arXiv:2301.04560v1 [math.DS] 11 Jan 2023

基于延迟嵌入谱子流形的不可线性化动力学模型降阶

Joar Ax°as[1],George Haller[1]*

[1]机械系统研究所，苏黎世联邦理工学院，莱昂哈德街 21 号，8092 苏黎世，瑞士

2023年1月12日

摘要

延迟嵌入是广泛应用于各类数据驱动动力系统模型降阶方法中的常用技术，包括动态模态分解（DMD）、Koopman分解的Hankel替代视角（HAVOK）、最近邻预测以及降阶至谱子流形（SSMs）。在发展这些应用的过程中，多位作者观察到，延迟嵌入似乎会将数据分解为若干模态，其方向仅取决于采样系统的谱。在本研究中，我们通过证明不动点处延迟嵌入线性化系统的特征向量完全由相应的特征值决定，使这一观察得以精确表述，即便观测量是多维的，这一结论仍然成立。这意味着，可以利用特征值的估计，先验预测延迟嵌入不变流形的切空间。我们将研究结果应用于三个数据集，以识别多模态谱子流形，并分析其非线性模态相互作用。虽然谱子流形是本研究的重点，但这些结果可推广至任何在不动点处与一组特征向量相切的延迟嵌入不变流形。因此，我们预期这一理论适用于多种数据驱动模型降阶方法。

1 背景

近期，非线性动力学领域的许多研究都聚焦于数据驱动模型降阶方法。这类算法根据实验或仿真得到的采样轨迹，构建系统动力学的简化模型。开发这些方法时，常见目标包括降维、稀疏性和可解释性。常用方法包括本征正交分解（POD） [1, 2] 和动态模态分解（DMD） [3, 4, 5], ，它们基于各种线性假设对数据拟合模型。

*通讯作者。电子邮箱：georgehaller@ethz.ch

然而，线性模型无法捕捉典型的非线性（或不可线性化）现象。这类现象包括彼此孤立且紧致的稳态（如不动点、极限环和不变环面）共存及其相互转变 [6]。为弥补这一不足，非线性动力学稀疏辨识（SINDy）算法利用非线性函数库 [7]对训练数据拟合稀疏非线性模型。然而，函数库的选择取决于用户 [8] 以及所用的坐标系。此外，函数库的规模会随着问题维度增加而迅速扩大 [9]。神经网络虽能对非线性现象进行模式匹配 [10, 11, 12], ，但其生成的模型往往难以解释，且在训练数据范围之外的泛化能力较差 [13]。

近年来，谱子流形（SSM）已成为内禀非线性系统模型降阶的一种替代方法。SSM 是与从不动点 [14] 或周期轨道、准周期轨道[15]发出的非共振谱子空间相切的唯一最光滑不变流形。因此，吸引型 SSM 是非线性系统低维模型的理想候选者 [16, 17]。与 SSM 相关的概念包括非线性正规模态（NNM），其定义可以是保守系统 [18, 19, 20] 中的周期运动集合，也可以是不变流形 [21, 22] 和不变谱叶状结构 [23]。本文将采用 SSM，因为它具有唯一性，在耗散系统中满足定义明确的条件时即可存在，维数可以任意，并且能够包含内部共振模态。

计算出 SSM 后，我们可以将方程或数据投影到其上，从而将系统约化为高保真模型。基于方程自动将模型降阶到 SSM [24] ，能够成功预测小幅谐波激励 [25, 26, 27] 下的响应及其分岔 [28, 29], ，且这一方法也已扩展至受约束机械系统 [30]。最近，文献 [31]提出了一种数据驱动方法，可识别 SSM 几何及其在观测空间中轨迹上的约化动力学 [32]。该方法还会将基于 SSM 约化的动力学转换为正规形，在保留关键非线性的同时，尽可能稀疏地描述动力学 [33]。此后，基于谱子流形的模型降阶已应用于流体和结构动力学 [34, 35] 以及控制 [36]领域的数值和实验数据集。文献 [37] 展示了如何通过简化算法公式提高数据驱动谱子流形识别的计算效率。

延迟嵌入是一种通过将若干个彼此间隔一个时间延迟的测量值视为独立观测量，来重构不变集的方法。该方法通常用于辅助非线性动力系统中的数据驱动模型辨识。基于延迟嵌入的模型降阶方法包括扩展动态模态分解（DMD）[38, 39], Koopman分解的Hankel替代视角（HAVOK）[40], 特征系统实现算法（ERA） [41], 闭合建模 [42],以及最近邻预测 [43, 44]。此外，延迟嵌入还被广泛用于基于数据的谱子流形模型降阶 [31, 34]。对于谱子流形而言，更深入地理解延迟嵌入映射有助于改善数据拟合效果，并生成更准确的降阶模型 [37]。这促成了我们当前关于如何高效且准确地在延迟坐标中重构不变流形的研究

我们目前关于如何在延迟坐标中高效且准确地重建不变流形的研究。

将延迟嵌入引入动力系统作为一种工具，主要是因为人们发现，它可以根据混沌系统的标量测量重建奇异吸引子 [45, 46]。Floris Takens 著名的嵌入定理 [47] 及其后续扩展 [48] 表明，在一般性假设下，原则上，延迟嵌入能够在适当的观测空间中从完整状态空间恢复不变集。然而在实践中，时间延迟和嵌入维数的选择对于获得稳健模型至关重要 [49,50, 51]。用于选择混沌吸引子重建所需延迟参数的方法有很多，包括最小化连续样本之间的互信息 [52], 、最小化伪近邻数量 [53, 54], , 以及采用蒙特卡洛决策树搜索方法 [55]。

近期研究还探索了延迟嵌入不变集的几何结构，以期改进模型阶次缩减。对于周期数据，研究表明，对延迟嵌入快照矩阵进行奇异值分解（SVD）会收敛到傅里叶分析 [56]。恢复此类周期轨道所需的延迟数等于傅里叶谱的系数数量 [57]。在此类延迟嵌入周期轨道的连续快照之间拟合线性映射，会得到一个伴随矩阵，其特征向量由范德蒙德矩阵的逆矩阵给出 [58, 59]。

此外，已有研究建立了卷积坐标 [60] 与 Frenet-Serret 标架 [61] 之间的联系，并提出将延迟坐标中的奇异值分解模态解释为主成分轨迹 [62]。对于观测信号由振荡正弦函数组成这一特殊情形，观测空间包含由信号频率确定的不变空间 [37]。最近有研究表明，延迟嵌入线性系统的动态模态分解模态中，后续分量之间相差一个相应特征值的乘数 [63]。

本文探讨非线性延迟嵌入系统在不动点附近的局部动力学。我们表明，延迟嵌入动力学的线性部分仅取决于相应特征值，而与观测函数及完整状态空间的特征向量无关。具体而言，观测空间中的特征向量由范德蒙德矩阵的列给出，该矩阵由特征值乘以时间延迟后取指数构成。与已有研究不同，我们不尝试对非线性动力学进行线性化，也不将关注范围局限于周期轨道。相反，我们的结果表明，非线性延迟嵌入系统存在一个谱子流形，其切空间与该范德蒙德矩阵的列空间重合。我们利用这一结构，在三个机械系统示例中辅助谱子流形的数据驱动识别。我们认为，这些结果加深了对降阶建模中延迟嵌入的理解，也揭示了基于谱子流形的模型降阶的新机遇。

本文结构如下。首先，第2节简要介绍SSM理论，并概述一种快速的基于SSM的数据驱动建模方法。第3节概述一种关于不变

流形的延迟嵌入切空间的新理论，并探讨其在基于谱子流形的模型降阶中的应用。第4节中，我们利用这些结果，在二自由度振子的示例、冯卡门梁多模态振动的仿真，以及晃荡液舱复杂行为的实验中识别谱子流形。第5节中，我们根据这些示例得出结论，并讨论理论可能的进一步拓展。最后，附录A给出了第3节所述结果的证明。

2 谱子流形的模型降阶

在此，我们概述光滑非线性系统中关于严格降阶至谱子流形的已有结果，并总结 fastSSM——我们在此使用的、用于从数据中识别谱子流形的算法。

2.1 谱子流形理论

考虑一个属于 $\mathcal{C}^l$ 类的非线性自治动力系统，其中 $l \in \{\mathbb{N}^+, \infty, a\}$ 表示解析性，其形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{g} \sim \mathcal{O}(|\boldsymbol{x}|^2), \quad \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

将该系统的流映射记为 $\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}(t,\ \boldsymbol{x}_0)$，其中 $\boldsymbol{x}(t,\ \boldsymbol{x}_0)$ 表示方程 (1) 中从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发、初始时间为 0 的轨迹。我们假设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可对角化，且其特征值的实部要么全都严格为负，要么全都严格为正。取 d 个 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，并将它们张成的空间记为 $\mathcal{E}$，即 $\mathbb{R}^n$ 的一个 d 维谱子空间。在这一步中，我们通常选择最慢的 d 个特征方向。

假设与 $\mathcal{E}$ 对应的 d 特征值和 $\boldsymbol{A}$其余的 $n-d$ 特征值之间不存在共振，则该非线性系统存在唯一的最光滑不变流形 $\mathcal{M}$，其在原点处与 $\mathcal{E}$ 相切，即 $T_{\mathbf{0}}\mathcal{M} = \mathcal{E}$ [14]。按照[16], 的说法，我们将 $\mathcal{M}$ 称为谱子流形（SSM）。若$\mathcal{E}$ 与 $\boldsymbol{A}$的其余谱之间存在共振，则通常不存在 d维谱子流形，此时必须将共振模态子空间纳入 $\mathcal{E}$，以获得更高维的谱子流形。若 $\boldsymbol{A}$的所有特征值均稳定，则最慢的谱子流形会吸引邻近轨迹，因此适用于模型阶次缩减。

开源数值软件包 SSMTool 可从任意有限维非线性系统 [24, 27]中计算谱子流形。最近，研究人员开发了 SSMLearn 软件包，用于从非线性动力系统 [31, 34]的数据中寻找谱子流形。本文将应用参考文献 [37]提出的简化数据驱动谱子流形算法 fastSSM。

2.2 快速数据驱动的谱子流形模型阶次缩减

基于动力学的机器学习旨在从数据中重建谱子流形，然后使用谱子流形降阶模型来预测完整系统的响应——

响应 [31]。在此，我们使用 fastSSM [64] ，通过观测空间中的轨迹快照来识别谱子流形。该过程分为两个步骤：流形几何检测和正规形计算。以下总结参照文献 [37], ，详情请见该文献。该文献区分了用于二维谱子流形三次多项式近似的算法与其向任意阶数和维数推广的算法，而在本文中，我们将这两种算法统称为 fastSSM。

谱子流形采用图形式进行参数化，即，我们将 $\mathcal{M}$ 构造为谱子空间 $\mathcal{E}$上的图。数据由观测空间中的快照 $\boldsymbol{y}(t_i) \in \mathbb{R}^p$ 组成，该观测空间的维数为 p。对于每条轨迹，我们由 N 个快照构造快照矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{p\times N}$ ，如下所示

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{y}(t_1) & \boldsymbol{y}(t_2) & \dots & \boldsymbol{y}(t_N) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2}$$

设 $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{p\times d}$ 为一个矩阵，其列近似张成谱子流形的切空间。在 fastSSM 中，标准做法是通过对快照矩阵 $\boldsymbol{Y}$进行奇异值分解来获得 $\boldsymbol{T}$。不过，如果切空间事先已知，也可以直接指定 $\boldsymbol{T}$。记 $(\cdot)^\dagger$ 为摩尔－彭若斯伪逆，我们将每个快照 $\boldsymbol{y}_i$ 投影到该子空间上，从而得到 d维约化坐标 $\boldsymbol{\xi}$ ，如下所示

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}^\dagger \boldsymbol{y}. \tag{3}$$

我们用 $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{C}^{d\times N}$ 表示快照矩阵在切空间上的投影。

接下来，我们旨在利用数据，将 $\mathcal{M}$ 的嵌入近似为一个 m 阶多元多项式的图:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi}^{1:m}, \quad \boldsymbol{M} \ = [\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \dots, \boldsymbol{M}_m], \quad \boldsymbol{M}_i \in \mathbb{R}^{p\times d_i}, \tag{4}$$

其中， d_i 是阶数为 i 的 d元单项式的数量，而 $(\cdot)$ 中的上标$^{1:l}$ 表示从 $\mathbf{1}$ 阶到 l 阶的所有单项式构成的向量。我们通过多项式回归得到流形参数化系数 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{p\times d_{1:m}}$ ，从而得到解

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\Xi}^{1:m})^\dagger. \tag{5}$$

约化动力学通过另一组 $\mathcal{O}$（r）多项式回归进行近似，其系数矩阵为 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{d\times d_{1:r}}$，形式如下

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \approx \boldsymbol{G}\boldsymbol{\xi}^{1:r}, \quad \boldsymbol{G} = \dot{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\Xi}^{1:r})^\dagger. \tag{6}$$

最后，我们计算谱子流形约化动力学的正规形 [33] ，直至 h 阶。这相当于进行一个近恒等多项式变换，其系数为 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{d\times d_{1:h}}$ ，该变换从新坐标 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^d$ 出发，使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{\zeta}^{1:h} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{H}_{2:h}\boldsymbol{\zeta}^{2:h}, \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{\zeta}^{1:h} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{N}_{2:h}\boldsymbol{\zeta}^{2:h}. \end{aligned} \tag{7}$$

正规形与约化动力学是共轭的动力系统。因此，我们将 (7) 代入 (6)，得到

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\zeta}^{1:h})\boldsymbol{N}\boldsymbol{\zeta}^{1:h} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\zeta}^{1:h})^{1:r}. \tag{8}$$

矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 通过使用 SSMTool [27]，在递增阶次下递归求解（8）计算得到。

该过程要求训练数据充分接近 SSM，这可以通过从输入信号中移除初始瞬态来实现，初始瞬态可通过对训练数据 [34]进行谱分析加以识别。由于基于最慢 d 模态构建的 SSM 是唯一且具有吸引性的，因此该方法能够确保获得相关的训练数据。

3 延迟嵌入不变流形的切空间

在此，我们展示了当观测空间由信号的延迟嵌入产生时，如何解析地恢复固定点处不变流形的切空间。我们还描述了恢复得到的切空间如何促进在此类观测空间中重建谱子流形。

3.1 理论结果

对于动力系统（1），我们定义标量观测量 $\mu(\boldsymbol{x}(t))$，其中 $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可微函数，返回系统（1）的测量特征，例如位移坐标。为了从观测量中重建完整相空间的特征，我们使用延迟嵌入。我们将 p个以时间延迟 $\tau > 0$ 分隔的连续测量值进行堆叠，从而构造出维数为 p的观测空间。这得到如下形式的轨迹：$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}(t)) \in \mathbb{R}^p$，其中我们定义采样映射

$$\boldsymbol{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \begin{bmatrix} \mu(\boldsymbol{x}) \\ \mu(\boldsymbol{F}^{\tau}(\boldsymbol{x})) \\ \mu(\boldsymbol{F}^{2\tau}(\boldsymbol{x})) \\ \vdots \\ \mu(\boldsymbol{F}^{(p-1)\tau}(\boldsymbol{x})) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

一个重要问题是，系统 (1) 在 $\mathbb{R}^n$ 中的不变集如何在观测空间 $\mathbb{R}^p$中再现。具体而言，当完整的状态空间轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 位于一个 d维不变流形 $\mathcal{M}$上时，$\boldsymbol{y}(t)$ 是否也会如此？Takens 嵌入定理给出了肯定的回答。该定理指出，若 μ 是一般的，且 τ 的任何较小整数倍都不等于 (1) 中位于 $\mathcal{M}$内的任意可能周期轨道的周期，那么对于

$$p \geq 2d + 1, \tag{10}$$

˜流形 $\mathcal{M}$ 将通过映射 (9) [47]在 $\mathbb{R}^p$ 中具有一个微分同胚副本 $\mathcal{M}$ 。虽然 Takens 定理最初仅针对标量观测函数提出，但此后该结果已扩展至多维 $\boldsymbol{\mu}$ ，只要观测空间的总维数大于 $2d$ [65]即可。

$\mathcal{M}$ 的非线性几何和动力学，以及观测函数˜，都会影响 $\mathcal{M}$的几何。因此，对于一般的流映射，很难预测其几何。然而，在不动点 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{S}(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^p$附近，$\mathcal{M}$的 $\mathcal{O}(1)$阶展开，即其切空间$T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{M}$，可以直接确定，下面将对此进行说明。注意，由于流映射在原点处为恒等映射， $\boldsymbol{q}$ 位于观测空间的对角线上，其每个相同的分量均为 $\mu(\mathbf{0})$。

我们先将 (1) 改写为模态坐标形式：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}), \tag{11}$$

其中， $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ 包含 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量， $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$为对应的特征值，我们假设这些特征值互不相同。令 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{x}$，据此定义模态坐标 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ 。虽然观测函数定义为 $\boldsymbol{x}$的函数，但为方便表示，我们将其定义为 $\boldsymbol{z}$ 的函数，即 $\mu(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{E}\boldsymbol{z})$。

设 $\mathcal{M}$ 是式 (1) 的一个 d 维不变流形，它与原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 相交，并在此处与一组 d 个特征向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，……，$\boldsymbol{e}_d$ 相切，这些特征向量对应于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1，……，λ_d。我们将控制 $\mathcal{M}$ 上线性化动力学的 d 个特征值的范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{p\times d}$ 定义为 $V_{jk} = \mathrm{e}^{\lambda_k j\tau}$，即

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\lambda_1\tau} & \mathrm{e}^{\lambda_2\tau} & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_d\tau} \\ \mathrm{e}^{2\lambda_1\tau} & \mathrm{e}^{2\lambda_2\tau} & \cdots & \mathrm{e}^{2\lambda_d\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{(p-1)\lambda_1\tau} & \mathrm{e}^{(p-1)\lambda_2\tau} & \cdots & \mathrm{e}^{(p-1)\lambda_d\tau} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

定理 1. 在一般观测函数 $\mu\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和互异特征值 $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_d$ 的假设下，不动点处观测流形 $\mathcal{M}$ 的切空间可写为

$$T_{\boldsymbol{q}}\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{range}\,\boldsymbol{V}. \tag{13}$$

证明。 见附录 A.1。 □

图 1 展示了这一结果。请注意，观测函数必须满秩，正如下文的评注所述。

注1。 要使(13) 成立，必须满足 $\frac{\partial\mu}{\partial z_k}|_{\mathbf{0}} \neq 0\ \forall k \in \{1, \ldots, d\}$，这定义了 μ的一般性。如果观测函数的梯度与任一特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d$正交，那么采样映射 $\boldsymbol{S}$ 将不会是 $\mathcal{M}$的嵌入。

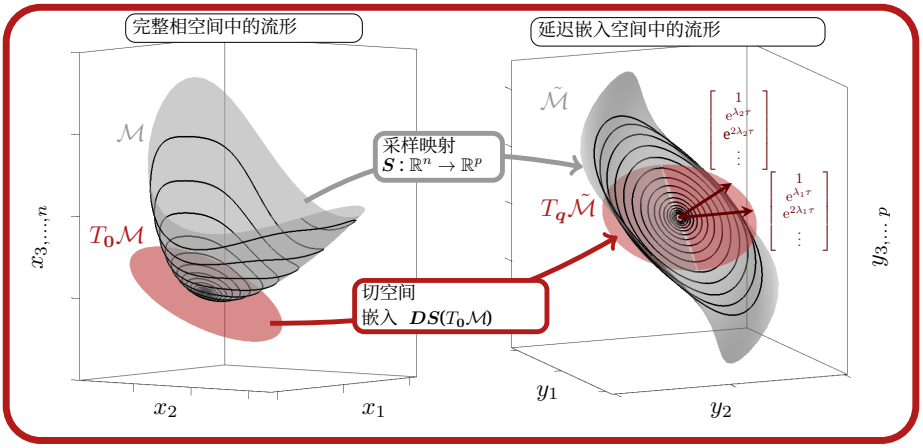


图1：不变流形$\mathcal{M}$的切空间 $T_0\mathcal{M}$ 的延迟嵌入。完整的状态空间流形 $\mathcal{M}$ （左）根据 Takens 定理，在观测空间（右）中有一个与之微分同胚的副本 $\tilde{\mathcal{M}}$ 。重构出的$\tilde{\mathcal{M}}$流形 $\mathcal{M}$ 的形状取决于流映射，但其切空间 $T_q\tilde{\mathcal{M}}$由不动点处的特征值直接确定，与 $\mathcal{M}$的几何以及观测函数 μ无关。

处理工程结构的对称性时，尤其应牢记这一点，正如我们将在下面的示例中所展示的那样。

定理 2. $\boldsymbol{V}$的列是不动点处线性化延迟嵌入系统的特征向量。实际上，观测空间中的动力学可以写成

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{\dagger}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}) + o(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}|) \tag{14}$$

证明。 见附录A.2。 □

推论1. 在观测空间 $\mathbb{R}^p$中，时间延迟 τ 和特征值λ_k 完全确定了动力学的切空间和线性部分。特别是，线性动力学与完整特征向量和观测函数均无关。

接下来，我们将说明在相应特征值近似已知时，如何利用这一结构从数据中参数化谱子流形。

最后，当观测函数是多维的，切空间会受到观测函数各个分量 μ_ℓ 对每个模态坐标 z_k 的相对依赖关系的影响。

定理3。 对于多维观测量 $\boldsymbol{\mu}$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$，其分量为

~μ_1、...、 μ_q，切空间 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{pq}$ 可表示为

$$T_{\boldsymbol{q}}\tilde{\mathcal{M}} = \operatorname{range} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \operatorname{diag}\left(\left.\frac{\partial \mu_1}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}} \right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{V} \operatorname{diag}\left(\left.\frac{\partial \mu_q}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}} \right) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

证明。 参见附录 A.3。 □

当观测函数是一组位移时，线性化的多维观测函数 $\left.\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}}$ 对应于系统在这些位移上的振型。因此，如果已知观测系统的振型和特征值，我们就可以直接计算 $\mathcal{M}$ 的~切空间。在标量观测量这一特殊情形下，切空间与观测函数无关，因此我们不需要任何有关振型的信息。

3.2 延迟嵌入谱子流形重构

这些理论结果可作为约束，用于辅助从数据中识别谱子流形。对于标量信号，且感兴趣的特征值 λ_1，.....， λ_d 已知近似值时，我们选择（3）中出现的切空间 $\boldsymbol{T}$ 的矩阵表示为范德蒙德矩阵（12），即，

$$\boldsymbol{T} := \boldsymbol{V}. \tag{16}$$

我们已经看到，多维观测量函数 $\boldsymbol{\mu}$ 的梯度出现在切空间表达式 (15) 中。虽然在实验中通常无法获得该梯度的表达式，但模态振型 $\hat{\boldsymbol{E}} = [\hat{\boldsymbol{e}}_1, \ldots\ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_d] \in \mathbb{R}^{q\times d}$ 通常可由理论得知或通过实验获得。这里，每个模态振型 $\hat{\boldsymbol{e}}_k \in \mathbb{R}^q$ 描述了特征向量 $\boldsymbol{e}_k \in \mathbb{R}^n$ 如何被观测。具体而言，它们之间的关系为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k = c_k \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{0}} \boldsymbol{e}_k, \tag{17}$$

其中 $c_k \in \mathbb{C}$ 是一个非零常数，仅用于缩放特征向量。我们将 $\boldsymbol{T}$ 选为范德蒙德矩阵与观测量模态振型的逐列克罗内克积，即

$$\boldsymbol{T} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \operatorname{diag}(\hat{\boldsymbol{e}}_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{V} \operatorname{diag}(\hat{\boldsymbol{e}}_d) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

几何示意图如图 2 所示。在模态振型未知的情况下，可以先将低振幅数据投影到延迟嵌入的特征向量上，再通过奇异值分解提取观测量的模态振型，不过本文不再进一步探讨这一思路。

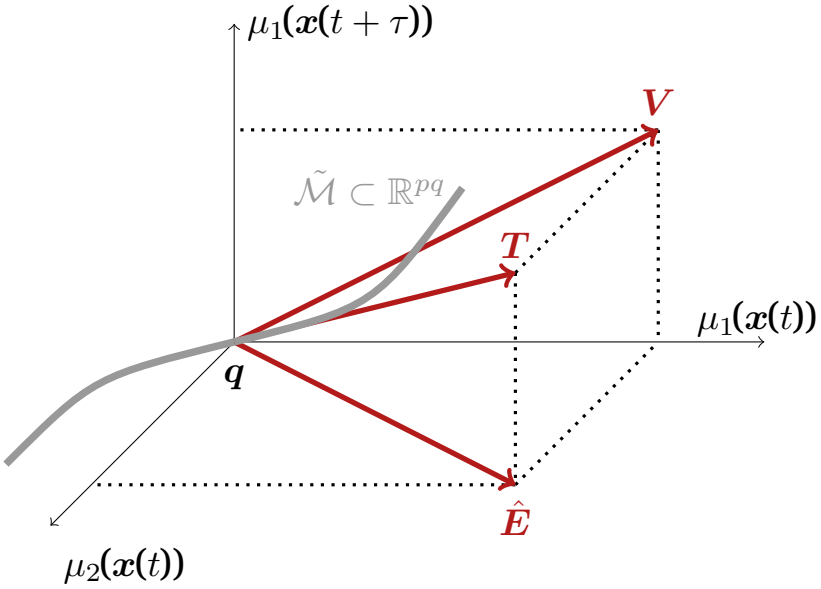


图2：延迟嵌入流形 $\mathcal{M}$ 的切空间 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{M}$ 是矩阵 $\boldsymbol{T}$的值域，该矩阵定义为范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{V}$ 与关于观测量的模态形状 $\boldsymbol{E}$ 的逐列克罗内克积，其中观测函数 $\boldsymbol{\mu}$ 为q维。

指定 $\boldsymbol{T}$并将数据投影到其列上，即可得到模态降阶坐标。通过这种对系统的对角化，可以利用第2.2节所概述的算法，简化对谱子流形的几何和约化动力学的学习。

选择适当的延迟嵌入参数来重构非线性系统可能是一项挑战。然而，对于系统的线性部分，我们的结果表明，应选择时间延迟 τ 和嵌入维数 p ，以便沿谱子流形获得数值性质良好的约化坐标。理想情况下，我们希望范德蒙德矩阵（12）的各列彼此正交，从而最大化每个观测模态中的信噪比。为此，我们构造如下最小化问题，

$$(\kappa^\star, p^\star) = \underset{\kappa, p \in \mathbb{N}^+}{\operatorname{argmin}} \left\| \boldsymbol{V}(\kappa\Delta t, p)^\top \boldsymbol{V}(\kappa\Delta t, p) - \boldsymbol{I} \right\|_{\mathrm{F}}, \tag{19}$$

其中， $\boldsymbol{V}$的各列已归一化， $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。由于时间延迟是采样时间步长的整数倍， $\tau = \kappa\Delta t$， （19）定义了一个关于离散变量集合的优化问题，可以通过蛮力法简单求解。

然而，考虑到系统的非线性部分，延迟参数的最优选择并非那么简单。增大时间延迟和嵌入维数往往会使 SSM 弯曲，因此需要采用更高阶的近似；

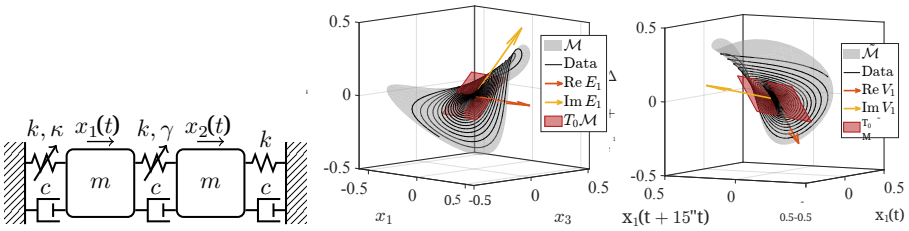
在极端情况下，还会导致流形折叠，使其无法再参数化为图。因此，考虑到 SSM 重构中的非线性部分，我们通常希望总延迟嵌入尽可能小。虽然求解 (19) 能提供一些指导，但合适的 τ 和 p 取值还取决于数据范围内系统的非线性程度以及信号噪声的大小。

4 应用

现在，我们将方法应用于三个数据集：其中两个来自仿真，一个来自实验。这些示例中的特征值已通过理论或仿真得知。因此，在对谱子流形进行参数化之前，我们相应地推断延迟嵌入切空间。这些示例包括振子链、两端固支梁和储罐晃荡。

4.1 具有非线性弹簧的二自由度振子

作为第一个示例，我们考虑一个由两个质量块组成的振子链，两个质量块分别通过线性弹簧相互连接，并连接到地面。此外，将左侧质量块连接到地面的弹簧具有二次软化非线性，而连接两个质量块的弹簧具有三次硬化特性。质量块和线性弹簧刚度均设为 1，软化参数为 -2，硬化参数为 1。每个弹簧还具有 0.03 的线性阻尼系数。图 3a 展示了该配置。采样时间为 $\Delta t = 0.1$ 秒。

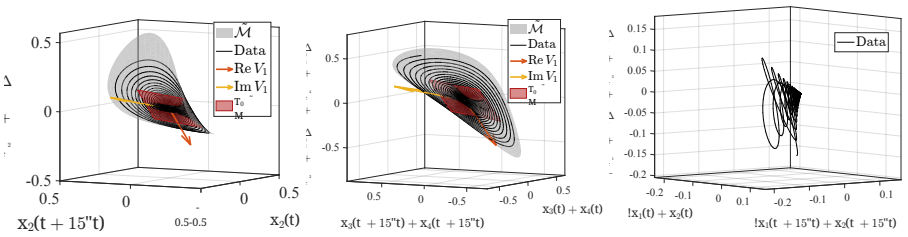


(a) (b) (c)

图 3: （a）含两个非线性弹簧的二自由度振子示例的设置。（b）完整状态空间中的慢二维光滑不变流形（灰色）及其切空间（红色）。（c）观测空间中的延迟嵌入的光滑不变流形。

我们使用 SSMTool，计算单条训练轨迹在慢速二维光滑不变流形上的一个初始条件。我们的观测函数是第一个质量位移，$\mu(\boldsymbol{x}) = x_1$。完整相空间中的轨迹和谱子流形如图 3b 所示。前两个特征向量张成谱子流形的切空间。

接下来，我们以时间延迟 $\tau = 15\Delta t$ 和嵌入维数 $p = 5$对轨迹进行延迟嵌入，并使用 fastSSM 在该观测空间中寻找二维光滑不变流形。我们按照理论预测，将轨迹数据投影到范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的各列上，从而获得约化坐标。图 3c 展示了观测空间前三个坐标中的谱子流形。事实上，该观测空间的切空间与$\boldsymbol{V}$的列空间相同。



(a) (b) (c)

图4：(a,b) 改变观测函数会产生不同的光滑不变流形几何，但切空间仍与图 3c中的相同。(c) 然而，一个非一般观测函数若只观测第二模态，则无法嵌入该流形。

推论1预言，只要观测函数是一般的，该切空间就与观测函数无关。为说明这一点，我们绘制了多种观测函数对应的延迟嵌入的光滑不变流形，$\mu(\boldsymbol{x}) = x_1$ (图3c)、$\mu(\boldsymbol{x}) = x_2$ (图4a) 和 $\mu(\boldsymbol{x}) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$ (图4b)。这些不同的观测函数显然会产生不同的光滑不变流形几何，但各流形的特征向量和切空间都一致。

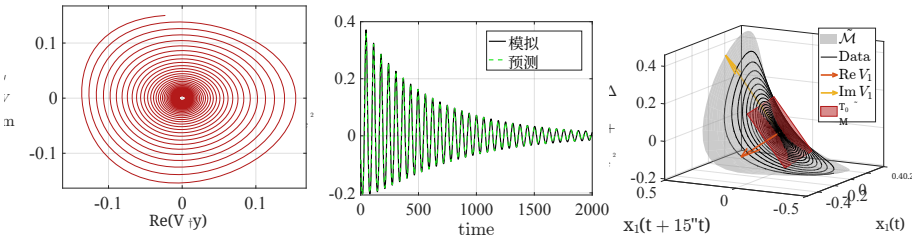
一个例外是，当我们观测质量块之间的距离 $\mu(\boldsymbol{x}) = x_2 - x_1$ （图 4c）时。在这种情况下，延迟嵌入轨迹不再位于不变流形上，这一点从原点处数据中不光滑的尖点可以明显看出。原因在于，按照我们理论的确切含义，这个观测量是非一般的；它与完整系统中第二个快模态的模态振型重合。这意味着在不动点处，观测函数与慢谱子流形正交，因此根据注1，延迟映射不是嵌入。

接下来，我们选取 $\mu(\boldsymbol{x}) = x_2$ ，并使用 fastSSM 根据数据近似谱子流形上的三阶约化动力学。计算正规形可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0014\,{\rho_1}^3 - 0.0148\,\rho_1 \\ 1.0025 - 0.0919\,{\rho_1}^2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

投影到 $\boldsymbol{V}$ 各列上的轨迹如图 5a 所示。对所得正规形进行积分，并映射回观测空间后，可以很好地重建训练数据。

最后，根据定理3，我们展示如何确定切向量



(a) (b) (c)

图5：(a) 数据在延迟嵌入切空间上的投影，与我们的理论预测一致。(b) fastSSM 预测的模型成功重构了轨迹的衰减过程。(c) 来自多维观测量的延迟嵌入空间中的谱子流形视图，以及我们的理论预测的切空间。

当观测量为向量时，固定点处谱子流形的切空间。选择 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) = [x_1, x_2]^\top$ 时，与标量观测函数不同，切空间方向不仅受特征值影响，也受第一模态振型的形状影响。该第一模态振型对应于各质量块同向运动，即

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

然后，根据式 (18)，我们得到以如下矩阵的列为向量、张成切空间：

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}\,\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{e}}_1) \\ \boldsymbol{V}\,\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{e}}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是范德蒙德矩阵 (12)。图 5c 展示了在这个 10维观测空间中谱子流形及其切空间的视图。

该模态形状与观测函数之间的关系由式 (17) 给出。具体而言，我们可以计算观测函数对模态坐标的导数：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial z_1}(\boldsymbol{0}) & \frac{\partial \mu_1}{\partial z_2}(\boldsymbol{0}) \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial z_1}(\boldsymbol{0}) & \frac{\partial \mu_2}{\partial z_2}(\boldsymbol{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中 $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ 是取决于特征向量缩放的非零常数。为简便起见，在式 (21) 中我们选择了 $c_1 = c_2 = 1$，使得 $\boldsymbol{T}$ 是上下堆叠两次的范德蒙德矩阵。

4.2 非线性有限元梁模型中的六维谱子流形

我们使用来自数值模拟的数据训练 SSM 降阶模型；这些数值模拟针对的是固支-固支 von K´arm´an 非线性梁 [66]的有限元（FE）表示。该示例此前已在文献 [31, 37]，中研究过，研究者识别了

时滞嵌入观测空间中最慢的二维光滑不变流形，预测了受迫响应，并分析了解析正规形的收敛半径。在此，得益于关于时滞嵌入谱子流形切空间的研究成果，我们可以将分析扩展到由系统线性部分中最慢的三个模态所生成的六维谱子流形。

有限元模型中的每个节点有三个自由度：轴向变形u、横向挠度 w和转角 w'。von K´arm´an 轴向应变为

$$\epsilon_{11} = u'(x) + \frac{1}{2}\left(w'(x)\right)^2 - z w''(x). \tag{24}$$

轴向应力为

$$\sigma = E\epsilon_{11} + c\dot{\epsilon}_{11}, \tag{25}$$

其中， $E = 70\,\text{GPa}$ 表示杨氏模量， $c = 1.0 \times 10^{6}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$ 表示材料黏性阻尼率。根据收敛性分析，我们将单元数设为 12，由此得到一个具有 33 个自由度的机械系统，即一个 66 维相空间。梁长设为 1000 mm，宽度为 50 mm，厚度为 20 mm。采样时间为 $\Delta t = 0.0955\ \text{s}$。

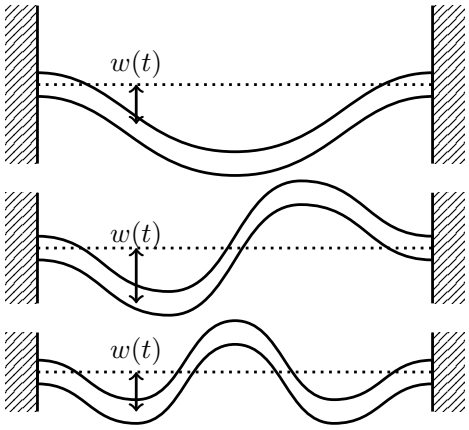


图6：von K´arm´an 梁：第一、第二和第三模态振型示意图。标量观测量必须具有通用性，即必须包含所有关注模态的贡献。例如，中点位移不会被第二模态激发。因此，我们选择图示的梁长 $1/4$ 处的横向位移。

根据注1，观测函数 μ 必须包含我们希望建模的所有模态 z_k 的重要贡献。例如，文献 [31, 37] 中选取中点位移作为观测函数，足以对二维谱子流形进行建模，但无法用于高维谱子流形。这是因为第二模态的反对称形状在

中点处的位移为零（见图6），即

$$\frac{\partial \mu}{\partial z_3}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mu}{\partial z_4}(\mathbf{0}) = 0. \tag{26}$$

相反，我们选择梁总长四分之一处的横向位移 $\mu = w(l/4)$，因为这一自由度包含全部三个振型的非零贡献。

为了实现数据驱动建模的目标，我们需要包含前三个模态的训练数据。为了生成这类轨迹的初始条件，我们使用根据系统线性部分计算得到的模态振型的线性组合。由于谱子流形通常具有吸引性，这些轨迹会很快趋近于该流形，因此我们可以用它们来训练降阶模型。通过此方法，我们生成了三条接近六维谱子流形、初始条件各不相同的轨迹，其中两条用作训练数据，一条用作测试数据。为了进行验证，我们还选取各个单独的模态振型作为初始条件，并将其用作测试数据。这些初始条件中的各项模态贡献选取如下：

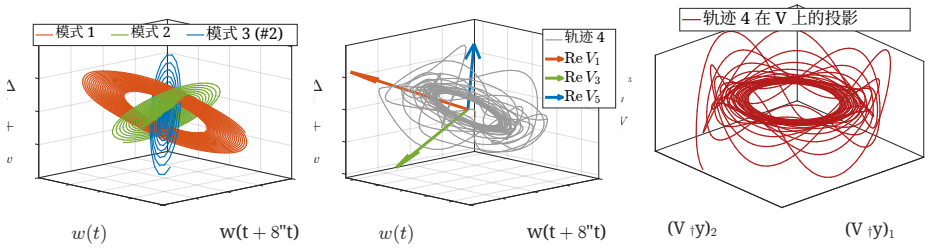
初始条件	Mode 1	2	3	Type
1	1	0	0	Test
2	0	1	0	Test
3	0	0	1	Test
4	0.8	-0.8	0.8	训练
5	-0.1	0.8	0.8	训练
6	-0.6	-0.2	-0.8	Test

我们根据第 3.2 节中的观察结果选择延迟嵌入参数。设置 $\kappa = 1$，使时间延迟 $\tau = \Delta t$ 且嵌入维数为 $p = 50$，可在计算得到的特征值下使函数 (19) 达到局部最优值，同时将最大延迟 κp 保持在适中的范围内，以防止嵌入发生折叠。

图 7a 展示了单模态轨迹 1–3 在 50 个延迟坐标中的 3 个坐标下的延迟嵌入，这些轨迹对应于前 3 个模态。这些轨迹直观地呈现了观测空间中相应特征子空间的方向。实际上，最小化 (19) 相当于使这些平面彼此正交，从而简化对它们的辨识。

图 7b 类似地展示了第一条训练轨迹的延迟嵌入，以及范德蒙德矩阵各列作为向量的可视化结果。我们的延迟理论预测，将数据投影到这些向量上即可得到模态坐标，如图 7c 所示。该空间将作为谱子流形的约化坐标。

投影到这些特征向量后，我们用三阶多项式近似六维谱子流形的几何。对于 fastSSM 中的约化动力学，我们也采用三阶近似。我们将该约化动力学的正规形计算到七阶，并得到约化动力学模型。



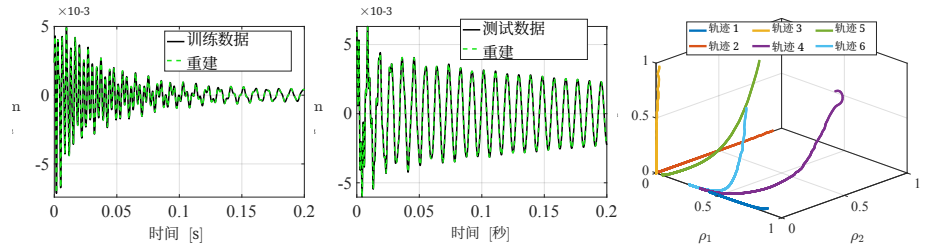
(a) (b) (c)

图7：(a) 具有单一模态贡献的轨迹展示了延迟嵌入空间中的模态子空间。第三模态数据已放大 2 倍，以提高可见度。(b) 第一条训练轨迹的相同延迟嵌入视图，以及延迟嵌入特征向量。(c) 将这条轨迹投影到特征向量上后，模态结构变得清晰。

fastSSM 得到的极坐标形式中的三阶及以下项具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \rho_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \rho_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \rho_3\dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3058\,{\rho_1}^3 + 2.088\rho_1\,{\rho_2}^2 - 3.091\rho_1 \\ 102.0\,{\rho_1}^3 + 82.70\,{\rho_2}^2\rho_1 + 657.2\rho_1 \\ -2.705\,{\rho_1}^2\rho_2 + 1.723\,{\rho_2}^3 - 23.72\rho_2 \\ 95.64\,{\rho_1}^2\rho_2 + 115.6\,{\rho_2}^3 + 1812\rho_2 \\ -8.968\rho_3\,{\rho_1}^2 - 13.27\rho_3\,{\rho_2}^2 - 88.47\rho_3 \\ 115.9\,{\rho_1}^2\rho_3 + 85.04\,{\rho_2}^2\rho_3 + 3558\rho_3 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(5). \tag{27}$$

我们将初始条件从观测空间转换到正规形，并对模型进行积分，以预测信号衰减。在测试数据上，得到的归一化平均轨迹误差（定义见 [31]）为 2.2 %。部分预测结果如图8所示。

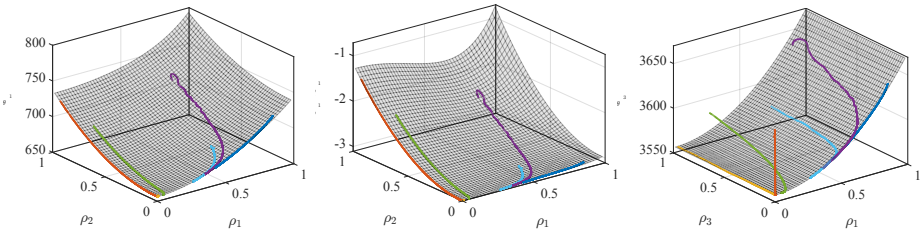


(a) (b) (c)

图8：(a,b) fastSSM 对衰减轨迹5和6的预测；(c) 轨迹转换到正规形后的相图。

我们还绘制了正规形 (27) 对模态 1 和 2 在不同振幅下预测的瞬时频率和阻尼，以此对降阶模型进行可视化。例如，我们的模型预测第一模态会出现硬化

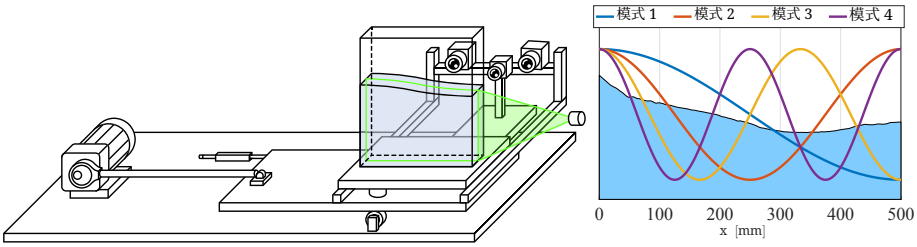
模态相对于第一和第二模态振幅的变化（图 9a）、模态 1 相对于模态 2 的瞬时阻尼降低（图 9b），以及第三瞬时频率与其自身无关（图 9c）。同时列出了每条轨迹的预测，以供参考。



(a) (b) (c)

图9：正规形（27）的可视化，显示了（a）模式 1 的瞬时频率轨迹和（b）阻尼轨迹，以及（c）模式 3 的频率轨迹。

4.3 储罐中水的多模态晃荡



(a) (b)

图10：（a）液舱晃荡实验装置（改编自 [67]）；（b）前四种晃荡模态形状。

作为最后一个示例，我们将研究结果应用于晃荡实验。晃荡模型有广泛的工业应用，包括船舶运动中的流体与容器相互作用 [68]，、流体道路运输 [69]，、塔上的阻尼装置 [70]，以及航天器的燃料箱设计 [71，72]。部分装水的储罐在水平简谐激励下会表现出若干非线性现象 [73]。一方面，增强的流体运动会改变第一晃荡模态的瞬时阻尼和频率 [74]。另一方面，进一步增大振幅会激活系统的若干非线性耦合模态，并产生多种不同的波动[75，76]。

我们的训练数据来自参考文献 [67] 所述的实验：实验采用宽度为 $w = 500$ 毫米、厚度为50毫米的矩形储罐，部分装水，水深为 $h = 400$ 毫米。储罐安装在一个水平移动的平台上，由电动机以不同频率进行简谐激励。随后，系统达到稳态后，关闭电动机。根据激励频率的不同，这种周期响应呈现平面运动、破波或三周期运动。三周期受迫状态的特征是响应幅值每经过三个激励周期便增大一次，而破波响应则定义为靠近壁面的水体发生翻卷 [67]。摄像机以 $\Delta t = 0.01$ 秒的采样时间检测自由液面轮廓 $\boldsymbol{h}$。图10a展示了实验装置。

此前的研究利用二维光滑不变流形，成功捕捉了质心信号 [31] 和此处的完整自由液面轮廓 [37], 的主要晃荡模态动力学。本文通过识别一个六维谱子流形，对多模态状态的衰减进行建模，该流形对应于三个占主导地位的振荡模态的非线性扩展。我们使用三组衰减测量数据进行训练：轨迹 1 和轨迹 2 始于三周期状态，轨迹 3 始于破波状态。

可观测向量 $\boldsymbol{\mu}$ 是沿储罐宽度方向在 1 771 个点处测得的自由液面轮廓。由于该函数是多维的，为了将我们的理论应用于延迟嵌入切空间，我们需要估计观测量中的特征值和线性模态形状。特征频率可通过势理论 [74] 计算得出：

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g\pi}{w} k \tanh\left(\pi k \frac{h}{w}\right)}, \tag{28}$$

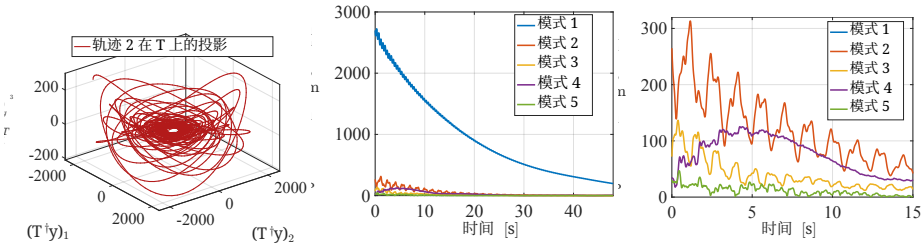
对于我们的构型，该值近似随模态序号 k 的平方根变化。前五个特征频率为 [7.80、11.1、13.6、15.7、17.6] 弧度/秒，其中频率 1 和 4 之间近似存在 1:2共振。根据同一理论得到的模态振型为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k = \cos(kx/w), \quad x \in [0, w], \tag{29}$$

如图10b所示。原则上，对于切空间，我们还需要每个模态的线性阻尼。实践中，对于有限的延迟嵌入，特征值的实部对 $\boldsymbol{V}$ 影响甚微，因此我们根据第一模态的先前拟合结果，以及阻尼随模态序号增加而增大的假设，选取 $[-0.05, -0.07, -0.08, -0.09, -0.1]$ 的值。

根据式（19），我们以时间延迟 $\tau = 5\Delta t$ 和维度$p = 47$对数据进行延迟嵌入。将延迟嵌入后的数据投影到理论预测的特征向量 $\boldsymbol{T}$上，似乎可以得到模态坐标，如图11a所示。

因此，这些投影的范数可用作衡量信号中模态成分的启发式指标。使用这一方法时应谨慎，因为它没有考虑流形曲率，但可以



(a) (b) (c)

图11：（a）将一条轨迹投影到切向量张成的切空间上，可以揭示模态结构。（b）将轨迹投影到特征向量上并取绝对值，可以估计信号中的相对模态贡献。（c）对（b）的局部放大图表明，模态 1、2 和 4 占主导地位。

用来初步估计 SSM 维数。在图 11b 中，我们绘制了轨迹 2 中 $\boldsymbol{T}$ 随时间变化时投影到各模态子空间的绝对值。图中显示，第一模态占主导；而放大视图（图 11c）表明，在衰减过程中，第二和第四模态似乎是最显著的高阶模态。第三和第五模态起初存在，但很快便衰减消失。除第四模态外，所有振幅都在衰减；第四模态则在初始阶段有所增长。根据这一分析，我们将确定一个六维谱子流形，它从模态 1、2 和 4 的谱子空间出发。此选择也考虑了 SSM 理论：根据该理论，1:2共振要求将第四模态的模态子空间纳入 SSM 的谱子空间。我们选择从 1.2 s 之后的数据开始训练，因为此后第三和第五模态的振幅较小，并且我们预计此时轨迹已足够接近 SSM。

采用 $m = 4$ 的 SSM 参数化阶数、 $r = 3$ 的约化动力学阶数和 $h = 3$ 的正规形阶数，我们计算 SSM 的几何结构和动力学，并对降阶模型进行积分，以预测各种流动状态下的衰减。由此得到的归一化平均轨迹误差（NMTE） [31] 为 2.6%。fastSSM 通过在计算得到的正规形中加入相位相关项，成功检测并考虑了内共振，其表达式为

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} &= -0.056 - 0.0069\sin(\psi - 0.26)\rho_4 - 0.0015\rho_4^2 - 0.039\rho_2^2 + 0.023\rho_1^2 \\
\dot{\theta}_1 &= 7.78 + 0.0069\cos(\psi - 0.26)\rho_4 + 0.040\rho_4^2 + 0.016\rho_2^2 - 0.82\rho_1^2 \\
\frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2} &= -0.13 + 0.15\rho_4^2 - 0.89\rho_2^2 + 0.37\rho_1^2 \\
\dot{\theta}_2 &= 11.4 + 0.57\rho_4^2 - 0.0085\rho_2^2 - 2.2\rho_1^2 \\
\frac{\dot{\rho}_4}{\rho_4} &= -0.30 - 0.29\rho_4^2 + 0.67\rho_2^2 - 0.27\sin(\psi + 1.4)\rho_1^2 + 1.2\rho_1^2 \\
\dot{\theta}_4 &= 15.9 - 0.085\rho_4^2 + 1.2\rho_2^2 + 0.27\cos(\psi + 1.4)\rho_1^2 - 2.0\rho_1^2
\end{aligned}
\tag{30}
$$

其中， $\psi = \theta_4 - 2\theta_1$ 及下标表示相应的模态序号。从线性部分可以看出，特征频率得到了良好的捕捉。

图 12a 展示了首个周期三初始状态下，储罐最左端实验测得的自由液面轮廓高度与延迟嵌入的谱子流形降阶预测结果吻合良好；图 12b 则展示了波浪破碎状态下的情况。此外，我们的六维降阶模型能够准确预测整个自由液面轮廓的衰减过程，快照见图 13。

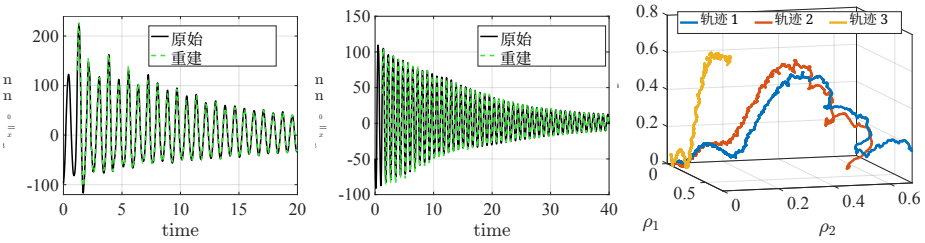


图 12：六维谱子流形上对（a）轨迹 1 和（b）轨迹 3 衰减过程的预测。（c）各轨迹在谱子流形上的正规形坐标振幅相图，展示了不同初始流动状态下的模态贡献及其演变。

我们将训练轨迹投影到谱子流形上，并将其转换为极坐标下的正规形。图 12c 展示了各条轨迹在正规形中的振幅演变。该图表明：（i）破波运动（轨迹 3）似乎不包含显著的第二模态成分；（ii）电机脱离后，第四模态的振幅确实增大；（iii）这些信号中存在一种小幅振荡，模型未能捕捉到，这可能是由噪声、模态子空间分离不足、模型之外的模态或其他现象所致。

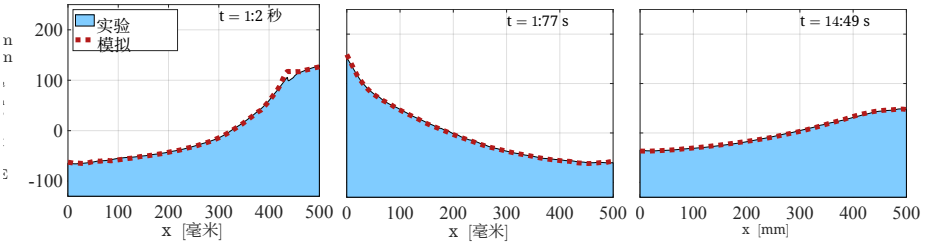


图 13：实验测得的自由液面轮廓衰减与我们六维谱子流形模型对轨迹2的预测一致。

值得注意的是，信号中的高阶模态成分总量较小，相对于第一模态仅约为 10%。这是因为数据是在第一特征频率附近受迫所诱导的稳态衰减过程中采集的。由于振型具有对称性，无法通过水平简谐激励单独激发第二和第四模态。尽管如此，我们仍然能够

在 SSM 上捕捉到这些幅度较小的振荡。实现这一增强的关键技术，是在 SSM 重构中施加基于理论特征频率和振型的延迟嵌入切空间约束。

由于高阶模态的激活程度较低，我们的模型预计对噪声较为敏感。不过，该模型对起始时间、流形阶数和延迟参数的变化具有稳定性。将流形维数降至 4，并忽略第四模态相对较小的影响，可以得到更稳健的模型，其平均归一化均方轨迹误差为 3.9%。鉴于我们的目标是对不同流动状态进行模态分析，因此选择了更为详细的 6 维模型。

5 结论

我们证明了，对于不动点处与谱子空间相切的不变流形的标量观测，其切空间的延迟嵌入重构仅取决于完整系统在该点线性化后所对应的特征值。具体而言，我们证明，范德蒙德矩阵的列向量（该矩阵由特征值乘以时间延迟后取指数，并重复相乘得到）是观测空间中线性化系统的特征向量。因此，范德蒙德矩阵将延迟嵌入动力学的线性部分对角化。我们还表明，当同时测量多个量并进行延迟嵌入时，切空间可由范德蒙德矩阵以及观测函数分量中表示的模态振型给出。这些结果适用于任何与具有互异特征值的模态子空间相切的不变流形，包括经典的稳定流形。本文重点将这一结果应用于双曲不动点的谱子流形。

为了利用这一发现的结构，我们证明，对于数据驱动的谱子流形模型降阶，当特征值已近似确定时，我们可以先验地解析预测嵌入谱子流形的切空间，从而实现局部模态分解，并辅助重建非线性降阶动力学。我们发现，即使高阶模态仅被少量激活，这一方法也有助于在谱子流形上对复杂的多模态非线性动力学建模，进而分析模态能量交换和瞬时频率。

我们的理论假设观测函数一般，并在第一个和第二个示例中对此作了更详细的说明；此外，还假设特征值互异。虽然从数学意义上说，后一假设是一般成立的，但对于具有对称性的工程结构，它并不总是满足。方形板的振动就是一个例子：由于存在重特征值，我们的理论在这种情况下会失效。使用向量值观测函数或许有助于区分此类情况下的各个模态。此外，尽管理论在技术上涵盖了相关情况，但范德蒙德矩阵的条件性可能引发实际困难，例如特征值差异很大、彼此非常接近，或具有不同的稳定性类型。

在第三个使用实验数据的示例中，我们还设计了一种新的启发式方案，利用延迟嵌入研究信号中的模态成分。我们将该方法用作初始猜测，并据此把数据投影到相应的预设模态子空间上，这实际上隐含地假设了每个模态的谱子流形近乎平坦。这个想法的一个有趣发展方向是将其用作滤波器，以去除或保留信号中的某些频率。另一个思路是利用切空间条件来验证约化动力学的线性拟合，或对其进行迭代调整。最后，类比傅里叶分析，可以先对延迟坐标中的轨迹进行奇异值分解，再分析范德蒙德矩阵的各列，从而估计信号的瞬时频率和阻尼。这与文献中的其他若干观察相呼应；例如，对于线性系统，这些列与近期提出的主成分轨迹概念相符 [62]。总的来说，我们认为，这些发现有助于进一步理解延迟嵌入不变流形，尤其是延迟参数的选择。因此，我们预计这些结果将适用于广泛的数据驱动方法。

致谢

我们感谢 Kerstin Avila 和 Bastian B¨auerlein（不来梅大学）与我们分享了其文献 [67] 中的实验表面轮廓数据。

A 附录

附录 A.1 定理 1 的证明

设 $\mathcal{M}$ 是方程 (1) 的一个 d 维不变流形，且包含 $\mathbb{R}^n$ 的原点。 $\mathcal{M}$ 在原点处的切空间可写为 $T_{\mathbf{0}}\mathcal{M} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_k\}_{k\in K}$，其中 $K \subset \{1,\dots,n\}$ 是一个指标集，用于标记张成谱子空间的 d特征向量 $\boldsymbol{e}_k$；该流形正是从这个谱子空间发出的。例如，对于稳定流形， $K = \{k : \operatorname{Re}\lambda_k < 0\}$。我们还假设相关特征值互不相同，即 $i \neq k \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_k$，对于 $i,\ k \in K$。

为简化记号，我们将完整状态空间变换为模态坐标 (11)。我们将系统 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 上的观测函数改写为模态坐标系统 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ 上的观测函数，即 $\hat{}\mu(\boldsymbol{z}) = \mu(\boldsymbol{E}\boldsymbol{z})$。用 $\boldsymbol{\Phi}^t = \boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{F}^t\circ\boldsymbol{E}^{-1}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的流。考虑模态坐标中的采样映射

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\mu}\circ\boldsymbol{\Phi}^{\tau} \\ \hat{\mu}\circ\boldsymbol{\Phi}^{2\tau} \\ \vdots \\ \hat{\mu}\circ\boldsymbol{\Phi}^{(p-1)\tau} \end{bmatrix} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^p, \quad \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{z}). \tag{31}$$

在满足 Takens 嵌入定理的条件下，延迟嵌入 $\hat{\ }$ $\tilde{\ }$ 映射 $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{S}|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个光滑嵌入，且具有光滑逆映射 $\boldsymbol{\Psi}^{-1}: \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$，并且 $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{q}$。

为了推导切空间 $T_{\boldsymbol{q}}\tilde{\mathcal{M}}$，我们计算嵌入在 $\mathbf{0}$ 处的导数：

$$\boldsymbol{D\Psi}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\boldsymbol{\Phi}^{\tau}(\mathbf{0})) \circ \boldsymbol{D\Phi}^{\tau}(\mathbf{0}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\boldsymbol{\Phi}^{(p-1)\tau}(\mathbf{0})) \circ \boldsymbol{D\Phi}^{(p-1)\tau}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\mathbf{0}) \circ \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}\tau} \\ \vdots \\ \boldsymbol{D}\hat{\mu}(\mathbf{0}) \circ \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}(p-1)\tau} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

现在注意到，用模态坐标表示的第 j 个分量为

$$\boldsymbol{D}\hat{\mu}(\mathbf{0}) \circ \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda} j\tau}(\boldsymbol{z}) = \sum_{k\in K} \left.\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial z_k}\right|_{\mathbf{0}} \mathrm{e}^{\lambda_k j\tau} z_k, \quad j \in \{1, \ldots, p\}. \tag{33}$$

我们将由 d 个特征值 $\{\lambda_k\}_{k\in K}$ 所定义的范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{V}$ 记为 $V_{jk} = \mathrm{e}^{\lambda_k j\tau}$，这些特征值决定了 $\mathcal{M}$ 上的线性化动力学。由此可知，在模态坐标中，可观测流形在不动点处的切空间可写为

$$T_{\boldsymbol{q}}\tilde{\mathcal{M}} = \{\boldsymbol{D\Psi}(\mathbf{0})\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n\} = \operatorname{range}\left\{\boldsymbol{V}\operatorname{diag}\left(\left.\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}}\right)\right\} = \operatorname{range}\boldsymbol{V}, \tag{34}$$

其中，对角矩阵仅对 $\boldsymbol{z}$ 的每个分量进行缩放。因此，观测空间中流形切空间的一种矩阵表示为 $\boldsymbol{V}$，它既不依赖于完整系统特征向量矩阵 $\boldsymbol{E}$，也不依赖于观测函数 μ。

注意，$\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$，$\partial$ 这决定了μ的一般性。在实践中，这意味着线性化可观测函数必须包含我们希望建模的所有模态坐标的贡献。此外请注意，对于切空间本身的嵌入，即线性系统，$p = d$ 就足够了。

A.2 定理2的证明

$\tilde{\ }$ $\mathcal{M}$ 上的流为

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^t = \boldsymbol{\Psi} \circ \boldsymbol{\Phi}^t \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1}. \tag{35}$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ 我们计算 $\mathcal{M}$上的常微分方程，$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$，得到

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^t = \boldsymbol{D\Psi} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1}, \tag{36}$$

$\tilde{\ }$ 其中，$\boldsymbol{f}$ 由式（11）给出。因此，$\boldsymbol{f}$ 在不动点处的导数为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{D\Psi}(\mathbf{0}) \circ \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{D\Psi}^{-1}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{V}\operatorname{diag}\left(\left.\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}}\right)\boldsymbol{\Lambda}\operatorname{diag}\left(\left.\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\mathbf{0}}\right)^{-1}\boldsymbol{V}^{\dagger} \\ &= \boldsymbol{V\Lambda V}^{\dagger}, \end{aligned} \tag{37}$$

这里我们用到了对角矩阵乘法的乘法交换律，它消去了线性化观测函数项；此外，$\boldsymbol{D\Psi}^{-1}(\boldsymbol{q}) = \text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right)^{-1}\boldsymbol{V}^{\dagger}$是良定义的。为说明这一点，请注意，延迟嵌入映射与其逆映射复合后的导数

$$\boldsymbol{D\Psi}(\mathbf{0}) \circ \boldsymbol{D\Psi}^{-1}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{V}\,\text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right)\text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right)^{-1}\boldsymbol{V}^{\dagger} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\dagger}, \tag{38}$$

在 $T_{\mathbf{0}}\mathcal{M}$ 中将所有点映射到其自身，因为在互异特征值 $\{\lambda_k\}_{k\in K}$ 的假设下，$\boldsymbol{V}$ 满秩。

对常微分方程进行泰勒展开 $\tilde{\mathcal{M}}$ 在观测空间中的表达式为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}) + o(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}|) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{\dagger}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}) + o(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}|). \tag{39}$$

因此，在一般观测函数和互异 ˜ ˜ 特征值的假设下，观测空间 $\mathbb{R}^p$ 中的切空间 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{M}$ 和线性化动力学 $\boldsymbol{Df(q)}$ 均由时间延迟 τ 以及特征值 λ_k、 $k \in K$ 完全确定。

在 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ 的特殊情形下，若 $p \geq 2n+1$，则可以重构整个相空间。对于线性系统， $p = n$ 已足够，且延迟嵌入可化为线性算子。

A.3 定理3的证明

对于向量值观测函数 $\boldsymbol{\mu}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$，延迟嵌入映射为

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{\mu_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Psi}_{\mu_q} \end{bmatrix} : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^{pq}, \quad \boldsymbol{D\Psi}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D\Psi}_{\mu_1}(\mathbf{0}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{D\Psi}_{\mu_q}(\mathbf{0}) \end{bmatrix}, \tag{40}$$

其中， $\boldsymbol{\Psi}_{\mu_\ell}$ 是与观测函数 $\boldsymbol{\mu}$ 的第 ℓ 个分量相对应的延迟嵌入映射。导数为

$$\boldsymbol{D\Psi}_{\mu_\ell}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{V}\,\text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}_\ell}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right). \tag{41}$$

在这种情况下，切空间并不独立于观测函数。相反，它受到观测函数的每个分量 μ_ℓ 对每个模态坐标 z_k的相对依赖关系的影响。不过，切空间可以表示为

$$T_{\boldsymbol{q}}\tilde{\mathcal{M}} = \text{range}\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}\,\text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}_1}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}\,\text{diag}\left(\frac{\partial \hat{\mu}_q}{\partial \boldsymbol{z}}\Big|_{\mathbf{0}}\right) \end{bmatrix}. \tag{42}$$

参考文献

[1] J. L. Lumley。《非均匀湍流结构》。大气湍流与无线电波传播（1967年），第166–177页。[2] J. Awrejcewicz、V. A. Krys'ko 和 A. F. Vakakis。《通过本征正交分解（POD）分析进行降阶》。连续弹性系统的非线性动力学。Springer，柏林，海德堡，2004年，第279–320页。[3] P. Schmid。《数值与实验数据的动态模态分解》。《流体力学杂志》656（2010年），第5–28页。[4] J. N. Kutz、S. L. Brunton、B. W. Brunton 和 J. L. Proctor。《动态模态分解》。费城，宾夕法尼亚州：SIAM，2016年。[5] P. J. Schmid。《动态模态分解及其变体》。《流体力学年度评论》54.1（2022年），第225–254页。 DOI: 10 . 1146 / annurev-fluid-030121-015835。[6] J. Page 和 R. Kerswell。《简单不变解之间的Koopman模态展开》。《流体力学杂志》879（2019年），第1–27页。[7] S. L. Brunton、J. L. Proctor 和 J. N. Kutz。《通过非线性动力系统稀疏辨识从数据中发现控制方程》。《美国国家科学院院刊》113.15（2016年），第3932–3937页。[8] D. Bertsimas 和 W. Gurnee。《通过混合整数优化学习稀疏非线性动力学》。2022年。 DOI: 10.48550/ARXIV.2206.00176。URL: https://arxiv.org/abs/2206.00176。[9] J. N. Kutz 和 S. L. Brunton。《简约性：物理信息机器学习的终极正则化项》。《非线性动力学》107.3（2022年1月），第1801–1817页。 DOI: 10.1007/s11071-021-07118-3。 URL: https: // doi.org/10.1007/s11071-021-07118-3。[10] S. Chen 和 S. A. Billings。《用于非线性动态系统建模与辨识的神经网络》。《国际控制杂志》56.2（1992年8月），第319–346页。 DOI: 10.1080 / 00207179208934317。 URL: https: // doi.org/10.1080/00207179208934317。[11] T. Daniel、F. Casenave、N. Akkari 和 D. Ryckelynck。《深度神经网络辅助的模型降阶（ROM-net）》。《工程科学中的高级建模与仿真》7（2020年），第105786页。[12] L. Salmela、N. Tsipinakis、A. Foi、C. Billet、J. M. Dudley 和 G. Genty。《利用循环神经网络预测光纤中的超快非线性动力学》。《自然·机器智能》3.4（2021年2月），第344–354页。 DOI: 10.1038/s42256-021-00297-z。 URL: https://doi.org/10. 1038/s42256-021-00297-z。

[13] J.-C. Loiseau、S. L. Brunton 和 B. R. Noack. “从 POD-Galerkin 方法到稀疏流形模型”。模型阶次缩减，第*3*卷：应用。编者：P. Benner、S. Grivet-Talocia、A. Quarteroni、G. Rozza、W. Schilders 和 L. M. Silveira。De Gruyter，柏林，2020年，第279–320页。[14] Cabr´e、E. Fontich 和 R. de la Llave. “不变流形的参数化方法 I：与非共振子空间相关的流形”。《印第安纳大学数学杂志》52.2 (2003年)，第283–328页。[15] A. Haro 和 R. de la Llave. “准周期映射中不变环面及其胡须流形计算的参数化方法：严格结果”。《微分方程杂志》228.2 (2006年)，第530–579页。[16] G. Haller 和 S. Ponsioen. “非线性正规模态与谱子流形：存在性、唯一性及其在模型降阶中的应用”。《非线性动力学》86.3 (2016年)，第1493–1534页。[17] S. Ponsioen、T. Pedergnana 和 G. Haller. “用于非线性模态分析的自治谱子流形自动计算”。《声音与振动》420 (2018年)，第269–295页。[18] R. M. Rosenberg. “非线性 n 自由度系统的正规模态”。《应用力学杂志》29.1 (1962年3月)，第7–14页。 DOI: 10.1115/1.3636501。 URL: https://doi.org/10.1115/1.3636501。[19] A. Vakakis. “非线性正规模态（NNMs）及其在振动理论中的应用：综述”。《机械系统与信号处理》11.1 (1997年1月)，第3–22页。 DOI: 10.1006/mssp.1996.9999。 URL: https://doi.org/10.1006/mssp.1996.9999。[20] G. Kerschen、M. Peeters、J. Golinval 和 A. Vakakis. “非线性正规模态，第一部分：结构动力学研究者的实用框架”。《机械系统与信号处理》23.1 (2009年1月)，第170–194页。DOI: 10.1016/j.ymssp.2008.04.002。 URL: https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002。[21] S. Shaw 和 C. Pierre. “非线性正规模态与不变流形”。《声学与振动杂志》150.1 (1991年10月)，第170–173页。DOI: 10.1016/0022-460x(91)90412-d。 URL: https://doi.org/10.1016/0022-460x(91)90412-d。[22] S. Shaw 和 C. Pierre. “非线性振动系统的正规模态”。《声音与振动》164.1 (1993年)，第85–124页。[23] R. Szalai. “不变谱叶状结构及其在模型阶次缩减与综合中的应用”。《非线性动力学》101 (2020年)，第2645–2669页。[24] S. Jain、T. Thurner、M. Li 和 G. Haller. *SSMTool*：高维机械问题中不变流形及其约化动力学的计算。2021年。 DOI: 10 . 5281 / zenodo . 4614201。 URL: http : //www.georgehaller.com。[25] S. Ponsioen、T. Pedergnana 和 G. Haller. “基于谱子流形对孤立受迫响应曲线的解析预测”。《非线性动力学》98 (2019年)，第2755–2773页。

[26] S. Ponsioen、S. Jain 和 G. Haller. “高维机械系统中约化至谱子流形及受迫响应计算”。《声音与振动》488 (2020年)，第115640页。[27] S. Jain 和 G. Haller. “如何计算高维有限元模型中的不变流形及其约化动力学？”《非线性动力学》107.2 (2021年10月)，第1417–1450页。 DOI: 10.1007/s11071-021-06957-4。 URL: https://doi.org/10.1007/s11071-021-06957-4。[28] M. Li、S. Jain 和 G. Haller. “利用谱子流形对具有内共振的受迫机械系统进行非线性分析——第一部分：周期响应与受迫响应曲线”。《非线性动力学》(2022年)。[29] M. Li 和 G. Haller. “利用谱子流形对具有内共振的受迫机械系统进行非线性分析——第二部分：分岔与准周期响应”。《非线性动力学》(2022年)。 DOI: https: // doi.org/10.1007/s11071-022-07476-6。[30] M. Li、S. Jain 和 G. Haller. 基于谱子流形的受约束机械系统模型降阶。2022年。 DOI: 10.48550/ARXIV . 2208. 03119。 URL: https://arxiv.org/abs/2208.03119。[31] M. Cenedese、J. Ax˚as、B. B¨auerlein、K. Avila 和 G. Haller. “基于数据驱动的谱子流形对不可线性化动力学进行建模与预测”。《自然·通讯》13.1 (2022年2月)。 DOI: 10.1038/s41467-022-28518-y。 URL: https://doi.org/10.1038/s41467-022-28518-y。[32] M. Cenedese、J. Ax˚as 和 G. Haller. SSMLearn。2021 年。 URL: http://www. georgehaller.com。[33] J. Guckenheimer 和 P. Holmes.《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》。Springer，纽约，1983年。[34] M. Cenedese、J. Ax˚as、H. Yang、M. Eriten 和 G. Haller. “机械系统中基于数据驱动的非线性模型降阶至谱子流形”。《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》380.2229 (2022年6月)。 DOI: 10.1098/ rsta.2021.0194。 URL: https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0194。[35] B. Kasz´as、M. Cenedese 和 G. Haller. “基于动力学的机器学习：库埃特流中的转变”。《物理评论：流体》7 (8 2022年)，第L082402页。[36] J. I. Alora、M. Cenedese、E. Schmerling、G. Haller 和 M. Pavone. 面向高维机器人的非线性最优控制：数据驱动的谱子流形约化。2022年。 DOI: 10.48550/ARXIV.2209.05712。 URL: https://arxiv.org/abs/2209.05712。[37] J. Ax˚as 、 M. Cenedese 和 G. Haller. “面向非线性动力系统的快速数据驱动模型约化”。《非线性动力学》(2022年)。[38] M. O. Williams、I. G. Kevrekidis 和 C. W. Rowley. “Koopman算子的一个数据驱动近似：扩展动态模态分解”。《非线性科学杂志》9 (2015年)，第1307–1346页。

[39] D. Dylewsky、D. Barajas-Solano、T. Ma、A. M. Tartakovsky 和 J. N. Kutz。“用于近周期系统预测与分析的随机强迫集合动态模态分解”。*IEEE Access* 10 (2022年)，第 33440–33448 页。 DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3161438。[40] S. L. Brunton、B. W. Brunton、J. L. Proctor、E. Kaiser 和 J. N. Kutz。“作为间歇性受迫线性系统的混沌”。《自然·通讯》 8.1 (2017年5月)。 DOI: 10.1038/s41467-017-00030-8。 URL: https://doi. org/10.1038/s41467-017-00030-8。[41] J.-N. Juang 和 R. S. Pappa。“用于模态参数识别和模型降阶的特征系统实现算法”。《制导、控制与动力学杂志》 8.5 (1985年9月)，第 620–627 页。 DOI: 10 . 2514/3.20031。 URL: https://doi.org/10.2514/3.20031。[42] S. Pan 和 K. Duraisamy。“数据驱动的闭合模型发现”。《*SIAM*应用动力系统杂志》 17.4 (2018年1月)，第 2381–2413 页。 DOI: 10 . 1137 / 18m1177263。 URL: https : / / doi . org / 10 . 1137 / 18m1177263。[43] A. Pikovsky。“离散时间动力系统中的噪声滤波”。《苏联通信技术与电子学杂志》 31.5 (1986)，第 911–914 页。[44] G. Sugihara 和 R. M. May。“通过非线性预测区分时间序列中的混沌与测量误差”。《自然》 344.6268 (1990年4月)，第 734–741 页。 DOI: 10.1038/344734a0。 URL: https://doi. org/10.1038/344734a0。[45] J. P. Crutchfield。“经典力学中的预测与稳定性”。物理学和数学高级学士论文，加州大学圣克鲁兹分校。1979年。[46] N. H. Packard、J. P. Crutchfield、J. D. Farmer 和 R. S. Shaw。“从时间序列中提取几何结构”。*Phys. Rev. Lett.* 45 (9 1980)，第 712–716 页。 DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.712。 URL: https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevLett.45.712。[47] F. Takens。“检测湍流中的奇异吸引子”。《动力系统与湍流，沃里克 *1980*》。D. Rand 和 L. Young 编。Springer 柏林海德堡，1981年，第 366–381 页。[48] T. Sauer、J. Yorke 和 M. Casdagli。“嵌入学”。《统计物理杂志》65 (1991)，第 579–616 页。[49] D. Broomhead 和 G. P. King。“从实验数据中提取定性动力学”。*Physica D:* 非线性现象 20.2 (1986)，第 217–236 页。 ISSN: 0167-2789。 DOI: https://doi.org/10.1016/0167-2789(86) 90031- X。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/016727898690031X。

[50] M. Casdagli、S. Eubank、J. Farmer 和 J. Gibson。“存在噪声时的状态空间重构”。*Physica D:* 非线性现象 51.1 (1991)，第 52–98 页。 ISSN: 0167-2789。 DOI: https://doi.org/10.1016/ 0167 - 2789(91) 90222- U。 URL: https: // www .sciencedirect . com / science/article/pii/016727899190222U。[51] H. L. Yap 和 C. Rozell。“线性动力系统的稳定 Takens 嵌入”。第 59 卷。2010年12月，第 2948–2953 页。 DOI: 10.1109/TSP.2011. 2160629。[52] A. M. Fraser 和 H. L. Swinney。“利用互信息确定奇异吸引子的独立坐标”。*Phys. Rev. A* 33 (2 1986年2月)，第 1134–1140 页。 DOI: 10.1103/PhysRevA.33.1134。 URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.33.1134。[53] M. B. Kennel、R. Brown 和 H. D. I. Abarbanel。“利用几何构造确定相空间重构的嵌入维数”。*Phys. Rev. A* 45 (6 1992年3月)，第 3403–3411 页。 DOI: 10.1103/ PhysRevA . 45 . 3403。 URL: https :/ / link .aps .org / doi/ 10 . 1103/ PhysRevA.45.3403。[54] H. D. I. Abarbanel 和 M. B. Kennel。“基于观测到的混沌数据确定局部伪近邻和动力学维数”。*Phys. Rev. E* 47 (5 1993年5月)，第 3057–3068 页。 DOI: 10.1103/PhysRevE.47.3057。 URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.47.3057。[55] K. H. Kraemer、M. Gelbrecht、I. Pavithran、R. I. Sujith 和 N. Marwan。“通过蒙特卡洛决策树搜索实现最优状态空间重构”。《非线性动力学》108.2 (2022年3月)，第 1525–1545 页。 DOI: 10.1007/ s11071-022-07280-2。 URL: https://doi.org/10.1007/s11071-022-07280-2。[56] E. Bozzo、R. Carniel 和 D. Fasino。“奇异谱分析与傅里叶分析之间的关系：理论及其在火山活动监测中的应用”。《计算机与数学及其应用》60.3 (2010年8月)，第 812–820 页。 DOI: 10.1016/j.camwa.2010.05.028。 URL: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.028。[57] S. Pan 和 K. Duraisamy。“非线性动力系统线性模型中时延嵌入的结构”。《混沌：非线性科学跨学科期刊》30.7 (2020年7月)，第 073135 页。 DOI: 10.1063/5.0010886。 URL: https://doi.org/10.1063/5.0010886。[58] C. W. Rowley、I. Mezi´c、S. Bagheri、P. Schlachter 和 D. Henningson。“非线性流动的谱分析”。《流体力学杂志》641 (2009)，第 115–127 页。[59] Z. Drmaˇc、I. Mezi´c 和 R. Mohr。“通过离散傅里叶变换，以范德蒙德–柯西形式进行数据驱动的 Koopman 谱分析：数值方法与理论见解”。*SIAM* 科学计算期刊 41.5 (2019)，A3118–A3151。 DOI: 10.1137/18M1227688。 URL: https://doi.org/10. 1137/18M1227688。

[60] M. Kamb、E. Kaiser、S. L. Brunton 和 J. N. Kutz。《Koopman 的时延观测量：理论与应用》。2018年。 DOI: 10.48550/ ARXIV.1810.01479。 URL: https://arxiv.org/abs/1810.01479。[61] S. M. Hirsh、S. M. Ichinaga、S. L. Brunton、J. N. Kutz 和 B. W. Brunton。《用于动力系统的结构化时延模型及其与 Frenet–Serret 标架的联系》。英国皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学 477.2254（2021年10月）。 DOI: 10.1098/ rspa.2021.0097。 URL: https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0097。[62] D. Dylewsky、E. Kaiser、S. L. Brunton 和 J. N. Kutz。《用于将谱连续动力学建模为受迫线性系统的主成分轨迹》。Phys. Rev. E 105（2022年1月1日），第 015312 页。 DOI: 10.1103/ PhysRevE.105.015312。 URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.105.015312。[63] E. Bronstein、A. Wiegner、D. Shilo 和 R. Talmon。《时延坐标动态模态分解中的时空耦合》。Chaos: 非线性科学跨学科期刊 32.12（2022年12月），第 123127 页。DOI: 10.1063/5.0123101。 URL: https://doi.org/10.1063/5.0123101。[64] J. Ax˚as 和 G. Haller。fastSSM：基于数据快速计算谱子流形的算法。2022年。 URL: https://github.com/haller- group/SSMLearn/tree/main/fastSSM。[65] E. R. Deyle 和 G. Sugihara。《非线性状态空间重构的广义定理》。《公共科学图书馆·综合》6.3（2011年）。 URL: https://doi.org/ 10.1371/journal.pone.0018295。[66] S. Jain、P. Tiso 和 G. Haller。《von K´arm´an 梁的精确非线性模型降阶：慢快分解与谱子流形》。《声学与振动杂志》423（2018年），第 195–211 页。[67] B. B¨auerlein 和 K. Avila。《相位滞后可预测液体晃荡实验中的非线性响应峰值》。《流体力学杂志》925（2021年），A22。 DOI: 10.1017/jfm.2021.576。[68] S. Mitra、L. V. Hai、L. Jing 和 B. C. Khoo。《不同容器几何形状下船舶运动与晃荡的全耦合分析》。《海洋科学与技术杂志》17.2（2012年2月），第 139–153 页。 DOI: 10 . 1007 / s00773-012- 0157-2。 URL: https://doi.org/10.1007/s00773- 012- 0157-2。[69] F. Fleissner、A. Lehnart 和 P. Eberhard。《运输车辆中晃荡流体与颗粒货物的动态仿真》。Vehicle System Dynamics 48.1（2010年1月），第 3–15 页。 DOI: 10.1080/00423110903042717。URL: https://doi.org/10.1080/00423110903042717。[70] J. Hickey、B. Broderick、B. Fitzgerald 和 H. Moore。《高层模块化建筑风致加速度的缓解》。《结构》37（2022年3月），第 576–587 页。 DOI: 10.1016/j.istruc.2022.01.037。 URL: https: // doi.org/10.1016/j.istruc.2022.01.037。

[71] F. Dodge。《移动容器中液体的“新动态行为”》。西南研究院，2000年。URL: https://books.google.ch/ books?id=RltitwAACAAJ。[72] H. Abramson，编。《移动容器中液体的动态行为：附航天器技术应用 / H. Norman Abramson 编》。NASA SP-106。华盛顿特区：美国国家航空航天局科学技术信息部，1966年。[73] G. Taylor。《驻波的实验研究》。伦敦皇家学会会刊：*A*辑，数学与物理科学218.1132（1953年），第 44–59 页。[74] O. Faltinsen 和 A. Timokha。《液体晃荡》。剑桥大学出版社，2009年。ISBN: 9780521881111。URL: https : / / books . google . ch / books ? id = 81qkPwAACAAJ。[75] G. S. Narimanov。《部分充液储罐的运动：考虑振幅不可忽略的情况》。应用数学与力学 21（1957年）。俄文，第 513–524 页。[76] O. M. Faltinsen、O. F. Rognebakke、I. A. Lukovsky 和 A. N. Timokha。《有限水深矩形储罐中非线性液体晃荡的多维模态分析》。《流体力学杂志》407（2000年3月），第 201–234 页。DOI: 10.1017 / s0022112099007569。URL: https: //doi.org/10.1017/s0022112099007569。