固体推进剂火箭发动机的燃面退移分析

JUAN M. TIZÓN电子邮箱:
jm.tizon@upm.esORCID-ID:
https://orcid.org/0000-0002-8687-6657

马德里理工大学（UPM）航空航天流体力学与推进系、高等航空航天工程技术学院（ETSIAE），西班牙马德里卡德纳尔·西斯内罗斯广场3号，邮编28040

B固体推进剂火箭发动机燃面退移分析.1 1. 摘要.2 2. 引言.2 3. 燃烧前沿运动学.4 31. . 均匀退移速率.10 32. . 圆柱几何形状.12 33. . 非规则几何形状.14 33. .1 14 33 角点与尖点.2 15 4 碰撞.燃面退移分析方法.16 41. . 解析方法.17 41. .1 18 41 简单/唯一几何.2 18 41 简单几何形状组合.3 19 42 基于 CAD 的方法.数值方法.19 42. . 1 19 42 直接表面追踪.2 20 42 最小距离函数 (MDF).3 20 5 曲线与曲面演化理论（基于偏微分方程）.燃面退移解析解.23 51. . 经典星形.24 51. .5 25 52 双推进剂星形构型.双推进剂燃面退移分析.28 6. 燃面退移数值解.32 61. . 时间推进法.33 62. . 结果与讨论.34 62. .7 36 7 误差分析.结论.37 8. 致谢.38 9 38 . 参考文献.

1. 摘要

燃面退移分析是一项几何计算，其正确解可用于获得固体推进剂火箭的推力曲线。传统上，人们使用皮奥贝尔定理（其中引入了一定程度的直觉）作为构建解析和数值算法的依据；不过，也常通过对微分方程进行数值积分来求解，这种方法所得解不存在歧义。本文详细研究燃烧表面的演化过程，据此阐明表面运动学的性质，而无需诉诸启发式考量。据作者所知，尽管这类分析在其他学科中简单且常见，但此前尚未在固体推进剂燃烧过程领域中进行过介绍。对理论进行形式化推导后，可以确定程函方程能够描述这一物理过程，求解该方程是准确描述问题所必需的。接下来，本文回顾了固体推进剂火箭技术发展历程中采用的方法：从早期只能使用解析方法，并至多借助最初的计算器实现自动化，到如今基于偏微分方程数值解来处理复杂问题的现代方法。本文还回顾了围绕解所呈现的某些性质而发展出的其他方法，即基于启发式或现象学基础的方法。回顾结果表明，燃面退移分析中的程函方程求解是在 21 世纪初开展的，从而澄清了这一问题。然而，此后的所有研究都系统地采用了基于 20 世纪 90 年代末提出的水平集方法的技术。但水平集方法适用于更一般、更复杂的问题，将其用于此处并未给问题求解带来新的内容。最后，本文从效率和精度两个角度，给出了若干最重要方法的能力示例，并展示了固体推进剂火箭推进领域中若干值得关注情形下的结果。

2. 引言

固体推进剂火箭发动机是迄今设计出的最简单的高性能推进系统。它由一个装有高能固体组分混合物的结构容器组成，这些组分会以很快的速率发生化学反应。反应产生高温高压气体，气体经喷管高速排出，从而产生相应的反作用力，即推力。固体推进剂点火后，其表面形成燃烧前沿，并逐层逐渐消耗。燃烧几何形状决定了系统的推进响应，因为它直接控制释放的质量。通过恰当地确定初始暴露面积的大小，并预估其变化情况，便可在推进剂的几何设计中预先确定推力的变化能力（设计节流）。

从经济角度来看，固体推进剂火箭发动机因构型简单，且操作、运输和使用过程简便安全，是非常高效的推进系统。从推进性能角度来看，其比冲较为适中，但在许多航天和地面应用中，设计简单、制造成本低的优势足以弥补这一不足。此外，固体推进剂火箭发动机具有很高的冲量密度，因此在空间受限的应用中是理想的系统。为确保有效使用这些系统，并满足其所执行任务的严苛要求，必须采用高保真度的设计与仿真工具。在此

意义上，对发动机推力曲线的预测至关重要。为完成这项任务，必须拥有通用、快速、可靠且准确的工具，用于分析燃烧表面的演变。

计算燃烧表面积随时间的变化，是固体推进剂火箭发动机分析与设计中的关键步骤。对于简单几何形状，可以依据一组简单规则建立启发式方法，相对容易地确定燃烧表面随时间的演变；但只有采用严谨的方法，才能处理实际且复杂的问题：无论初始几何形状如何，或燃烧速率是否恒定。

19世纪20年代末，法国炮兵将军纪尧姆·皮奥贝尔（1793—1871）——一位军事工程师和科学家——提出了一种假说，阐述用于推动弹丸的物质在燃烧后会经历怎样的过程：火药颗粒内部部分的燃烧，只有在覆盖它们的层消耗殆尽后才会发生；火焰在复合物中从一层传播到另一层的速度，对爆炸效果有很大影响（用他自己的话说：“燃烧速度——火药颗粒内部部分的燃烧，只有在覆盖它们的层消耗殆尽后才会发生；火焰在复合物中从一层传播到另一层的速度，对爆炸效果有极大影响。”这段引文出自《关于不同制造工艺的战争能力的回忆录：附1831年和1832年在埃斯凯尔德、1836年和1837年在梅斯对这些火药进行比较试验的摘要》，出版商兼书商 Bachelier，1844年，巴黎。）也就是说，推进剂会发生一种局部表面过程，可以用燃烧前沿来描述：燃烧前沿逐层依次消耗推进剂。如果燃烧速率均匀，各层的厚度便均匀，对表面演变的描述就可简化为几何计算，其中时间变量与前沿推进的深度成正比。

图1展示了推进剂在燃烧中期的几何形状照片。要获得这些图像，必须使发动机熄火（例如，可以突然打开燃烧室，导致压力显著下降，从而使化学反应冻结，停止固体的消耗过程）。初始几何形状为八角星。中间的照片中，尖端已被消耗，燃烧前沿也继续向谷部推进。最后一张照片是在接近燃烧结束时拍摄的，此时燃烧前沿即将到达发动机壳体，不过有些位置会比其他位置更早到达。所有这些特征都直接源于初始几何形状。前述讨论中的许多方面都会显著影响系统性能。具有棱边的几何形状、几何特征（尖端）的完全消耗，以及推进剂消耗不均、未能同时到达壳体，都是决定这一过程效率的指标。

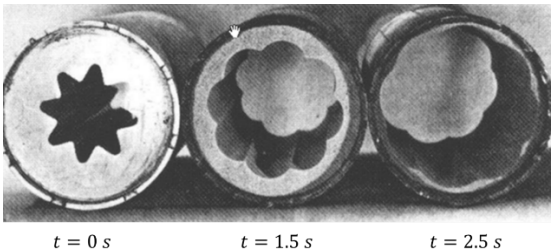

图1：燃烧表面在三个时刻的状态：初始时刻、中间状态，以及燃烧过程即将结束前。

实际计算中，若表面以均匀速率退移（这是一种理想化情况，要求燃烧室压力均匀且不存在侵蚀燃烧效应），则燃烧表面的演化可通过使其沿垂直于自身的方向位移来计算。也就是说，表面上的每个点都沿着垂直于原表面的直线投影到新表面上的一点。燃烧前沿在每一点移动的法向距离称为前向坐标（符号 y）。在燃烧速率恒定的情况下，前向坐标的值与燃烧时间成正比。本文使用“伪时间”一词（符号 τ），指在推进剂几何形状所采用的单位制中，以退移速度等于1进行计算时所用的时间。

因此，人们多次采用具有启发式基础的解析方法来进行燃面退移分析，例如著名的 SPP© 程序[1]，：该程序从燃烧室体积中提取平行六面体、球体或圆锥体等简单几何单元，构成初始曲面，再通过这些单元的组合与演化来再现复杂表面的运动。然而，某些燃烧表面的复杂性，以及燃烧过程可能并非以恒定退移速度进行，这使得建立一种有充分理论依据、能够处理各种情况的通用分析方法成为必要。

应采用离散方法，以通用且自动化的方式评估燃烧表面的演化。尽管解析方法通常快速、直接，但将其应用于复杂几何形状时会变得复杂而繁琐，甚至难以实施。离散方法能够表示任意燃烧表面，并自动、重复地给出结果。相关文献通常关注这些方法能否快速求解问题，也就是计算效率如何。这种关注源于部分方法采用搜索算法，若不采取特别措施，计算速度可能会因此下降；另一些方法则需要对微分方程进行数值积分。如今，这方面的重要性有所降低，因为近年来计算机性能大幅提升，而且在设计任务的总体计算中，燃面退移分析所用方法的影响很小。在当前应用背景下，用于计算不同时刻燃烧表面的算法必须灵活、可靠、稳健且精确。所谓灵活，是指能够对任意表面进行离散化，并处理可变退移速度；所谓有效且稳健，是指能够计算可能出现干涉效应的解，例如焦散和稀疏波。最后，精确性原则上可视为前述特性的结果，但也可通过采用恰当的算法和有充分依据的网格研究来实现。在与发动机内弹道空气动力学求解紧密耦合的问题中，燃烧面积的计算时间可能占总时间中不可忽略的一部分；但对于尺寸相近的计算域，惰性标量的计算时间不应超过对流计算所占的比例。此外，与流场详细求解所需的网格点数相比，燃烧表面的计算不应包含过多网格点。

3. 燃烧前沿运动学

从数学角度看，这个问题是要确定函数 $S(x,y,z)-t=0$ ，它描述推进剂最初占据的计算域 $x,y,z \in D$ 中燃烧表面随时间在各点的变化，其中 $t \geq 0$ 是点火后经过的时间。也可以说，该表达式使我们能够计算燃烧前沿到达点 (x,y,z) 所需的时间 (t)；在该点，自然有 $S(x,y,z)=0$ 定义初始曲面。要正确处理这个问题，必须充分了解各点的燃烧速率，这意味着

需要知道推进剂最初占据的体积中所有点的退移速度，尽管其计算取决于各时刻的几何形状。

皮奥贝尔定理指出，燃烧表面沿法向方向移动，也就是说，表面上的每一点都垂直于表面本身移动；然而，实际发生的情况是这些点会消失。科学家的直觉是正确的，但值得进一步制定一种可在任何情况下都能可靠使用的步骤。为此，设想我们可以用位置向量 $\vec{r}_s(u,v,t)$来表示燃烧表面 $S(x,y,z)=t$ 上的每一点，其中 u和 v 是两个无特定物理量纲的参数，它们的变化定义了该表面。现在假设，在所关注的区域内，这两个参数取值为数量级为 1 的值 $u\sim v\sim 1$，不过有时也可以用弧长对表面进行参数化，届时会明确说明。表面上的所有点同时经历燃烧过程，而由此形成的几何形状取决于推进剂所占据的区域（例如，$S\geq t\ \cap D$）。为了正确分析这个问题，我们将运用惠更斯–菲涅耳原理：波前上的每一点都充当球面波前的源点，而所有这些波前相互作用，形成原始前沿的传播。设燃烧过程只影响一个点 P，并从该点开始，如图2所示；同时假设燃烧速率恒定，数值为 $\dot{r}_p$。经过时间 δt 后，已消耗的材料将是推进剂与以 P 为球心、$\dot{r}_p\delta t$为半径的球体相交区域内的部分。现在，若认为推进剂表面上的所有点都参与燃烧过程，那么每个点都将成为一个球体的球心，该球体内部的推进剂将被消耗。随着时间推移，所有球体内部的推进剂都会被消耗，而燃烧表面将成为推进剂内部这一族球体的包络线。这是一种确定燃烧表面新位置的广义算法，适用于任何形状的燃烧表面，有助于解决各种复杂构型。

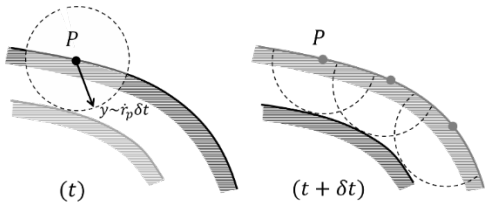

图2：将惠更斯–菲涅耳原理应用于确定燃烧表面运动的示意图。

The 球体族，其球心位于表面上的一点 S ，半径为 $\dot{r}_p\delta t$ i s:

$$(\vec{r}-\vec{r}_s)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=\left(\dot{r}_p\delta t\right)^2 \tag{1}$$

通过消去表面方程相对于参数 u 和 v的导数，并将所得方程组与族本身的方程（1）联立求解，即可得到该族的包络线。一般而言，若假设燃烧速率取决于位置，则求导可得

$$\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial u}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=-\left(\dot{r}_p\delta t\right)^2\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial u} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial v}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=-\left(\dot{r}_p\delta t\right)^2\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial v} \tag{3}$$

代入参数 u 和 v后，方程（1）、（2）和（3）给出了新表面的表达式。需要注意的是，在本推导中，燃烧表面的演化至少必须是光滑的。由于时刻 $t+\delta t$ 的燃烧表面与原表面任意接近，利用 $\delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_s$，根据方程（1）可得 $|\delta\vec{r}|\sim\dot{r}_p\delta t$，其相对于燃烧表面的特征尺寸 $L\gg|\delta\vec{r}|$而言很小。此外，方程（2）和（3）的左侧为 $L|\delta\vec{r}|$阶，而右侧为$|\delta\vec{r}|^2$阶，并且由于 $|\delta\vec{r}|^2\ll L|\delta\vec{r}|$，方程（2）和（3）必须替换为

$$\partial\vec{r}_s/\partial u\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=0 \tag{4}$$

$$\partial\vec{r}_s/\partial v\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=0 \tag{5}$$

因此，需要求解的方程为 (1)、(4) 和 (5)。向量 $\partial\vec{r}_s/\partial u$ 和 $\partial\vec{r}_s/\partial v$ 均为表面 S 的切向量，因此可以得出，$\partial\vec{r}_s/\partial u\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=0$ 和 $\partial\vec{r}_s/\partial v\cdot(\vec{r}-\vec{r}_s)=0$都是过点 P且垂直于切向量的平面方程。

上述结果无法应用于法向方向未定义的燃烧表面，但球族算法不要求表面光滑，因此在分析非规则情况下燃烧表面的演化时非常有用，这些情况下可能存在尖点或角点等几何元素。此外，还可以轻松分析复杂情况，例如推进剂中嵌入导电电缆，或具有不同燃烧速率的双组元推进剂情况。

表面的前进方向与表面垂直 S ，因此平行于梯度向量 ∇S。该向量的模与前沿的前进速度有关，因为根据本节开头选定的表达式，$S(x,y,z)-t=0$，因此 $\delta S=\delta t$ ，或者说，

$$|\nabla S|=1/\dot{r}_p \tag{6}$$

这就是所谓的程函方程（这个词在希腊语中意为“图像”）。该方程是几何光学中的基本方程，因为它可以计算光线的轨迹；光线垂直于具有相同光程的表面，因此，该方程也可用于计算使传播时间最短的轨迹（费马原理）。在此情况下，燃烧速率的倒数起到折射率的作用（即真空中的光速与介质中的光速之比）。该方程不仅用于几何光学，也用于其他波的传播问题，例如电磁学或地震学。方程的解可能呈现称为焦散的几何奇异性（拉丁语“causticus”意为“烧焦的”），也可能呈现众所周知的海市蜃楼现象。

向量 $d\vec{r}$ 的方向为 ∇S ，其模为前向法向坐标 $dy=\dot{r}_p dt$ 的变化量，因此方程（6）可写为

$$\nabla S=\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{d\vec{r}}{dy} \tag{7}$$

对 y 求导，

$$\frac{d}{dy}[\nabla S]=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{d\vec{r}}{dy}\right] \tag{8}$$

根据链式法则，左侧可变换如下，

$$\frac{d}{dy}[\nabla S]=\frac{d\vec{r}}{dy}\cdot\nabla[\nabla S]=\dot{r}_p\nabla S\cdot\nabla[\nabla S]=\frac{1}{2}\dot{r}_p\nabla[\nabla S\cdot\nabla S]=\nabla\left(\frac{1}{\dot{r}_p}\right) \tag{9}$$

因此，方程（8）变为

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{d\vec{r}}{dy}\right] = \nabla\left(\frac{1}{\dot{r}_p}\right) \tag{10}$$

可用于计算表面点轨迹的方程。展开各导数后得到

$$\frac{1}{\dot{r}_p}\frac{d\dot{r}_p}{dy}\frac{d\vec{r}}{dy} - \frac{d^2\vec{r}}{dy^2} = \frac{\nabla\dot{r}_p}{\dot{r}_p} \tag{11}$$

由此可以推导出一些有趣的性质。 首先，如果燃烧速率为常数，那么表面点会沿直线移动，因为 $d^2\vec{r}/dy^2 = 0$的解为

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + y(\nabla S/|\nabla S|) \tag{12}$$

其中， $\vec{r}_0$ 是起始位置，且已知 $\dot{r}_p|\nabla S| = 1$。另一方面，根据构造， $d\vec{r}/dy$ 是沿表面法线方向的向量，而 $d^2\vec{r}/dy^2$ 与之垂直，因此退缩速率梯度可分解为法向分量$\nabla_\perp\dot{r}_p = d\dot{r}_p/dy$ 和平行分量 $\nabla_\parallel\dot{r}_p$。因此，可以将方程 (11) 分别投影到垂直于表面和平行于表面的方向上。在垂直于表面的方向上，结果显而易见（方程 (12)）；而在平行方向上

$$\frac{d^2\vec{r}}{dy^2} = -\frac{\nabla_\parallel\dot{r}_p}{\dot{r}_p} \tag{13}$$

这表示，只有当退移速率存在非零的平行梯度时，轨迹才会转向。当退移速率恒定时，可通过简单平移重建燃烧表面。因此，随着时间推移，人们开发了许多启发式算法来解决这个问题。

本文回顾了一些与几何光学相关、且对火箭发动机性能研究具有参考价值的一般性结果。但关键在于计算各时刻的燃烧面积，因为这使我们能够确定推力曲线。为了评估燃烧面积，需要使用 $\vec{r}_s(u,v,t)$ 对表面进行参数化（注意，此后将忽略下标），并假设 u y v 的取值确定表面上的一个点；只要参数值保持不变，该点就沿着式（11）所描述的轨迹运动。换言之，参数化满足

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \dot{r}_p\vec{n} \tag{14}$$

其中，表面 n 的法线按通常方法计算，

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \tag{15}$$

并且使用 $\vec{r}_u = \partial\vec{r}/\partial u$ 和 $\vec{r}_v = \partial\vec{r}/\partial v$ 来简化符号体系。方程（14）等价于方程（7）；方程（7）是方程（10）的前身，而方程（10）描述了轨迹。不过，在这种情况下，要表示法线，就必须利用所考虑射线附近的 $\vec{r}$ 值重建表面。另一方面，法线的方向取为前沿前进的方向，也就是与 ∇S 相同的方向。

任意时刻的燃烧面积 $A_b(t)$ 计算如下：

$$A_b = \iint_{D(u,v)} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv \tag{16}$$

遍历参数集合 $D(u,v)$，该集合定义了每个时刻的燃烧表面。

因此，面积的时间变化为

$$\frac{d}{dt}(A_b) = \iint_{D(u,v)} \frac{\partial|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\partial t} du\, dv \tag{17}$$

对叉积求导可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \frac{\partial \vec{r}_u}{\partial t} \times \vec{r}_v + \vec{r}_u \times \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \tag{18}$$

由方程 (14) 可得位置向量对参数的时间导数:

$$\frac{\partial \vec{r}_u}{\partial t} = \frac{\partial \dot{r}_p}{\partial u}\vec{n} + \dot{r}_p \vec{n}_u \tag{19}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \frac{\partial \dot{r}_p}{\partial v}\vec{n} + \dot{r}_p \vec{n}_v \tag{20}$$

其中，法向量的导数符号说明为 $n\vec{}_u = \partial n\vec{}/\partial u$ 和 $n\vec{}_v = \partial n\vec{}/\partial v$ 。将表达式 (19) 和 (20) 代入 (18),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \dot{r}_p(\vec{n}_u \times \vec{r}_v - \vec{n}_v \times \vec{r}_u) - \left(\frac{\partial \dot{r}_p}{\partial u}\vec{r}_v - \frac{\partial \dot{r}_p}{\partial v}\vec{r}_u\right) \times \vec{n} \tag{21}$$

注意，方程 (21) 右侧的第一项是一个垂直于切平面（即平行于法向方向）的向量，因为 $n\vec{}_u$ 和 $n\vec{}_v$ 都是位于由 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 定义的切平面内的向量。然而，第二项是一个与前一项垂直、且位于该切平面内的向量。

考虑到 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\vec{n}$，也可以写成:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \frac{\partial|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\partial t}\vec{n} + |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \tag{22}$$

方程（21）和（22）的比较得出:

$$\frac{\partial|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\partial t} = \dot{r}_p(\vec{n}_u \times \vec{r}_v - \vec{n}_v \times \vec{r}_u) \cdot \vec{n} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}\left(\frac{\partial \dot{r}_p}{\partial u}\vec{r}_v - \frac{\partial \dot{r}_p}{\partial v}\vec{r}_u\right) \times \vec{n} \tag{24}$$

表达式（23）描述了燃烧面积元的时间演化，而表达式（24）则确定传播方向是否发生变化。这一结果此前已借助几何光学的典型推演得出。这两个表达式概括了燃烧表面的行为。如果退移速率均匀，则各点法线的方向保持不变，表面点沿固定方向移动。反之，如果表面上各点的退移速率不同，则法向量的方向会发生变化，表面也会产生畸变。

为了进一步分析表达式（23），可以运用一些曲面微分几何的概念。向量 $n\vec{}_u$ 和 $n\vec{}_v$ 位于切平面内，并可表示为向量 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$的线性组合，形式如下

$$\vec{n}_u = a_{11}\vec{r}_u + a_{21}\vec{r}_v \tag{25}$$

$$\vec{n}_v = a_{12}\vec{r}_u + a_{22}\vec{r}_v \tag{26}$$

系数矩阵的计算方式如下:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \tag{27}$$

其中，第一基本形式的系数（对应于内积 $d\vec{r}\cdot d\vec{r}$）为 $E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$、 $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$、 $G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$，并且与面积元 $|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=\sqrt{EG-F^2}$ 相关。第二基本形式的系数（对应于内积 $d\vec{r}\cdot d\vec{n}$）为 $e=-n\vec{}_u\cdot\vec{r}_u=n\vec{}\cdot\vec{r}_{uu}$、 $f=-n\vec{}_v\cdot\vec{r}_u=n\vec{}\cdot\vec{r}_{uv}=n\vec{}\cdot\vec{r}_{vu}=-n\vec{}_u\cdot\vec{r}_v$、 $g=-n\vec{}_v\cdot\vec{r}_v=n\vec{}\cdot\vec{r}_{vv}$，并且与表面的曲率相关。

表面的法曲率是两个基本形式的比值，$\kappa_n=(d\vec{r}\cdot d\vec{n})/(d\vec{r}\cdot d\vec{r})$，它是曲率向量 $\vec{\kappa}=d\vec{t}/ds$ 沿法线方向的分量，其中 $\vec{t}=d\vec{r}/ds$ 是切向量（在此情况下，参数 s 描述了包含在 S 中的任意曲线，且该曲线经过所讨论的点）。法曲率与其定义所在的曲线无关，只取决于切向量的方向。主曲率是给定点处法曲率的最大值和最小值。具体而言，表面的主曲率 κ_1 和 κ_2是矩阵a_{ij}的特征值；平均曲率$H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$是矩阵的迹取反后的一半，$H=-\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})$；而高斯曲率 $K=\kappa_1\kappa_2$与行列式 $K=\det a_{ij}$相等，这对应于表面的内蕴曲率。显然，所有这些值均不取决于所选参数。

将表达式 (25) 和 (26) 代入 (23)，

$$\frac{\partial|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}{\partial t}=\dot{r}_p(a_{11}\vec{r}_u\times\vec{r}_v-a_{22}\vec{r}_v\times\vec{r}_u)\cdot\vec{n} \tag{28}$$

即，

$$\frac{\partial|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}{\partial t}=-\dot{r}_p(\kappa_1+\kappa_2)|\vec{r}_u\times\vec{r}_v| \tag{29}$$

表达式 (29) 可改写为 $d(\delta A)/dy=2H(\delta A)$，它是微分几何中的一个经典结果，用于求曲面族的面积 δA 的变化，并且与许多有趣的课题直接相关，例如绘制常平均曲率曲面或求得最小面积曲面。在当前语境下，它为燃烧面积如何随时间演变提供了直接的几何解释，这种演变取决于局部退移速率以及表面曲率。在对称鞍点处，$\kappa_1=-\kappa_2$，燃烧面积的净变化为零；而在曲面凹性占主导的点处，$\kappa_1+\kappa_2>0$，面积会减小；如果曲面整体呈凸形，$\kappa_1+\kappa_2<0$，燃烧面积则会增加。

同样，方程 (24) 可改写为

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}=-\frac{1}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|^2}\left(\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial u}\vec{r}_v\times(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)-\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial v}\vec{r}_u\times(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\right) \tag{30}$$

这个表达式显然很复杂，但如果对表面采用新的参数化，并令 (u',v') 为弧长，则可验证 $|\vec{r}_{u'}|=|\vec{r}_{v'}|=1$ ；此外，若要求正交性，即 $\vec{r}_{u'}\cdot\vec{r}_{v'}=0$，则可得

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial u'}\vec{r}_{u'}+\frac{\partial\dot{r}_p}{\partial v'}\vec{r}_{v'}\right)\equiv-\nabla_{\parallel}\dot{r}_p \tag{31}$$

此处用到了向量恒等式 $\vec{a}\times b\vec{}\times\vec{c}=b\vec{}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\vec{a}\cdot b\vec{}$。为便于理解该表达式，可以使用 $dy=\dot{r}_p dt$ 并写成

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial y} = -\frac{\nabla_{\parallel} \dot{r}_p}{\dot{r}_p} \tag{32}$$

这与 (13) 相同。表面的法向量会沿着表面切平面内由退移速率梯度标示的方向的反方向改变其方向。方程 (14) 和 (32) 构成一个与方程 (10) 等价的方程组，利用函数 $\dot{r}_p(u, v, t)$ 提供的信息对其进行时间积分，即可得到燃烧表面的演化，。

法向量与点 P 所沿的轨迹相切，因此它随行进长度的变化就是曲率；根据方程（13），该曲率与退移速率相对于其自身的梯度模成正比。假设该量为常数，当前向坐标较小时，该点的轨迹呈现为半径为 $\dot{r}_p$ / ∇ $\dot{r}_p$ ′ 的圆弧。

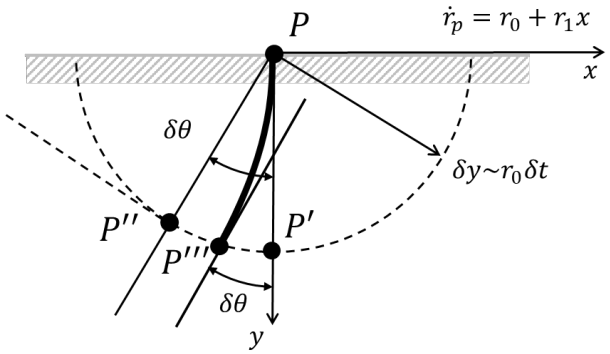

图3：示意图展示了推进剂表面上的退移速率呈线性变化时发生的过程。射线的轨迹为 PP'''，尽管圆包络的切点为 P''。

图3示意了退移速度可变时发生的过程。假设退移速率在推进剂表面上呈线性变化，$\dot{r}_p = r_0 + r_1 x$，并且 $r_1 \delta y \ll r_0$，因此燃烧前沿在时间 δt 内从点 P 移动距离 $\delta y \sim r_0 \delta t$ ；图中以此距离绘制以 P 为圆心的圆，从而确定燃烧表面可能到达的点。直接应用皮奥贝尔原理（等价于精确结果，即表面上的点沿垂直于表面的方向移动），射线将描绘轨迹 PP'，而新的燃烧表面则由整个表面的像点 P' 连成。上述过程未考虑惠更斯原理：表面上的每个点 P 都是半径各不相同的圆的圆心，这些圆以速率 $\delta\theta \sim r_1 \delta t$ 扩大，其中 P'' 是位于不同于 P' 位置的像点。然而，根据前文所述，点 P 的轨迹是一段半径为 r_0/r_1 的圆弧，并转过角度 $\delta\theta \sim r_1 \delta t \sim r_1 \, \delta y \, / r_0$，到达点 P'''。点 P' 和 P'' 并不准确，会低估燃烧表面的位置；由于距离 PP''' 必须更小，这种偏差会有所缓解。

3.1. 均匀退移速率

如果退移速率均匀，则，$\partial \dot{r}_p / \partial u = \partial \dot{r}_p / \partial v = 0$ 并且根据方程（30 ）:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = 0 \tag{33}$$

这表明，尽管传播速度可能是时间的函数，传播方向仍保持不变。在这种情况下，传播问题与时间问题相互解耦，因此本质上纯粹是几何问题。因此，燃烧面积的时间演化满足以下条件：表面的法向方向保持不变，且表面上各点的轨迹为直线。表面的曲率中心位于法线上方的固定位置，因此可以轻松重建表面形状。在推进剂消耗到达某个曲率中心之前，表面会保持其拓扑结构。此时，分析不再有效；若燃烧前沿继续推进，几何形状将遭到不可逆的破坏。

因为 $\dot{r}_p = dy/dt$，可在方程 (14) 中使用前向坐标，而非时间 ：

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{n} \tag{34}$$

它与退移速率无关，因此燃面退移问题可归结为一个几何问题。实际上，可以利用 $y = 0$ 中的初始几何形状（对应于初始时刻 $t = 0$）进行积分，从而得到曲面族 $\vec{r}_s(u, v, y)$。退移速率可以具有任意形式的时间依赖性，因为根据已知曲面族 $\vec{r}_s(u, v, y)$ 和表达式$dy = \dot{r}_p(t)dt$，可以计算其随时间的变化。

根据初始表面的性质，可以采用不同的方法求得其演化。如果所有关注点处的曲率半径均已定义，一种求取表面$\vec{r}_s(u, v, y)$的方法是计算曲率半径的长度 $\rho_{1,2} = 1\ \kappa_{1,}/\ _2$，并利用方程 (34) 描述它们的变化。也就是说，求解 $\partial\rho_{1,2}/\partial y = -1$，该表达式支持一般解

$$\rho_{1,2}(u, v, y) = \rho^{o}_{1,2}(u, v) - y \tag{35}$$

初始表面具有曲率半径分布 $\rho_{1,}{}^{o}{}_{2}(u, v)$。一个直接的结果是，当曲率半径趋于零时（请注意，要使这种情况发生，$t = 0$处的曲率半径必须严格为正，这对应于初始凸几何形状），必然会出现不连续性，因为燃烧表面的所有点都会在曲率中心相撞，导致积分无法继续。这一事件会部分破坏几何形状，因此需要进行特殊分析，因为必须考虑包含非正则点或区域的表面的演化。

请注意，与通常将曲率半径定义为曲率倒数的绝对值不同，此处为使关系式得以推广，曲率半径采用了与曲率本身相同的符号。因此，延伸至法线扫过空间之外的曲率半径被视为负值。使用弧长对表面进行参数化时，将取曲率半径的绝对值，使扫过的角扇区为正。

回顾关系式（29）：

$$\frac{\partial|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \tag{36}$$

其中，时间变量已替换为法坐标。若表面沿主方向以弧长进行参数化，$du'= |\rho_1|d\theta_1$ 和 $dv' = |\rho_2|d\theta_2$（考虑主曲率时，它们是正交归一的，$|\vec{r}_{u'}| = |\vec{r}_{v'}| = 1$），则燃烧面积的变化为：

$$\frac{dA_b}{dy} = -\iint_{D(\theta_{1,2})}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)|\rho_1|\,|\rho_2|d\theta_1 d\theta_2 \tag{37}$$

其中， $D(\theta_{1,2})$ 表示积分变量现在延伸到与先前所用参数化不同的计算域。请注意，我们将用于计算面积的初始曲率半径 $\rho_{1,2}^{o} = \rho_{1,2}^{o}(\theta_1, \theta_2)$ 可以是角度 (θ_1, θ_2) 的函数，因此，除曲率半径必须存在外，燃烧表面不受其他限制。对于零曲率区域，由于本分析中使用曲率的倒数，表达式 (37) 已不再适用，因此必须恢复原始表达式。无需进行复杂推导，以下内容有助于分析固定角扇区的行为；就计算而言，面积可以分解为任意数量的部分。结合 (35) 并经过一些代数运算，可得：

$$\frac{dA_b}{dy} = -\iint_{D(\theta_{1,2})} \left(\operatorname{sgn}(\rho_1)\,|\rho_2^o - y| + \operatorname{sgn}(\rho_2)\,|\rho_1^o - y|\right) d\theta_1 d\theta_2 \tag{38}$$

为分析该表达式，必须根据曲率（或曲率半径）的符号区分不同情况。如果两者均为正，则燃烧面积相对于前向坐标 dA_b/dy 的斜率单调递减；随着两个曲率半径减小，分析一直有效，直到较小的曲率半径减至零。如果两者均为负，则斜率为正，其范围仅受表面本身或燃烧室壳体的限制。如果曲率半径的符号不同，则必须谨慎地进一步分析。若负曲率半径的绝对值小于正曲率半径，则初始斜率为负，并随 y 线性增大，直至两个曲率半径的绝对值相等（此时斜率的变化为零，对应于所考虑角扇区内局部面积的最小值）。此后斜率转为向上变化，直至最初为正的曲率半径减至零，线性分析到此为止。

上述考虑的任何一种情况都会导致斜率线性变化，因此燃烧面积会随前向推进坐标呈二次变化。基于上述考虑，可将表达式（38）重新排列如下：

$$\frac{dA_b}{dy} = \iint_{D(\theta_{1,2})} \operatorname{sgn}(\rho_1\rho_2)\,[2y - (\rho_1^o + \rho_2^o)]\,d\theta_1 d\theta_2 \tag{39}$$

燃烧面积最终为

$$A_b = \iint_{D(\theta_{1,2})} \{\operatorname{sgn}(\rho_1\rho_2)\,[y^2 - (\rho_1^o + \rho_2^o)y] + \rho_1^o\rho_2^o\}\,d\theta_1 d\theta_2 \tag{40}$$

当 $y = \rho_{1,2}^{o}$ 且另外满足 $\rho_{1,2}^{o} > 0$ 时，该项会抵消；这对应于燃烧前沿破坏圆钝尖点时曲率半径为零的情况，正如上一段所述。

3.2. 圆柱几何形状

鉴于火箭推进航空航天飞行器细长比高，常见燃烧表面以纵向尺寸为主导。若飞行器非常细长，且推力需求较高，则燃烧表面必须大于横截面积，而实现这一点的唯一方法是进行纵向钻孔。在这种情况下，燃烧表面呈圆柱形，其沿推进剂药柱方向的特征尺寸（$\sim L$）远大于横截面尺寸（$\sim R$），即 $L \gg R$。局部曲率（纵向和横向）必然满足 $\kappa_1 \sim 1/L$ 和 $\kappa_2 \sim 1/R$，从而得到 $\kappa_1 \ll \kappa_2$，因此方程（29）可通过忽略 κ_1 （与 κ_2 相比）进行简化：

$$\frac{\partial|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\partial t} \approx -\dot{r}_p \kappa_2 |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \tag{41}$$

燃烧面积的时间变化为：

$$\frac{dA_b}{dt} = -\iint_D \dot{r}_p \kappa_2 dz ds \tag{42}$$

其中，表面微分元 $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du\, dv = dzds$由圆柱上的坐标 z 和弧长 s表示。由于横截面的曲率可设为 $k_2 = -d\varphi/ds$，其中 φ 是曲线切线所形成的角度，因此前述表达式变为：

$$\frac{dA_b}{dt} = \iint_D \dot{r}_p dz d\varphi \tag{43}$$

对于面积微分元，可验证：

$$\frac{d}{dy}(\delta A_b) = \delta z \delta \varphi \tag{44}$$

这是一个非常有趣的表达式。首先，它再次表明，如果退移速率均匀，那么该问题完全取决于几何形状。此外，如果圆柱的长度在这一过程中保持不变，那么其影响可简化为一个常数因子。然而，最有趣的性质是，燃烧面积的变化与横截面的形状无关。表达式中已不再出现任何尺寸参数。燃烧面积的变化与切线沿周长移动时扫过的角扇区值成正比；对于长度恒定（L）且退移速率均匀的直圆柱，其结果为：

$$\frac{dA_b}{dy} = 2\pi L \tag{45}$$

该值与截面形状无关，对应于渐增式燃烧过程，与圆形截面圆柱中发生的燃烧过程相同。燃烧面积可立即得到，$A_b = A_b^0 + 2\pi L y$，其中 A_b^0 是$y = 0$的初始面积值。当然，这些结果以横截面规整为前提，即所有点处均定义了曲率。在这些条件下，面积变化满足以下性质：i）与周长的形状无关；ii）其值为常数，等于曲线切线旋转的角度；iii）当曲线法线指向传播方向时，其符号（表征燃烧过程的性质）与曲率的符号相反。因此，周长的表达式与前向坐标呈线性关系，并且该过程是可逆的，即当传播方向反转时，可以唯一地回到初始几何形状。在周长的退行区域中，传播过程会减小曲率半径；当推进深度达到曲率中心时，由于一个凸区域消失，会产生不连续性。此时，周长拓扑发生变化，必须重新进行表面分析，可能需要考虑尖点的演化，后文将对此进行讨论。

细长通道的燃烧过程可以用一维模型充分描述，在这种模型中，通道的几何形状由药柱通道面积的分布决定。考虑每个截面的周长 $P_b = \oint ds$ 以及每个截面的药柱通道面积 $A_p = \oint r ds$。为便于计算，可将任意给定截面处的燃烧面积 A_b定义为从 $z = 0$ 到所考虑截面 z之间暴露出的燃烧面积。也就是说，

$$A_b = \int_0^z P_b d\bar{z} \tag{46}$$

如果截面内的退移速率均匀——这与细长圆柱近似最为一致——则药柱通道面积随时间的变化（再次利用 $r_p = dy/dt = dr/dt$）为

$$\frac{dA_p}{dy} = P_b \tag{47}$$

假设周长是一条正则曲线，则其符合表达式 (45)，因此，

$$\frac{dP_b}{dy} = 2\pi \tag{48}$$

上述表达式构成一个封闭几何系统，借助该系统，可以通过非常简单的积分计算所有几何变量。

3.3. 非规则几何形状

前文得出的结论可以推广到曲率半径可能存在不连续、但周长的切线必须为连续函数的轮廓。在这种情况下，随着燃烧表面的演化，可以为其上的每个点定义一个像点。也就是说，这些点之间可以建立双射关系。以下情况则不成立：i）燃烧表面的切线不连续；ii）两个燃烧表面彼此相交；或 iii）燃烧前沿到达发动机壳体。在第一种和第二种情况下，表面点的轨迹会相交。如果前沿到达发动机壳体或任何其他惰性部件，表面上的点也会不可逆地消失。所有这些情况都是不可逆的，也就是说，如果改变退移速率的符号，所产生的燃烧区域序列并非只是时间倒转后的同一序列，而是截然不同。接下来将分析固体推进剂发动机中常见的一些不规则几何形状。

3.3.1 角点与尖点

当截面的周长出现断点，即斜率不连续时，会产生一种非规则情况，其演化取决于前沿推进的方向。图4描绘了两种不同的情况，其中气相与固相区域互换。在情况（a）中，燃烧过程使几何形状趋于规则，角点的顶点变为源点，成为稀疏波的起点；由于形成的几何形状具有平滑分布的角度（周长的切线连续），周长的增长率如方程（44）所示，为

$$\left.\frac{dP_b}{dy}\right|_{\text{Corner}} = \Delta\varphi \tag{49}$$

周长的增加（也可能减少）与沿曲线移动时切线旋转的角度成正比。不难设想一种算法，用于累积相关的角度变化。

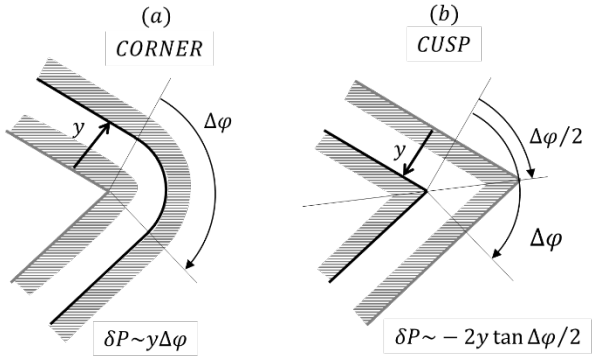

图4：在配置 (a) 中，燃烧前沿从一个角点推进，形成圆柱面（稀疏波）。在配置 (b) 中，燃烧前沿消耗一个尖点，使几何形状消失并产生不连续性（焦散）。

情况（b）与（a）相反。燃烧前沿推进时会破坏部分几何形状。两个燃烧前沿的碰撞会造成一种称为焦散的不连续性。几何形状的破坏是不可逆的。在图4（b）中，通过简单的几何分析可得关系式

$$\left.\frac{dP_b}{dy}\right|_{\text{Cusp}} = -2\,tan(\Delta\varphi/2) \tag{50}$$

这与 (49) 类似。当周长所转过的角度非常小时 ($\Delta\varphi \ll 1$)，这两个关系式一致；但一般来说，方程 (50) 对角度呈非线性依赖。幸运的是，这两个表达式都与前向坐标呈线性关系，因此可以组合不同的几何形状，以设定任意目标值 dP_b/dy 。具体而言，适当组合凹谷或角点（呈渐进特性，$dP_b/dy > 0$）以及顶点或尖点（呈递减特性，$dP_b/dy < 0$），即可形成一种周长变化可控的几何形状。对于这种情况，最常见的解决方案是采用星形几何结构，其中尖点的角度和数量决定了燃烧的渐进、递减或中性特性。

3.3.2 碰撞

图5 (a) 展示了一种树枝状几何形状，当厚度耗尽时，凸起末端的2ω 圆弧消失，两个燃烧前沿同时碰撞，导致燃烧面积瞬间下降（出现不连续性），其形式为

$$\delta P = -\Delta P_D \mathcal{H}(y-\omega) \tag{51}$$

其中，δP 是周长的离散变化量，ΔP_D 是树枝状结构的长度，H( ) 是 Heaviside函数，ω 是树枝状结构的半厚度（请记住，$\mathrm{H}(x) = 0, x < 0$；且 $\mathrm{H}(x) = 1, x \geq 0$）。

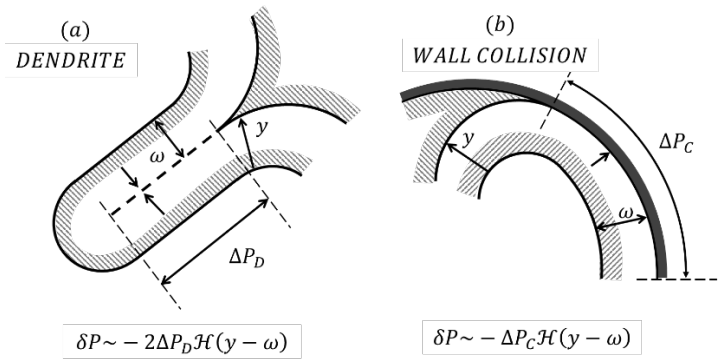

图5：有时两个燃烧前沿会发生碰撞（a），或与发动机壳体发生碰撞（b），导致燃烧表面突然破坏，并使周长的变化出现不连续性。

在推进剂燃烧的最后阶段，圆柱形燃烧表面与发动机壳体碰撞时也会出现类似情况。如果碰撞发生时二者的曲率中心重合，面积就会骤然减小，

$$\delta P = -\Delta P_c \mathcal{H}(y-\omega) \tag{52}$$

其中，ΔP_c 为碰撞前沿的弧长。如果碰撞并非完全正面碰撞，燃烧面积会迅速发生破坏，这一过程必须针对具体情况进行分析。

在这两种情况下，最显著的特征是这些过程具有非线性。事实上，燃烧面积会出现不连续性，从而导致燃烧室压力产生瞬态响应。此外，这种变化不可逆。

4. 燃面退移分析方法

现有方法可分为解析方法和数值方法。解析方法本质上是运用皮奥贝尔法则，将由简单几何图形构成的燃烧表面沿垂直于自身的方向推进，并纳入尖点和角点带来的特殊现象。对于简单几何形状，可以直接进行这一操作并得到封闭关系；也可以通过某种算法将操作自动化，例如 SPP© 程序或其他 CAD类图形程序。相比之下，数值方法从燃烧表面的离散描述出发，因此具有更大的灵活性和普适性。获得离散化表面后，可以像解析方法那样利用解的某些特定性质，也可以通过积分微分关系来处理传播问题。

方法		参考文献
1. 解析方法		
1.1. 简单/唯一几何		[2]–[7],[8], [9]
1.2. 简单几何形状组合		[1], [10]–[12], [13]
1.3. 基于 CAD 的方法		
1.3.1. 参数化几何体		[14]–[16]
1.3.2. 基于 CAD 内部工具		[17]–[19]
2. 数值方法		
2.1. 直接表面追踪		[20]–[23]
2.2. 最小距离函数（MDF）		[24]–[26], [27]–[30]
2.3. 曲线与曲面演化理论（基于偏微分方程）		
2.3.1. 水平集方法（哈密顿-雅可比方程）		[31]–[33]
2.3.1.1. 标准（符号函数演化）		[34]–[41],[42]–[47]
2.3.1.2. 窄带		
2.3.2. 稳态视角（程函方程）		
2.3.2.1. 直接时间推进		[48]–[53]
2.3.2.2. 快速行进法（快速行进法）		[54]

表 1：燃面退移分析不同方法的分类。

表 1 列出了本文讨论的所有方法类别，并指出了最相关的参考文献来源。对于各方法能够处理的几何形状，表中所列方法均能从推力曲线计算的角度令人满意地解决问题。不过，数值方法通常能够处理比解析方法更普遍、更复杂的问题。文献中提出了不同的论据来评估各方法的适用性。由于最灵活、功能最强大的方法是数值方法，因此核心论据通常是效率，即所需的计算时间。然而，如今计算机的强大性能降低了这一论据的重要性，因为与例如火箭内部气动或推进剂结构计算所需的计算量相比，燃面退移分析的计算工作量适中。数值燃面退移分析只需获得一个空间函数，用以确定推进剂消耗过程中燃烧表面的位置。此外，无须使用适配网格，只需使用能够合理描述几何形状且相当均匀的网格，就足以获得令人满意的结果。从这一角度来看，其他考量因素——例如进行复杂三维几何分析的灵活性、分析可变退移速度情况的能力，以及实现成本——都使基于程函方程的方法（表 1 中的 2.3.2）最具吸引力。这一结论与过去二十年间水平集方法在燃面退移问题分析中的广泛应用形成对比；这种应用主要源于该方法明显的普适性。然而，燃面退移分析问题并不需要如此强的普适性，因此水平集方法在此情况下显得过于庞大。对程函方程进行积分，足以令人满意地解决该问题（即计算推力曲线），并最终支持初始燃烧几何形状的设计。下一节将展示采用表 1 中满足上述要求的 2.3.2.1 方法，对多种药柱几何形状进行分析所得到的结果。

4.1. 解析方法

解析方法利用解的不同性质，将这些性质纳入燃烧表面位置的解析计算中。这类方法快速、简单且准确，但无法处理任意几何形状的问题；遇到复杂几何情况时，必须采用专门设计的步骤求解，而且通常无法解决退移速度可变的问题。

4.1.1 简单/唯一几何

这是最简单的方法，其内容是对垂直于自身移动的表面演化进行代数分析。20世纪中叶的前三分之一时期，在固体推进剂发动机发展的早期，这曾是唯一可行的方法。Billheimer 和 Wagner [2] 的研究全面回顾了这一时期的文献，以及为确定具有一定复杂药柱几何形状的固体推进剂发动机推力曲线而对简单几何计算加以扩展的各种方法。例如，可参阅 Thibodaux 等人[4] 的研究，以了解当时在分析球形燃烧室中的三维几何体方面所达到的专业化程度。又如，文献 [5]描述了对开槽管状药柱的燃烧前沿与发动机壳体之间相互作用所进行的艰难分析。这类方法至今仍被广泛使用；近年来，纯解析方法用于燃面退移分析的引用数量非常多（本综述未能尽数收录），这是因为该方法可直接应用，易于集成到内弹道空气动力学分析系统 [5]，中，也易于集成到各种发动机设计优化算法[6][7]中。

如前所述，该方法最突出的优点是速度快、简单且精确。当然，该方法无法分析任意几何形状，也难以纳入诸如退移速度非常数等现实情况。此外，分析还必须针对不连续几何形状（如尖点和角点）进行专门处理；例如，在三维情况下，这会使问题变得复杂得多。不过，该方法能够处理具有工业意义的情况，以及一些乍看之下似乎很复杂的问题，例如分析两种推进剂同时燃烧的情况。就此而言，借助解析方法，可以处理两种退移速率不同的推进剂问题；例如，可以分析不会产生残余药条质量分数 [3][8] 的双组元星形几何的燃烧，而 Krishnan 和 Bose [9] 对各种构型进行了非常详尽的研究。

4.1.2 简单几何形状组合

解析方法易于使用，因此可以采用另一种策略：将简单几何形状的单元组合起来，并自动分析燃烧表面的演化。最广为人知且最成功的例子是 SPP© 软件包中的燃烧回退模块，该模块最初由 Coats 等人于 [1] 1987年提出，此后一直在持续更新和改进（参见 [11]–[13]）。

SPP© 程序一直是美国预测固体推进剂火箭发动机性能的标准参考软件。从化学平衡值出发，针对不同影响因素分别采用效率系数进行修正，以此评估推力系数，这一方法已成为行业标准。药柱设计与弹道学模块可用于设计初始燃烧表面，并借助燃烧回退分析程序包、内弹道空气动力学模块以及二维喷管流动中的有限速率化学动力学计算来计算推力曲线。过去，美国及其他国家的主要机构、研究院所和固体推进剂火箭发动机制造商曾使用SPP© 程序；如今仍在使用该程序 [13]。药柱设计与分析模块通过从初始体积（发动机壳体内部）中提取简单几何图形来构建表面。这是一种布尔运算，可通过调整基本图形的尺寸重复进行。在计算燃烧表面的演变时，会增大几何图形的尺寸，以模拟前沿的推进。程序运行时输入符号命令，并按顺序执行。这是一种灵活、多用途且高效的工具，只要能够将几何形状分解为简单体积，就能对固体推进剂火箭发动机中通常出现的所有几何形状进行建模。当然，

这是一种解析方法，仍存在前文所述的缺点，但该产品经过改进和完善，已尽可能减轻这些缺点。

4.1.3 基于 CAD 的方法。

计算机辅助设计（CAD）的普及程度和功能不断提升，使得人们能够利用这些专用程序对真实且极其复杂的几何形状进行燃面退移分析。这种方法的主要优势在于能够评估复杂形状的表面。计算面积变化可采用两种策略。

一方面，在对初始燃烧表面建模时，可以对模型进行参数化，从而利用定义模型本身的参数来考虑退移过程（表 1 中的 1.3.1，参见文献 [15]–[17]）。例如，若以半径作为圆柱的参数，只需将半径按预设量改变，即可模拟退移过程。接下来，改变参数值，并让图形系统重建新的燃烧表面，同时执行相应的符号运算。

另一种方法是利用 CAD 专用功能，按照受控规律移动模型表面（表 1 中的 1.3.2，参见文献 [17]–[19]）。也就是说，软件会向用户提供用于平移、扩展或投影表面的专用工具。这些方法快速且灵活，能够处理复杂几何形状，并迅速给出合适的结果。然而，必须从 CAD 系统内部提取所获得的信息。此外，这些几何运算能否反映实际问题的物理特性并无保证，因为其中许多运算对用户不可见。因此，用户不得不检查这些运算，并在图形系统因无法自动生成稀疏波或焦散而出错时，最终修正相应情况。

4.2. 数值方法

数值方法从对燃烧表面的离散描述入手。根据方法的不同，初始燃烧表面可以是表示整个推进剂的体网格的外表面；其他相关表面也很容易识别，例如发动机壳体或模型的对称面。另一种做法是将燃烧表面离散为一个独立表面，其运动是计算的目标，并且必须以某种方式纳入与其他表面的相互作用分析，例如与发动机壳体的相互作用。数值方法的优点在于能够描述复杂燃烧表面的演变，而且除少数例外，还能将可变退移速率纳入计算。

4.2.1 直接表面追踪

此类方法包括对局部表面进行监测，并结合位置识别，以便处理表面与惰性区域或发动机壳体之间的相互作用。原则上，这类方法从表面离散化开始，并采用位移算法来求得其演变过程，同时以某种方式考虑传播过程中表现出的特性。其中最常用的特性是皮奥贝尔假设，即表面沿垂直于自身的方向移动。典型的自由表面计算方法（流体体积法，VOF）也会被采用，并将前沿的对流速率视为其退移速率。

在这些方法中，可以提到由 Noh 和 Woodward 提出的 SLIC（简单线界面计算）方法 [20]。作者构想该方法可用于一维、二维或三维空间维度。计算域被离散为包围区域，流体界面则针对每个

包围区域分别用直线进行局部表示，这些直线垂直于或平行于坐标方向。传播过程中会根据流体区域的排列方式采用决策逻辑。由于 SLIC 对界面的描述完全是一维的，因此随着时间推移，相对容易获得正确结果。另一个非常相似的方法是 FLAIR [55]，，它试图通过稍微复杂化每个控制区内前沿的几何描述来提高精度；Mashayek 等人 [21] 将其用于分析二维燃烧几何体。

在采用现象学算法、基本上将表面沿其自身法线方向投影的表面追踪方法中，Hejl 和 Heister 的工作 [22] 实现了直接表面追踪，并在局部纳入以稀疏波和焦散形式出现的特性。此外，参考文献 [56],[56]|[57],[57]中，Ki 等人 [23] 开展了这一类别的另一项研究，提出了部分界面追踪法（PIT method），用于分析鳍柱形和锥柱形三维几何形状的燃烧表面。该方法分别对横向平面的轴对称区域和纵向平面的二维区域采用拉格朗日方法，因为拉格朗日方法是模拟二维演化的有效途径。这样一来，便能以求解两个二维问题的计算量来解决一个三维问题。其局限在于几何形状必须具有一定的对称性，而这在固体推进剂发动机中通常很常见，例如鳍柱形和锥柱形发动机。不过，该方法并未为前沿追踪方法领域带来新的内容，只是成功地近似求解了三维问题。

4.2.2 最小距离函数（MDF）

Wilcox 等人提出的计算到初始燃烧表面的最小距离的方法[24], 在解决燃面退移分析问题方面成效显著，在本例中，该方法用于内弹道计算[25]。这是一种直观且易于实现的方法，不受几何形状复杂程度的限制。将推进剂所占据的计算域离散化后，该方法便是计算任意内部点到初始曲面的最短距离。这一计算需要搜索初始曲面上距该内部点最近的点，从计算角度来看，这一过程开销很大。因此，通常需要采用方法来缩短计算时间，并利用标准技术优化搜索算法，例如 Ren 等人[26] 采用的分治算法。与前文讨论的其他方法一样，最小距离函数（MDF）利用了解的某种性质，在此即费马原理；当传播速度均匀时，最短时间条件等同于最小距离条件。确切地说，这正是该方法的缺点：若不使算法过于复杂，就无法纳入变化的退移速率。MDF 方法无法推广的原因在于它采用了全局性质，计算中未考虑每条射线所经过的路径。不过，该方法概念简单，且可应用于实际的三维几何体，因此得到了广泛应用[28]–[30], ；例如，[31] 得出的结论是，该方法优于其他表面监测方法。

4.2.3 曲线与表面演化理论（基于偏微分方程）

为描述固体推进剂火箭中燃烧表面的传播，Saintout 等人 [48]实现了一种算法，该算法纳入了适当描述这一过程物理特性的所有要素，并指出他们数值积分的方程属于 Hamilton-Jacobi 类型。这一成果源自同一研究团队对表面跟踪方法的前期研究 [50] 和 [49]。这些研究是 SNPE（国家火药与炸药公司，现为 Nexter 的子公司）在欧洲开展的固体推进剂火箭发动机分析与设计工作的一部分；其中，关于燃面退移分析的工作最终由

Dauch 和 Ribereau [51]完成。在这项工作中，他们介绍了一款名为 PIBAL© 的通用工具。该工具集成了 IVOLINA© 程序的一个改进版本（此前已在参考文献 [52] 和[53]中开发），用于采用时间推进法求解程函方程（表 1 中的 2.3.2.2）。

然而，与上一段所述的发展并行的是，为了处理这类问题（以及其他更复杂的问题），Osher 和 Sethian 的工作 [31] 开创了一系列基于所谓水平集方法（LSM）的处理方法。这些方法成效显著，已在许多场合得到发展和应用（概述见 [32] ）。下文将介绍如何通过两种不同途径解决该问题。第一种途径采用水平集方法求解哈密顿-雅可比类型的方程，该方法能够解决非常一般的前沿传播问题，其复杂程度远高于燃烧回退问题。第二种途径针对稳态问题，该问题限定为求解 Eikonal 类型的方程；这正是燃面退移分析中需要解决的问题，因此从这个意义上说，所投入的建模和计算工作更为适度。Sethian的著作 [33], 对这两种方法均作了基础而全面的介绍，并进行了清晰的辨析和讨论。

考虑图6所示的情形：一条曲线或一个表面（例如由函数$\phi = 0$定义）以速度 $\dot{r}_p$ 沿垂直于表面本身的方向扩展。问题在于确定该表面的演化。在最一般的情形下，传播速率可能取决于表面点的局部属性，例如法线的方向或曲率；也可能取决于曲线的整体属性，例如各种积分关系；此外，还可能取决于问题本身之外的属性，例如由速度场引起的平流。

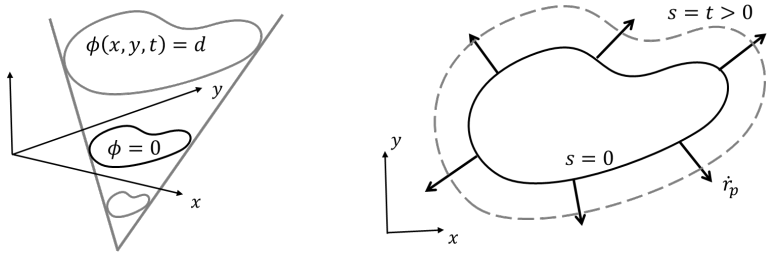

图6：采用数值方法求解燃面退移问题的两种方法概述。左侧为水平集方法，其中前沿由距离函数的零值表示，$\phi = 0$。右侧为前沿的位置，由程函方程解所取的值表示，该值对应传播时间。

可以从两个角度来处理这个问题。边值问题表述计算前沿到达计算域中每个点所需的时间$\tau = s(x)$，显然，根据前沿速度的定义可得 $\dot{r}_p = \delta x/\delta\tau$ ，因此，在多个维度下满足：

$$\dot{r}_p|\nabla s| = 1 \tag{53}$$

如前所述，在初始燃烧表面上满足条件 $s = 0$ 。这就是程函方程，是许多物理系统中的一个传统问题。在此问题中，隐含假设函数 τ 是单值函数，因此其传播速率必须符号恒定，即只能向计算域外传播或向计算域内传播。对于某些情况，这一限制非常重要；而在燃面退移分析中，该条件自然成立，并且程函方程中要求求解的未知量

严格来说，就是为求解固体推进剂火箭中燃烧表面的演化而需要得到的函数。

当传播可以沿两个方向发生，即在前沿的两侧传播时，就必须用一个具有更多空间维度的函数 ϕ 来描述前沿的运动。为得到描述这种演化的方程，考虑沿着前沿上一个粒子运动的轨迹 $\vec{x}(t)$；不失一般性，可以假设前沿由 $\phi(\vec{x}(t),t)=0$ 定义。对该函数求导可得，

$$\phi_t + \nabla\phi(\vec{x}(t),t)\cdot\vec{x}'(t) = 0 \tag{54}$$

该方程可用于求得函数 ϕ 的 $\dot{r}_p = \vec{n}\cdot\vec{x}'(t)$。由于前沿的速度为 $\vec{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$，而垂直于表面的方向为 ϕ，因此最终得到的方程为：

$$\phi_t + \dot{r}_p|\nabla\phi| = 0 \tag{55}$$

对此，必须给出函数的一个初始值。对于各种形式的 $\dot{r}_p$，该方程都属于哈密顿–雅可比型。前沿传播问题出现在各种各样的情形中：从海洋波浪、燃烧前沿，到非均质物质运动中的界面；当然，也包括光传播或地震波传播问题，以及字符识别或图像处理问题。

方程（53）和（55）代表两种不同的方法，且两者都能给出完全令人满意的结果。唯一的区别在于，求解程函方程所需的工作量会根据问题进行调整。基于哈密顿-雅可比方程的方法是为更复杂的问题设计的，在计算过程中需要进行更多处理、占用更多内存，并且还必须解决复杂方法中常见的数值问题（例如距离函数的重新初始化）；而这些在燃面退移分析问题中完全没有必要。

4.2.3.1. 水平集方法（哈密顿-雅可比方程）

水平集方法显而易见的通用性，使其在许多场合被用于燃面退移问题的分析 [34-47]。通常，将初始函数 $\phi(\vec{x},t=0)$ 定义为符号距离函数（SDF），其值表示从初始曲面到前沿的最小距离，并通过某种算法计算得出（表 1 中的 2.3.1.1）。该方法也并非没有问题：随着积分的推进，SDF 可能会取到条件不佳的值，因此有必要定期对其重新初始化。[58]

显然，该方法采用一个定义在整个推进剂区域内的隐式函数，而该函数唯一有用的信息是其零值所定义的前沿。因此，一些作者采用了一种策略，将计算得到的符号距离函数限制在前沿附近（表1中的 2.3.1.2）。不过，仍需结合前沿搜索与定位算法来确定窄带。

Chiapolino等人[47] 的研究颇具代表性，该研究采用标准水平集方法求解哈密顿-雅可比方程，但使用阶跃函数作为水平集函数，以模拟非均质流体问题中常用的前沿追踪方法。一篇颇具启发性的文章介绍了一种用于非结构网格的数值方法，其中采用了迎风技术和限制器，以保证方法稳定性；这些技术已在先前的研究中得到发展。文中所列举的三维燃烧回退分析实例极具说明性，所对应的药柱几何形状现代且符合实际。

4.2.3.2. 稳态视角（程函方程）

4.2.3.2.1. 直接时间推进

方程（53）的解（也包括采用时间推进过程求解方程（6）的解），

$$s_t + H(\nabla s) = 0 \tag{56}$$

其中哈密顿量为

$$H(\nabla s) = 1 - \dot{r}_p|\nabla s| \tag{57}$$

如前所述，这类方程属于所谓的哈密顿-雅可比方程。根据待模拟的具体情况，它构成一个带有边界条件的初值问题。在当前问题中，$s = 0$ 位于初始燃烧表面上。通常，其余边界条件包括前沿熄灭处的边界（例如发动机壳体）；由于方程具有双曲性，通常无需施加任何条件；还包括对称轮廓或周期性边界，在这些边界上，条件的实现相对简单。

文献 [48]–[53] 率先采用程函方程求解燃面退移问题。这些研究为正确且经过调整的求解方法奠定了基准。然而，此后人们从不同角度针对不同问题研究传播问题，但不一定局限于固体推进剂发动机技术。为恰当追踪表面，程函方程的直接求解已在许多场合得到研究，例如 [59]。Gueyffier 等人 [60], 的工作尤为独特，他们采用谱方法求解程函方程，以描述燃烧表面，其理念与表面跟踪方法所采用的理念相似。

4.2.3.2.2. 快速行进法（FMM）

形式为（53）的程函方程可以通过调用一种基于传统交替方向法的方法来求解，同时利用前沿的传播方向更新变量，从而获得额外优势。这些方法称为快速行进法（FMM）。可参阅 S. Sethian 的著作 [54] 以了解概况；书中还对 FMM 和 LSM 进行了有趣的批判性比较。该方法已用于非结构网格上的燃面退移问题，例如 [61] 中的一篇完整论文，但采用这一方法研究燃面退移问题的其他成果并不多。

5. 燃面退移解析解

恒定燃烧表面积是固体推进剂火箭发动机最常见的设计条件。通常而言，这种情况是最优的，因为这意味着燃烧室结构设计针对发动机的整个工作范围进行了调整。否则，发动机壳体的厚度必须按最不利载荷工况确定，而该工况对应于达到的最大压力。因此，与能够以恒定燃烧室压力提供相同总冲量的发动机相比，燃烧室会更重。要在较大的燃烧面积下实现恒定压力曲线（该面积与燃烧室本身的面积相当），就必须采用具有一定复杂度的几何形状。重要变量包括肉厚分数、体积分数和残余条状推进剂比例，以及 Klemmung 和 J （燃烧面积与通道面积比）。最后这两个参数值得关注，因为它们会影响侵蚀燃烧现象的发生。

5.1. 经典星形

图7展示了具有 n 个尖端的星形推进剂横截面的几何描述，如 [62], [63] 中所述。为简便起见，仅表示一个角扇区 π/n 的一半，并利用了横截面的对称性。尖端角度为 θ （图中显示的是半角 $\theta/2$），占整个角扇区 ε（π/n）的 ε 。谷部区域的深度为从燃烧室中心起算的 d ，并假定推进剂厚度恰好足以在前沿首次到达发动机壳体时完成第一阶段燃烧。如果推进剂药柱厚度更大，此时便会开始第二阶段，即周长线性增长的渐增阶段。第二阶段的燃烧会呈渐增趋势；在发动机设计中，不允许这一阶段持续过久，因为这会提高燃烧室压力。不过，这种设计可以增加肉厚分数或延长燃烧时间，因此可能有必要满足设计要求。尽管如此，仍应分析能否通过将星形轮廓设计得略微递减来补偿这一影响。

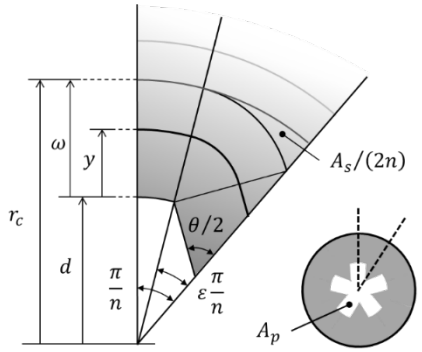

图4：星形几何示意图及几何参数的定义。

一种确定所考虑截面周长变化的启发式方法，是沿轮廓移动，测量表面法线所发生的旋转，并计算每种情况下周长的增量。对图7所示的几何形状执行这一操作，得到的表达式为

$$\Delta P = \underbrace{2n}_{(1)}\, y \left\{ \underbrace{\frac{\pi}{n}}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}_{(3)} \underbrace{- \frac{1}{tan[\theta/2]}}_{(4)} \right\} \tag{58}$$

项 (1) 对应于 $2n$ 半个扇区，项 (2) 源于法线在半个扇区内所发生的转动（若为圆柱，这前两个因子将得到前面提到的简单结果 $\Delta P = 2\pi y$）。项 (3) 对应于将法线从径向位置定向至尖点表面，其间旋转了 π/n，旋转角度为 $\theta/2$的余角。最后，项 (4) 对应于尖点部分被削去的情况。实际上，首先要注意的是，$\theta/2$ 是图4中角度 $\Delta\varphi/2$ 的余角；余角的正切函数是该角度正切的倒数。此外，在一般表达式（方程 (50)）中考虑了尖点的两个斜率，而在图7所示的扇区中只需考虑其中一个。

这种快速评估较为微妙，且其适用标准可能会被误解。不过，这是一种非常有价值的方法，可与更为详尽的几何评估结合使用，因为它能够进行快速验证。此外，它还使我们能够开展

通过分析论证即可制定出最优设计策略的分析。

若要获得燃烧面积保持不变（即中性燃烧）的几何形状，方程 (58) 中必须满足 $\Delta P = 0$；该方程是一个关于 θ 、以 n为自变量的简单非线性方程。表 2 列出了不同尖端数量下的尖端半角、肉厚分数和体积分数。请注意，当尖端数量从 5 增加到 6 时，θ 的值从 $\theta/2 < \pi/n$ 变为 $\theta/2 > \pi/n$，这表明尖端数量少于 5 时，可能出现尖端相互碰撞的不可能几何形状。特别值得注意的是，如果 $\theta/2 = \pi/n$，通道就是直的。这是分析轴向槽的条件。表中还指出，对于 $n \geq 6$ （因为 $\theta/2 > \pi/n$），燃烧过程应为递减燃烧；这一信息在组合不同燃烧几何构型时非常有用。

n	4	5	6	7	8
$\theta/2$	28.21	31.12	33.53	35.55	37.30
π/n	45.00	36.00	30.00	25.70	22.50
ω/D_c	0.200	0.180	0.164	0.151	0.140
χ	-	0.893	0.804	0.733	0.674

表2：中性燃烧方程（58）的解$\Delta P = 0$，以及相应的肉厚分数和体积分数。

许多固体火箭采用组合式推进剂几何形状。一种常见构型是采用简单的圆柱形燃烧和一个开槽段。圆柱形段的燃烧面积会随时间增大，而开槽段可以配置为使燃烧面积以所需速率减小。两种几何形状的组合可以产生具有特定轮廓的推力曲线。

5.1.5 双推进剂星形构型

对于适中的肉厚分数，星形构型可提供恒定的燃烧面积曲线。然而，中性阶段结束后残余推进剂的质量（残余条状推进剂比例）可能非常大，从而对有效体积分数产生不利影响。可以使用退移速度不同的两种推进剂设计无残余条状推进剂几何构型。其思路是，在尖点区域填充高退移速度推进剂，使其与填充肉厚且退移速率较低的推进剂同时到达发动机壳体。

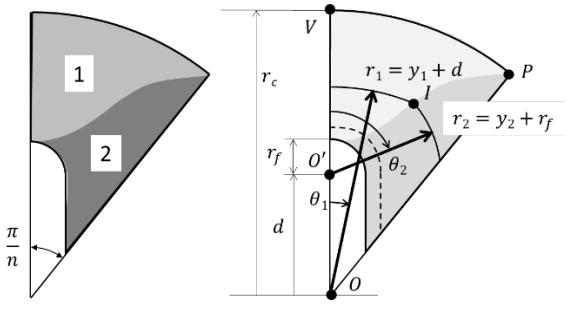

图8：装填了两种退移速率不同的推进剂的直线星形构型。左侧为总体示意图，右侧为分析中用于确定适当界面的符号体系。

图8展示了直线星形构型（类似于带槽几何结构）的一种可能的简单构型，其中使用了燃烧速率不同的两种推进剂。由于燃烧速率不同，在同一时间内每种推进剂的推进距离也不同。推进剂 1 前进 y_1 ，推进剂 2 前进 y_2。为了使燃烧前沿同时到达所有点处的壳体，推进剂 1 中的燃烧前沿必须是以点 O 为中心、半径为 r_1 的圆柱面。而根据构造，推进剂 2 中的燃烧前沿由一条直线和一段以点 O’ 为圆心、半径为 r_2 的圆弧组成。推进剂 2 中的退移速度必须使其与推进剂 1 同时到达点 P 。这会带来一个取决于推进剂 2 中哪一个燃烧前沿到达点 P 的几何例外，即到达该点的是直线前沿还是圆形前沿。下文假定到达点 P 的是圆形燃烧前沿。图8展示了其余将要使用的参数，其中d 是槽深，r_f 是槽内的圆角半径，r_c 是燃烧室半径，而$r_{1,2}$和$\theta_{1,2}$分别是两个燃烧前沿上各点的极坐标。锋面在界面上同步推进的条件表示为

$$r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 + d \tag{59}$$

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2 \tag{60}$$

其中 $r_1 = r_f + d + y_1$ 和 $r_2 = r_f + y_2$。不失一般性，可设 $y_1 = y$ 和 $y_2 = fy$ ，且 $f > 1$。推进剂 2 的退移速率取值应适当，使得在对称线上，前沿到达壳体上 V 点的同时，推进剂 1 的前沿到达 P点。推进剂 2 在推进剂 1 上形成半径为 r_1的圆柱形燃烧前沿，而推进剂 2 中的前沿也是圆柱形的，半径为 r_2 ，但其中心位于 O’。通过从表达式 (59) 和 (60) 中消去 θ_2 ，可表示前沿同时到达 P 点壳体的条件，从而得到

$$(r_1 \cos\theta_1 - d)^2 + (r_1 \sin\theta_1)^2 = r_2^2 \tag{61}$$

并代入 入 $r_1 = r_c$、 $\theta_1 = \pi/n$ 和 $y = \omega$（即肉厚的值），可得 ：

$$r_c^2 - 2r_c d\cos(\pi/n) + d^2 = \left(r_f + f\omega\right)^2 \tag{62}$$

结合

$$r_c = r_f + d + \omega \tag{63}$$

确定星形药柱几何结构后（已知 n、 r_c、 r_f 和 d ），方程 (63) 可用于计算药柱肉厚，而方程 (62) 给出所需的 f值，即两种推进剂的退移速度比，$f = r_{p2}/r_{p1}$。

界面的几何形状可将推进剂 1 的前向坐标深度（$y; 0 \le y \le \omega$）作为参数，并通过显式求解获得

$$r_1 = r_f + d + y \tag{64}$$

$$r_2 = r_f + y_2 \tag{65}$$

并使用方程（61）得到 θ_1 ，使用方程（60）得到 θ_2。绘制出界面线后，即可计算每种推进剂的燃烧周界；再考虑不同的退移速度，便可计算每种推进剂释放的质量。每种推进剂中燃烧周界的长度，不再能直观地衡量整个表面燃烧的质量，也无法直观地反映各时刻达到的燃烧室压力。因此，以下内容暂时不再采用前向坐标这一几何概念，而改用伪时间作为自变量。

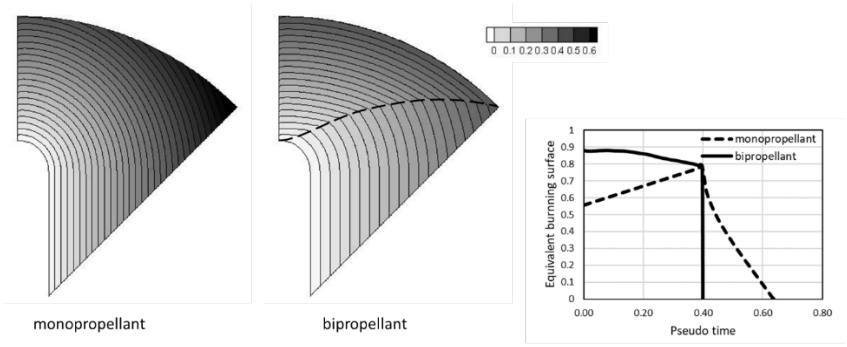

图9：具有 4 个尖点的单基推进剂和双组元推进剂星形几何结构的等效燃烧表面对比，其中$\omega = 0.4$、 $r_f = 0.1$ 和 $d = 0.5$；因此退移速度比为 $f = 1.592$。

图9展示了采用四槽几何形状进行的数值模拟。文中给出了单一推进剂工况以及两种无残条推进剂工况下的结果。为比较这两种情况，可表示对应于 $\tau = y_{1,\ 2}\ r_{p1,}\ /\ \ _2$ 的伪时间线。对于单一推进剂，取 $r_{p1} = 1$ 时，伪时间等同于前向坐标。在双组元推进剂情况下，必须定义等效燃烧面积，其形式为 $A_{b,\ eq} = A_{b,\ 1} + fA_{b,\ 2}$。利用推进剂 1 的燃烧数据，等效燃烧面积可用于计算释放的质量、燃烧室压力和推力。这样便能与单一推进剂工况进行可靠比较。在单基推进剂情况下，这种槽数较少的几何形状会使燃烧面积曲线逐渐增大，直至燃烧前沿首次到达发动机壳体。从那一刻起，燃烧面积随时间减小，形成图中所示的较长推力拖尾阶段。然而，在双组元推进剂情况下，快速燃烧推进剂的燃烧过程在初始阶段会产生更多质量流率，从而弥补单基推进剂初期的不足。因此，如图9所示，可形成近中性燃烧面积曲线。通过设计几何形状，使初始和最终时刻的等效燃烧面积相近，便可预先实现这一显著特性。由于燃烧前沿同时到达壳体，因此不会产生残余条状推进剂，且燃烧面积曲线会在此时急剧下降，从而形成最佳的无残条几何形状。

图10展示了初始具有较高体积装填率的椭圆孔几何结构采用一种推进剂和两种推进剂运行时的对比。因此，退移速率之比也较高，这再次转化为燃烧等效面积的显著变化。在本例中，两种构型燃烧结束时的伪时间相等，凸显了燃烧等效面积的显著变化（最高达33%）。在计算界面时，采用了推进剂 1 的燃烧前沿始终保持椭圆形的近似。数值模拟表明，这一粗略假设对总体结果的影响很小。

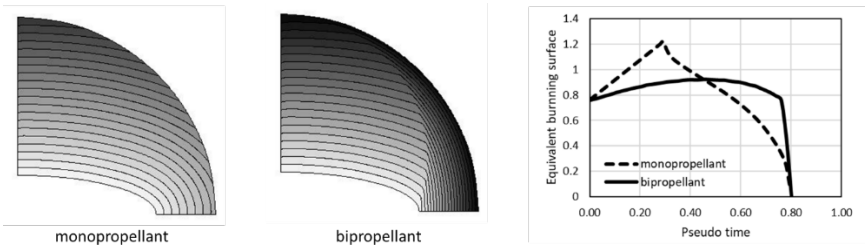

图10：单基推进剂与双组元推进剂椭圆孔几何形状的等效燃烧表面对比，其中体积分数和退移速度比均较高 f。

在处理这些双组元推进剂情况时，并未预先考虑燃烧前沿之间如何相互作用。如下文所示，这种相互作用可能很复杂，并会产生稀疏波和焦散波，从而显著改变界面附近的燃烧前沿。这可能导致燃烧等效面积的评估出现较大变化，进而影响对系统作用的预测。稍后还将说明，所提出的数值分析方案能够可靠地捕捉这些异常。对于上文给出的示例，由于这是角型燃烧情形，设计系统保证界面位于平衡点 E （方案 i）之上，因此燃烧前沿不会出现任何形式的稀疏波或焦散。

5.2. 双推进剂燃面退移分析

双组元推进剂药柱中的燃烧前沿取决于两种推进剂退移速率之差，以及前沿和界面的几何形状。为了有把握地开展一般性分析，宜先从一种简单情形入手：如图11所示，两种推进剂接触处的燃烧前沿为平面。点 S 在燃烧表面处分隔两种推进剂，它们之间的界面为直线，且垂直于该燃烧表面。推进剂 1（图中左侧）的退移速率为 r_1 ；在距离点 S 足够远的位置，经过时间 δt后，该推进剂的燃烧前沿将移动至与原线平行的直线 b_1 ，移动距离为 $y_1 = r_1\delta t$ 。与此同时，推进剂 2 的燃烧前沿移动 $y_2 = r_2\delta t$ ，到达直线 b_2。分析中假设 $r_1 < r_2$ ，因此 $y_1 < y_2$。为构建解，不妨将点 S 视为两种推进剂中传播过程的起点；这样，燃烧前沿在推进剂 1 中至少延伸至圆柱 c_1，在推进剂 2 中则延伸至圆柱 c_2。由于时间 δt 后推进剂 2 到达点 F_2，而推进剂 1 只能到达点 F_1，因此较快的推进剂起到点火源的作用。推进剂 2 一侧直线 SF_2上的每个点，都是一个圆族的圆心；该圆族消耗推进剂 1，其半径与到达 F_2 尚需传播的距离成正比。因此，推进剂 1 中的燃烧表面是这一族圆柱的包络线。只需从 F_2 向圆 c_1作切线，直至切点 T，即可轻松构造该包络线。线段 F_2T与直线 b_1 交于点 C，从而分隔由原始表面（b_1）得到的燃烧表面与由界面处上述现象（F_2C）形成的燃烧表面。在点 C 处，两个不同的燃烧前沿相交，其碰撞形成焦散 c。焦散是一条从点 S 出发、位于直线 SC上的直线。

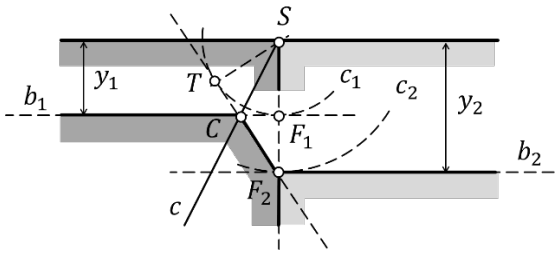

图11：双组元推进剂燃烧表面演变示意图，其燃烧前沿为平面，且界面垂直于前沿。

最初为平面的燃烧前沿沿两种推进剂之间的界面传播，是一种相对常见的情形。例如，将导热线埋入推进剂以增大燃烧面积时，就会出现这种情况。在这种情形下，导线充当点火源，其传播速度高于推进剂退移速率，所得燃烧几何形状为以导线为轴的圆锥形，与图11中的构造b_1CF_2类似。尽管这种情形简单，却有助于引入用于分析更复杂情形的基本分析机制。将点 S 视为每种推进剂燃烧前沿的起点，构建影响圆柱 c_1 y c_2，计算其与确定远离 S处前沿位置的直线 b_1 和 b_2 的交点，并求出特定圆柱族的包络线，即可构造各时刻的燃烧表面。

对于更复杂的情况，即燃烧前沿初始时并非平面，采用图12所示的符号体系进行概括会更方便。大写字母用于标记关注点，小写字母用于标记直线和圆弧。图中展示了非平面燃烧前沿的两种可能情况：S 为尖点的顶点，以及S 为角的顶点。角平分角β 用于表示前沿的初始位置，并将角度 δ （位于直线 e 和f_2之间）作为燃烧速率差异的度量，因为如果$\delta = \beta$ ，燃烧速率相等。

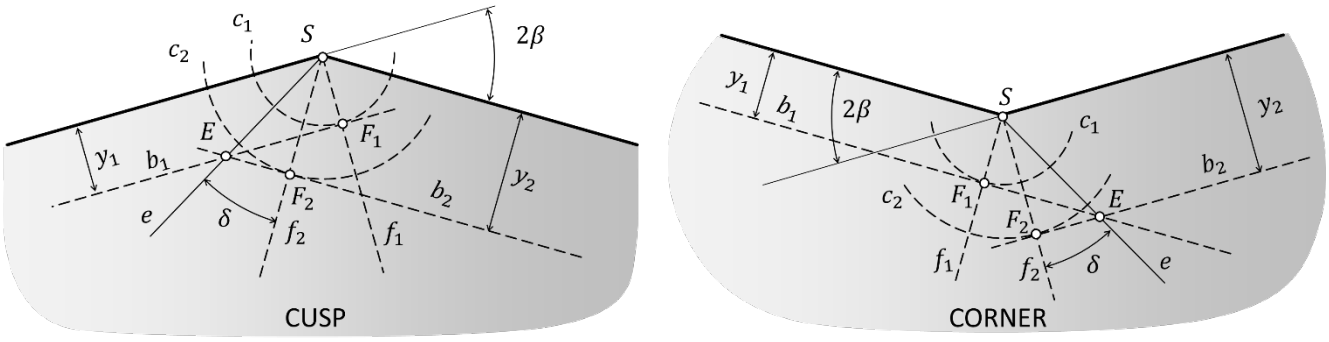

图12：描述双组元推进剂传播过程所用不同符号的含义，展示初始燃烧表面的两种初始构型。

直线 b_1 和 b_2 与原始表面平行，表示各燃烧前沿在彼此独立时的位置（图中为 $y_1 < y_2$）。与简单的平面前沿情况不同，直线 b_1 和 b_2 并不平行，而是在点 E处汇聚，因此可以从 S朝向 SE绘制平衡线 e 。确定表面的位置后，即可绘出影响圆 c_1 和 c_2；它们分别在点 F_1 和 F_2处与上述直线相切。从 S 沿着方向 SF_1 和 SF_2，绘制垂直于初始表面 f_1 和 f_2的直线。圆锥区

f_1 和 f_2 之间的区域构成干扰区域。平衡线 e 是推进剂之间界面位置的参考线；界面位于干扰区域内外时，其演化情况会有所不同。最后，如果两种推进剂的初始表面所形成的角度为 2β，则可通过以下关系计算平衡线e 的角度：

$$\frac{y_1}{y_2} = cos(2\beta) - sin(2\beta)\, tan(\delta) \tag{66}$$

这表明，研究区域的结构取决于β 和退缩速率比，即y_1/y_2。

图 13 展示了当 S 为尖点顶点时燃烧表面的不同结果。每种情况对应界面的不同位置，这些位置由直线 i确定；界面与直线 f_1 所成的角度 δ_i 决定了界面的位置（图 12）。这一系列从角度 δ_i 足够大（大于 δ）的情况开始，并分析 δ_i逐渐减小时的情形。若 $\delta_i > \delta$（见示意图 a），界面与直线 b_1 相交于点 I，推进剂 1 中的传播过程会导致推进剂 2 沿两者之间的界面提前点火。所形成的燃烧表面（线段 IC ）通过绘制一条从 I 出发并与圆柱 c_2相切的直线而得到；该圆柱对应于由点火点生成的圆族的包络线。这条直线与直线 b_2 的交点确定了点 C的位置；该点是此过程中生成的焦散 c 的顶点，焦散由 S 向 SC 延伸。随着 δ_i减小，点 C 逐渐靠近点 I；当 $\delta_i = \delta$时两点重合，焦散消失，如图 13 的示意图 b所示。在这种情况下，推进剂以各自的速率消耗，不形成任何额外结构，锋面仅由直线 b_1 和 b_2构成。当 $\delta_i < \delta$，但尚未达到 δ_B时，推进剂 1 比推进剂 2 先到达点 I；不过此时圆柱族终止于经过 I 并与 b_2 相切的圆。正如示意图 c所示，直线 f 与 i之间形成部分稀疏。当 δ_i 达到 δ_B （示意图 d）时，直线 f_2 与直线 i之间的膨胀完成。此处，定义 δ_B的点 B 是圆 c_2 与直线 b_1的交点。到目前为止，界面线的高倾角使过程由推进剂 1 主导；但当 $\delta_B > \delta_i$ 时，推进剂 2 更早到达点 I，导致推进剂 1 提前点火。示意图 e 展示了这种情况：通过绘制一条从 I 出发并与 c_1 相切的直线，得到新的表面 IC ；点 C 则是这条直线与 b_1的交点。在此之后，若 $\delta_i > 0$，则稀疏波会持续存在于 i 与 f_2 之间，直到 δ_i 被抵消（示意图 f），随后稀疏波消失。最后，如示意图 g所示，当 $\delta_i < 0$ 时，锋面的结构保持不变。

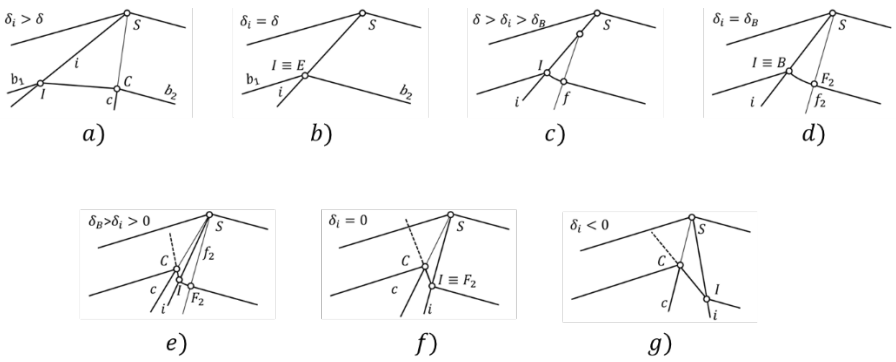

图 13：在初始燃烧表面于两种推进剂之间的顶点处存在尖点的情况下，界面处于不同位置时各格式的序列。

对于尖点构型下点 E 位于干扰区域内的情况（该区域由 f_1和 f_2界定），图 13 所示的不同传播模式可简化为仅出现示意图 a、b和g。

图 14 展示了当 S 是分隔两种推进剂的角的顶点时，燃烧表面的不同形态。每种示意图对应界面的不同位置，这些位置由直线 i标识，并由界面与直线 f_2 所成的角度 δ_i 确定（图12）。当 δ_i 足够大时，如示意图 h) 所示，推进剂 2 比推进剂 2 更快地沿整个界面推进至点 I 。因此，通过计算推进剂 1 中传播圆柱的包络线来绘制燃烧表面 IT ；也就是说，它是从 I 出发、在点 T与 c_1 相切的直线。正如示意图所示，直线 f_1 和f之间会形成稀疏波，并随着 δ_i 减小而减弱。当 $\delta_i = \delta$时（示意图 i），稀疏波消失；与尖点的情况一样，这会形成一种不存在相互作用的情形，两种推进剂各自独立燃尽。当 $0 < \delta_i < \delta$ 时，该过程如示意图j所示，与示意图 h) 类似，但在这种情况下，切点 T 越过直线 f_1 ，包络线沿线段 SC生成焦散 c ****。

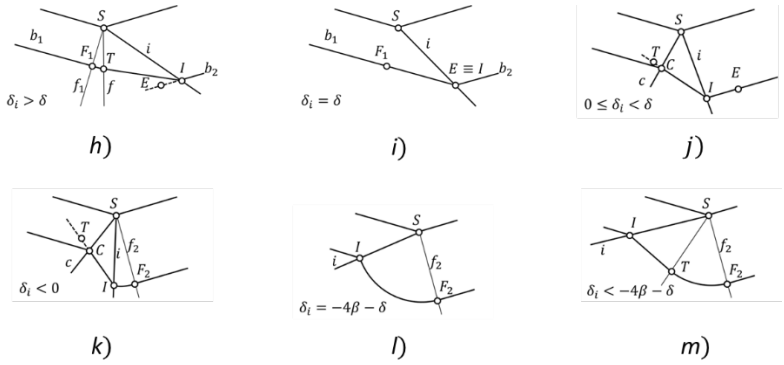

图 14：两种推进剂之间的顶点处初始燃烧表面带有一个角时，界面处于不同位置对应的各种格式序列。

当 $\delta_i < 0$ 时，情况如图 14 的格式 k) 所示。在直线 i 和 f_2之间的推进剂 2 中产生稀疏波。前沿表面与 b_2 重合，直到 F_2；在 F_2 和 I 之间则与 c_2 重合。由于推进剂 2 继续主导这一过程，因此像之前一样得到燃烧表面 IC****，它沿着经过 I的圆 c_1 的切线描绘而成。对于负角度（$\delta_i < 0$），但绝对值更大时，圆弧 F_2I 逐渐增大，直到到达直线 b_1 ；如格式 l) 所示，此时焦散 c 消失，因为它到达了界面本身。如果界面进一步倾斜（格式 m)），则由推进剂 1 主导传播过程，从而引燃推进剂 2。包络线 IT 由圆柱 c_2形成。

以上所有情况均对应图12所示的格式，此时平衡点 E 位于由 f_1 和 f_2界定的干扰区域之外。当点 E 位于干扰区域内时，将重现格式 h)、l) 和 m)，并会出现一种图中未表示的新构型：在靠近直线 f_1 和 f_2 的推进剂中各有一道稀疏波。

图15展示了数值分析的结果，所用代码通过简单的时间推进来求解程函方程，相关方法将在本文后文介绍。从图中可以看出，格式 g)、j) 和 k) 的结构都得到了忠实再现。该算法

能够有效捕捉两种推进剂界面附近产生的稀疏波和焦散结构。

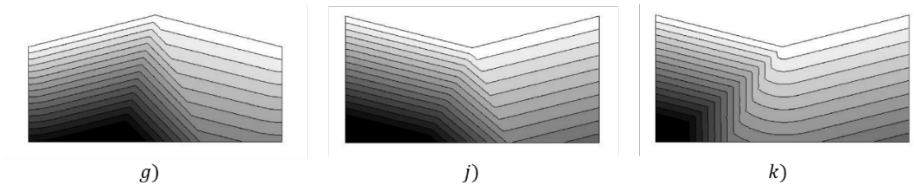

图15：图13和图 14中对应相同参考字母的三个双组元推进剂界面示例的数值模拟结果。

一方面，这从总体上表明，前述解析推理是正确的。另一方面，这也体现了所提出数值方法的强大功能和通用性。正如文献综述和对不同方法的分析所示，即使退移速率可变，数值积分程函方程仍是确定燃烧表面的最佳方法。借助离散表示与计算系统，可以高效描述以指定可变燃烧速率传播的几何形状复杂的燃烧前沿的运动学。

6. 燃面退移数值解

如前文各节所示，采用数值方法求解燃面退移问题时，通常通过求解哈密顿-雅可比方程可获得最佳结果，当然也可以直接选择求解程函方程。求解这类方程可分为两条研究路线：一条以通用方式处理数学问题（例如 [64]–[66]），另一条则着眼于利用水平集方法（LSM）求解前沿传播问题（例如 [67] ，或最近的 [47]）。

对黏性解进行数值近似的研究也由 Crandall 和 Lions 发起了 [65]。他们针对方程的一种简化形式提出了一类重要的单调格式，并证明这些格式收敛于黏性解（关于这一主题的一般性深入综述，见 [64]）。然而，众所周知，单调格式的精度至多为一阶，因此在大多数实际应用中耗散过强，尽管它们常用于构造高阶算法。在 [67]，中，Osher 和 Sethian 构造了一类高阶迎风型格式，用来近似守恒律；其思路是模仿 Harten 等人 [68] 以及 Shu 和 Osher [69]，提出的高阶本质非振荡算法。这类格式的构造基于这样的观察：Hamilton-Jacobi 方程与守恒律密切相关。从这一角度出发，人们提出了种类繁多的算法，例如 [69]–[71] 中所述的算法。

尤其是在燃面退移分析问题中，这类算法已多次得到应用，而其中最值得关注的应用是针对非结构网格开发的。初始燃烧表面的特点以及满足固体推进剂火箭发动机设计要求所需的复杂几何形状，使得使用非结构网格成为必然。此外，这类网格划分方式可显著缩短生成时间，从而对整个过程的效率产生重要影响。由三角形构成的非结构 Hamilton–Jacobi 方程的求解方法，最早由 Abgrall [72] 提出；该方法通过近似求解经典黎曼问题实现，其依据是 Bardi 和 Evans [73]的研究。这些研究随后

又有其他研究跟进 [74]–[77] ，这些研究提高了近似阶数，或测试了同类的不同格式。特别值得一提的是此类方法中利用非结构网格上的快速行进算法求解程函方程的格式，例如 [78] 或 [79]。

6.1. 时间推进法

本研究采用简单的时间推进过程，在由三角形单元构成的非结构化二维网格上求解程函方程。积分域为完整的推进剂体积，由初始燃烧表面和保持惰性的表面（禁止燃烧的表面，以及与绝缘材料或壳体接触的表面）所界定。未知函数 $s(\vec{r},t)$ 表示前沿的到达时间，其值存储在网格顶点处。如上所述，待求解的问题为

$$s_t + H(\nabla s) = 0 \tag{67}$$

其中，哈密顿量为

$$H(\nabla s) = 1 - \dot{r}_p|\nabla s| \tag{68}$$

初始条件为 $s(\vec{r},0)=0$，并且在整个积分过程中，该条件也作为边界条件施加于推进剂的初始表面。所用方法无需在惰性表面上施加空间边界条件，燃烧前沿经过这些表面时不会受到干扰。不过，通常会选取由具有对称条件的表面所界定的推进剂体积部分，这在算法中很容易实现。

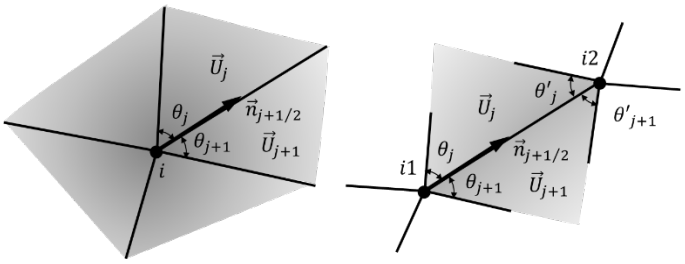

图16：左侧示意图展示了节点 i 周围基本离散化所用的主要几何元素；右侧则展示了基于边的算法中用于构造离散解的符号体系。

方程的解可以通过数值方法高效求得，所采用的离散化方法基于 Abgrall [72]的工作。这需要对计算域进行三角剖分，并利用顶点处的变量值 s_i $(i=1..nn)$来估算每个三角形上函数的梯度值，$U\vec{}_j=[\nabla s]_j$ $(j=1..nt)$。图16展示了所采用的几何构型，其中与节点 i 相连的一条边两侧的角度为 θ_j y θ_{j+1} ，边方向上的单位向量为 $n\vec{}_{j+1/2}$。函数随时间变化的值 $t=(n+1)\Delta t$ 由下式求得：

$$s_i^{n+1} = s_i^n + \Delta t\mathcal{H}\left(\vec{U}_j^n\right) \tag{69}$$

其中

$$\mathcal{H}\left(\vec{U}_j^n\right) = H\left(\frac{1}{2\pi}\sum_j \theta_j\vec{U}_j^n\right) - \varepsilon_i\sum_j \beta_{j+1/2}\frac{\vec{U}_j^n+\vec{U}_{j+1}^n}{2}\cdot\vec{n}_{j+1/2} \tag{70}$$

And

$$\beta_{j+1/2} = tan\frac{\theta_j}{2} + tan\frac{\theta_{j+1}}{2} \tag{71}$$

积分必须在稳定性条件 $\Delta t \leq \mathrm{h}\ /L$ 下进行，其中 h 是相邻三角形的最小高度，扩散因子按 $\varepsilon_{\mathrm{i}} = L/\pi$ 计算，即 $L = \max_j \|\nabla u\|$。

该算法通过遍历网格的边并更新每个节点上的平均梯度值来构建（见图16右侧示意图）。该过程使用以下关系式执行：

$$\vec{U}_{i1} \leftarrow \vec{U}_{i1} + \frac{1}{2}\left(\theta_j \vec{U}_j + \theta_{j+1}\vec{U}_{j+1}\right) \tag{72}$$

$$\vec{U}_{i2} \leftarrow \vec{U}_{i2} + \frac{1}{2}\left(\theta'_{j+1}\vec{U}_{j+1} + \theta'_j \vec{U}_j\right) \tag{73}$$

并计算

$$\beta_{j+1/2} = tan\frac{\theta_j}{2} + tan\frac{\theta_{j+1}}{2} \tag{74}$$

$$\beta'_{j+1/2} = tan\frac{\theta'_{j+1}}{2} + tan\frac{\theta'_j}{2} \tag{75}$$

方程的扩散项通过以下方式计算：

$$D_{i1} \leftarrow D_{i1} - \varepsilon_{i1}\beta_{j+1/2}\frac{1}{2}\left(\vec{U}_j + \vec{U}_{j+1}\right)\cdot \vec{n}_{j+1/2} \tag{76}$$

$$D_{i2} \leftarrow D_{i2} - \varepsilon_{i2}\beta'_{j+1/2}\frac{1}{2}\left(\vec{U}_{j+1} + \vec{U}_j\right)\cdot \left(-\vec{n}_{j+1/2}\right) \tag{77}$$

通过修改每个轮廓上节点的 $U\vec{\square\square}_i$ 值以及所有节点上计算得到的 D_i值，应用边界条件如下：

a) 自由轮廓

$$H_i \leftarrow H_i \tag{78}$$

$$D_i \leftarrow 2D_i \tag{79}$$

b) 对称轮廓

$$\vec{U}_i \leftarrow \frac{1}{2}\left(\vec{U}_i + \vec{U}_i\big|^{sim}\right) \tag{80}$$

$$D_i \leftarrow 2D_i \tag{81}$$

其中，$U\vec{\square\square}_i\square^{sim}$ 是与$U\vec{\square\square}_i$对称的向量。持续进行积分，直到达到稳态；通过检查每个三角形内变量的梯度变化是否超过预定值来确保这一点。

6.2. 结果与讨论

此前，本文已在图9、图10和图15中展示了采用上述算法进行数值模拟的结果。这些结果清楚地表明，该方法能够处理前沿传播速度不恒定的情况。对于双组元推进剂、星形构型以及填充系数较高的椭圆形药柱，该方法均能高效处理。通过在计算域内为每个节点赋予不同的退移速率值，这种方法能够处理分隔两种推进剂的界面

。图15中展示的三次数值模拟也采用了相同的技术，并对计算域和界面倾角进行了适当设置。

图17展示了三个具有代表性的算例结果。计算时，在表示几何形状所采用的单位制中，将退移速率设为单位值，因此推进坐标与伪时间一致。这三个算例使用的单元数量不多，不超过10^4 个节点。即便如此，在下一节进行更严格的误差分析之前，结果仍显示出合理的精度。这些示例表明，该方法能够描述分析这些构型时涉及的所有相关现象。在所谓的锚形几何中，燃烧前沿与发动机壳体相撞，导致燃烧面积骤然变化；与此同时，内部来自中心槽和环形槽的燃烧前沿相撞，形成焦散。第二个算例为经过优化以实现中性燃烧的星形几何。最后，还给出了一个未经优化的哑铃形几何算例，可以看到，在惰性边界处的自由轮廓条件得到了处理，且未出现明显的反射和扰动。

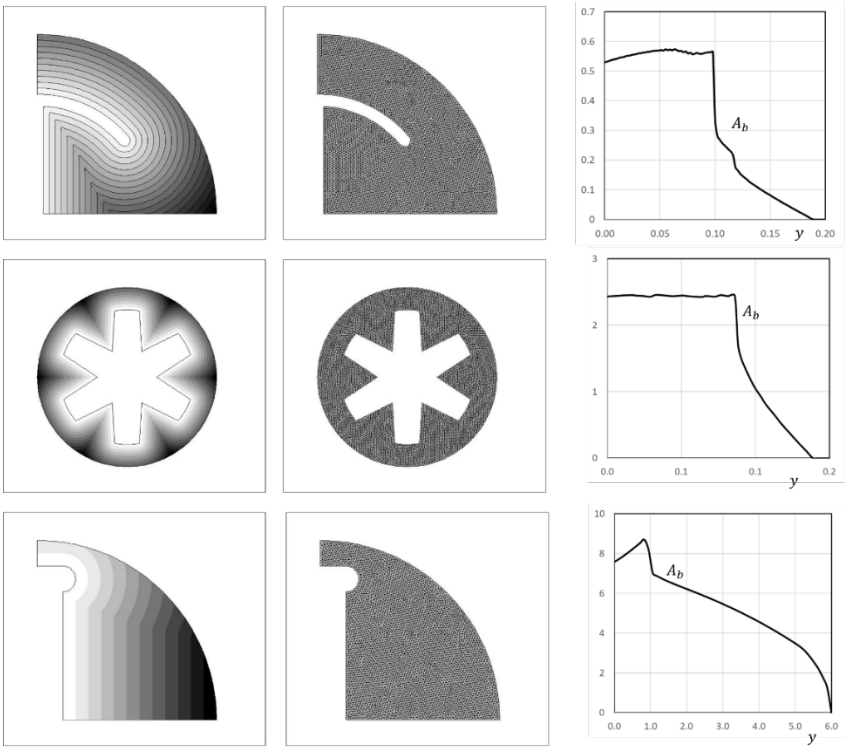

图17：从左到右依次为：三个代表性案例的等伪时间线、所用网格及燃烧表面积曲线（从上到下：锚形几何、优化的中性燃烧星形和未优化的哑铃形）。

图18展示了采用部分优化的轴向几何形状所得到的结果。恒定伪时间线展示了各种情况；而燃烧面积曲线只需稍作调整，就能呈现出相当平坦的轮廓。

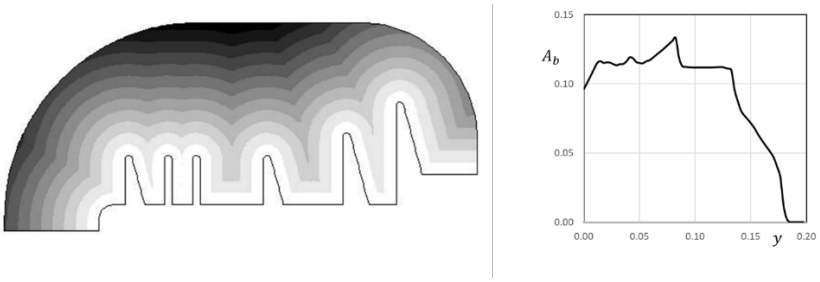

图18：手动优化过程中，采用轴向槽型药柱的低长细比发动机对应几何形状的等伪时间线和燃烧面积曲线。

6.2.7 误差分析

选择一种简单的带槽几何结构进行误差分析。这种几何结构涵盖了两个值得关注的方面：燃烧前沿的膨胀（其燃烧周长会增加），以及两个燃烧前沿的碰撞，并由此产生焦散。这是一个简单的情况，可以通过与该问题的解析解进行比较来计算误差。

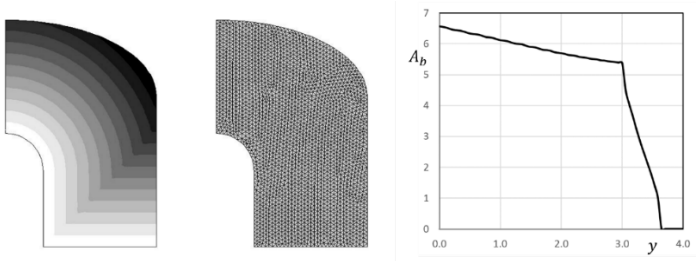

图19：用于评估离散误差的问题中的伪时间等值线（左）、2500节点网格（中）和燃烧面积（右）。

问题在于燃烧前沿从径向槽向前推进（利用垂直对称性，仅考虑计算域的右半部分）。该径向槽由一段直线段和末端的半圆组成。如图19所示，发动机壳体位于上边界和右边界处，燃烧前沿会从右边界离开计算域。图中曲线描绘了该几何形状下燃烧面积的变化：首先，由于圆形扩展使周长增加，同时焦散造成几何形状的破坏，出现一段中性燃烧；随后，燃烧前沿离开非对称上部，燃烧面积大幅下降。

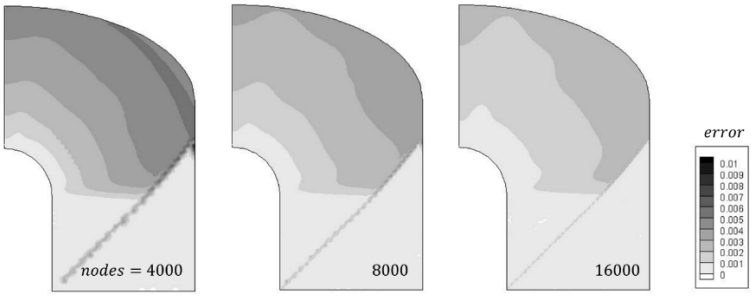

图20：网格中节点数不同时，单槽问题的归一化误差等值线。

图20展示了采用不同网格节点数进行模拟所得的归一化误差。误差定义为计算值与解析精确值之差。误差以燃烧前沿达到的最大侵蚀深度进行归一化，因此图中的等值线能够反映相对误差。之所以采用这一处理方法，是因为在初始轮廓处，前向坐标值非常小，无法计算相对误差。所有情况下，直线前沿推进时产生的误差都极小。然而，在不连续性处误差较为明显，并且其绝对值在整个扩展范围内不断增大。在所分析的情况中，最大误差出现在最粗网格对应的结果中，小于1%，且位于不连续性与轮廓相交处。增加网格节点数可显著降低误差。正如前文所述，即使网格规模不大，所得结果也非常可靠。图中较密的网格给出的结果显示，前沿位置误差小于0.3%。

7. 结论

燃面退移分析是计算固体推进剂火箭发动机性能的核心问题。自这类发动机开始发展以来，人们采用了多种方法来解决这一问题。最初使用的方法纯粹是解析方法，只能应用于简单的几何形状；不过，一些研究人员凭借高超的技巧，也解决了具有工业应用价值的复杂情况。为了实现计算自动化，人们开始使用早期数字计算器；随后，现代计算机上的数值方法被应用于能够充分描述自由表面运动学的微分方程，从而使燃面退移问题达到了显著的技术成熟度。此外，近年来还发展出了一系列现象学方法，这些方法利用解的特定性质，例如最短时间原理或皮奥贝尔论述，能够获得有趣的结果，但难以推广到退移速度不均匀的问题。

最通用且最有效的方法在于求解程函方程。正如本文所示，该方程是通过对这一过程进行详细分析得到的。尽管早在本世纪初，人们就开始研究该方程的直接求解方法，并由此产生了强大而灵活的各种方法，但在过去二十年中，相关发展已转向使用所谓的水平集方法来求解燃面退移问题。基于水平集方法的计算采用有符号水平集函数求解一个哈密顿-雅可比方程，从而稳健、可靠地获得解，不受待分析几何形状或退移速度分布的限制。然而，对于燃面退移问题而言，这种策略显得过于复杂。水平集方法能够解决比燃面退移更为一般的问题，但由于其广泛应用于各种自由边界问题以及

众多截然不同的领域，因此广受欢迎。从总体效率的角度来看，燃面退移问题应在推进剂体积的非结构化离散上使用程函方程求解，从而能够处理固体推进剂火箭发动机设计问题所要求的任何几何复杂性。该方法具有较高的计算效率，尤其是与固体推进剂火箭发动机设计中需要进行的其他类型分析（例如结构分析或内流空气动力学计算）相比更是如此。其原因在于只需对一个未知量进行求解，并且网格划分无需达到计算流体力学网格那样的复杂程度。

本文阐述了燃烧前沿传播的基本理论，对现有燃面退移分析文献进行了批判性综述，凸显了解析方法解决非常一般问题（例如双组元推进剂问题）的能力，并展示了通过简单的时间推进求解任意药柱设计问题时，积分程函方程方法的强大功能与灵活性。

8. 致谢

本研究是 PILUM 项目（用于部署在空中平台上的微型和纳米卫星运载火箭技术研究项目）的一部分。该项目由 INTA（埃斯特万·特拉达斯国家航空航天技术研究所）发起。该研究所是西班牙公共行政部门下属的自治机构，负责航空航天与国防技术研究。本研究尤其得到了 INTA马拉尼奥萨园区火箭与正交电子学部负责人耶稣·桑切斯中校的支持。此外，本研究还部分获得了西班牙教育与科学部奖学金—合作计划的资助，另一部分资助则来自马德里理工大学发起的类似计划。

9. 参考文献

[1] D. E. Coats、G. R. Nickerson、A. L. Dang 和 S. S. Dunn，“固体推进性能程序（SPP）”，载于第23届AIAA/SAE/ASME/ASEE联合推进会议，圣迭戈（美国加利福尼亚州），AIAA论文87-1701，1987年。[2] F. R. Billheimer、J. S. Wagner，“固体推进剂药柱设计中的形态连续体”，载于《推进与再入物理学》，爱思唯尔，1970年，第152–187页。[3] G. Thibodaux Jr、J. G. Swain、R. L. Wright，《球形固体推进剂火箭发动机的分析与实验研究》。华盛顿：美国国家航空咨询委员会研究备忘录L57G12a，1957年。[4] M. W. Stone，“开槽管状药柱设计”，《美国火箭学会期刊》，第31卷第2期，第223–228页，1961年，doi：10.2514/8.5435。[5] C. Tola 和 M. Nikbay，“通过解析燃面退移分析对固体火箭发动机进行内弹道建模”，《航天器与火箭》，第56卷第2期，第498–516页，2019年，doi：10.2514/1.A34065。[6] A. Rafique、Amer F.、Zeeshan、Qasim、Kamran 和 L. Guozhu，“星形药柱设计与优化的新范式”，《航空工程与航空航天技术》，第87卷第5期，第476–482页，2015年，doi：10.1108/AEAT-07-2013-0141。

[7] A. Kamran、L. Guozhu、J. Godil、Z. Siddique、Q. Zeeshan 和 A. F. Rafique，“鳍柱形药柱的设计与性能优化”，AIAA建模、仿真与技术会议，八月，第1–10页，2009年，doi：10.2514/6.2009-6234。[8] N. Y. Shapiro、Ya. M. Mazing、G. Yu. Prudnikov，“SOLIO燃料火箭发动机理论”，1969年。[9] S. Krishnan 和 T. K. Bose，“固体推进剂火箭多推进剂星形药柱的设计”，《国防科学杂志》，第30卷第1期，第21–30页，1980年，doi：10.14429/dsj.30.6407。[10] S. S. Dunn 和 D. E. Coats，“使用SPP97代码进行三维药柱设计与弹道分析”，第33届联合推进会议暨展览会，第1–14页，1997年，doi：10.2514/6.1997-3340。[11] D. E. Coats、J. C. French、S. S. Dunn 和 D. R. Berker，“ 对固体推进性能程序（ SPP ）的改进 ”，载于第 39 届 AIAA/ASME/SAE/ASEE 联合推进会议暨展览会，美国阿拉巴马州亨茨维尔，AIAA论文2003-4504，2003年，七月，doi：10.2514/6.2003-4504。[12] D. E. Coats 和 A. L. Dang，“固体推进性能程序（SPP’12）的改进及喷管性能预测综述”，第50届AIAA/ASME/SAE/ASEE联合推进会议，美国俄亥俄州克利夫兰，AIAA论文2014-3804，第1–8页，2014年，doi：10.2514/6.2014-3804。[13] S. Scippa，《推进剂药柱设计》，1988年。[14] G. Püskülcü 和 A. Ulas，“固体推进剂火箭发动机的三维药柱燃面退移分析：第二部分——建模与仿真”，《航空航天科学与技术》，第12卷第8期，2008年，doi：10.1016/j.ast.2008.01.002。[15] A. Mahjub、Q. Azam、M. Z. Abdullah 和 N. M. Mazlan，“基于CAD的固体火箭发动机三维药柱燃面退移分析”，2020年，doi：10.1007/978-981-15-4756-0_28。[16] A. Abdelaziz 和 L. Guozhu，“使用遗传算法的二维星形药柱优化方法”，2018年，doi：10.1109/IBCAST.2018.8312216。[17] K. O. Reddy 和 K. M. Pandey，“三维星形固体推进剂药柱的燃面退移分析”，《国际先进计算机科学与工程趋势期刊》，第2卷第1期，第215–223页，2013年。[18] A. Kamran 和 L. Guozhu，“三维径向槽药柱构型的设计与优化”，《中国航空学报》，第23卷第4期，第409–414页，2010年，doi：10.1016/S1000-9361(09)60235-1。[19] A. Abdelaziz 和 L. Guozhu，“三维改型星形药柱设计与燃面退移分析”，《国际建模与优化期刊》，第7卷第3期，2017年。[20] P. Noh、W. F. Woodward，“SLIC（简单线界面计算）”，1976年。[21] N. Mashayek、F. Farzad、H. Ashgriz，“一种与几何形状无关的固体推进剂药柱设计技术”，《机械工程师学会学报G辑：航空航天工程》，第210卷，第209–220页，1996年，doi：10.1243/PIME_PROC_1996_210_365_02。[22] R. J. Hejl 和 S. D. Heistert，“使用自适应网格进行固体火箭发动机药柱燃面退移分析”，《推进与动力》，第11卷第5期，第1006–1011页，1995年。[23] W. Ki、T. Ko、S. Kim 和 W. Yoon，“使用部分界面追踪方法进行三维药柱燃面退移分析”，《航空航天科学与技术》，第68卷，2017年，doi：10.1016/j.ast.2017.04.023。[24] M. A. Willcox、M. Q. Brewster、K. C. Tang 和 D. S. Stewart，“使用最小距离函数进行固体推进剂药柱设计与燃面退移模拟”，《推进与动力》，第23卷第2期，第465–475页，2007年，doi：10.2514/1.22937。[25] M. A. Willcox、M. Q. Brewster、K. C. Tang、D. S. Stewart 和 I. Kuznetsov，“使用三维药柱燃面退移进行固体火箭发动机内弹道仿真”，《推进与动力》，

第 23 卷, 第 3 期, pp. 575–584 , 2007, doi: 10.2514 /1.22971.

[26] P. REN 等人，“基于快速最小距离函数计算和改进四面体推进法的固体火箭发动机推进剂药柱燃面退移仿真”，《中国航空学报》，第34卷，第4期，第208–224页，2021年4月，doi: 10.1016/j.cja.2020.08.052。[27] A. Javed、I. A. Sundaram 和 D. Chakraborty，“采用最小距离函数进行药柱燃面退移分析的固体火箭发动机内弹道程序”，《国防科学杂志》，第65卷，第3期，2015年，doi: 10.14429/dsj.65.8304。[28] Y. Liu、J. Sui、Y. Zhao、F. Bao 和 W. Hui，“固体推进剂火箭发动机三维药柱燃面退移分析的大规模并行算法”，载于《第22届工业工程与工程管理国际会议（2015）论文集》，2016年。[29] Y. Ata、D. F. Kurtulus 和 O. U. Arkun，“固体火箭发动机三维药柱燃面退移仿真工具的开发”，载于《可持续航空发展》，T. H. Karakoç、C. O. Colpan 和 Y. \cSöhret 编。施普林格：施普林格国际出版公司，2018年，第65–90页。[30] Y. H. Hwang 和 C. H. Chiang，“用于药柱燃面退移分析的简易表面追踪方法”，《制导、控制与动力学杂志》，第38卷，第6期，2015年，doi: 10.2514/1.B35682。[31] J. A. Osher, S.;Sethian，“以曲率相关速度传播的锋面：基于哈密顿–雅可比公式的算法”，《计算物理学杂志》，第79卷，第1期，第12–49页，1988年，doi: 10.1016/0021-9991(88)90002-2。[32] S. Osher、R. Fedkiw 和 K. Piechor，《水平集方法与动态隐式曲面》，第57卷，第3期，2004年。[33] J. A. Sethian，《水平集方法与快速行进法》。剑桥大学出版社，1996年。[34] C. Yildirim 和 H. Aksel，“固体推进剂火箭发动机药柱燃面退移的数值模拟”，2005年，第7期，doi: 10.2514/6.2005-4160。[35] F. Qin、H. Guoqiang、L. Peijin 和 L. Jiang，“基于水平集方法的复杂药柱固体火箭发动机燃烧表面计算算法研究”，《AIAA/ASME/SAE/ASEE第42届联合推进会议论文集》，第6卷，第7期，第4476–4484页，2006年，doi: 10.2514/6.2006-4774。[36] E. Cavallini，《固体火箭发动机内弹道建模与数值模拟》，罗马智慧大学，2008年。[37] Y. Liu、K. Yin、F. Bao、Y. Liu 和 E. Wu，“药柱燃烧表面退移的高效仿真”，《应用力学与材料》，第466–467卷，第1期，第314–318页，2012年，doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.466-467.314。[38] A. P. Lorente，“用于固体火箭发动机药柱燃面退移分析的准三维模型开发”，载于《国际宇航大会论文集》，2013年，第9卷。[39] W. Sullwald、F. Smit、A. Steenkamp 和 W. Rousseau，“采用水平集方法和蒙特卡罗体积积分进行固体火箭发动机药柱燃面退移分析”，AIAA/ASME/SAE/ASEE第49届联合推进会议，第1部分F，2013年，doi: 10.2514/6.2013-4087。[40] C. W. Rousseau、S. F. Steyn、W. Sullwald、E. R. De Kock、G. J. F. Smit 和 J. H. Knoetze，“快速固体火箭发动机设计”，AIAA/ASME/SAE/ASEE第49届联合推进会议，第1部分F，第1–12页，2013年，doi: 10.2514/6.2013-3789。[41] D. H. Wang、Y. Fei、F. Hu 和 W. H. Zhang，“固体火箭发动机药柱设计优化的集成框架”，《机械工程师学会学报G辑：航空航天工程》，第228卷，第7期，第

1156–1170，2014年，doi：10.1177/0954410013486589。

[42] G. L. Mejia、R. J. Rocha、L. Rocco、S. R. Gomes、K. Iha 和 J. A. F. F. Rocco，“考虑复杂三维推进剂药柱几何形状的固体火箭发动机燃烧模拟”，AIAA/SAE/ASEE第52届联合推进会议，2016年，第1–6页，2016年，doi: 10.2514/6.2016-5098。[43] M. H. Tshokotsha，“采用水平集方法模拟药柱燃面退移的固体火箭发动机内弹道建模”，2016年。[44] R. Wei、F. Bao、Y. Liu 和 W. Hui，“基于水平集方法的固体火箭发动机药柱燃面退移组合加速方法”，《国际航空航天工程杂志》，2018年，第2018卷，第5期，2018年，doi: 10.1155/2018/4827810。[45] S. Mesgari、M. Bazazzadeh 和 A. Mostofizadeh，“结合自适应基函数构造的遗传算法进行Finocyl药柱设计”，《国际航空航天工程杂志》，2019年，第2019卷，2019年，doi: 10.1155/2019/3060173。[46] S. H. Oh、H. J. Lee 和 T. S. Roh，“固体推进剂药柱三维数值燃面退移分析中的混合方法开发”，《航空航天科学与技术》，第106卷，106103页，2020年，doi: 10.1016/j.ast.2020.106103。[47] A. Chiapolino、F. Fraysse 和 R. Saurel，“在非结构网格上求解哈密顿–雅可比型方程的方法”，《科学计算杂志》，第88卷，第1期，第1–43页，2021年，doi: 10.1007/s10915- 021-01517-9。[48] E. Saintout、A. Le Roux、D. Ribereau 和 P. Perrin，“ELEA——用于推进剂药柱三维表面回归分析的工具”，载于AIAA/ASME/SAE/ASEE第25届联合推进会议，美国加利福尼亚州蒙特雷，七月10-12，AIAA 89-2782，1989年，第.页，doi: 10.2514/6.1989-2782。[49] D. Le Roux、A. Y.; NaMah、G. S.;Riberau，“推进剂药柱燃烧表面退移的数值模型”，载于《燃烧及相关主题的数学建模》，1988年，第505–514页，doi: 10.1007/978-94-009-2770-4_35。[50] G. Uhrig、B. Ducourneau 和 P. Liesa，“固体火箭发动机推进剂药柱的计算机辅助初步设计”，AIAA/ASME/SAE/ASEE第23届联合推进会议，1987年，1987年，doi: 10.2514/6.1987-1734。[51] F. Dauch 和 D. Ribéreau，“用于固体火箭发动机药柱设计和内弹道评估的软件：PIBAL®”，AIAA/ASME/SAE/ASEE第38届联合推进会议暨展览会，第2002–4299卷，2002年。[52] P. Le Breton、D. Ribéreau、F. Godfrey、R. Abgrall 和 S. Augoula，“通过耦合二维表面燃面回退与压力场计算进行固体火箭发动机性能分析”，1998年，doi: 10.2514/6.1998-3968。[53] D. Ribéreau、P. Le Breton 和 E. Giraud，“基于三维药柱装填模拟推导的混合物分层进行固体火箭发动机三维表面燃面回退计算”，载于《第35届联合推进会议暨展览会》，1999年，第6期，doi: 10.2514/6.1999-2802。[54] J. A. Sethian，《快速行进法与水平集方法》，1998年。[55] N. Ashgriz 和 J. Y. Poo，“FLAIR：用于平流和界面重构的通量线段模型”，《计算物理学杂志》，第93卷，第2期，第449–468页，1991年，doi: 10.1016/0021- 9991(91)90194-P。[56] R. Bertacin、F. Ponti 和 A. Annovazzi，“用于固体火箭发动机非均匀燃烧的新型三维弹道模型”，AIAA/ASME/SAE/ASEE第48届联合推进会议暨展览会，2012年，第8期，第1–13页，2012年，doi: 10.2514/6.2012-3974。[57] F. Ponti、S. Mini、L. Fadigati、V. Ravaglioli、A. Annovazzi 和 V. Garreffa，“……的影响”

固体火箭发动机性能的影响因素”，《Acta Astronaut.》，第189卷，5月号，第283–297页，2021年，doi: 10.1016/j.actaastro.2021.08.030。[58] C. Yildirim，《固体推进剂火箭发动机三维药柱燃烧退移与内部流动分析》。中东技术大学。[59] R. L. Nowack，“波前与程函方程的解”，《Geophys. J. Int.》，第110卷，第1期，第55–62页，1992年，doi: 10.1111/j.1365-246X.1992.tb00712.x。[60] Gueyffier 等人，“火箭燃烧室中药柱燃烧与流动模拟的精确计算”，《J. Propuls. Power》，第31卷，第6期，第1761–1776页，2015年，doi: 10.2514/1.B35736。[61] K. A. Toker，“三维阻滞壁及其附近的流动”，2004年。[62] M. Barrere、A. Jaumotte、B. Fraeijs de Vaubeke 和 J. Vandenkerckhove，《火箭推进》，1960年。[63] 美国国家航空航天局，“固体推进剂药柱设计与内弹道”，第3月号，1972年。[64] M. G. Crandall、H. Ishii 和 P. L. Lions，“二阶偏微分方程粘性解指南”，《Bull. Am. Math. Soc.》，第27卷，第1期，第1–67页，1992年，doi: 10.1090/S0273-0979-1992-00266-5。[65] M. G. Crandall 和 P.-L. Lions，“哈密顿-雅可比方程的粘性解”，《Trans. Am. Math. Soc.》，第277卷，第1期，第1–42页，1983年。[66] M. G. Crandall 和 P. L. Lions，“哈密顿-雅可比方程解的两种近似”，《Math. Comput.》，第43卷，第167期，第1页，1984年，doi: 10.2307/2007396。[67] S. Osher 和 J. A. Sethian，“以曲率相关速度传播的前沿：基于哈密顿-雅可比方程的算法”，《计算物理学杂志》，第79卷，第1期，第12–49页，1988年。[68] A. Harten、B. Engquist、S. Osher 和 S. R. Chakravarthy，“一致高阶精度本质无振荡格式，III”，《计算物理学杂志》，第71卷，第2期，第231–303页，1987年，doi: 10.1016/0021-9991(87)90031-3。[69] C.-W. Shu 和 S. Osher，“本质无振荡激波捕捉格式的高效实现”，《计算物理学杂志》，第77卷，第439–471页，1988年。[70] G. S. Jiang 和 D. Peng，“哈密顿-雅可比方程的加权本质无振荡格式”，《SIAM J. Sci. Comput.》，第21卷，第6期，第2126–2143页，2000年，doi: 10.1137/S106482759732455X。[71] S. Osher 和 C.-W. Shu，“哈密顿-雅可比方程的高阶本质无振荡格式”，《SIAM J. Numer. Anal.》，第28卷，第4期，第907–922页，1991年。[72] R. Abgrall，“三角网格上一级哈密顿-雅可比方程的数值离散”，《Commun. Pure Appl. Math.》，第XLIX卷，第1339–1373页，1996年。[73] M. Bardi 和 L. C. Evans，“关于哈密顿-雅可比方程解的Hopf公式”，《Nonlinear Anal.》，第8卷，第11期，第1373–1381页，1984年，doi: 10.1016/0362-546X(84)90020-8。[74] S. Augoula 和 R. Abgrall，“三角网格上哈密顿-雅可比方程的高阶数值离散”，《J. Sci. Comput.》，第15卷，第2期，第197–229页，2000年，doi: 10.1023/A:1007633810484。[75] Y.-T. Zhang 和 C.-W. Shu，“三角网格上哈密顿-雅可比方程的高阶格式”，《SIAM J. Sci. Comput.》，第24卷，第3期，第1005–1030页，2003年，doi: 10.1016/j.cam.2003.09.051。[76] X. G. Li、W. Yan 和 C. K. Chan，“非结构网格上哈密顿-雅可比方程的数值格式，

《数值数学》，第94卷，第2期，第315–331页，2003年，doi: 10.1007/s00211- 002-0418-9。[77] R. Abgrall 和 J. D. Benamou，“非结构网格上的大规模光线追踪与程函求解器：在Marmousi模型中计算多值走时场的应用”，《地球物理学》，第64卷，第1期，第230–239页，1999年，doi: 10.1190/1.1444519。[78] J. A. Sethian 和 A. Vladimirsky，“非结构网格上程函方程及相关哈密顿-雅可比方程的快速方法”，《美国国家科学院院刊》，第97卷，第11期，第5699–5703页，2000年，doi: 10.1073/pnas.090060097。[79] L. Huang、C. Shu 和 M. Zhang，“求解程函方程的快速扫描高阶WENO方法的数值边界条件”，《计算数学杂志》，第26卷，第3期，第336–346页，2008年。