.2) and (2.3))} \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-q^{-1}z, -q^3/z, -q^3 z, -1/(qz), q^2;q^2)_\infty}{(q/z;q^2)_\infty}\right] \quad \text{(replace } z \text{ by } q^2 z) \\ &= 2(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(1+q^{-1}z)(1+q^{-1}z^{-1})}{(1+qz)(1+qz^{-1})} \cdot \frac{(-qz, -q/z, -qz, -q/z, q^2;q^2)_\infty}{(q/z;q^2)_\infty}\right] \end{aligned}$$

$$= 2q^{-2}(-q^2;q^2)_\infty \mathrm{CT}\left[\frac{(-qz,-q/z,-qz,-q/z,q^2;q^2)_\infty}{(q/z;q^2)_\infty}\right]. \tag{2.24}$$

注意到 (2.24) 与 (2.12) 仅相差因子 $2q^{-2}$。将 q^2 替换为 q 后，即可证明 (1.18)。结合 (1.12)，可得 (1.16)。□

3. Proofs of Theorem 1.3

本节中，我们为定理 1.3 给出两种不同的证明。在第一种证明中，~我们将函数 $F_i(\tau)$ $(1 \le i \le 6)$ 视为向量值模形式，并一并处理。在第二种证明中，我们逐一处理这些恒等式。

3.1. θ函数。本小节中，我们将为证明做一些准备。回顾全模群

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}.$$

这个群也常记作 $\Gamma(1)$。它由以下矩阵生成

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的任意同余子群 G 和狄利克雷特征 χ，我们用$M_k(G,\chi)$（分别用 $S_k(G,\chi)$）表示权为 k 、乘子为 χ 的 G 上的模形式（分别为尖点形式）空间。当 χ 平凡时，我们将其省略，并将该空间记作 $M_k(G)$（分别记作 $S_k(G)$）。除 $\Gamma(1)$ 本身外，我们主要研究以下同余子群

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\}, \tag{3.1}$$

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod N \right\}. \tag{3.2}$$

众所周知，式 (1.21) 中定义的韦伯模函数 $\mathfrak{f}(\tau)$ $\mathfrak{f}_1(\tau)$ 和 $\mathfrak{f}_2(\tau)$ 在 $\Gamma(1)$ 作用下按秩为三的向量值模形式变换:

$$\mathfrak{f}(-1/\tau) = \mathfrak{f}(\tau), \quad \mathfrak{f}_2(-1/\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{f}_1(\tau), \quad \mathfrak{f}_1(-1/\tau) = \sqrt{2}\mathfrak{f}_2(\tau)$$

$$\mathfrak{f}(\tau+1) = e^{-\pi i/24}\mathfrak{f}_1(\tau), \quad \mathfrak{f}_1(\tau+1) = e^{-\pi i/24}\mathfrak{f}(\tau), \quad \mathfrak{f}_2(\tau+1) = e^{\pi i/12}\mathfrak{f}_2(\tau).$$

我们还需要用到 Dedekind η-函数 $\eta(\tau)$ 及其变换性质 :

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\eta(\tau), \quad \eta(\tau+1) = e^{\pi i/12}\eta(\tau).$$

回顾式 (1.22) 和 (1.23) 中定义的级数 $(\partial\Theta)_{j,\ k}(\tau)$ 和 $(\partial G)_{j,\ k}(\tau)$。以下引理概述了它们的一些有用性质，尤其是一些变换公式。

引理 3.1. (1) 对于任意 $k>0$ 和 j，我们有

$$(\partial\Theta)_{0,k}(\tau) = 0, \quad (\partial\Theta)_{k,k}(\tau) = 0, \tag{3.3}$$

$$(\partial\Theta)_{j,\frac{k}{2}}(\tau) = -(\partial\Theta)_{k-j,\frac{k}{2}}(\tau), \quad (\partial G)_{j,\frac{k}{2}}(\tau) = (\partial G)_{k-j,\frac{k}{2}}(\tau), \tag{3.4}$$

$$(\partial\Theta)_{j,k}(\tau)=\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j,4k}(\tau)+\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j+4k,4k}(\tau), \tag{3.5}$$

$$(\partial G)_{j,k}(\tau)=\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j,4k}(\tau)-\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j+4k,4k}(\tau). \tag{3.6}$$

(2) 对于 $k\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$ 和 $j\in\mathbb{N}$，我们有

$$(\partial\Theta)_{j,k}(\tau+1)=e^{i\pi j^2/2k}(\partial G)_{j,k}(\tau), \tag{3.7}$$

$$(\partial G)_{j,k}(\tau+1)=e^{i\pi j^2/2k}(\partial\Theta)_{j,k}(\tau), \tag{3.8}$$

$$(\partial\Theta)_{j,k}(\tau+2)=e^{i\pi j^2/k}(\partial\Theta)_{j,k}(\tau), \tag{3.9}$$

$$(\partial G)_{j,k}(\tau+2)=e^{i\pi j^2/k}(\partial G)_{j,k}(\tau). \tag{3.10}$$

对于 $k\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$ 和 $j\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$，我们有

$$(\partial\Theta)_{j,k}(\tau+1)=e^{i\pi j^2/2k}(\partial\Theta)_{j,k}(\tau), \tag{3.11}$$

$$(\partial G)_{j,k}(\tau+1)=e^{i\pi j^2/2k}(\partial G)_{j,k}(\tau). \tag{3.12}$$

(3) 对于 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ 和 $j\in\mathbb{N}$，我们有

$$(\partial\Theta)_{j,k}(-1/\tau)=(-\tau)\sqrt{-i\tau/2k}\sum_{j'=1}^{2k-1}e^{i\pi jj'/k}(\partial\Theta)_{j',k}(\tau), \tag{3.13}$$

$$(\partial G)_{j,k}(-1/\tau)=(-\tau)\sqrt{-i\tau/2k}\sum_{j'=1}^{2k}e^{i\pi j(2j'-1)/k}(\partial\Theta)_{\frac{2j'-1}{2},k}(\tau). \tag{3.14}$$

(4) 对于 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ 和 $j\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$，我们有

$$(\partial\Theta)_{j,k}(-1/\tau)=(-\tau)\sqrt{-i\tau/2k}\sum_{j'=1}^{2k-1}e^{i\pi jj'/k}(\partial G)_{j',k}(\tau), \tag{3.15}$$

$$(\partial G)_{j,k}(-1/\tau)=(-\tau)\sqrt{-i\tau/2k}\sum_{j'=1}^{2k}e^{i\pi j(2j'-1)/k}(\partial G)_{\frac{2j'-1}{2},k}(\tau). \tag{3.16}$$

证明。将 (1.22) 中的 n 替换为 $-n$，可得 $(\partial\Theta)_{0,k}(\tau)=0$。将 n 替换为$-n-1$, 可得 $(\partial\Theta)_{k,k}(\tau)=0$。这就证明了 (3.3)。同理可证 (3.4)。

按照 n的奇偶性对求和进行拆分，我们有

$$\begin{aligned}(\partial\Theta)_{j,k}(\tau)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(4kn+j)q^{(4kn+j)^2/4k}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(4kn+2k+j)q^{(4kn+2k+j)^2/(4k)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(8kn+2j)q^{(8kn+2j)^2/(16k)}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(8kn+4k+2j)q^{(8kn+4k+2j)^2/(16k)}\\&=\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j,4k}(\tau)+\frac{1}{2}(\partial\Theta)_{2j+4k,4k}(\tau).\end{aligned}$$

这就证明了 (3.5)。类似地，我们可以证明 (3.6)，从而完成第 (1) 部分的证明。

第 (2) 部分由定义可得。

还需证明第 (3) 和第 (4) 部分。首先，公式 (3.13) 由 [19,式 (2.4)] 以及以下事实得出：$(\partial\Theta)_{0,\ k}(\tau)\ =0$ （见 (3.3)）。它也出现在 [1, 式 (12.8)]中。

现在假设 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$和 $j\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$。在 (3.5) 中用 $-1/\tau$替换 τ，并利用 (3.13)，我们推得

$$\begin{aligned}
(\partial\Theta)_{j,k}(-1/\tau) &= \frac{1}{2}(-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{8k-1} e^{i\pi jj'/2k}(\partial\Theta)_{j',4k}(\tau)\\
&\quad+\frac{1}{2}(-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{8k-1} e^{i\pi(2k+j)j'/2k}(\partial\Theta)_{j',4k}(\tau)\\
&= -\frac{1}{4}\tau\sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{j'=1}^{8k-1}(1+e^{i\pi j'})e^{i\pi jj'/2k}(\partial\Theta)_{j',4k}(\tau)\\
&= -\frac{1}{2}\tau\sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{j'=1}^{4k-1} e^{i\pi jj'/k}(\partial\Theta)_{2j',4k}(\tau)\\
&= -\frac{1}{2}\tau\sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{j'=1}^{2k-1}\Big(e^{i\pi jj'/k}(\partial\Theta)_{2j',4k}(\tau)+e^{i\pi j(j'+2k)/k})(\partial\Theta)_{2j'+4k,4k}(\tau)\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\tau\sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{j'=1}^{2k-1} e^{i\pi jj'/k}\Big((\partial\Theta)_{2j',4k}(\tau)-(\partial\Theta)_{2j'+4k,4k}(\tau)\Big)\\
&= -\tau\sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{j'=1}^{2k-1} e^{i\pi jj'/k}(\partial G)_{j,k}(\tau).
\end{aligned}$$

这里，在倒数第三行中，我们用到了这样一个事实：$(\partial\Theta)_{4k,4k}(\tau)\ =0$ （见 (3.3)）。这就证明了 (3.15)。

对于 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$和 $j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$，在 (3.6) 中用 $-1/\tau$替换 τ，并利用 (3.13)，我们推得

$$\begin{aligned}
(\partial G)_{j,k}(-1/\tau) &= \frac{1}{2}(-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{8k-1}(e^{i\pi jj'/2k}-e^{i\pi(j+2k)j'/2k})(\partial\Theta)_{j',4k}(\tau)\\
&= (-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{4k} e^{i\pi j(2j'-1)/2k}(\partial\Theta)_{2j'-1,4k}(\tau)\\
&= (-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{2k}\Big(e^{i\pi j(2j'-1)/2k}(\partial\Theta)_{2j'-1,4k}(\tau)+e^{i\pi j(2j'+4k-1)/2k}(\partial\Theta)_{2j'+4k-1,4k}(\tau)\Big)\\
&= (-\tau)\sqrt{\frac{-i\tau}{8k}}\sum_{j'=1}^{2k} e^{i\pi j(2j'-1)/2k}\Big((\partial\Theta)_{2j'-1,4k}(\tau)+e^{2i\pi j}(\partial\Theta)_{2j'+4k-1,4k}(\tau)\Big).
\end{aligned}$$

分别讨论 $j\in\mathbb{N}$ 或 $j\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$ 的情形，并利用 (3.5)–(3.6)，即可得到 (3.14) 和 (3.16)。□

结合这些公式可得

命题 3.2. 设 k 为正整数。则以下函数：

$$\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{i,\frac{2k+1}{2}}(\tau),\quad 1\le i\le k,$$
$$\frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{i,\frac{2k+1}{2}}(\tau),\quad 1\le i\le k,$$
$$\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{2i-1}{2},\frac{2k+1}{2}}(\tau),\quad 1\le i\le k,$$

在 Γ(1) 下组合成一个向量值模函数。

证明。首先注意到，所有分量都是某个适当同余子群上的模函数（例如参见 [5]）。因此，只需证明这些函数的张成空间（它们是线性无关的）在 $\tau\to\tau+1$ 和 $\tau\to-\frac{1}{\tau}$ 下封闭。对于 $\tau\to\tau+1$，这点显然成立，并可立即由上述公式得到。在 $\tau\to-1/\tau$ 下，利用 (3.13) 和 (3.4)，我们看到 $\mathfrak{f}^3(\tau)\,\eta^3(\tau)\,(\partial\Theta)_{i,\frac{2k+1}{2}}(\tau)$ 的张成空间变换到自身。类似地，公式 $\mathfrak{f}_2(-1/\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{f}_1(\tau)$、(3.4)、(3.14) 和 (3.15) 表明，$\mathfrak{f}_2^3(\tau)\,\eta^3(\tau)\,(\partial\Theta)_{\frac{2i-1}{2},\frac{2k+1}{2}}(\tau)$ 的张成空间在 $\tau\to-1/\tau$ 下变换为 $\mathfrak{f}_1^3(\tau)\,\eta^3(\tau)\,(\partial G)_{i,\frac{2k+1}{2}}(\tau)$ 的张成空间，反之亦然。断言得证。□

作为推论，我们记录如下结果：

推论 3.3。（1）向量值函数

$$\left(\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{1,\frac{5}{2}}(\tau),\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{2,\frac{5}{2}}(\tau)\right)$$

对于 $\Gamma_\theta=\langle S,T^2\rangle$，即由 S 和 T^2 生成的 Γ(1) 的子群，按向量值模形式（零权）的方式变换。

（2）向量值函数

$$\left(\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{1,\frac{5}{2}}(\tau),\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{2,\frac{5}{2}}(\tau),\frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{1,\frac{5}{2}}(\tau),\right.$$
$$\left.\frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{2,\frac{5}{2}}(\tau),\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}}(\tau),\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(\tau)\right)$$

按 Γ(1) 的模函数方式变换。

本推论的（2）证明了定理 1.3 的第二个断言。因此，要完成定理 1.3 的证明，只需证明这六个恒等式。下面我们给出两种不同的证明。

3.2. 定理 1.3 的第一个证明。我们先回顾几个已知事实。回顾式 (2.4) 和 (2.5) 中定义的 θ函数 $\theta_2(\tau)$ 和 $\theta_3(\tau)$。这一对

$$(W_1(\tau),W_2(\tau)):=\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)},\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)\tag{3.17}$$

定义了一个零权的二维向量值模形式 ρ_1 ，其 S-矩阵为

$$\begin{pmatrix} W_1(-1/\tau) \\ W_2(-1/\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ W_2(\tau) \end{pmatrix}.$$

这两个级数恰好是标准 $A_1^{(1)}$ -模的一级特征标。再令

$$\mathrm{ch}^{r,s}_{3,5}(\tau) := \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(q^{\frac{(30n+5r-3s)^2}{60}} - q^{\frac{(30n+5r+3s)^2}{60}} \right).$$

这种记号表示 $\mathrm{ch}^{1,1}_{3,5}(\tau)$、$\mathrm{ch}^{1,2}_{3,5}(\tau)$、$\mathrm{ch}^{2,1}_{3,5}(\tau)$、$\mathrm{ch}^{2,2}_{2,5}(\tau)$ 恰好是四个不可约 (3,5) Virasoro 极小模型的特征。我们需要以下利用五重乘积恒等式得到的已知恒等式 [4,定理 1.3。17]，它们将 Rogers 级数 (1.5)-(1.8) 与这些特征联系起来（另见 [9, 第 170] 页）：

$$Z_1(\tau) := q^{1/40} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n}} = \mathrm{ch}^{1,1}_{3,5}(\tau), \tag{3.18}$$

$$Z_2(\tau) := q^{31/40} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}} = \mathrm{ch}^{2,1}_{3,5}(\tau), \tag{3.19}$$

$$Z_3(\tau) := q^{9/40} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}} = \mathrm{ch}^{2,2}_{3,5}(\tau), \tag{3.20}$$

$$Z_4(\tau) := q^{-1/40} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}} = \mathrm{ch}^{1,2}_{3,5}(\tau). \tag{3.21}$$

这些表达式在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 下变换，并定义了一个权为零的四维向量值模形式 ρ_2 ，其 S-矩阵众所周知：

$$\begin{pmatrix} Z_1(-1/\tau) \\ Z_2(-1/\tau) \\ Z_3(-1/\tau) \\ Z_4(-1/\tau) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \sin(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & -\sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ -\sin(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & \sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) \\ -\sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \\ \sin(\pi/5) & \sin(\pi/5) & \sin(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(\tau) \\ Z_2(\tau) \\ Z_3(\tau) \\ Z_4(\tau) \end{pmatrix}.$$

例如参见 [9, 第 172 页，公式 (15)] ，但该矩阵的 (3, 3) 项有一处笔误。利用首项，可以很容易写出 ρ_1 和 ρ_2 的对角 T-矩阵。注意， $\rho_1\otimes\rho_2$，即 $(W_iZ_j)_{1\le i\le 2,\ 1\le j\le 4}$，定义了一个在 $\Gamma(1)$ 上的八维向量值模形式。然而，在 $\rho_1\otimes\rho_2$中还有一个真子空间，它在全模群作用下也保持不变。

命题 3.4. 设 W_i 和 Z_i 如上所述。我们有

$$\begin{aligned}\left(\tilde{F}_1(q),\tilde{F}_2(q),\tilde{F}_3(q),\tilde{F}_4(q),\tilde{F}_5(q),\tilde{F}_6(q)\right) &= (\mathfrak{f}(\tau)(W_1Z_4+W_2Z_3),\mathfrak{f}_2(\tau)(W_1Z_1+W_2Z_2),\\ &\mathfrak{f}_2(\tau)(W_1Z_3+W_2Z_4),\mathfrak{f}(\tau)(W_1Z_2+W_2Z_1),\mathfrak{f}_1(\tau)(W_1Z_4-W_2Z_3),\mathfrak{f}_1(\tau)(W_2Z_1-W_1Z_2)),\end{aligned} \tag{3.22}$$

并且它在 $\Gamma(1)$ 上定义了一个 $\tilde{\rho}_1$ 零权的向量值模形式。

事实上，等式 (3.22) 可直接由定理 1.2 得出。也可以从定理 1.2 的证明中更直接地看出这一点。例如，由 (2.9)、(2.10) 和 (2.11)（将 q^2 替换为 q 后），我们立即得出

$$\tilde{F}_1(q) = \mathfrak{f}(\tau)(W_1Z_4 + W_2Z_3). \tag{3.23}$$

该命题的第二个断言可通过直接计算 S和 T-矩阵得出，其中用到了 W_1、W_2和 Z_i($1 \le i \le 4$)。

记 $\tilde{\rho}_2$ 为以下零权向量值模形式：

$$(h_1(q), h_2(q), h_3(q), h_4(q), h_5(q), h_6(q)) := \left(\frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{1,\frac{5}{2}}(\tau), 2\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}}(\tau), \right.$$
$$\left. 2\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(\tau), \frac{\mathfrak{f}(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial\Theta)_{2,\frac{5}{2}}(\tau), \frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{1,\frac{5}{2}}(\tau), \frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^3}{\eta(\tau)^3}(\partial G)_{2,\frac{5}{2}}(\tau) \right). \tag{3.24}$$

这恰好是推论 3.3(2)中出现的向量值模形式，只是我们在第二项和第三项前加上了因子 2。

到目前为止，我们构造了两个 6 维向量值模形式：式 (3.22) 中的 $\tilde{\rho}_1$ 和式 (3.24) 中的 $\tilde{\rho}_2$。容易看出（通过直接计算），它们的 S 和 T 矩阵彼此相同。我们声称 $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2$。

为了证明上述断言，我们改用向量值模形式的新基。回顾注 1 中的基 $g_i(q)$。类似地，我们令

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1(q) &:= h_1(q) + h_5(q) = q^{-7/80}(2 + 12q + 30q^2 + \cdots) \in q^{-7/80}\mathbb{C}[[q]],\\
\tilde{g}_2(q) &:= h_1(q) - h_5(q) = q^{33/80}(6 + 18q + 54q^2 + \cdots) \in q^{33/80}\mathbb{C}[[q]],\\
\tilde{g}_3(q) &:= h_4(q) + h_6(q) = q^{17/80}(4 + 6q + 30q^2 + \cdots) \in q^{17/80}\mathbb{C}[[q]],\\
\tilde{g}_4(q) &:= h_4(q) - h_6(q) = q^{57/80}(6 + 16q + 42q^2 + \cdots) \in q^{57/80}\mathbb{C}[[q]],\\
\tilde{g}_5(q) &:= h_2(q) = q^{1/40}(1 + 6q + 15q^2 + \cdots) \in q^{1/40}\mathbb{C}[[q]],\\
\tilde{g}_6(q) &:= h_3(q) = q^{9/40}(3 + 11q + 30q^2 + \cdots) \in q^{9/40}\mathbb{C}[[q]].
\end{aligned}$$

那么 $(g_i(q) - \tilde{g}_i(q))_{i=1}^6$ 也按向量值模形式的方式变换。利用它们的 q 展开，容易看出（参见注 3），$g_i(h) - \tilde{g}_i(q), 1 \le i \le 6$ 的朗斯基行列式的消失阶严格大于 5 2。但根据命题 4.3，朗斯基行列式恒等于零，因此 $(g_i(q) - \tilde{g}_i(q))$ 线性相关。注 1 的最后一句表明，这种线性相关等价于对某个 j，有 $g_j(q) = \tilde{g}_j(q)$。由此我们得到一个五维向量值模形式 $(g_i(q) - \tilde{g}_i(q))_{i\neq j}$。对它应用同类论证，得到对 $k \neq j$，有 $g_k(q) = \tilde{g}_k(q)$，依此类推。因此我们得出，对所有 i，都有 $g_i(q) = \tilde{g}_i(q)$。这显然意味着 $F_i(q) = h_i(q)$，从而完成定理 1.3 的证明。

注 2. 关于 $\tilde{\rho}_1(\tau) = \tilde{\rho}_2(\tau)$ 的断言，也可以通过向量值模形式的 Sturm 型判别准则来证明。由 [12, 命题 1.1] 可知，只需比较它们的 q-展开式的前两项。有趣的是，在上述使用朗斯基行列式的证明中，我们也只需比较 $g_i(q)$ 和 $\tilde{g}_i(q)$ 的前两项，这保证了 $g_i(q) - \tilde{g}_i(q)$ 的朗斯基行列式 $1 \le i \le 6$ 的消失阶为 $> \frac{5}{2}$。

3.3. 定理 1.3 的第二个证明。我们需要函数 $f(\tau)$ 关于同余子群 G 在尖点 $p \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 处的阶，并将其记为 $\mathrm{ord}(f, p)$。

回顾在 (2.5) 中定义的 θ 函数 $\theta_3(\tau)$。已知 [16, 命题 1.41] $\theta_3(\tau) \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$。对于任意导子为 N 的奇数本原狄利克雷特征 ψ，已知 [16, 定理 1.44]

$$\theta(\psi, \tau) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) n q^{n^2} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4N^2, \psi\chi_{-4}),$$

其中 χ_{-4} 是模 4 的非平凡狄利克雷特征。

引理 3.5。对于 $a \in \{1, 2, 3, 4\}$，有

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv a \pmod 5}} n q^{n^2} \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_1(100)). \tag{3.25}$$

证明。令 ψ_k ($k = 0, 1$) 为导子为 5 且满足 $\psi_k(2) = (-1)^k i$ 的本原狄利克雷特征。那么

$$\begin{aligned}\theta(\psi_0, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_0(n) n q^{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+1) q^{(5n+1)^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+4) q^{(5n+4)^2} \\ &\quad + i \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+2) q^{(5n+2)^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+3) q^{(5n+3)^2} \right) \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+1) q^{(5n+1)^2} + 2i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+2) q^{(5n+2)^2}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

这里，对于最后一个等式，我们用到了如下事实：对于 $a \in \{1, 2\}$，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+a) q^{(5n+a)^2} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+5-a) q^{(5n+5-a)^2}, \tag{3.27}$$

只需将 n 替换为 $-n-1$，即可轻松证明。

同理，我们有

$$\theta(\psi_1, \tau) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+1) q^{(5n+1)^2} - 2i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+2) q^{(5n+2)^2}. \tag{3.28}$$

由于 $\theta(\psi_k, \tau) \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_1(100))$ ($k = 0, 1$)，由 (3.26) 和 (3.28) 可得 t

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+1) q^{(5n+1)^2} = \frac{1}{4}(\theta(\psi_0, \tau) + \theta(\psi_1, \tau)) \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_1(100)), \tag{3.29}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (5n+2) q^{(5n+2)^2} = \frac{1}{4i}(\theta(\psi_0, \tau) - \theta(\psi_1, \tau)) \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_1(100)). \tag{3.30}$$

结合 (3.27)，即可证明该引理。 □

我们还需要以下恒等式

$$J_1^2 = \frac{J_2 J_8^5}{J_4^2 J_{16}^2} - 2q \frac{J_2 J_{16}^2}{J_8}. \tag{3.31}$$

该恒等式在文献中频繁出现，并且可直接由 [3, 第 40 页，条目 25(v)、(vi)]推出。

Fo遵循 [8]，中的定义，我们定义广义 Dedekind eta 函数

$$\eta_{\delta;g}(\tau) := q^{\frac{1}{2}\delta P_2(g/\delta)} \prod_{m\equiv\pm g \pmod{\delta}} (1-q^m), \tag{3.32}$$

其中 $P_2(t)=\{t\}^2-\{t\}+\frac{1}{6}$是第二周期伯努利多项式， $\{t\}$ 是 $t, g, \delta, m \in \mathbb{Z}^+$ 和 $0<g<\delta$ 的小数部分。

现在我们可以给出定理 1.3 的第二个证明。根据 (1.19) 和 (1.20) 中给出的定义 $\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$，我们知道，关于 $F_5(q)$ 和 $F_6(q)$ 的恒等式分别由关于 $F_1(q)$ 和 $F_4(q)$ 的恒等式推出。因此，只需证明前四个恒等式。由 (1.11)–(1.14) 可知，前四个恒等式等价于

$$T_1(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (5n+1)q^{5n^2+2n} = \frac{J_1^2J_4^8J_{40}}{J_2^5J_8^2J_{8,40}} + 2q\frac{J_1^2J_4J_8^2J_{6,20}J_{8,40}}{J_2^3J_{40}}, \tag{3.33}$$

$$T_2(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (5n+2)q^{5n^2+4n} = 2\frac{J_1^2J_4J_8^2J_{2,20}J_{16,40}}{J_2^3J_{40}} + q\frac{J_1^2J_4^7J_{8,20}J_{4,40}}{J_2^5J_8^2J_{40}}, \tag{3.34}$$

$$T_3(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (10n+1)q^{5n^2+n} = \frac{J_2J_4^3J_{2,20}J_{16,40}}{J_8^2J_{40}} + 2q^2\frac{J_2^3J_8^2J_{8,20}J_{4,40}}{J_4^3J_{40}}, \tag{3.35}$$

$$T_4(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (10n+3)q^{5n^2+3n} = 2\frac{J_2^3J_8^2J_{40}}{J_4^2J_{8,40}} + \frac{J_2J_4^3J_{6,20}J_{8,40}}{J_8^2J_{40}}. \tag{3.36}$$

我们先证明 (3.33)，然后由此推导出其他恒等式。将 q 替换为 q^5，并将 (3.33) 的两边乘以 $q\theta_3(5\tau)$ 后，我们发现 (3.33) 等价于

$$\theta_3(5\tau)\sum_{n\in\mathbb{Z}} (5n+1)q^{(5n+1)^2} = \theta_3^4(5\tau)\left(f_1(\tau)+f_2(\tau)\right). \tag{3.37}$$

Here

$$f_1(\tau) := q\frac{J_5^8J_{20}^{14}J_{200}}{J_{10}^{20}J_{40}^2J_{40,200}} = \frac{\eta^8(5\tau)\eta^{14}(20\tau)}{\eta^{20}(10\tau)\eta^2(40\tau)\eta_{200,40}(\tau)}, \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &:= 2q^6\frac{J_5^8J_{20}^7J_{40}^2J_{30,100}J_{40,200}}{J_{10}^{18}J_{200}} \\ &= \frac{\eta^8(5\tau)\eta^7(20\tau)\eta^2(40\tau)\eta(100\tau)\eta_{100,30}(\tau)\eta_{200,40}(\tau)}{\eta^{18}(10\tau)}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

借助 Maple 和 [8]，中的算法，很容易验证 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(\tau)$ 都是 $\Gamma_1(200)$ 上的模函数。它们的极点及相应的阶列于表 1 中。

另一方面，很容易看出 $\theta_3^4(5\tau) \in M_2(\Gamma_0(20))$。因此 $\theta_3^4(5\tau) \in M_2(\Gamma_1(200))$。我们可以利用定理 2.3 和 [8] 中的方程 (2.12)，计算 $\Gamma_1(200)$ 在任意尖点处 $\theta_3^4(5\tau)$ 的零点阶。在表 1 中，我们只列出 $f_i(\tau)$（$i=1,2$）的极点处 $\theta_3^4(5\tau)$ 的零点阶。结果表明，乘以

尖点 p	$\operatorname{ord}(f_i(\tau),p)$	$\operatorname{ord}(\theta_3^4(5\tau),p)$
$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{14},\frac{1}{18},\frac{1}{22},\frac{1}{26},\frac{1}{34},\frac{1}{38},\frac{1}{42},\frac{1}{46},\frac{1}{54},\frac{1}{58},\frac{1}{62},\frac{1}{66},\frac{1}{74},\frac{1}{78},\frac{1}{82},\frac{1}{86},\frac{1}{94},\frac{1}{98}$	-16	20
$\frac{1}{10},\frac{1}{30},\frac{1}{70},\frac{1}{90},\frac{3}{10},\frac{3}{70},\frac{7}{10},\frac{7}{30},\frac{7}{90},\frac{9}{10},\frac{9}{70},\frac{23}{30},\frac{23}{90},\frac{29}{30},\frac{29}{90},\frac{67}{70}$	-80	100
$\frac{1}{50},\frac{9}{50},\frac{11}{50},\frac{19}{50},\frac{21}{50},\frac{29}{50},\frac{31}{50},\frac{39}{50},\frac{41}{50},\frac{49}{50}$	-16	20
$\frac{3}{50},\frac{7}{50},\frac{13}{50},\frac{17}{50},\frac{23}{50},\frac{27}{50},\frac{33}{50},\frac{37}{50},\frac{43}{50},\frac{47}{50}$	-14	20

TABLE 1. （200）在尖点处的极点和零点的阶

$\theta_3^4(5\tau)$ 后， $f_i(\tau)$ 的所有极点都会被消去。因此 $\theta_3^4(5\tau)f_i(\tau) \in M_2(\Gamma_1(200))$（$i=1,2$）。

到目前为止，我们已证明（3.37）两边都属于 $M_2(\Gamma_1(200))$。根据 Sturm判别准则（例如参见 [7, 第185页，推论5.6。14], ），要证明（3.37），只需验证两边在前

$$1+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{2}[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_1(200)]=2401$$

各项。我们已用 Maple 验证这一点。因此，(3.37) 成立，我们也就完成了 (3.33) 的证明。

接下来，我们将基于 (3.33) 证明 (3.34)–(3.36)。我们的目标是为 $T_1(q)$找到一个二分拆公式：

$$T_1(q)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(5n+1)q^{5n^2+2n}=L_0(q^2)+qL_1(q^2). \tag{3.40}$$

一方面，由于 $5n^2+2n$ 与 n具有相同的奇偶性，我们有

$$L_0(q^2)=\sum_{n\ \text{even}}(5n+1)q^{5n^2+2n}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(10n+1)q^{20n^2+4n}=T_3(q^4), \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}qL_1(q^2)&=\sum_{n\ \text{odd}}(5n+1)q^{5n^2+2n}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(5(-2n-1)+1)q^{5(-2n-1)^2+2(-2n-1)}\\&=-2q^3\sum_{n\in\mathbb{Z}}(5n+2)q^{20n^2+16n}=-2q^3T_2(q^4).\end{aligned} \tag{3.42}$$

另一方面，将 (3.31) 代入 (3.33)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(5n+1)q^{5n^2+2n}&=\left(\frac{J_2J_8^5}{J_4^2J_{16}^2}-2q\frac{J_2J_{16}^2}{J_8}\right)\cdot\left(\frac{J_4^8J_{40}}{J_2^5J_8^2J_{8,40}}+2q\frac{J_4J_8^2J_{6,20}J_{8,40}}{J_2^3J_{40}}\right)\\&=\frac{J_4^6J_8^3J_{40}}{J_2^4J_{16}^2J_{8,40}}-4q^2\frac{J_4J_8J_{16}^2J_{6,20}J_{2,40}}{J_2^2J_{40}}+2q\left(\frac{J_8^7J_{6,20}J_{8,40}}{J_2^2J_4J_{16}^2J_{40}}-\frac{J_4^8J_{16}^2J_{40}}{J_2^4J_8^3J_{8,40}}\right).\end{aligned} \tag{3.43}$$

结合 (3.40)–(3.43)，可推得

$$L_0(q) = T_3(q^2) = \frac{J_2^6 J_4^3 J_{20}}{J_1^4 J_8^2 J_{4,20}} - 4q\frac{J_2 J_4 J_8^2 J_{3,10} J_{4,20}}{J_1^2 J_{20}}, \tag{3.44}$$

$$L_1(q) = -2qT_2(q^2) = \frac{J_4^7 J_{3,10} J_{4,20}}{J_1^2 J_2 J_8^2 J_{20}} - \frac{J_2^8 J_8^2 J_{20}}{J_1^4 J_4^3 J_{4,20}}. \tag{3.45}$$

利用 (3.44)、(3.45) 以及 [8], 中的方法，很容易验证 (3.34) 和 (3.35) 成立。

剩下要证明 (3.36)。为此，我们对 $T_2(q)$ 作二分拆：

$$T_2(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (5n+2) q^{5n^2+4n} = H_0(q^2) + qH_1(q^2). \tag{3.46}$$

与处理 $T_1(q)$ 的方法相同，我们可以证明

$$H_0(q) = 2T_1(q^2) = 2\frac{J_4^7 J_{1,10} J_{8,20}}{J_1^2 J_2 J_8^2 J_{20}} - 2q\frac{J_2^7 J_8^2 J_{4,10} J_{2,20}}{J_1^4 J_4^3 J_{20}}, \tag{3.47}$$

$$H_1(q) = -T_4(q^2) = \frac{J_2^5 J_4^3 J_{4,10} J_{2,20}}{J_1^4 J_8^2 J_{20}} - 4\frac{J_2 J_4 J_8^2 J_{1,10} J_{8,20}}{J_1^2 J_{20}}. \tag{3.48}$$

现在从 (3.48)，并利用 [8], 中的方法，很容易验证 (3.36) 成 ds.

4. General conjecture and concluding remarks

4.1. 某些 Nahm 和的非模性。在 [6, Section 5] 中，除了$\chi_0(1, 1, 1)$ 和 $\chi_0(1, 1, q^{\frac{1}{2}})$ 之外，还考虑了另外两个特化： $\chi_0(q, 1, 1)$ 和 $\chi_0(1, q, 1)$。因此，自然会问，这两个级数在乘上适当的乘法因子后是否也具有模性。下面我们将说明事实并非如此。

回顾一下，我们用 $f_{A,B,C}(q)$ 表示与 T_3 矩阵相关的 Nahm 和，其中$B = (B_1, B_2, B_3)$ 如第1节所示。采用这一记号，我们可以写成 $f_{A,(1,0,0),C}(q) = q^C\chi_0(q, 1, 1)$ 和 $f_{A,(0,1,1),C}(q) = q^C\chi_0(1, q, 1)$。记

$$Q_1 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \quad Q_2 = -2+\sqrt{5}, \quad Q_3 = \frac{1}{4}(3-\sqrt{5})$$

唯一 解位于区间 (0, 1) 内的 TBA 系统 [20, 引理 2.1] :

$$1 - Q_1 = Q_1^2 Q_2^{-1}, \quad 1 - Q_2 = Q_1^{-1} Q_2^2 Q_3^{-1}, \quad 1 - Q_3 = Q_3 Q_2^{-1}.$$

命题 4.1. 对任意有理数 C，Nahm 和 $f_{A,(1,0,0),C}(q)$ 和 $f_{A,(0,1,0),C}(q)$ 都不是模形式。

证明。要证明这一点，只需说明这两个 Nahm 和在零点附近没有预期的渐近展开。令 $q = e^{-\epsilon}$，那么根据 [20,定理 2.1] ，我们有如下渐近行为（当 $\epsilon \to 0^+$ 时）：

$$f_{A,B,C}(e^{-\epsilon}) e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \sim \beta e^{-\gamma\epsilon}(1 + \sum_{p\geq 1} c_p \epsilon^p)$$

其中， α 是一个正常数， $\gamma = C + \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{r} \frac{1+Q_i}{1-Q_i}$、 c_p 是使用广义三重高斯积分表示的难以计算的系数，而 β 是一个非零

常数，此处无需考虑。作为模性的必要条件，我们注意到关系式 [20,推论 3.1]:

$$\frac{\gamma^p}{p!} - c_p = 0,\ p \geq 1.$$

在我们的情形中，条件 $c_1 - \gamma = 0$ 等价于

$$C = \frac{9{B_1}^2}{4\sqrt{5}} - \frac{3{B_1}^2}{4} + \frac{3B_1B_2}{\sqrt{5}} - B_1B_2 - \frac{B_1B_3}{2\sqrt{5}} + \frac{B_1B_3}{2} + \frac{2B_1}{\sqrt{5}} - \frac{9B_1}{10} + \frac{{B_2}^2}{\sqrt{5}} + \frac{B_2B_3}{2\sqrt{5}} + \frac{B_2B_3}{2} + \frac{7B_2}{4\sqrt{5}} - \frac{17B_2}{20} + \frac{{B_3}^2}{\sqrt{5}} + \frac{{B_3}^2}{4} - \frac{B_3}{2\sqrt{5}} + \frac{B_3}{10} - \frac{7}{80}.$$

代入 $B = (1, 0, 0)$ 得到值 $C = \frac{1}{80}(-139 + 68\sqrt{5})$，该值是无理数；对于 $B = (0, 1, 0)$，同理。因此，所讨论的两个 Nahm 和不可能是模的。□

尽管 $\chi_0(q, 1, 1)$ 和 $\chi_0(1, q, 1)$ 无法化为模的，但它们的和满足

$$\chi_0(q, 1, 1) + \chi_0(1, q, 1) = \chi_0(q^{-1}, q, 1) \tag{4.1}$$

乘以 $q^{\frac{17}{80}}$ 后，它是模的。关系式 (4.1) 可由一个稍微更一般的结论推出:

$$\sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+k^2/2-ij-jk+j-i}x_1^i x_2^j x_3^k}{(q)_i(q)_j(q)_k} = \sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{i^2+j^2+k^2/2-ij-jk}x_1^i x_2^j x_3^k(x_1q^i + q^j)}{(q)_i(q)_j(q)_k}. \tag{4.2}$$

比较 (4.2) 两边 $x_1^i x_2^j x_3^k$ 的系数，我们看到 (4.2) 等价于

$$\frac{q^{i^2+j^2+k^2/2-ij-jk+j-i}}{(q)_i(q)_j(q)_k} = \frac{q^{i^2+j^2+k^2/2-ij-jk+j}}{(q)_i(q)_j(q)_k} + \frac{q^{(i-1)^2+j^2+k^2/2-(i-1)j-jk+(i-1)}}{(q)_{i-1}(q)_j(q)_k}.$$

最后一个公式很容易验证。

4.2. 一般猜想。在本节中，我们讨论引言中与 T_n 相关的秩为 n 的 Nahm 和 $\chi_0(1)$ 的模性的一般猜想。为简便起见，记 $1 := (1, 1, ..., 1)$。可以提出一个类似于定理 1.3 的略强猜想结果，但这里不作讨论。

设 $f_1, ..., f_\ell$ 为上半平面中的任意全纯函数。记 $D = \left(q\frac{d}{dq}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}$ 为拉马努金导数，并记

$$\partial_k := D - \frac{k}{12}E_2$$

其中 $E_2(q) = 1 - 24\sum_{n\geq 1}\frac{nq^n}{1-q^n}$ 是第二艾森斯坦级数。已知此映射会将权为 k（在某个同余子群上）的模形式空间映入同一同余子群上权为 $k+2$ 的模形式空间。记 $\mathcal{W}_D(f_1, ..., f_\ell)$ 为关于 D 导数的朗斯基行列式，它仍是一个全纯函数。此外，记 $\mathcal{W}_{\partial_k}(f_1, ..., f_\ell)$ 为关于 ∂_k 导数的朗斯基行列式，其中 r 阶导数定义为 $\partial_k^r := \partial_{k+2r-2} \circ \cdots \circ \partial_k$。假设每个 f_i 都有一个 q 展开。那么 $\mathcal{W}_D$ 也有 $\widetilde{\ }$一个 q 展开，因此我们可以将朗斯基行列式记为 $\mathcal{W}_D$，并将其归一化，使得

q 展开中的首项系数为 1。于是我们得到一个已知结果（例如参见 $[5,14]$）。

定理 4.2. 设 $f_1,\ldots,f_\ell$ 是权为 k 的模形式，且它们对应于某个同余子群，则朗斯基行列式

$$\mathcal{W}_D(f_1,...,f_\ell)=\mathcal{W}_{\partial_k}(f_1,...,f_\ell)$$

是同一同余子群上的权为 $\ell(\ell+k-1)$ 的模形式。

在 $[5]$ 中，对朗斯基行列式模形式 $\mathcal{W}_D$ 的自守因子和同余子群给出了更精确的信息。

现在，我们将定理 4.2 专门应用于这样一种情形： $V=\mathrm{Span}(f_1,...,f_\ell)$ 在 $\Gamma(1)$ 作用下构成一个 ℓ维的模不变空间。于是得到以下结果。

命题 4.3. (1) 设 $f_1,..,f_\ell$ 是模不变空间 V 的一组基。若

$$\mathrm{ord}(\mathcal{W}_D(f_1,...,f_\ell),i\infty)=\lambda$$

then

$$\mathcal{W}_D(f_1,...,f_\ell)=\eta(\tau)^{24\lambda}G(\tau),$$

其中 $G(\tau)$ 是权为 $\ell(\ell-1)$、在 $\Gamma(1)$ 上的非零全纯模形式 -12λ。特别地，如果 $\lambda=\frac{\ell}{(\ell-1)\ 12}$，那么

$$\widetilde{\mathcal{W}}_D(f_1,...,f_\ell)=\eta(\tau)^{2\ell(\ell-1)}.$$

(2) If

$$\mathrm{ord}(\mathcal{W}_D(f_1,...,f_\ell),i\infty)>\frac{\ell(\ell-1)}{12}$$

那么朗斯基行列式恒等于零，且 f_i 线性相关。

该命题的第 (1) 部分可见于 $[13,$ 定理 3.7$]$；另见 $[14,$定理 2.2 和命题 2.4$]$ 以及 $[2,$ 定理 $1]$。第 (2) 部分由第 (1) 部分以及如下事实推出：对于 $k<0,\ M_k(\Gamma(1))=0$。另见 $[13,$ 引理 3.6$]$。

注 3. 在 $f_i(q)=q^{r_i}(a_0^{(i)}+a_1^{(i)}q+\cdots)$，对每个 i 均有 $a_0^{(i)}\neq 0$，且对 $i\neq j$ 有 $r_i\neq r_j$ 的情形下，很容易看出，$\mathcal{W}_D(f_1,...,f_\ell)$ 的消失阶为 $\sum_{i=1}^{\ell}r_i$。利用这一事实和注 1，我们立即得到 $\mathcal{W}_D(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2,\tilde{F}_3,\tilde{F}_4,\tilde{F}_5,\tilde{F}_6)$ 的消失阶为 $3\ 2$，因此在我们的情形中，朗斯基行列式不是一个 η 次幂，而是有

$$\widetilde{\mathcal{W}}_D(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2,\tilde{F}_3,\tilde{F}_4,\tilde{F}_5,\tilde{F}_6)=(5892480)^{-1}\cdot\eta(\tau)^{36}(70027513E_4(\tau)^3-64135033E_6(\tau)^2).$$

现在我们可以陈述一个基于一些数值证据的一般猜想。

猜想 4.4. 设 $\chi_0(1)$ 为与 T_n、$n\geq 2$ 相关联的 Nahm 和。那么我们有

（1）对于 $n=2k\geq 2$ 偶数：

$$q^{a_k}\chi_0(\mathbf{1})=\frac{\mathfrak{f}(\tau)^{2k}\widetilde{\mathcal{W}}_D(R_{2k,1},....,R_{2k,k})}{\eta(\tau)^{k(2k-1)}},$$

其中 $a_k = -\frac{k(1+4k)}{48\ 1+k}$ （）以及

$$R_{2k,i}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{(k+1)(n-\frac{(2i-1)}{4(k+1)})^2}.$$

（2）对于 $n = 2k-1 \geq 3$ 奇数:

$$q^{a_k}\chi_0(\mathbf{1}) = \frac{\mathfrak{f}(\tau)^{2k-1}\widetilde{\mathcal{W}}_D((\partial\Theta)_{1,\frac{2k+1}{2}}, ..., (\partial\Theta)_{k-1,\frac{2k+1}{2}})}{\eta(\tau)^{(k-1)(2k-1)}},$$

其中 $a_k = \frac{-1+6k-8k^2}{96k+48}$ 。

更准确地说， $q^{a_k}\chi_0(\mathbf{1})$ 是一个模函数，是 $\Gamma(\mathbf{1})$ 下一个 $3k$ 维向量值模函数的分量。

猜想的第（1）部分已知对 $n = 2$ [6]成立，我们还对 q的高次幂数值验证了 $n = 4$。本文证明了 $n = 3$ 的第（2）部分。

致谢。第二作者受到国家自然科学基金（12171375）的资助。

References

[1] D. Adamovi´c 和 A. Milas, 《 $N = 1$ 三重态顶点算子超代数：扭曲扇区》。《SIGMA《对称性、可积性与几何：方法与应用》》。2008年12月13日；4：087。[2] Y. Arike、M. Kaneko、K. Nagatomo 和 Y. Sakai, 《仿射顶点算子代数与模线性微分方程》, 《数学物理通讯》106卷，第5期（2016）：693–718。[3] B.C. Berndt, 《拉马努金笔记》第三部分，施普林格出版社，纽约，1991年。[4] B.C. Berndt, 《拉马努金风格的数论》，美国数学会，2006年。[5] K. Bringmann、C. Calinescu、A. Folsom 和 S. Kimport, 《主子空间的分次维数与模安德鲁斯–戈登型级数》。《当代数学通讯》16卷，第04期（2014）：1350050。[6] C. Calinescu、A. Milas 和 M. Penn, 《基本 $A_{2n}^{(2)}$ -模的主子空间的顶点代数结构》。《纯粹与应用代数杂志》220卷（2016），第1752–1784页。[7] H. Cohen 和 F. Str¨omberg, 《模形式：经典方法》, 《数学研究生教程》第179卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年。[8] F.G. Garvan 和 J. Liang, 《θ 函数恒等式的自动证明》，arXiv:1807.08051。[9] K. Kawasetsu, 《格顶点算子代数的中间顶点子代数》, 《数学物理通讯》104卷，第2期（2014）：157–178。[10] J. Lepowsky 和 R.L. Wilson, 《标准模的结构，I：泛代数与Rogers-Ramanujan恒等式》。《Invent. Math.》77卷（1984），199–290。[11] J. Lepowsky 和 R.L. Wilson, 《标准模的结构，II： $A_1^{(1)}$ 情形，主分次》, 《Invent. Math.》79卷（1985），417–442。[12] T. Magnusson 和 M. Raum, 《向量值模形式的计算》, arXiv:2202.06676。[13] G. Mason, 《向量值模形式与线性微分算子》, 《International Journal of Number Theory》3卷，第03期（2007）：377–390。[14] A. Milas, 《与有理顶点算子代数相关的某些自守形式》, 《月光现象——第一个四分之一世纪及以后：研讨会论文集》, 爱丁堡，2004年，（2010）：330。

[15] A. Milas 和 M. Penn，《格顶点代数与组合基：一般情形及 W-代数》，《纽约数学杂志》18卷（2012）：621–650。[16] K. Ono，《模形式之网：模形式系数的算术与 q-级数》，CBMS 数学区域会议丛书，第102卷，由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，罗德岛州普罗维登斯，2004年。[17] L.J. Rogers，《关于某些无穷乘积展开的第二篇回忆录》，《伦敦数学会会刊》25卷（1894年），318–343。[18] L.J. Rogers，《关于组合分析的两个定理及若干相关恒等式》，《伦敦数学会会刊》16卷（1917年），315–336。[19] G. Shimura，《关于半整数权模形式》，《数学年刊》（第2辑）97卷（1973年），440–481。[20] M. Vlasenko 和 S. Zwegers，《Nahm 猜想：渐近计算与反例》。《数论与物理通讯》。2011年；5(3)：617–42。[21] M. Wakimoto，《无限维李代数》。第195卷。美国数学会，2001年。[22]L. Wang，《关于 Nahm 猜想的 Zagier 秩二例子的恒等式》，arXiv:2210.10748v2。[23] L. Wang，《Nahm 问题中 Zagier 秩三例子的显式形式与证明》，arXiv:2211.04375v2。[24] H. Weber，《代数教科书》，第3卷，椭圆函数与代数数，不伦瑞克，1908年。[25] D. Zagier，《二对数函数》，载于《数论、物理与几何前沿》第二卷，施普林格，2007年，第3–65页。

Department of Mathematics and Statistics, University at Albany (SUNY), Albany, NY 12222, United States电子邮箱地址：amilas@math.albany.edu

School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, People's Republic of China电子邮箱地址：wanglq@whu.edu.cn;mathlqwang@163.com