arXiv:2301.04544v1 [cs.GT] 11 Jan 2023

最优公正对应

Javier Cembrano* Felix Fischer† Max Klimm‡

摘要

我们研究一种机制：它从有向图的顶点集中选出一个子集，以最大化任一选定顶点的最小入度，同时满足公正性约束，即特定顶点是否被选中，不取决于该顶点的出边。对于最大出度为 d 的图，我们给出一种机制，至多选出 $d+1$ 个顶点，且只选择入度至少为图中最大入度减一的顶点。随后我们证明，这一结果已是最优的：即使不限制选定顶点的数量，也不存在一种无偏机制能够只选择度最大的顶点。最后，我们得到选定顶点的最大数量与任一选定顶点的最小入度之间的如下权衡：当从 n 个顶点中至多选出 k 个时，可以只选择入度至少为最大入度减 $\lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor + 1$ 的顶点。

1 引言

公正选择是这样一个问题：在有向图中选择入度较大的顶点，同时确保某个特定顶点是否被选择，与该顶点的出边无关。该问题描述了这样一种情形：代理人相互提名以参与选择，并且只要这不会影响自己被选中的机会，他们就愿意如实表达对其他代理人的看法。

选择单个顶点受到强有力的不可能性结果的制约。对于最大出度为一的图，即每位代理人只提交一次提名的情形，每条无偏选择规则都会违反两个基本公理之一 [11] ，因此必然无法对最大入度提供非平凡的乘法近似。对于出度任意的图，即每位代理人可以提交多次提名的情形，无偏规则会违反一个更弱的公理，并且无法在乘法意义或加法意义上提供非平凡的近似 [1, 8]。如果我们不再选择单个顶点，而是选择任意固定数量的顶点，这些不可能性在很大程度上仍然存在；但如果放宽每个图都必须选择相同数量顶点的要求，则可以得到积极的结果 [4, 18]。

从实践角度来看，这种放宽要求未必值得担忧。事实上，在现实生活中，无偏选择适用的情形，往往允许当选代理人的人数有一定弹性。学术会议录取论文的确切数量通常不会预先确定，而是取决于投稿的数量和质量。会议的最佳论文奖通常设有相互重叠的类别；若候选人的情况不足以支持颁奖，某些奖项也可能不予颁发。菲尔兹奖每四年颁发一次，授予两名、三名或四名40岁以下的数学家。灵活性更大的例子包括授予副总裁或副校长等职位名称。这类头衔通常可以授予

*数学研究所，柏林工业大学，德国
†数学科学学院，伦敦玛丽女王大学，英国
‡数学研究所，柏林工业大学，德国

许多人，而且授予每个人的成本微乎其微，但为了避免头衔贬值，只应授予符合资格的人。

Tamura 和 Ohseto [18] 具体研究了他们所称的提名对应，即在任意图中都可能选出任意顶点集合的规则。对于最大出度为一的图，一种特定的此类规则——含亚军的复数制——满足公正性以及 Holzman 和 Moulin 的两条公理的适当变体 [11]。该规则选出所有入度最大的顶点；如果这样的顶点唯一，还会选出所有入度小一且其出边指向入度最大顶点的顶点。对于选出数量不固定的顶点的规则，一种适当的质量度量是在最坏情况下最佳顶点与最差选定顶点之间的差值；我们可以称一个规则为 α-最小值可加的，如果在所有图上取这两个量之差的最大值至多为 α。用这一术语来说，含亚军的复数制是1-最小值可加的。

正如Tamura 和 Ohseto 所指出的，在实践中，确保最大选定顶点数不过多可能是有益的，而含亚军的复数制显然无法满足这一点。因此，值得探讨是否存在这样的规则：它们是 α-最小值可加的，并且对于某个固定的 k ，其选定的顶点数从不超过 α ，且 k。对于出度为一的图，Tamura 和 Ohseto 对此给出了肯定回答：含亚军的复数制的一种变体按照顶点的固定排序来打破平局，仍然是1-最小值可加的，但选定的顶点数从不超过两个。

我们的贡献 我们的第一个结果将 Tamura 和 Ohseto的结果推广到了出度更大的图：对于最大出度为 d的图，可以实现1-最小可加性，同时至多选定 $d+1$ 个顶点。对于出度无界的图这一特殊情形，我们取得了略微改进，保证实现 1-最小可加性，且绝不选定所有顶点。第二个结果证明，1-最小可加性已是最佳可能，从而排除了仅选定入度最大的顶点的无偏机制的存在。即使不对选定顶点的数量施加任何限制，这一结论仍然成立；我们还给出了类似的不可能性结果：若要最大化选定顶点的入度中位数或均值，而非最小入度，也会遇到同样的问题。第三个结果揭示了最大选定顶点数与任一选定顶点的最小入度之间的权衡：前者越小越好，后者越大越好。如果允许从 n个顶点中至多选定 k个顶点，就可以保证 α-最小可加性 $\alpha = \lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor + 1$。实现这一点的方法是在应用含亚军的复数制之前，从图中移除一部分边，从而在选定较少顶点的同时保证公正性。我们尚不清楚这一最后的结果是否紧确，并将选定顶点的数量与质量之间的最优权衡这一有趣问题留待未来研究。

相关工作 de Clippel 等人首次将公正性作为经济机制的一种属性引入。 [9], 随后，Alon 等人 [1] 和 Holzman 和 Moulin 将其用于有向图中顶点的选择。Holzman 和 Moulin 针对所有出度均为 1 时选择单个顶点的机制给出了公理化刻画，而 Alon 等人则研究了在出度不受限制时，无偏机制能否为任意固定数量的顶点近似最大入度。

两组作者都得出了强有力的不可能性结果，此后大量后续研究致力于克服这些结果。此前，Alon 等人以及 Fischer 和 Klimm [10]已经提出了能够提供非平凡乘法保证的随机化机制，并随后为选择一个顶点实现了此类保证中的最优结果。Bousquet 等人从随机化机制的最坏情形实例入度较小这一观察出发， [5] 提出了一种机制，该机制在最大入度增大时渐近最优；Caragiannis 等人 [6, 7]则开创了对提供加性而非乘法保证的机制的研究。此后，Cembrano 等人[8] 确定了一种确定性

机制，该机制在最大出度有界时能够提供非平凡的加性保证，并证明了当出度无界时无法获得此类保证。Mackenzie 也从公理化的角度研究了随机化机制[14, 15]。

Bjelde 等人 [4]提出了具有更优乘法保证的随机化机制，用于选择多个顶点；他们还指出，若选择不超过 k 个顶点，而非恰好 k个顶点，确定性机制实际上也能实现非平凡的保证。Tamura 和 Ohseto [18] 针对出度为一的情形所做的公理化研究得出了相同结论：允许选择数量不定的顶点时，Holzman 和 Moulin 的不可能性结果便不再成立。随后，Tamura [17] 刻画了由 Tamura 和 Ohseto提出的一种机制；该机制在某些情况下会选择所有顶点，并且是满足公正性、匿名性、对称性和单调性的唯一最小机制。

除选择问题外，针对各种其他问题也提出了无偏机制，包括同行评审 [2, 13, 16, 20], 排名聚合 [12], 后代最大化 [3, 21], 以及网络中心性 [19]。

2 预备知识

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，并令

$$\mathcal{G}_n = \left\{ (V, E) : V = [n], E \subseteq (V \times V) \setminus \bigcup_{v \in V} \{(v, v)\} \right\}$$

表示具有 n 个顶点且没有自环的有向图集合。令 $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$。对于 $G = (V, E) \in \mathcal{G}$和 $v \in V$，令 $N^+(v, G) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$表示出邻域，$N^-(v, G) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$表示 v 在 G 中的入邻域。令 $\delta^+(v, G) = |N^+(v, G)|$ 和 $\delta^-(v, G) = |N^-(v, G)|$ 分别表示 v 在 G 中的出度和入度，并令 $\Delta(G) = \max_{v \in V} \delta^-(v, G)$ 表示 G 中任一顶点的最大入度。当图由上下文明确时，我们有时会省略记号中的 G，并写作 $N^+(v)$、$N^-(v)$、$\delta^+(v)$、$\delta^-(v)$ 和 Δ。令 $\mathrm{top}(G) = \max\{v \in V : \delta^-(v) = \Delta(G)\}$ 表示 G 中入度最大的顶点里索引最大的顶点。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $d \in [n-1]$，令 $\mathcal{G}_n(d) = \{(V, E) \in \mathcal{G}_n : \delta^+(v) \leq d \text{ 表示 } \mathcal{G}_n \text{ 中最大出度不超过 } d \text{ 的所有图构成的集合，其中每个 } v \in V\}$ 均满足该条件；$\mathcal{G}(d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n(d)$。

k-选择机制由一族函数 $f : \mathcal{G}_n \to 2^{[n]}$ 给出，每个 $n \in \mathbb{N}$ 对应一个函数；这些函数将每个图映射到其顶点的一个子集，并要求对于所有 $G \in \mathcal{G}$，都有 $|f(G)| \leq k$。稍微滥用一下记号，我们用 f 同时指代该机制及其函数族中的各个函数。给定 $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ 和 $v \in V$，令 $\mathcal{N}_v(G) = \{(V, E') \in \mathcal{G} : E \setminus (\{v\} \times V) = E' \setminus (\{v\} \times V)\}$ 表示相对于 v 与 G 邻接的图的集合，即这些图可以通过改变 v 的出边从 G 得到。若在这组图上，某个顶点的出边不会影响其是否被选中，则称机制 f 在 $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ 上是无偏的；也就是说，对于每个图 $G = (V, E) \in \mathcal{G}'$、$v \in V$ 以及 $G' \in \mathcal{N}_v(G)$，都有 $f(G) \cap \{v\} = f(G') \cap \{v\}$。给定一个 k-选择机制 f 和一个聚合函数 $\sigma : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$，满足 $\sigma(\emptyset) = 0$，且对于每个满足 $|S| \geq 1$ 的 $S \subseteq \mathbb{R}$，$\min\{x \in S\} \leq \sigma(S) \leq \max\{x \in S\}$，若对于 $\alpha \geq 0$，在 $\mathcal{G}'$ 中的每个图上，函数 σ 在 f 的选择结果上的取值与最大入度之差至多为 α，即若

$$\sup_{G \in \mathcal{G}'} \left\{ \Delta(G) - \sigma\left(\{\delta^-(v, G)\}_{v \in f(G)} \right) \right\} \leq \alpha.$$

我们特别关注 σ 分别为最小值、中位数和均值的情形，并在这些情形下分别将机制称为 α-最小值可加、 α-中位数可加和 α-均值可加 。

算法1： 含亚军的复数制

输入： 有向图 $G = (V, E) \in \mathcal{G}_n(1)$
输出： 选定顶点的集合 $S \subseteq V$
令 $S = \{v \in V : \delta^-(v) = \Delta(G)\}$;
如果 $S = \{v\}$ 对于某个 $v \in V$ **则**
$S \leftarrow S \cup \{u \in V : \delta^-(u) = \Delta(G) - 1$ 和 $(u, v) \in E\}$
end
返回 S

3 含亚军的复数制

聚焦于最大出度为一的情形，Tamura 和 Ohseto [18] 提出了一种称为含亚军的复数制的机制。我们在算法1中对该机制作了形式化描述：它选择所有入度最大的顶点；若这样的顶点唯一，则还会选择所有满足以下条件的顶点：该顶点有一条出边指向这个入度最大的顶点，且其入度比后者小一。该机制背后的思路是，若删除这些后一类顶点的出边，它们的度就会达到最大，因此，任何旨在选择度最大的顶点的无偏机制也必须选择这些顶点。含亚军的复数制在 $\mathcal{G}(1)$ 上是无偏的，并且在任何有 n 个顶点的图中，都会选出 1 至 n 个度等于最大度或比最大度小一的顶点。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，它都是 $\mathcal{G}_n(1)$ 上的无偏且 1-最小可加的 n-选择机制。自然会问，对于更一般的设置，是否也能获得类似的加性保证。本节将肯定地回答这一问题，具体研究当 n、k 和 d 取哪些值时，存在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上的无偏且 1-最小可加的 k-选择机制。我们稍后将在第4节看到，对于我们的结果所涵盖的所有情形，1-最小可加性实际上已是最优，唯一例外是边界情形 $n = 2$。

虽然 Tamura 和 Ohseto 并未限制选定顶点的最大数量，但他们简要讨论了对其机制的一种修改，该修改在保持公正性和 1-最小值可加性的同时，最多只选择2 个顶点。修改后的机制不再选择所有入度最大的顶点，而是依据顶点的固定排序，优先选择一个度最大的顶点以打破平局。为保证公正性，修改后的机制还会选择这样一个顶点：在删除该顶点的出边后得到的图中，该顶点会被选中。假设每个顶点至多有一条出边，这意味着至多还会选中一个额外顶点。因此，对于每个1-最小值可加 k-选择机制，都存在一个定义在 $G(1)$ 上的机制$k \geq 2$。

我们的首个结果将这一机制推广到出度任意的情形，只要选定顶点的最大数量足够大。为此，我们证明，当最大出度为 d时，为实现公正性，除了入度最大且优先级最高的顶点之外，至多还需选择 d 个顶点。[1] 我们在 算法 2 中正式描述由此得到的机制，并将其称为 带有亚军的非对称多数制，记其在图 G上的输出为 $\mathcal{P}(G)$。由此我们得到以下定理，它推广了出度为一的情形下的已知结果。

定理 1. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $d \in [n-1]$ 和 $k \in \{d+1, \ldots, n\}$，都存在一个在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上的无偏且1-最小值可加 k-选择机制。

我们将关注以下比较顶点的方法：同时依据它们的入度和索引进行比较，并使用常规不等号以及 max 运算符和

[1]在此机制中，以及本文其余部分需要处理平局的任何地方，我们都优先选择索引较大的对象，因此 top(G) 是图 G 中入度最大且优先级最高的顶点。当然，也可以改用任何其他确定性的平局处理规则。

算法 2： 带有亚军的非对称多数制 $\mathcal{P}(G)$

输入： 有向图 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$
输出： 选定顶点的集合 $S\subseteq V$
令 $S=\emptyset$;
对于 $v\in V$，**执行**
  令 $G_v=(V,E\setminus(\{v\}\times V))$;
  若 $\mathrm{top}(G_v)=v$，**则**
    $S\leftarrow S\cup\{v\}$
  end
end
返回 S

min，表示形如 $(\delta^-(v)\ v)$ 的数对之间的字典序。以下引理刻画了由 算法 2 选出的顶点集合的结构，并为证明 定理 1 提供了主要的技术依据。

引理 1. 设 $G=(V,E)\in\mathcal{G}$ 和 $v\in V$。那么，$v\in\mathcal{P}(G)$ 当且仅当

(a) for every $w\in V$ *with* $(\delta^-(w),w)>(\delta^-(v),v)$ *it holds* $(v,w)\in E$*; and*

(b) 以下条件之一成立：

(i) $\delta^-(v)=\Delta(G)$*; or*
(ii) $\delta^-(v)=\Delta(G)-1$ *and* $v>w$ *for every* $w\in V$ *with* $\delta^-(w)=\Delta(G)$.

证明。我们首先证明，对于给定的图 G，若 $v\in\mathcal{P}(G)$，则 (a) 和 (b) 成立。设 $G=(V,E)\in\mathcal{G}$，并设 $v\in\mathcal{P}(G)$。为证明 (a)，假设存在 $w\in V$，使得 $(\delta^-(w,G)\ w)>(\delta^-(v,G)\ v)$。由于 $v\in\mathcal{P}(G)$，我们有 $v=\mathrm{top}(G_v)$，其中 $G_v=(V,E\setminus(\{v\}\times V))$。这意味着 $(\delta^-(v,G_v)\ v)>(\delta^-(w,G_v)\ w)$，因此 $\delta^-(w,G)>\delta^-(w,G_v)$，因为 $\delta^-(v,G)=\delta^-(v,G_v)$。由于 G 和 G_v 仅在 v 的出边上有所不同，我们得出 $(v,w)\in E$。为证明 (b)，我们注意到，对于每个 $w\in V$，都有

$$(\delta^-(v,G),v)=(\delta^-(v,G_v),v)>(\delta^-(w,G_v),w)\geq(\delta^-(w,G)-1,w),\tag{1}$$

其中最后一个不等式源于这样一个事实：每个顶点至多有一条来自 v 的入边。如果不存在满足 $\delta^-(w)=\Delta(G)$ 的 $w\in V\setminus\{v\}$，则最大入度必定是 v 的入度，因此 $\delta^-(v)=\Delta(G)$，结论 (i) 成立。否则，对于每个满足 $\delta^-(w)=\Delta(G)$ 的 $w\in V\setminus\{v\}$，由 (1) 可得 $(\delta^-(v,G)\ v)>(\Delta(G)-1,w)$。由此可知，要么 $\delta^-(v,G)>\Delta(G)-1$，此时 (i) 成立；要么 $\delta^-(v)=\Delta(G)-1$ 和 $v>w$ 同时成立，这意味着 (ii)。

现在证明反方向。设 $G=(V,E)\in\mathcal{G}$ 和 $v\in V$ 满足 (a) 和 (b)。令 $G_v=(V,E\setminus(\{v\}\times V))$。我们需要证明 $\mathrm{top}(G_v)=v$，也就是说，对每个 $w\in V\setminus\{v\}$，都有 $(\delta^-(v,G_v)\ v)>(\delta^-(w,G_v)\ w)$。设 w 是 $V\setminus\{v\}$ 中的一个顶点。若 $(\delta^-(v,G)\ v)>(\delta^-(w,G)\ w)$，则可立即得出结论，因为 $\delta^-(v,G_v)=\delta^-(v,G)$ 且 $\delta^-(w,G_v)\leq\delta^-(w,G)$。否则，由 (a) 可知 $(v,w)\in E$，因此 $\delta^-(w,G_v)=\delta^-(w,G)-1$。若 v 满足 (i)，则可得

$$\delta^-(v,G_v)=\delta^-(v,G)=\Delta(G)\geq\delta^-(w,G)=\delta^-(w,G_v)+1,$$

因此 $(\delta^-(v,G_v)\ v)>(\delta^-(w,G_v)\ w)$。另一方面，如果 v 满足 (ii)，那么

$$\delta^-(v,G_v)=\delta^-(v,G)=\Delta(G)-1\geq\delta^-(w,G)-1=\delta^-(w,G_v),$$

并且 $v>w$ 蕴含 $(\delta^-(v,G_v)\ v)>(\delta^-(w,G_v)\ w)$ 也成立。 □

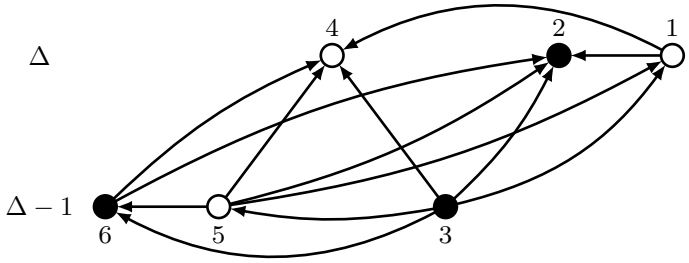

图 1：算法 2 选定顶点的示例。在本图以及全文中，顶点按照入度从上到下排列，按照索引从左到右排列，因此发生平局时，左侧的顶点优先。机制选定的顶点以白色绘制，未选定的顶点以黑色绘制。入度低于 $\Delta-1$ 的顶点以及与这些顶点相连的边均未显示。将图记为 $G=(V,E)$，并令每个顶点 v 满足 $G_v=(V,E\setminus(\{v\}\times V))$，则选定顶点 v 是满足 $\mathsf{top}(G_v)=v$ 的顶点。具体而言，顶点 2、3 和 6 未被选定，因为 $\mathsf{top}(G_2)=4$、$\mathsf{top}(G_3)=4$ 和 $\mathsf{top}(G_6)=1$。

注意，引理 1 尤其蕴含$\mathrm{top}(G)\in\mathcal{P}(G)$ 对每个图 G都成立。 图 1给出了引理 1所述特征的一个示例，其中涉及入度、平局时的排序以及选定顶点之间的边。

我们现在可以证明定理 1。

定理 1的证明。 我们证明，对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $d\in[n-1]$，带有亚军的非对称多数制是无偏的，并且在 1-最小值可加于 $\mathcal{G}_n(d)$；对于每个 $G=(V,\ E)\in\mathcal{G}_n(d)$，它至多选定 $d+1$ 个顶点。如果是这样，那么对于每个 $k\in\{d+1,\dots,n\}$，该机制都满足定理中的陈述。因此，设 n 和 d 如上所述。

公正性由机制的定义可知，因为在判断某个顶点是否属于选定集合时，并不考虑该顶点的出边。如果令 $G=(V,E)$ $v\in V$，且 $G'=(V,E')\in\mathcal{N}_v(G)$，那么分别以图 G 和 G' 为输入运行机制时构造的图 G_v 和 G'_v 相同，因为根据 $\mathcal{N}_v(G)$ 的定义，我们有 $E\setminus(\{v\}\times V)=E'\setminus(\{v\}\times V)$。由于 $v\in\mathcal{P}(G)\Leftrightarrow\mathsf{top}(G_v)=v$，且 $v\in\mathcal{P}(G')\Leftrightarrow\mathsf{top}(G'_v)=v$，我们得出 $v\in\mathcal{P}(G)\Leftrightarrow v\in\mathcal{P}(G')$。

为说明该机制是 1-最小可加的，令 $G\in\mathcal{G}_n(d)$，并首先注意到 $\mathcal{P}(G)\neq\emptyset$，因为引理 1 蕴含 $\mathsf{top}(G)\in\mathcal{P}(G)$。从该引理中我们还知道，对于每个$v\in\mathcal{P}(G)$ $\delta^-(v)\geq\Delta(G)-1$。我们得出 $\min\{\{\delta^-(v)\}_{v\in\mathcal{P}(G)}\}\geq\Delta(G)-1$；由于这对每个 $G\in\mathcal{G}_n(d)$ 都成立，该机制是 1-最小可加的。

最后，设 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n(d)$，并假设 $|\mathcal{P}(G)|>d+1$。若记 $v_L=\mathrm{argmin}_{v\in\mathcal{P}(G)}\{(\delta^-(v)\ v)\}$，根据引理 1，我们知道对于每个满足 $(\delta^-(w)\ w)>(\delta^-(v_L)\ v_L)$ 的 $w\in V$，都有 $(v_L,w)\in E$，因此 $\delta^+(v_L)\geq|\mathcal{P}(G)|-1>d$，矛盾。由此得出$|\mathcal{P}(G)|\leq d+1$。 □

关于可选择任意数量顶点的机制，以下结果可由定理 1直接得出。

推论 1。 对于每个 $n\in\mathbb{N}$，在 $\mathcal{G}_n$ 上都存在一个无偏且1-最小值可加的 n-选择机制。

对于 $\mathcal{G}_n$，即出度无界的情况，实际上可以稍微改进这一结果，从而保证 1-最小可加性，同时最多只选择 $n-1$ 个顶点。这一改进通过一种更复杂的带有亚军的非对称多数制实现，我们称之为带有亚军和关键顶点的非对称多数制。我们将正式描述这一机制

算法3： 带有亚军和关键顶点的非对称多数制 $\mathcal{P}^{\mathrm{P}}(\mathrm{G})$

输入： 有向图 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$
输出： 选定顶点的集合 $S\subseteq V$，其中包含 $|S|\leq n-1$
令 $S\leftarrow\emptyset$;
对于 $u\in\mathcal{P}(G)$，**执行**
  如果 对于每个 $v\in\mathcal{P}(G)\setminus\{u\}$，都存在 $G_{uv}\in\mathcal{N}_u(G)$，使得 $v\notin\mathcal{P}(G_{uv})$ **则**
    $S\leftarrow S\cup\{u\}$
  end
end
返回 S

见算法3，并将其在图 G 上的输出记为 $\mathcal{P}^P(G)$。给定一个图 $G=(V,E)$，如果存在一个图 $G_{uv}\in\mathcal{N}_u(G)$，使得$v\notin\mathcal{P}(G_{uv})$，那么称顶点 $u\in\mathcal{P}(G)$对 $v\in\mathcal{P}(G)$是关键的；也就是说，可以通过改变 u 的出边，使得 v 不再被带有亚军的非对称多数制选中。随后，带有亚军和关键顶点的非对称多数制会选出 $\mathcal{P}(G)$中对 $\mathcal{P}(G)$内每个其他顶点都关键的所有顶点。事实证明，该机制继承了公正性和 1-最小可加性，并且绝不会选中所有顶点。

定理2。 对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $k\in\{n-1,n\}$，都存在一个在 $\mathcal{G}_n$上的无偏且 1-最小值可加k-选择机制。

证明。 我们证明，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，带有亚军和关键顶点的非对称多数制在 $\mathcal{G}_n$ 上是无偏且 1-最小可加的；并且对于每个 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$，它至多选择$n-1$ 个顶点。令 $n\in\mathbb{N}$ 为任意一个值。

为说明该机制是无偏的，令 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$、 $u\in\mathcal{P}^P(G)$，以及 $G'=(V,E')\in\mathcal{N}_u(G)$。下面我们证明 $u\in\mathcal{P}^P(G')$；由于图 G 和 G' 是任意选取的，它们的角色可以互换，因此足以得出该机制是无偏的结论。我们首先注意到 $u\in\mathcal{P}(G)$，因为 $\mathcal{P}^P(G)\subseteq\mathcal{P}(G)$，所以定理 1 中关于带有亚军的非对称多数制的公正性证明意味着 $u\in\mathcal{P}(G')$。如果 $\mathcal{P}(G')=\{u\}$，那么该机制的条件对这个顶点显然成立，因此 $u\in\mathcal{P}^P(G')$，结论得证。否则，令 $v\in\mathcal{P}(G')\setminus\{u\}$ 为带有亚军的非对称多数制所选择的一个任意顶点，且该顶点不是 u。由于 $u\in\mathcal{P}^P(G)$，我们有以下两种情况：(a) $v\notin\mathcal{P}(G)$；或者 (b) $v\in\mathcal{P}(G)$，并且存在 $G_{uv}=(V,E_{uv})\in\mathcal{N}_u(G)$，使得 $v\notin\mathcal{P}(G_{uv})$。若 (a) 成立，取 $G'_{uv}=G$；根据假设 $G'\in\mathcal{N}_u(G)$，它属于 $\mathcal{N}_u(G')$，于是有 $v\notin\mathcal{P}(G'_{uv})$。若 (b) 成立，取 $G'_{uv}=G_{uv}$；由于 $\mathcal{N}_u(G')=\mathcal{N}_u(G)$，它属于 $\mathcal{N}_u(G')$，于是有$v\notin\mathcal{P}(G'_{uv})$。无论哪种情况，我们都可以得出结论：存在$G'_{uv}\in\mathcal{N}_u(G')$，使得 $v\notin\mathcal{P}(G'_{uv})$。由于这一论证对每个 $v\in\mathcal{P}(G')\setminus\{u\}$均成立，我们得出 $u\in\mathcal{P}^P(G')$。

要证明该机制是 1-最小可加的，只需证明它总是会选取一个顶点，因为对于每个 $G\in\mathcal{G}$，它都会从 $\mathcal{P}(G)$ 中选取一个子集；而根据定理 1，我们知道该集合包含入度为 $\{\Delta(G)\ \Delta(G)-1\}$ 的顶点。为此，我们令 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$，并引入一些附加记号。令 $S^i=\{v\in\mathcal{P}(G):\delta^-(v)=\Delta(G)-i\}$，并令 $n^i=|S^i|$ 对于 $i\in\{0,1\}$，记作

$$v_H=\mathrm{argmax}_{v\in\mathcal{P}(G)}\{(\delta^-(v,G),v)\}=\mathrm{top}(G),$$
$$v_L=\mathrm{argmin}_{v\in\mathcal{P}(G)}\{(\delta^-(v,G),v)\}.$$

根据 引理 1，我们知道 $\mathcal{P}(G)=S^0\cup S^1$，并且 $(v_L,\ v)\in E$ 对于每个 $v\in\mathcal{P}(G)\setminus\{v_L\}$，且 $u>v$ 对于每个 $u\in S^1,\ \ v\in S^0$。现在，我们根据 $\mathcal{P}(G)$中的顶点之间的边来区分两种情况。

若对于每个 $v\in\mathcal{P}(G)\setminus\{v_H\}$，都有 $(v_H,v)\in E$，那么我们断言，定义 $G'=(V,E\setminus(\{v_H\}\times V))\in\mathcal{N}_{v_H}(G)$ 后，对于每个 $v\in\mathcal{P}(G)\setminus\{v_H\}$，都有 $v\notin\mathcal{P}(G')$。若此结论成立，显然

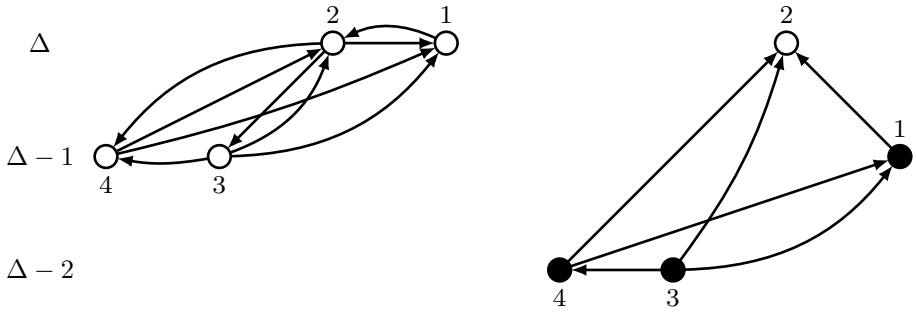

图 2：说明如下事实：如果对每个 $v \in \mathcal{P}(G) \setminus \{v_H\}$ 都有 $(v_H, v) \in E$，那么算法3选出的顶点集合非空。非对称多数制中胜出者与亚军所选出的顶点以白色表示。将左侧的图记为 $G = (V, E)$，其中 $v_H = 2$，并定义$G' = (V, E \setminus (\{2\} \times V)) \in \mathcal{N}_2(G)$，我们有 $\{1, 3, 4\} \cap \mathcal{P}(G') = \emptyset$，因此 $2 \in \mathcal{P}^P(G)$。

$v_H \in \mathcal{P}^P(G)$，因此 $\mathcal{P}^P(G) \neq \emptyset$。现在证明这一断言。首先，注意到 $v_H \in \mathcal{P}(G')$，因为 $v_H = \mathsf{top}(G')$，且引理 1 保证 $\mathsf{top}(G') \in \mathcal{P}(G')$。这是因为，对于每个 $v \in V \setminus \{v_H\}$，都有 $\delta^-(v_H, G') = \delta^-(v_H, G)$，且 $\delta^-(v, G') \leq \delta^-(v, G)$，再结合 $v_H = \mathsf{top}(G)$。此外，对于每个 $v \in S^0 \setminus \{v_H\}$，都有 $\delta^-(v, G') = \delta^-(v, G) - 1 = \delta^-(v_H, G') - 1 = \Delta(G') - 1$ 和 $v < v_H$，因此 v 不满足引理 1 中的条件 (b)，从而 $v \notin \mathcal{P}(G')$。类似地，对于每个 $v \in S^1$，都有 $\delta^-(v, G') = \delta^-(v, G) - 1 = \delta^-(v_H, G') - 2 = \Delta(G') - 2$，因此 v 也不满足引理 1 中的条件 (b)，从而 $v \notin \mathcal{P}(G')$。由此可得出这一断言，并且在此情形下 $\mathcal{P}^P(G)$ 非空。图 2 展示了这一论证。

现在考虑存在一个顶点 $\bar{v} \in \mathcal{P}(G)$ 满足 $(v_H, \bar{v}) \notin E$ 的情形。我们声称，定义 $G' = (V, (E \setminus (\{v_L \times V\})) \cup (v_L, v_H)) \in \mathcal{N}_{v_L}(G)$ 后，对每个 $v \in \mathcal{P}(G) \setminus \{v_L, v_H\}$，都有 $v \notin \mathcal{P}(G')$；而定义 $G'' = (V, E \setminus (v_L, v_H)) \in \mathcal{N}_{v_L}(G)$ 后，则有$v_H \notin \mathcal{P}(G'')$。如果这是真的，那么 $v_L \in \mathcal{P}^P(G)$ 且 $\mathcal{P}^P(G) \neq \emptyset$。现在证明这一断言。首先，注意到由于与之前相同的原因，$v_H \in \mathcal{P}(G')$，因为对每个 $v \in V \setminus \{v_H\}$，$\delta^-(v_H, G') = \delta^-(v_H, G)$，且$\delta^-(v, G') \leq \delta^-(v, G)$。此外，对每个 $v \in S^0 \setminus \{v_H\}$，都有$\delta^-(v, G') = \delta^-(v, G) - 1 = \delta^-(v_H, G') - 1 = \Delta(G') - 1$和 $v < v_H$，因此引理 1 中的条件 (b) 对 v 不成立，从而 $v \notin \mathcal{P}(G')$。类似地，对每个 $v \in S^1 \setminus \{v_L\}$，都有$\delta^-(v, G') = \delta^-(v, G) - 1 = \delta^-(v_H, G') - 2 = \Delta(G') - 2$，因此引理 1 中的条件 (b) 对 v 不成立，从而 $v \notin \mathcal{P}(G')$。由此可得出关于 G' 的断言。在 G'' 的情形下，我们可以写出以下不等式链，

$$(\delta^-(\bar{v}, G''), \bar{v}) = (\delta^-(\bar{v}, G), \bar{v}) > (\delta^-(v_H, G) - 1, v_H) = (\delta^-(v_H, G''), v_H),$$

等式成立是因为 G'' 的定义，而不等式则依据 (b)中的条件，该条件见 引理 1，因为 $\bar{v} \in \mathcal{P}(G)$。由于 $(v_H, \bar{v}) \notin E$，根据 (a) 中的条件以及引理 1 可得 $v_H \notin \mathcal{P}(G'')$，因此关于 G'' 的论断得证。该论证如图3所示。

最后，我们证明该机制至多选择 $n - 1$ 个顶点。设 $G = (V, E) \in \mathcal{G}_n$。由于 $\mathcal{P}^P(G) \subseteq \mathcal{P}(G)$，若 $|\mathcal{P}(G)| \leq n - 1$，则结论显然成立。因此，以下假设 $|\mathcal{P}(G)| = n$。特别地，引理 1 表明，对每个 $v \in V \setminus \{v_H\}$，都有 $(v, v_H) \in E$，因此$\Delta(G) = n - 1$，且对每个 $v \in V$，都有 $\delta^-(v) \geq n - 2$。若 $S^1 = \emptyset$，则对每个$v \in V$，都有 $\delta^-(v) = n - 1$，即 G 是完全图。此时，$v_H = n$，并且我们声称，对每个 $v \in V \setminus \{n\}$，都有 $v \notin \mathcal{P}^P(G)$，因此 $|\mathcal{P}^P(G)| \leq 1$。这是因为，对每个 $v \in V \setminus \{n\}$ 以及每个 $G' = (V, E') \in \mathcal{N}_v(G)$，都有 $n \in \mathcal{P}(G')$。为证明这一点，注意到对每个 $v \in V \setminus \{n\}$，都有 $(n, v) \in E'$；$\delta^-(n, G') \geq n - 2 = \Delta(G') - 1$，并且对每个 $v \in V \setminus \{n\}$，都有 $n > v$，因此引理 1 保证 $n \in \mathcal{P}(G')$。若 $S_1 \neq \emptyset$，则至少存在一个出度小于等于 $n - 1$ 的顶点。

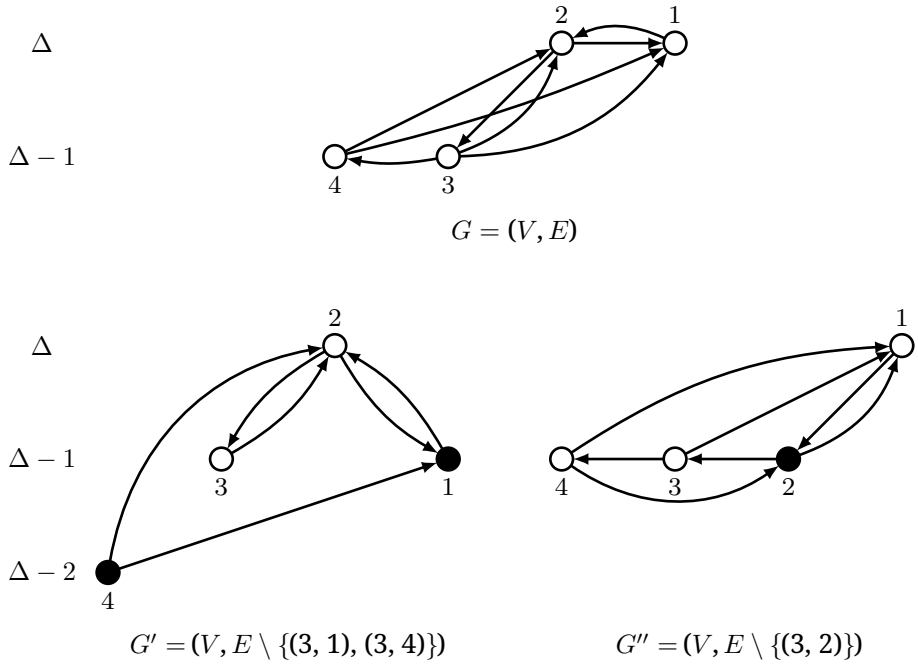

图3：说明了这样一个事实：若对于某个 $\bar{v} \in \mathcal{P}(G) \setminus \{v_H\}$，$(v_H, \bar{v}) \notin E$，则算法3选出的顶点集合非空。由非对称多数制（含亚军）选出的顶点以白色绘出。将顶部的图记为 $G = (V, E)$，其中 $v_H = 2$, $v_L = 3$ 和 $\bar{v} = 4$，并定义 $G' = (V, E \setminus \{(3, 1), (3, 4)\}) \in \mathcal{N}_3(G)$，则有 $\{1, 4\} \cap \mathcal{P}(G') = \emptyset$；而定义 $G'' = (V, (E \setminus \{(3, 2)\}) \in \mathcal{N}_3(G)$，则有 $2 \notin \mathcal{P}(G'')$。由此得出 $3 \in \mathcal{P}^P(G)$。

设有一个出度小于等于 $n-2$ 的顶点。令 u 为任意一个满足 $\delta^+(u) \leq n-2$ 的顶点，并令 $\bar{v} \in S_1$ 为满足 $(u, \bar{v}) \notin E$ 的索引最大的顶点，即 $\bar{v} = \max\{V \setminus N^+(u)\}$。由于 $u \in \mathcal{P}^P(G)$，存在 $G' = (V, E') \in \mathcal{N}_u(G)$，使得 $\bar{v} \notin \mathcal{P}(G')$。由引理 1 可知，这意味着存在 $\bar{w} \in V$，使得以下两种情况之一成立：(a) $(\delta^-(\bar{w}, G')\ w) > (\delta^-(\bar{v}, G')\ \bar{v})$，且 $(\bar{v}, \bar{w}) \notin E'$；或 (b) $\delta^-(\bar{w}, G') > \delta^-(\bar{v}, G')$，且 $\bar{w} > \bar{v}$。由于 $\bar{v} \in \mathcal{P}(G)$，根据同一引理可知，若 (a) 成立，则 $(\delta^-(\bar{w}, G)\ w) < (\delta^-(\bar{v}, G)\ \bar{v})$，因为存在 $\bar{w} \notin N^+(\bar{v}, G) = N^+(\bar{v}, G')$；同理，若 (b) 成立，则 $\delta^-(\bar{w}, G) \leq \delta^-(\bar{v}, G)$，因为存在 $\bar{w} > \bar{v}$。无论哪种情况，由于 $\delta^-(\bar{v}, G) \leq \delta^-(\bar{v}, G')$，我们得出 $\delta^-(\bar{w}, G') > \delta^-(\bar{w}, G)$，因此 $(u, \bar{w}) \notin E$。若 (a) 成立，就会产生矛盾，因为此时有 $\{u, \bar{v}\} \cap N^-(\bar{w}, G) = \emptyset$，从而有$\delta^-(\bar{w}, G) \leq n-3$。若 (b) 成立，也会产生矛盾，因为此时有$\bar{w} \in V \setminus N^+(u, G)$ 且 $\bar{w} > \bar{v}$，但我们选取的 $\bar{v}$ 是该集合中的最大值。

□

4 不可能性结果

当我们证明了只要满足 $k \geq d+1$，就存在一个在$\mathcal{G}(d)$上的无偏且 1-最小可加的 k-选择机制时，我们声称这个结果在加性保证无法改进的意义上是最优的。我们将把这一主张作为一个更一般结果的推论来证明：公正性与仅选择最大入度顶点的要求不相容。

对于选择数量不固定的机制而言，只选择最大入度的顶点固然是一个自然目标，但这类机制还存在其他自然目标，例如使选定顶点的中位数入度或平均入度最大化。对于这两个目标，上一节讨论的机制立即给出了上界：如果一个 k-选择机制总是选出一个最大入度的顶点，并且是 α-最小值可加的

那么显然它是 α-中位数可加的，也是 $\left(\frac{k-1}{k}\alpha\right)$-均值可加的；定理 1因此蕴含了一个1-中位数可加且 $\frac{k-1}{k}$ -均值可加的 k-选择机制在 $\mathcal{G}(d)$存在，只要$k \geq d+1$。若要改进1-中位数可加性，只要同时选出更多最大入度的顶点，那么选出入度较低的顶点也是可以接受的。若要改进 $\frac{k-1}{k}$ -均值可加性，只要在可能的情况下选出多个最大入度的顶点；否则，只需在 k 个入度等于最大入度减一的顶点中选出亚线性数量。以下结果表明，这样的改进是不可能的。

定理 3. 设 $n \in \mathbb{N}$、 $n \geq 3$、 $k \in [n]$和 $d \in [n-1]$。设 f 是一个无偏的 k-选择机制。若 f 在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上是 α_1-中位数可加的，则 $\alpha_1 \geq 1/2(1+\mathbb{1}(d \geq 3))$。若 f 在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上是 α_2-均值可加的，则 $\alpha_2 \geq \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor / \left(\left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor + 1 \right)$。

证明。设 n、 k和 d 如定理陈述所述。下文假设存在一个无偏的 k-选择机制 f，它要么在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上是 α_1-中位数可加的，且满足$\alpha_1 < 1/2(1+\mathbb{1}(d \geq 3))$；要么在 $\mathcal{G}_n(d)$ 上是 α_2-均值可加的，且满足 $\alpha_2 < \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor / \left(\left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor + 1 \right)$。

我们首先证明 $d = 1$ 情形下的结果。考虑图 $G = (V, E) \in \mathcal{G}_n(1)$，其边为 $E = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，由一个 3-环和 $n-3$ 个孤立顶点组成。对于 $v \in \{1,2,3\}$，我们还考虑图 $G_v = (V, E_v)$，其中 v通过将其出边改为指向环中的前一个顶点，偏离了 3-环，即

$$E_1 = \{(1,3),(2,3),(3,1)\}, E_2 = \{(1,2),(2,1),(3,1)\}, E_3 = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}.$$

由于 f 是 α_1-中位数可加的，且具有 $\alpha_1 < 1/2$ ，或者是 α_2-均值可加的，且具有 $\alpha_2 < 1/2$，我们有 $f(G_1) = \{3\}$、 $f(G_2) = \{1\}$，以及 $f(G_3) = \{2\}$。特别地，对于 $v \in \{1,2,3\}$，有 $v \notin f(G_v)$。由于对于每个 $v \in \{1,2,3\}$，都有 $E_v \setminus (\{v\} \times V) = E \setminus (\{v\} \times V)$，由公正性可知 $v \notin f(G)$，因此 $f(G) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$。这意味着 $f(G)$ 中顶点的中位入度和平均入度均为 0，这与该机制的加性保证相矛盾，因为 $\Delta(G) = 1$。

接下来，我们假设 $d \geq 2$。我们记 $D = [d+1]$，并在下文考虑两个具有 n 个顶点的图族：对每个 $v \in D$，有 K_v；对每个 u，有 K_{uv}， $v \in D$， $u \neq v$。它们由一个包含 D 的完全子图构造而成：在 K_v的情形下，删去 v的出边；在 K_{uv}的情形下，删去 u 和 v的出边。所有其他顶点都保持孤立。形式化地，取 $V = [n]$，我们定义

$$K_v = (V, (D \setminus \{v\}) \times D) \text{ for every } v \in D,$$
$$K_{uv} = (V, (D \setminus \{u,v\}) \times D) \text{ for every } u, v \in D \text{ with } u \neq v.$$

如果存在 $v \in D$，使得 $v \notin f(K_v)$，那么

$$\text{median}\left(\{\delta^-(w, K_v)\}_{w \in f(K_v)}\right) \leq d-1 = \Delta(K_v) - 1,$$
$$\text{mean}\left(\{\delta^-(w, K_v)\}_{w \in f(K_v)}\right) \leq d-1 = \Delta(K_v) - 1,$$

这就产生了矛盾，因此结论立即成立。因此，在下文中，我们假设对每个 $v \in D$，都有 $v \in f(K_v)$。我们声称，对每个 $v \in D$,

$$|\{u \in D \setminus \{v\} : u \in f(K_v)\}| \geq \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor.$$

让我们看看为何在该命题成立时结论随之成立。若确实如此， f 会在 K_v 中选出一个最大入度为 d 的顶点，并且至少有 $\left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$ 个入度为 $d-1$的顶点。这就同时得到

$$\text{median}\left(\{\delta^-(w, K_v)\}_{w \in f(K_v)}\right) \leq \begin{cases} d - \frac{1}{2} & \text{if } d = 2 \\ d-1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\operatorname{mean}\left(\{\delta^-(w,K_v)\}_{w\in f(K_v)}\right) \le \frac{d+(d-1)\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor+1} = d - \frac{\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor+1},$$

这与 $\Delta(K_v)=d$矛盾。

现在我们证明该断言。假设对于每个 $v\in D$，我们都有 $v\in f(K_v)$，并且

$$|\{u\in D\setminus\{v\} : u\in f(K_v)\}| < \left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor. \tag{2}$$

设 $v\in D$ 和 $u\in D\setminus\{v\}$，使得 $u\notin f(K_v)$。注意到

$$((D\setminus\{v\})\times D)\setminus(\{u\}\times V) = ((D\setminus\{u,v\})\times D)\setminus(\{u\}\times V),$$

根据公正性，我们得到 $u\notin f(K_{uv})$。由假设可知，α_1 或 α_2 的界满足 f，因此该机制必须在此图中选取一个具有最大入度的顶点；否则，选定集合的中位数和均值都至多为 $\Delta(K_{uv})-1$。由于对于每个 $w\notin\{u,v\}$，都有 $\delta^-(w)<\Delta(K_{uv})$，因此 $v\in f(K_{uv})$ 成立。再次利用公正性，我们得出 $v\in f(K_u)$。我们已经证明了以下性质：

$$\text{For every } u,v\in D : u\notin f(K_v) \Longrightarrow v\in f(K_u). \tag{3}$$

现在考虑图 $H=(D,\ F)$，其中对于每个 $u,\ v\in D$满足 $u\neq v,\ (u,\ v)\in F$当且仅当 $u\notin f(K_v)$。性质 2）意味着

$$\delta^-(v,H) > d-\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor \iff \delta^-(v,H)\ge d+1-\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor$$

对于每个 $v\in D$。特别地，必须存在一个顶点 $v^*\in D$，使得 $\delta^+(v^*,H)\ge d+1-\lfloor(d+1)/$ (2)$\rfloor$ 也成立。对于这个顶点，我们有

$$\delta^+(v^*,H)+\delta^-(v^*,H)\ge 2\left(d+1-\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor\right)\ge d+1.$$

由于 H具有 $d+1$个顶点，这意味着存在 $w^*\in D$，使得 $\{(v^*,\ w^*)、(w^*,\ v^*)\}\subset F$，即 $v^*\notin f(K_{w^*})$和 $w^*\notin f(K_{v^*})$。这与（3）矛盾，因此我们得出该断言的证明以及定理的证明。□

图 4 展示了 定理 3 在 $n=3$ 时的情形，图 5 展示了 在 $n=4$ 时的情形。

任意数字集合的中位数都是其最小值的上界。因此，如果不存在在 $\mathcal{G}'\subseteq\mathcal{G}$ 上对 $\alpha<\bar{\alpha}$ 具有 α-中位数可加性的无偏机制，那么也不存在在 $\mathcal{G}'$ 上对 $\alpha<\lceil\bar{\alpha}\rceil$具有 α-最小值可加性的无偏机制。由此我们得到以下不可能性结果，这一结果我们此前已经提出过。

推论 2. 设 $n\in\mathbb{N},\ n\ge 3$，且 $k\in[n]$。设 f 是定义在 $\mathcal{G}_n$ 上的一个 α-最小值可加无偏 k-选择机制。则 $\alpha\ge 1$。

不可能性结果表明，对于 $k\ge d+1$，第 3 节中的机制在最小值和中位数目标下已是最优，少数边界情形除外。当 $n=2$时，当且仅当两个顶点各自都有入边时才选择该顶点，这种做法是无偏的，并且实现了0-最小值可加性和0-中位数可加性。当 $n=3$时，可以通过无偏的方式选出至少一个入度最大的顶点，且至多选出一个入度等于最大入度减一的顶点，从而保证 1/2-中位数可加性。对于均值目标，在附加假设 第 3 节中的机制在渐近意义下是最优的，即 $k=O(d)$。

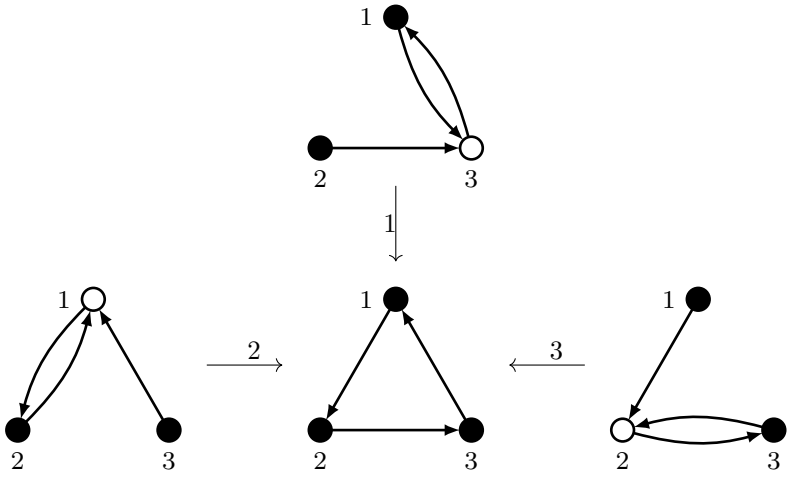

图 4：反例：不存在一种公正的3-选择机制，使其在 $\mathcal{G}_3$ for $\alpha < 1/2$ 上满足 α-中位数可加性或 α-均值可加性。白色顶点必须被选中，黑色顶点不能被选中。对于顶部、左侧和右侧的图，根据针对 $\alpha < 1/2$ 的 α-中位数可加性或 α-均值可加性，必须如此。从一个图指向另一个图、标有 v 的箭头表示，可通过改变顶点 v 的出边，从一个图得到另一个图；根据公正性，该顶点要么在两个图中都被选中，要么在两个图中都不被选中。因此，中心图中没有顶点被选中，这与所声称的加性保证矛盾。

值得指出的是，不可能性结果的证明使用了这样的图：其中一些顶点，特别是入度最大的顶点，没有任何出边。不过，只要 $n \geq 4$ 和 $d \geq 3$，这一不可能性自然也适用于不会出现这种情况的情形；这对应于不允许弃权这一具有实际意义的情形。为此，只需定义 $D = [d]$，添加一个新顶点，使其向 D中的每个顶点都有出边，并从 D 中没有任何出边的顶点接收入边，然后构造一个包含 $V \setminus D$中各顶点的环。

5 在数量与质量之间权衡

到目前为止，我们针对最大出度 d 小于可选顶点最大数量 k 的情形，给出了公正选择机制，并证明这些机制在此类情形下提供了尽可能好的加性保证。现在我们将考虑 $d \geq k$ 的情形；在这种情况下，带有亚军的非对称多数制会选出过多顶点，因此不能直接使用。由此我们得到以下结果。

定理 4。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{2, \ldots, n\}$，都存在一个在 $\mathcal{G}_n$上的无偏且$(\lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor + 1)$-最小值可加 k-选择机制。

该结果是通过对带有亚军的非对称多数制进行一种变体得到的，其中在运行机制之前会删除一些边。原则上，删除一定数量的边可能会以同等幅度影响加性保证，前提是所有被删除的边恰好都指向同一个顶点。通过研究机制所选顶点集合的结构，我们将能够改为删除指向不同顶点的边，从而控制对加性保证的负面影响。

我们将这种修改后的机制称为带亚军和边删除的非对称相对多数规则，其形式化描述见算法 4。该机制会删除从某个顶点指向平局裁决顺序中排在该顶点之前的$\lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor$顶点的所有边，并对所得图应用非对称

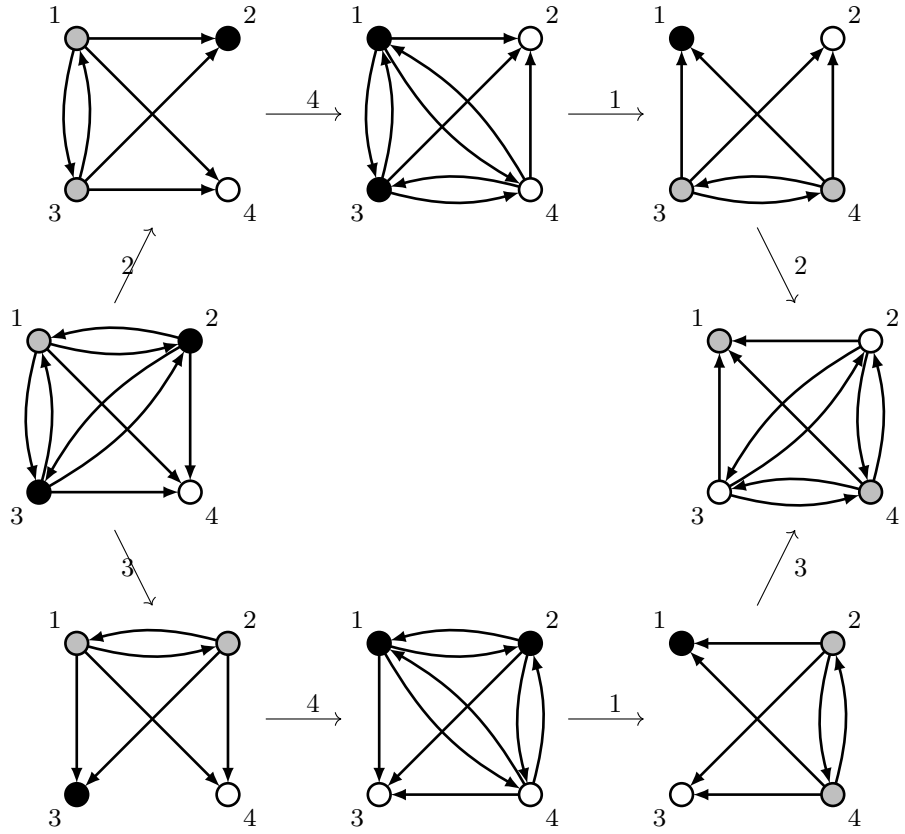

图 5：关于不存在无偏4选择机制的反例，该机制在 $\mathcal{G}_4$(3) 上满足 α_1-中位数可加性，或在 $\mathcal{G}_4$ 上满足 $\alpha_1 < 1$ 或 α_2- 均值可加性，适用于 $\alpha_2 < 2/3$。白色顶点必须被选中，黑色顶点不能被选中，灰色顶点则可能被选中，也可能不被选中。对于左侧的图，这可由 α_1-中位数可加性（适用于 $\alpha_1 < 1$ ）或 α_2-均值可加性（适用于 $\alpha_2 < 2/3$）推出：在这些假设下，入度为 2 的顶点中至多有一个能被选中；不失一般性，我们可以假设该顶点是顶点 1。对于其他图，则可由公正性推出；对于右侧的图，这会与所声称的加性保证相矛盾。

含亚军的复数制。下面的引理表明，若没有这类边，最大选定顶点数会减少至 k。

引理 2. 设 $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{2, \dots, n\}$ 和 $r \in \mathbb{N}$ 满足 $r \geq \lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor$。设 $G = (V, E) \in \mathcal{G}_n$, 使得对于每个 $u \in \{1, \dots, n-1\}$ 以及每个 $v \in \{u+1, \dots, \min\{u+r, n\}\}$, $(u, v) \notin E$。那么， $|\mathcal{P}(G)| \leq k$。

证明。 与 定理2的证明中一样，我们令 $S^i = \{v \in \mathcal{P}(G) : \delta^-(v) = \Delta(G) - i\}$ ，并令 $n^i = |S^i|$ 对 $i \in \{0, 1\}$成立，现在将其元素按递增顺序记为 v^i_j 对 $j \in [n^i]$，即

$$S^i = \{v^i_j\}_{j=1}^{n^i} \text{ with } v^i_1 < v^i_2 \cdots < v^i_{n^i} \text{ for each } i \in \{0, 1\}.$$

由 引理 1可知 $\mathcal{P}(G) = S^0 \cup S^1$，对于 $i \in \{0, 1\}$，有 $(v^i_j,\ v^i_k) \in E$对每个j，k且 $j < k$，并且 $v^1_1 > v^0_{n^0}$。由此可为 $i \in \{0, 1\}$，定义

$$\bar{S}^i = \{v \in V \setminus S_i : v^i_1 < v < v^i_{n^i}\}, \quad \bar{n}^i = |\bar{S}^i|,$$

使得 $\bar{S}^0 \cap \bar{S}^1 = \emptyset$。

固定 $i \in \{0, 1\}$，并假设 $n^i \geq 2$。结合以下两点：对于每个j，$(v^i_j, v^i_k) \in E$ k，且 $j < k$；以及对于每个 $u \in \{1, \dots, n-1\}$和 $v \in \{u+1, \dots, \min\{u+r, n\}\}$，$(u, v) \notin$

算法 4： 带亚军和边删除的非对称相对多数规则 $\mathcal{P}^{\mathrm{D}}(\mathrm{G})$

输入： 有向图 $G=(V,E)\in\mathcal{G}_n$, $k\in\{2,\dots,n\}$
输出： 选定顶点的集合 $S\subseteq V$，满足 $|S|\le k$
令 $r=\lfloor (n-2)/(k-1)\rfloor$；　// 要删除的出边数量
令 $R=\bigcup_{u=1}^{n-1}\bigcup_{v=u+1}^{\min\{u+r,n\}}\{(u,v)\}$；　// 要删除的边
Let $\bar{G}=(V,E\setminus R)$;
返回 $\mathcal{P}(\quad \bar{G})$

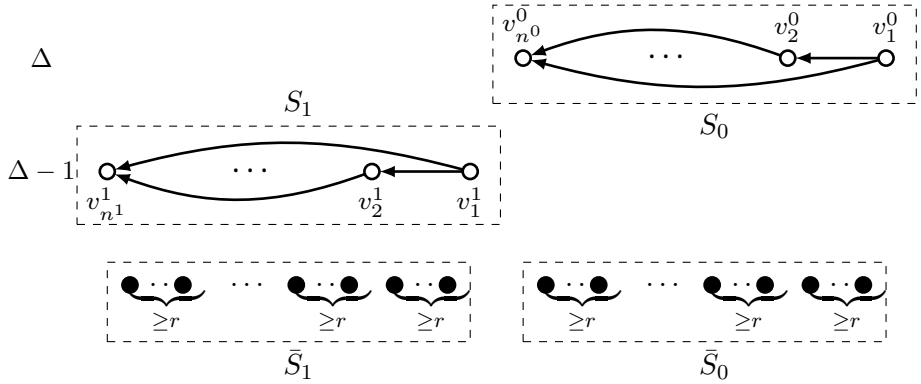

图 6：引理 2 的示意图。从某个顶点到其左侧任意 r 顶点都没有边，这意味着对于 S_0 或 S_1 中除最左侧顶点外的每个顶点，至少存在 r 个不属于这些集合的顶点。这些顶点并未按其入度排列；为清晰起见，省略了从 S_1 中的顶点到 S_0 中每个顶点的边。

E，我们得到，对于每个 $j\in[n^i-1]$，都有 $v^i_{j+1}-v^i_j\ge r+1$。对 j 求和可得$v^i_{n^i}-v^i_1\ge (n^i-1)(r+1)$，因此

$$\bar{n}^i=v^i_{n^i}-v^i_1+1-n^i\ge (n^i-1)(r+1)+1-n^i=(n^i-1)r,$$

其中，第一个等号来自集合 $\bar{S}^i$ 的定义。这意味着 $n^i\le 1+\bar{n}^i/r$。现在可以放宽假设 $n^i\ge 2$，因为当 $n^i=1$ 时，我们有 $\bar{n}^i=0$，且不等式同样成立，因此可写出以下不等式链：

$$|\mathcal{P}(G)|=n^0+n^1\le 2+\frac{\bar{n}^0+\bar{n}^1}{r}\le 2+\frac{n-|\mathcal{P}(G)|}{r},$$

其中，最后一个不等式来自这样一个事实：所有集合 S^0、S^1、$\bar{S}^0$、$\bar{S}^1$ 互不相交，因此它们的基数之和至多为 n。由此可将选定顶点的数量界定为 $|\mathcal{P}(G)|\le (2r+n)/(r+1)$。

现在假设 $|\mathcal{P}(G)|\ge k+1$。利用前面的界，可得

$$2r+n\ge (k+1)(r+1)\iff r\le\frac{n-k-1}{k-1}=\frac{n-2}{k-1}-1,$$

这与引理陈述中对 r 的下界矛盾。 □

图 6 展示了 引理 2 中的论证和符号。现在我们可以证明定理 4。

定理 *4* 的证明。我们证明算法 4 满足该定理的条件。设$n\in\mathbb{N}$ 且 $k\in\{2,\dots,n\}$。公正性源于算法 2 是无偏的，因此删除给定顶点的出边可能不会影响是否选择

该顶点。形式化地，若 $G = (V, E)$ $v \in V$ 且 $G' = (V, E') \in \mathcal{N}_v(G)$，则将以 G 和 G' 为输入图运行算法 4 所构造的图分别定义为 $\bar{G} = (V, \bar{E})$ 和 $\bar{G}' = (V, \bar{E}')$，我们有

$$\begin{aligned}\bar{E} \setminus (\{v\} \times V) &= (E \setminus (\{v\} \times V)) \setminus \left(\bigcup_{u=1}^{n-1} \bigcup_{w=u+1}^{\min\{u+r,n\}} \{(u,w)\} \right) \\ &= (E' \setminus (\{v\} \times V)) \setminus \left(\bigcup_{u=1}^{n-1} \bigcup_{w=u+1}^{\min\{u+r,n\}} \{(u,w)\} \right) \\ &= \bar{E}' \setminus (\{v\} \times V),\end{aligned}$$

其中我们利用了 $G' \in \mathcal{N}_v(G)$。随后，公正性直接继承自含亚军的复数制的公正性。以下，令 $G = (V, E) \in \mathcal{G}_n$，并按照机制中的定义设定 r 和 G。由于机制的第一步保证，对于每个 $u \in \{1, \dots, n-1\}$ 以及每个 $v \in \{u+1, \dots, \min\{u+r, n\}\}$，$(u, v) \notin E$，引理 2 蕴含 $|\mathcal{P}^D(G)| = |\mathcal{P}(\bar{G})| \leq k$。最后，为了证明加性保证，我们首先注意到，对每个 $v \in V$，$\delta^-(v, G) \leq \delta^-(v, \bar{G}) + r$，因为从 G 中定义 $\bar{G}$ 时，至多删除 $|\{v-r, \dots, v-1\} \cap V| \leq r$ 条 v 的入边。特别地，$\Delta(\bar{G}) \leq \Delta(G) + r$。利用这一观察，并记 $v^* \in \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{P}^D(G)} \{\delta^-(v, G)\}$ 为带亚军和边删除的非对称相对多数规则所选对象中入度最小的任意一个，我们得到

$$\delta^-(v^*, G) \geq \delta^-(v^*, \bar{G}) \geq \Delta(\bar{G}) - 1 \geq \Delta(G) - r - 1,$$

其中，第二个不等式由引理 1 得出，因为 v^* 属于 $\mathcal{P}(G)$。我们得出，该机制是 $(r+1)$-最小值可加的，对 $r = \lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor$。 □

容易看出，前述分析是紧的：考虑一个图 $G = (V, E)$，其中恰好删除了 $r = \lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor$ 条得票最高顶点的入边，并选中了一个入度第二高的顶点 u，使得 $u > \text{top}(G)$，$(u, \text{top}(G)) \in E$，且 $\delta^-(u) = \Delta(G) - r - 1$。然而，我们不知道定理 4 给出的权衡对于任何无偏机制而言是否都是最优的，而最优权衡问题颇为有趣。目前，当 $d \geq k$ 时，$\lfloor (n-2)/(k-1) \rfloor + 1$ 的上界与 1 的下界之间仍存在差距；当可选顶点数 k 较小时，这一差距相对较大。或者，我们也可以询问，为了保证 1-最小可加性，必须选出多少个顶点。目前，这一数量的最佳上界是 $n - 1$。

除了本节所介绍机制的性能问题之外，有时该机制不会选择入度严格高于其他选定顶点的顶点，这一点本身也可能显得不公平。遗憾的是，只要对某个 $\alpha < d$ 强制要求 $d \geq k$ 和 α-最小可加性，这种情况就不可避免；一个由包含 $d+1$ 个顶点的完全子图和 $n-$ 个（$d+1$）孤立顶点组成的图便可说明这一点。对于任何 k-选择机制，完全子图中的一个顶点都不会被选中；而公正性要求我们在删除该顶点的出边，且该顶点是唯一得票最高的顶点时，也不选择它。

致谢 作者从与 David Hannon 的讨论中获益良多。研究工作获得了德国科学基金会项目（编号 431465007）以及英国工程与自然科学研究委员会资助（项目编号 EP/T015187/1）的支持。

参考文献

[1] N. Alon、F. Fischer、A. Procaccia 和 M. Tennenholtz。《我们众人：从提名者中进行策略防操纵的选择》。载于第*13*届理性与知识的理论方面会议论文集，第101–110页，2011年。

[2] H. Aziz、O. Lev、N. Mattei、J. S. Rosenschein 和 T. Walsh。《运用随机化、划分和比例分配进行策略防操纵的同伴选择》。人工智能，275：295–309，2019年。[3] Y. Babichenko、O. Dean 和 M. Tennenholtz。《面向森林的激励相容选择机制》。载于第*21*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第111–131页，2020年。[4] A. Bjelde、F. Fischer 和 M. Klimm。《公正选择与最多两个选项的力量》。*ACM*经济学与计算汇刊，5(4)：1–20，2017年。[5] N. Bousquet、S. Norin 和 A. Vetta。《一种近乎最优的公正选择机制》。载于第*10*届国际网络与互联网经济学会议论文集，第133–146页。Springer，2014年。[6] I. Caragiannis、G. Christodoulou 和 N. Protopapas。《具有加性近似保证的公正选择》。载于第*12*届国际算法博弈论研讨会论文集，第269–283页。Springer，2019年。[7] I. Caragiannis、G. Christodoulou 和 N. Protopapas。《利用先验信息的公正选择》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2102.09002*，2021。[8] J. Cembrano、F. Fischer、D. Hannon 和 M. Klimm。《通过迭代删除实现具有加性保证的公正选择》。*arXiv*预印本 *arXiv:2205.08979*，2022年。[9] G. de Clippel、H. Moulin 和 N. Tideman。《一美元的公正分配》。《经济理论杂志》，139(1)：176–191，2008年。[10] F. Fischer 和 M. Klimm。《最优公正选择》。《*SIAM*计算杂志》，44 (5)：1263–1285，2015年。[11] R. Holzman 和 H. Moulin。《为奖项进行公正提名》。《计量经济学》，81(1)：173–196，2013年。[12] A. Kahng、Y. Kotturi、C. Kulkarni、D. Kurokawa 和 A. D. Procaccia。《对相互排名的狡猾者进行排名》。载于第*32*届*AAAI*人工智能会议论文集，2018。[13] D. Kurokawa、O. Lev、J. Morgenstern 和 A. D. Procaccia。《公正的同行评审》。载于第*24*届国际人工智能联合会议论文集，2015年。[14] A. Mackenzie。《对称性与公正彩票》。《博弈与经济行为》，94：15–28，2015年。[15] A. Mackenzie。《教皇选举会议的公理化分析》。《经济理论》，69：713–743，2020年。[16] N. Mattei、P. Turrini 和 S. Zhydkov。《同伴提名：放宽精确性以提高同伴选择的准确性》。*arXiv*预印本 *arXiv:2004.14939*，2020年。[17] S. Tamura。《颁奖最小公正规则的刻画》。《博弈与经济行为》，95：41–46，2016年。[18] S. Tamura 和 S. Ohseto。《公正提名对应》。《社会选择与福利》，43(1)：47–54，2014年。[19] T. Wąs、T. Rahwan 和 O. Skibski。《随机游走衰减中心性》。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第33卷，第2197–2204页，2019年。

[20] Y. Xu, H. Zhao, X. Shi, J. Zhang 和 N.B. Shah. 关于防策略操纵的会议同行评审。*arXiv* 预印本 *arXiv:1806.06266*，2018。

[21] X. Zhang、Y. Zhang 和 D. Zhao. 面向影响力代理选择的激励相容机制。载于第 *14* 届国际算法博弈论研讨会论文集，第 79–93 页。Springer，2021。