arXiv:2301.04562v1 [math.DG] 11 Jan 2023

离散群在对称空间上的莫尔斯作用：局部到整体原理

Michael Kapovich、Bernhard Leeb、Joan Porti

2023年1月12日

摘要

我们的主要结果是关于莫尔斯拟测地线、映射和作用的局部到整体原理。作为这些技术的应用，我们证明了莫尔斯作用的算法可识别性，并通过不依赖于 Tits乒乓引理的论证，构造出高秩半单李群的莫尔斯“Schottky子群”。我们的论证完全是几何性的，其方法是构造从树到高秩对称空间的等变Morse拟等距嵌入。

目录

1 引言 2

2 预备知识 4

2.1 对称空间几何的基本概念.4 2.2 约定的记号与惯例.5 2.3 ς-角.5 2.4 到平行集的距离与角度的比较.6

3 莫尔斯映射 8

3.1 莫尔斯拟测地线.8 3.2 莫尔斯映射.9 3.3 无穷远处的连续性.10 3.4 直序列的莫尔斯引理.11 3.5 到直路径的 Lipschitz回缩.15 3.6 局部莫尔斯拟测地线.16 3.7 莫尔斯映射的局部到整体原理.18

4 群论应用 **19**

4.1 莫尔斯作用的稳定性.19 4.2 Schottky作用.23 4.3 莫尔斯作用的算法识别.25

5 附录：莫尔斯拟测地线的更多性质 **28**

5.1 对称空间的芬斯勒几何.28 5.2 菱形的稳定性.30 5.3 莫尔斯拟测地线的芬斯勒逼近.31 5.4 改造莫尔斯拟测地线.32

1 引言

本文是我们论文 [KLP5] 的续篇，主要包含我们早期论文 [KLP1] 第 7 节的内容（唯一新增的内容见定理 4.8 和本文附录）。我们回顾一下，在 Gromov双曲空间中，可以通过考察足够大的有限片段来局部识别拟测地线，参见 [CDP]。在我们关于高秩对称空间 X （非紧型）的早期论文 [KLP4, KLP5, KLP2, KL1, KL2]，中，我们引入了双曲拟测地线的一个类似概念，并称之为莫尔斯拟测地线。莫尔斯拟测地线是相对于模型球面面 τ_{mod} 的某个面来定义的 σ_{mod} 。除拟等距常数 L、 A、 τ_{mod} 外， X 的莫尔斯拟测地线还带有另外两个参数：一个正数 D ，以及模型球面室 σ_{mod} 中 τ_{mod} 的开星形内的一个 Weyl凸子集 Θ 。在 [KLP1, KLP5, KLP2] 中，我们还定义了从 Gromov 双曲空间到对称空间的 τ_{mod} 莫尔斯映射 $Y \to X$ 。这些映射的定义性质是，它们将测地线映为一致的 τ_{mod} 莫尔斯拟测地线，即具有固定参数组 $(\Theta、 D、 L、 A)$ 的 τ_{mod} 莫尔斯拟测地线。

本文的主要结果是在 X 中对莫尔斯拟测地线的局部刻画 ：

定理 1.1（莫尔斯拟测地线的局部到整体原理）。对于 L, A, Θ, Θ', D，存在 S, L', A', D' ，使得 X 中每条 S- 局部 (Θ, D, L, A)- 局部莫尔斯拟测地线都是一条 (Θ', D', L', A')– 莫尔斯拟测地线。

这里，映射某个性质的 S-局部性是指，该性质对于将此映射限制到长度为 S 的子区间上时仍然成立。详情请参见定义 3.34 和定理 3.34。基于这一原理，我们在第 3.7 节证明了从双曲度量空间到对称空间的莫尔斯映射的局部到整体原理。

我们证明这些局部到整体原理的若干推论：

1. G的莫尔斯 子群的结构稳定性，将 Sullivan 的秩一结构稳定性定理推广至 [Su] （详细证明另见 [KKL] ）；参见定理 4.4 和 4.6。

此前已知 Anosov 子群的结构稳定性（Labourie 和 Guichard–Wienhard），而我们的方法更具一般性，适用于更广泛的一类离散子群，参见[KL4]。

定理1.2（Morse 作用空间的开性）。对于字双曲群Γ， τ_{mod}-Morse 作用构成的子集在 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 中是开集。

定理1.3（结构稳定性）。设 Γ 是字双曲群。那么对于 τ_{mod}-Morse 作用ρ： $\Gamma \rightharpoonup X$，边界嵌入 α_ρ： $\partial_\infty\Gamma \to$旗流形$(\tau_{mod})$ 关于作用ρ连续变化。

特别地，充分接近忠实 Morse 作用的作用仍然是离散且忠实的。我们通过适当不连续作用域的稳定性定理（定理4.8）补充这一结构稳定性定理。

2. Morse 性质的局部性意味着 Morse 子群可通过算法识别；见第4.3节：

定理1.4（群作用的 Morse 性质的半可判定性）。设 Γ是字双曲群。那么存在一个算法，其输入为同态 ρ： $\Gamma \to G$ （定义在 Γ的生成元上），并且当且仅当 ρ 定义了 τ_{mod}-Morse 作用 $\Gamma \rightharpoonup X$ 时，该算法会终止。

如果该作用不是莫尔斯作用，算法将永远运行下去。注意，鉴于 [K2], ，不存在任何算法（按 BSS 可计算性的意义）能够判断一个表示 $\Gamma \to$Isom$(\mathbb{H}^3)$ 是否不是几何有限的。

3. 我们通过构造自由群在高秩对称空间上的 Morse-Schottky 作用来展示我们的技术；见第 4.2 节。与以往所有已知的构造不同，我们的证明不依赖乒乓论证，而是纯粹从几何出发，通过构造树的等变拟等距嵌入来进行。关键的一步是观察到，对对称空间中充分间隔的点列而言，某种局部直性蕴含全局莫尔斯性质。这一观察也是莫尔斯作用局部到整体原理证明的核心。

自 [KLP1] 最初于 2014 年发布以来，第 7 节的内容已有若干改进，因此本文相关内容也随之得到改进：

(a) 第一作者和第二作者与 Subhadip Dey 合作，在 [DKL、DK1、DK2] 中证明了 Anosov 子群的不同形式的组合定理，随后第一作者也证明了相关结果。第一个结果推广了本文第 4.2 节中的技巧，而另外两个推广则基于一种乒乓论证。

(b) Max Riestenberg 在 [1] 中给出了莫尔斯拟测地线、进而莫尔斯嵌入的局部到整体原理的明确估计。Riestenberg 的估计基于以微分几何和李论论证替代本文中使用的某些极限论证。

论文结构。

第 3 节详细讨论了莫尔斯拟测地线和作用的概念。在该节中，除其他内容外，我们还建立了莫尔斯拟测地线的局部到整体原理。

在第4节中，我们将局部到整体原理应用于李群的离散子群：证明了莫尔斯作用具有结构稳定性，且可通过算法识别。我们还构造了自由群在对称空间上的 Morse-Schottky 作用。在第5节（论文的附录）中，我们证明了莫尔斯拟测地线的更多性质，这些性质在我们的研究中很有用。

致谢。第一位作者获得了美国国家科学基金会的DMS-12-05312和DMS-16-04241项目资助、韩国高等研究院通过KIAS学者项目提供的资助，以及编号为391602的西蒙斯基金会研究员奖。最后一位作者获得了Mineco MTM2012-34834和AGAUR SGR2009-1207项目资助。三位作者还感谢GEAR资助，该资助部分支持了2012年冬季的IHP三学期项目（DMS 1107452、1107263、1107367“RNMS：几何结构与表示簇”（GEAR网络）），并感谢波恩马克斯·普朗克数学研究所，本论文的部分工作在此完成。

2 预备知识

2.1 对称空间几何的基本概念

本文将沿用我们先前著作中的定义、记号和结果。

关于对称空间相关的各种概念，读者可参阅我们先前的论文，例如 [KLP4、KLP5、KLP2、KL1、KL2]，其中包括对称空间上的多面体芬斯勒度量（[KL1]）、 ι 的对立对合 σ_{mod}、 σ_{mod} 的模型面 τ_{mod} 及相关的 τ_{mod}-旗流形 Flag(τ_{mod})（ [KLP5]的第 2.2.2 和 2.2.3 节）、类型映射 θ: $\partial_\infty X \to \sigma_{mod}$、开舒伯特胞腔 $C(\tau) \subset$ Flag(τ_{mod}) （ [KLP5]的第 2.4 节）、 X 上的 Δ值距离 d_Δ （ [KLP5]的第 2.6 节）、 Θ-正则测地线段（参见 [KLP5]的 §2.5.3）、平行集、星形集、开星形集和 Θ-星形集 st(τ)、ost(τ)及 st$_\Theta(\tau)$、韦尔扇形 $V(x、\ \tau)$（ [KLP5]的第 2.4 节）、韦尔锥$V(x、$ st$(\tau))$和 Θ-锥 $V(x、$ st$_\Theta(\tau))$、菱形 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x、\ y)$及 Θ-菱形 $\diamondsuit_\Theta(x、\ y)$（ [KLP5]的第 2.5 节）、 τ_{mod}-正则序列和群（ [KLP5]的第 4.2 节）、 τ_{mod}-收敛子群、旗收敛、旗收敛的芬斯勒解释（参见 [KL1，第 4.5 和 5.2] 节及 [KLP5]）、 τ_{mod}-极限集 $\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma) \subset$Flag$(\tau_{mod})$ （ [KLP5]的第 4.5 节）、视觉极限集（ [KLP5]第 4 页）、一致 τ_{mod}-正则序列和子群（ [KLP5]的第 4.6 节）、莫尔斯子群（ [KLP5]的第 5.4 节），以及更一般的莫尔斯拟测地线和莫尔斯映射（ [KLP2]的定义 5.31、5.33）、对跖极限集（ [KLP5]的定义 5.1）和映至旗流形的对跖映射（ [KLP2]的定义 6.11）。

本文将频繁使用 X 中 Θ-锥的凸性：

命题 2.1（Pr 命题 2.10（ [KLP5]）。对于每个 Weyl凸子集 $\Theta \subset$ st(τ_{mod}),

对于每个 $x \in X$ 和 $\tau \in$ 旗流形(τ_{mod})，锥 $V(x,\ \mathrm{st}_\Theta(\tau)) \subset X$ 都是凸的。

2.2 约定的记号与约定

- 我们用记号 X 表示一个非紧型对称空间，用 G 表示一个在 X上等距且传递作用的半单李群，并令 K 为 G的一个极大紧子群，因此 X 与 G/K微分同胚。我们假设 G 与等距变换群 Isom(X) 可公度，这意味着自然映射 $G \to$Isom(X)的核和余核均有限。特别地，G 在 Isom(X) 中的像包含单位连通分支 Isom$(X)_o$。

- 我们令 $\tau_{mod} \subseteq \sigma_{mod}$ 为一个固定的 ι-不变面型。
- 我们用记号 $x_n \xrightarrow{f} \tau \in ,(\tau_{mod})$ 表示 τ_{mod}-正则序列 $x_n \in X$ 旗收敛到单形 $\tau \in$Flag(τ_{mod})。

- 我们将使用记号 Θ, Θ' 表示开星形 ost$(\tau_{mod}) \subset \sigma_{mod}$的一个 ι-不变、紧致、Weyl凸子集（参见 [KLP5]中的定义 2.7）。
- 我们始终假设 $\Theta < \Theta'$，也就是说，$\Theta \subset$int(Θ')。
- 常数　　量 $L, A, D, \epsilon, \delta, l, a, s, S$ 始终严格为正，且 $L \geqslant 1$　　.

2.3 ζ-角

我们固定一个 ι-不变的类型 $\zeta = \zeta_{mod} \in$int(τ_{mod}) 作为辅助数据。（为避免繁琐的记号，我们在 ζ-角中省略 ζ_{mod} 的下标。）对于一个类型为 τ_{mod} 的单形 $\tau \subset \partial_\infty X$，即 $\tau \in$Flag(τ_{mod})，我们将 $\zeta(\tau) \in \tau$ 定义为类型为 ζ_{mod} 的理想点。给定两个这样的单形 $\tau_\pm \in$ Flag(τ_{mod}) 和一个点 $x \in X$，定义 ζ-角

$$\angle_x^\zeta(\tau_-, \tau_+) = \angle_x^\zeta(\tau_-, \xi_+) := \angle_x(\xi_-, \xi_+), \tag{2.2}$$

其中 $\xi_\pm = \zeta(\tau_\pm)$。

类似地，定义 ζ-Tits 角

$$\angle_{Tits}^\zeta(\tau_-, \tau_+) = \angle_{Tits}^\zeta(\tau_-, \xi_+) := \angle_x(\xi_-, \xi_+), \tag{2.3}$$

其中 x 属于平坦 $F \subset X$，使得 $\tau_-, \tau_+ \subset \partial_{Tits} F$。那么，单形 $\tau_\pm$（类型相同）是对踵的，当且仅当

$$\angle_{Tits}^\zeta(\tau_-, \tau_+) = \pi$$

对于某个（等价地，对于任意一个）如上所述的 ζ，

注 2.4. 我们注意到，理想点 $\zeta_\pm$ 与 $\angle_{Tits}(\zeta_-、\ \zeta_+) = \pi$ 相对，当且仅当从 X 中的某个点观察它们时，它们之间的角为 $\simeq \pi$（即接近 π）。更确切地说，存在 $\epsilon(\zeta_{mod})$ 使得：

如果对于某个点 x，有 $\angle_x(\zeta_-、\ \zeta_+) > \pi - \epsilon(\zeta_{mod})$，那么 $\zeta_\pm$ 相对。

这由角的比较 $\angle_x(\zeta_-,\zeta_+) \leqslant \angle_{Tits}(\zeta_-,\zeta_+)$ 以及如下事实得出：固定类型 ζ_{mod} 的理想点之间的 Tits 距离只取有限多个值。

对于一个 τ_{mod}-正则单位切向量 $v \in TX$，我们用 $\tau(v) \subset \partial_\infty X$ 表示唯一的类型为 τ_{mod} 的单形，使得以 v 为初始方向的射线 ρ_v 表示 ost$(\tau(v))$中的一个理想点。令 $\zeta(v) = \zeta(\tau(v))$。注意，$\zeta(v)$随 v连续变化。

对于 X 中的一个 τ_{mod}-正则线段 xy，令 $\tau(xy) = \tau(v)$，其中 v 是与 xy相切的单位向量。

于是，对于 τ_{mod}-正则线段 xy, xz 以及 $\tau \in$ Flag(τ_{mod})，我们定义 ζ-角：

$$\angle_x^\zeta(y,\tau) = \angle_x^\zeta(\tau(xy),\tau), \quad \angle_x^\zeta(y,z) = \angle_x^\zeta(\tau(xy),\tau(xz))$$

因此，ζ-角并不取决于 y, z，而是取决于单形 $\tau(xy), \tau(xz)$。这些 ζ-角将起到角的作用，用来描述在 x相交的菱形 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x,y)$与 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x,z)$之间的关系。注意，若 X 的秩为 1，则 ζ-角就是通常的黎曼角。

2.4 到平行集的距离与角

本节汇集了有关对称空间中平行集的一些几何事实，主要讨论估计 X 中点到平行集的距离。

备注 2.5。本节中的常数和函数并未明确给出，其存在性通过紧致性论证得到证明。关于此处及定理 3.18 中的显式计算，请参阅.....的博士论文。

我们首先 证明一个引理（引理 2.6），它加强了 [KLP5] 中的推论 2.46。

引理 2.6。设 $\tau_\pm$ 是 $\partial_{Tits}X$ 中一对对踵单形。那么，每条渐近于点 $\xi \in$ ost(τ_+) 的测地射线 γ，都与 $P(\tau_-$ 中的一条测地射线强渐近，$\tau_+)$。

证明。若 ξ 属于单形 τ_+的内部，则由 [KLP5]的推论 2.46 可得所述结论：

Weyl扇形 $V(x_1、\ \tau)$与 $V(x_2、\ \tau)$强渐近，当且仅当 x_1和 x_2位于 τ处的同一个 horocycle上。

现在考虑一般情形。假设 ξ 属于开单形int(τ')，且 τ是 τ'的一个面。于是存在一个公寓 $a \subset \partial_{Tits}X$，同时包含 ξ（因此也包含 τ'和 τ）以及单形 τ_-。令 $F \subset X$为满足 $\partial_\infty F = a$ 的极大平坦。则 F 包含一条与 τ_- 和 τ_+中的点渐近的测地线。因此，F 包含于$P(\tau_-、\ \tau_+)$中。另一方面，对单形τ'应用 [KLP5], 的同一推论 2.46，可得 γ与 F中的一条测地射线强渐近。

□

下面的引理对引理 2.6 的结论作出了定量加强：

引理 2.7. 设 Θ 是 ost(τ_+) 的紧子集。那么满足 $\theta(\xi) \in \Theta$ 的射线 $x\xi$ 与 $P(\tau_-, \tau_+)$ 一致地强渐近，即 $d(\cdot, P(\tau_-, \tau_+))$ 沿这些射线趋于零，并且关于 $d(x, P(\tau_-, \tau_+))$ 和 Θ 一致。

证明。假设引理中的断言不成立，即存在 $\epsilon > 0$、一个趋于无穷的序列 $T_i \in \mathbb{R}_+$，以及一列射线 $\rho_i = x_i\xi_i$，满足 $\xi_i \in \Theta$ 和 $d(x_i, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant d$，使得

$$d(y, P(\tau_-, \tau_+)) \geqslant \epsilon, \forall y \in \rho([0, T_i]). \tag{2.8}$$

利用 $P(\tau_-, \tau_+)$ 的稳定子的作用，我们可以假设点 x_i 属于 X 的某个紧子集。因此，射线序列 $x_i\xi_i$ 子列收敛到一条射线 $x\xi$，满足 $d(x, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant d$ 和 $\xi \in \Theta$。于是，不等式 (2.8) 表明，整个极限射线 $x\xi$ 都位于平行集 $P(\tau_-, \tau_+)$ 的开 ϵ-邻域之外。然而，根据引理 2.6，射线 $x\xi$ 与 $P(\tau_-, \tau_+)$ 中的一条测地线强渐近。矛盾。

□

接下来，我们将点 $x \in X$ 到平行集的距离与 x处的 ζ-角联系起来。假设单形 $\tau_\pm$，或者说理想点 $\zeta_\pm = \zeta(\tau_\pm)$ （见第 2.3 节），彼此相对。那么

$$\angle_x^\zeta(\tau_-, \tau_+) = \angle_x(\zeta_-, \zeta_+) = \pi$$

当且仅当 x 位于平行集 $P(\tau_-$中，$\tau_+)$。此外，$\angle_x^\zeta(\tau_-$，当且仅当 x 接近 $P(\tau_-$时，$\tau_+) \simeq \pi$，$\tau_+)$；而且在平行集附近，这两个量彼此控制。更准确地说：

引理 2.9. (i) 若 $d(x, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant d$，则 $\angle_x^\zeta(\tau_-, \tau_+) \geqslant \pi - \epsilon(d)$，其中 $\epsilon(d) \to 0$ 为 $d \to 0$。

(ii) 对于充分小的 ϵ，$\epsilon \leqslant \epsilon'(\zeta_{mod})$，有：不等式 $\angle_x^\zeta(\tau_-, \tau_+) \geqslant \pi - \epsilon$ 蕴含存在某个函数 $d(\epsilon)$，使得 $d(x, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant d(\epsilon)$，且该函数在 $\epsilon \to 0$时趋于 0。

证明。抛物子群 $P_{\tau_-} \cap P_{\tau_+}$ 的交集保 $P(\tau_-$ 平行集 $\tau_+)$，并在其上具有传递作用。因此，紧致性以及 $\angle_\cdot(\zeta_-$ 的连续性 $\zeta_+)$ 表明，$\pi - \angle_\cdot(\zeta_-$ 在 $P(\tau_-$ 的管状 r 邻域边界上取得严格为正的最大值和最小值，分别记为 $\phi_1(r)$ 和 $\phi_2(r)$。此外，当 $r \to 0$ 时，$\phi_i(r) \to 0$。我们有如下估计：

$$\pi - \phi_1(d(x, P(\tau_-, \tau_+))) \leqslant \angle_x(\zeta_-, \zeta_+) \leqslant \pi - \phi_2(d(x, P(\tau_-, \tau_+)))$$

函数 $\phi_i(r)$ 单调递增（弱意义下）。这是因为，沿着渐近于 ζ_- 或 ζ_+ 的射线，角 $\angle_\cdot(\zeta_-$ $\zeta_+)$ 单调递增，而距离 $d(\cdot\ P(\tau_-\ \tau_+))$ 单调递减。该估计蕴含了这些断言。

□

对 $d(\cdot, P(\tau_-, \tau_+))$ 和 $\angle_\cdot(\zeta_-, \zeta_+)$ 的控制会沿着韦尔锥 $V(x,$ st$(\tau_+))$“扩散”，因为后者与平行集 $P(\tau_-, \tau_+)$ 渐近。此外，若沿着一个深入锥内的 τ_{mod}-正则方向进入，控制效果会更好。更确切地说：

引理 2.10. 设 $y \in V(x,$ st$_\Theta(\tau_+))$ 是一个满足 $d(x, y) \geqslant l$ 的点。

(i) 若 $d(x, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant d$，则

$$d(y, P(\tau_-, \tau_+)) \leqslant D'(d, \Theta, l) \leqslant d$$

其中 $D'(d、\ \Theta、\ l)\to 0$ 为 $l\to+\infty$。

(ii) 对于充分小的 ϵ、 $\epsilon\leqslant\epsilon'(\zeta_{mod})$，我们有：若 $\angle_x(\zeta_-、\ \zeta_+)\geqslant\pi-\epsilon$，则

$$\angle_y(\zeta_-,\zeta_+)\geqslant\pi-\epsilon'(\epsilon,\Theta,l)\geqslant\pi-\epsilon(d(\epsilon))$$

其中 $\epsilon'(\epsilon、\ \Theta、\ l)\to 0$ 是 $l\to+\infty$。

证明。 $P(\tau_-、\ \tau_+)$ 的距离在锥 $V(x$ 的尖端 x 处取得最大值，$\mathrm{st}(\tau_+))$，因为沿着射线 $x\xi$，当 $\xi\in\mathrm{st}(\tau_+)$ 时，该距离单调递减。这给出了右侧的界 d，并且两次应用引理 2.9，可得 $\epsilon(d(\epsilon))$。

那些具有一致 τ_{mod}-正则类型 $\theta(\xi)\in\Theta$ 的射线 $x\xi$ 与 $P(\tau_-、\ \tau_+)$ 一致强渐近，即 $d(\cdot、\ P(\tau_-、\ \tau_+))$ 沿这些射线趋于零，且其衰减一致地取决于 d 和 Θ，见引理 2.7。这给出了衰减 $D'(d、\ \Theta、\ l)\to 0$，当 $l\to+\infty$ 时。 ϵ' 的衰减可由再次应用引理 2.9 得出。

□

3 莫尔斯映射

本节研究序列和映射的莫尔斯性质。本节的主要目标是建立一个判定莫尔斯性的局部准则。为此，我们引入 X 中点序列的局部直性概念。莫尔斯序列通常并不直，但经过适当修改后便会变直，具体而言，先对其进行充分粗化，再取连续中点构成的序列。反过来，核心结果是，间距充分大的直序列是莫尔斯的。由此，我们得到莫尔斯性质的局部到整体刻画。

3.1 莫尔斯拟测地线

定义 3.1（莫尔斯拟测地线）。 X 中的 (Θ,D,L,A)-莫尔斯拟测地线是一个 (L,A)-拟测地线 $p\colon I\to X$（定义在区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上），满足对于所有 $t_1,t_2\in I$，子路径 $p|_{[t_1,\ t_2]}$ 都与一个 $d(x_i,p(t_i))\leqslant D$ 的 Θ-菱形 $\diamondsuit_\Theta(x_1,x_2)$ 相距不超过 D。

我们将四元组 (Θ,D,L,A) 称为莫尔斯数据，并简记为 $M=(\Theta,D,L,A)$。设 $M+D'=(\Theta,D+D',L,A+2D')$。我们称 M 包含 Θ，如果 M 具有形式 (Θ,D,L,A)，其中 $D\geqslant 0,L\geqslant 1,A\geqslant 0$。

由 M-莫尔斯拟测地线的定义可立即得到以下引理。

引理 3.2（扰动引理）。若 p,p' 是 X 中的路径，且 p 是 M-莫尔斯的，并且 $d(p,p')\leqslant D'$，则 p' 是 $M+D'$-莫尔斯的。

如果莫尔斯拟测地线 p 的定义域是半直线，则称其为莫尔斯射线。如果 $I=\mathbb{R}$，则称莫尔斯拟测地线为莫尔斯拟直线。

一般而言，莫尔斯拟射线在无穷远处（在 X的视觉紧化中）不收敛，但它们在无穷远处 τ_{mod}-收敛。这是以下事实的结果：

引理 3.3（圆锥性）。每条莫尔斯拟射线 $p\colon [0,\infty)\to X$ 都与某个锥 $V(p(0)$ 的子集豪斯多夫距离一致有界，其中 $\mathrm{st}_\Theta(\tau))$ 对应于唯一的、类型为 τ_{mod} 的单形 τ。

证明。子路径 $p|_{[0,t_0]}$ 都与 Θ-菱形的豪斯多夫距离一致有界。这些子列粗收敛于一个锥 $V(x,$ 其中 $\mathrm{st}_\Theta(\tau))$ x 与 $p(0)$ 和 τ 一致有界，该锥对应于一个类型为 τ_{mod} 的单形。这就证明了存在性。由于 $p(n)\xrightarrow{f}\tau$， τ 的唯一性由 τ_{mod}-极限的唯一性得出，参见 [KLP5，引理 4.23]。 □

定义 3.4（莫尔斯拟射线的端点）。我们将前一个引理给出的唯一单形称为莫尔斯拟射线 $p\colon [0,\infty)\to X$ 的端点，并记作

$$p(+\infty)\in \mathrm{Flag}(\tau_{mod}).$$

根据引理 3.3，豪斯多夫距离接近的莫尔斯拟射线具有相同的端点。在第 3.3 节中，我们将证明：相对于拟射线的粗收敛拓扑，莫尔斯拟射线端点具有一致连续性。

3.2 莫尔斯映射

We 现在转而讨论定义域更一般（不只是区间）的莫尔斯映射。

定义 3.5. 设 Y 是一个格罗莫夫双曲测地度量空间。如果映射 $f\colon Y\to X$ 将 Y 中的测地线映为 M-莫尔斯拟测地线，则称其为 M-莫尔斯映射。

因此，每个莫尔斯映射都是拟等距嵌入。尽管这个定义对一般度量空间也有意义，但我们在 [KLP2] 中证明了，莫尔斯映射的定义域必然是双曲的。

更一般地，可以在拟测地度量空间上定义莫尔斯映射：

定义 3.6（拟测地度量空间）。若度量空间 Z 中任意两点都可以由 (l,a)-拟测地线连接，则称其为 (l,a)-拟测地空间。若某个空间对于某一对参数 l,a 是 (l,a)-拟测地的，则称其为拟测地空间。

每个拟测地空间都与某个测地度量空间准等距。具体而言，如果 Z 是 (λ,α)- 拟测地空间，那么它与其 $(\lambda+\alpha)$-里普斯复形准等距。本文所考虑的拟测地空间是赋予字度量的离散群。

定义 3.7（莫尔斯嵌入）。设 (Θ,D,L,A) 为莫尔斯数据。从 (l,a)-拟测地空间 Z 到 X 的 $(\Theta,$ $D,L,A,l,a)$-莫尔斯嵌入（或映射）是一个映射 $f\colon Z\to X$，它将 Z 中的 (l,a)-拟测地线映射为 X中的 (Θ,D,L,A)-莫尔斯拟测地线。

当然，对于任意$l' \geqslant l, a' \geqslant a$，每个 (l, a)-拟测地度量空间也是 (l', a')-拟测地空间。下一个引理表明，拟测地线常数的这种选择本质上无关紧要。

引理 3.8. 设 $f\colon Z \to X$ 是从格罗莫夫双曲的 (l, a)-拟测地空间 Z上的一个映射。若 f是 $M = (\Theta, D, L, A, l, a)$-莫尔斯的，那么对于任意 (l', a')，它将 Z中的 (l', a')-拟测地线映为 X中的 $M' = (\Theta, D', L', A')$-莫尔斯拟测地线。这里，数据 M'仅依赖于 M, l', a'以及 Z的双曲性常数 δ。

证明. 这是莫尔斯拟测地线定义的推论，并由应用于 Z的莫尔斯引理得到。

□

注意，莫尔斯数据 M'中的参数 Θ与 M中的相同。因此，我们得到

定义 3.9. 拟测地双曲空间 Z 上的映射 $f\colon Z \to X$ 称为 Θ-莫尔斯映射，若它将 Z 中的一致拟测地线映为 X中的 Θ-莫尔斯一致拟测地线。

这个概念只取决于 Z 的拟等距类，也就是说，与拟等距映射复合后，Θ-莫尔斯嵌入仍然是 Θ-莫尔斯嵌入。要使这一点成立，我们必须要求对质量任意差（但一致）的拟测地线的像加以控制。

设 Γ 是一个双曲群，配备固定的有限生成集 S，并设 Y 是相对于 S 的 Γ 的凯莱图。对于 $x \in X$，等距作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 确定轨道映射 $o_x\colon \Gamma \to \Gamma x \subset X$。每个这样的映射都可延拓到 Γ 的凯莱图 Y，并将边映到 X 中的测地线。

定义 3.10. 若等距作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 或表示 $\rho\colon \Gamma \to G$ 是 M-莫尔斯的（相对于基点 $x \in X$），则称其为 M-莫尔斯的；这意味着（延拓后的）轨道映射 $o_x\colon Y \to X$ 是 M-莫尔斯的。类似地，若子群 $\Gamma < G$ 的包含同态 $\Gamma \hookrightarrow G$ 是莫尔斯的，则称该子群为莫尔斯的。

当然，作用的莫尔斯性质及参数 Θ 不依赖于 Γ 的生成集和基点 x 的选择，但三元组 $(D、 L、 A)$ 则依赖于此。因此，讨论双曲群的 Θ-莫尔斯作用和 τ_{mod}-莫尔斯作用是有意义的，其中 $\Theta \subset \mathrm{ost}(\tau_{mod})$。在 [KLP5、KLP2、KL1] 中，我们给出了莫尔斯作用的多种替代定义，其中包括该定义与 Anosov 子群概念的等价性。

3.3 无穷远处的连续性

设 $X、 Y$ 为完备度量空间。我们固定一个基点 $y \in Y$。

定义 3.11。若存在 $C < \infty$，使得对于每个 R，都存在 $N = N(C、 R)$，满足下述条件，则称映射序列 $f_n\colon Y \to X$ 粗收敛于映射 $f\colon Y \to X$，

$$d(f_n|_B, f|_B) \leqslant C,$$

其中 $B = B(y, R)$。

请注意，此定义与紧集上一致收敛这一概念的区别：由于我们是在粗几何框架下工作，要求映射之间的距离小于ϵ 且接近于零毫无意义。

根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，将 y 映到 X中的某个固定有界子集的 (L, A)-粗利普希茨映射 $Y \to X$所构成的空间是粗序列紧的：每个序列都包含一个粗收敛子序列。

在下一个引理中，我们假设 Y 是一个测地 δ-双曲空间，而 X 是一个非紧型对称空间。该引理本身是扰动引理（引理 3.2）的直接推论。

引理 3.12. 假设 $p_n : \mathbb{R}_+ \to X$ 是一个 M-莫尔斯射线序列，它粗收敛到映射 $p : \mathbb{R}_+ \to X$。那么 p 是 M'-莫尔斯的，其中 $M' = M + C$，常数 C是粗收敛定义中出现的常数。

特别地，一列（具有统一参数的）莫尔斯拟测地线的粗极限仍然是莫尔斯的。

对于下一个引理，我们在旗流形 $\mathrm{F} = \mathrm{Flag}(\tau_{mod})$上赋予一个背景度量 d_{F}。

引理3.13. 假设 $p_n : \mathbb{R}_+ \to X$ 是一个粗收敛到 M-莫尔斯射线 $p : \mathbb{R}_+ \to X$的 M-莫尔斯射线序列。那么，准射线 p_n的端点序列 $\tau_n := p_n(\infty)$ 收敛到 $\tau = p(\infty)$。此外，后一收敛在以下意义下是一致的：对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个仅依赖于 M、 C和 $N(R, C)$（见定义 3.11）的 n_0，使得对所有 $n \geqslant n_0$, $d_{\mathrm{F}}(\tau_n, \tau) \leqslant \epsilon$均成立。

证明. 假设结论不成立。那么，鉴于将 y 映到 X的某个固定紧子集的 M-莫尔斯映射空间具有粗紧性，存在如引理所述的序列 (p_n)，它粗收敛到 p，而序列 $p_n(\infty) = \tau_n$ 收敛到 $\tau' \neq p(\infty) = \tau$。根据粗收敛 $p_n \to p$，存在 $C < \infty$ 以及一个序列$t_n \to \infty$，使得 $d(p_n(t_n), p(t_n)) \leqslant C$。根据莫尔斯拟测地线的定义，存在一个锥序列 $V(x_n$，满足 $\mathrm{st}(\tau_n))$（其中 x_n 位于有界子集 $B \subset X$中），使得 p_n 的像包含在 $V(x_n$的 D-邻域内，且 $\mathrm{st}(\tau_n))$。因此，序列 $(p_n(t_n))$ 旗收敛到 τ'，而 $(p(t_n))$ 旗收敛到 τ。根据 [KLP5，引理4.23],，将序列改变一个一致有界的量不会改变旗极限。因此，序列 $(p(t_n))$ 也旗收敛到 τ'。因此，$\tau = \tau'$。矛盾。

□

3.4 直序列的莫尔斯引理

为了说明本节的结果，我们回顾哈达玛流形 Y 中曲率为 $\leqslant -1$ 的分段测地路径成为拟测地线的以下充分条件（参见例如 [KaLi]）：

命题 3.14。设 c 是 Y 中的一条分段测地路径，其顶点处的角为 $\geqslant \alpha > 0$，且边长大于 L，其中 α 和 L 满足

$$\cosh(L/2)\sin(\alpha/2) \geqslant \nu > 1. \tag{3.15}$$

那么 c 是一个 $(L(\nu), A(\nu))$-拟测地线。

考虑顶点位于双曲平面中某个 horocycle 上的 c，可以看出该命题中的不等式是锐的。

推论 3.16. 如果 L 足够大，且 α 充分接近 π，那么 c 是（统一）拟测地线。

在高秩情形下，我们没有不等式 (3.15) 的类似结论，因此将对该推论进行推广。不过，推论中的角将替换为 ζ-角。我们将证明（在菱形串定理，即定理 3.30 中），如果 c 是 X 中一条分段测地路径，且其边足够长、连续线段之间的 ζ-角充分接近 π，那么对于合适的莫尔斯数据，c 是 M-莫尔斯的。

以下我们考虑 X 中点的有限或无限序列 (x_n)。

定义 3.17（直且间隔充分的序列）。若一列 (x_n) (Θ, ϵ)-直序列的线段 $x_n x_{n+1}$ 是 Θ-正则的，我们就称该序列为 (x_n) (Θ, ϵ)-直序列；

$$\angle^{\zeta}_{x_n}(x_{n-1}, x_{n+1}) \geqslant \pi - \epsilon$$

对所有 n 都成立。若线段 $x_n x_{n+1}$ 的长度为 $\geqslant l$，我们就称该序列为 l-等间距的。

注意，每个直序列都可以扩展为一个双无限直序列 e.

直性是一个局部条件。本节的目标是证明以下局部到整体结果：它断言，足够直且间隔充分的序列满足高秩版本的莫尔斯引理（该引理针对双曲空间中的拟测地线）。

定理 3.18（直间距序列的莫尔斯引理）。对于 Θ, Θ', δ，存在 l, ϵ，使得：

每个 (Θ, ϵ)-直 l-间隔序列 (x_n) 都与某个平行集 $P(\tau_-, \tau_+)$ 相距不超过 δ，该平行集由类型为 τ_{mod}的单纯形 $\tau_\pm$ 组成；并且它从 τ_- 移动到 τ_+，其含义是，它到 $P(\tau_-$的最近点投影$\bar{x}_n, \tau_+)$ 满足

$$\bar{x}_{n\pm m} \in V(\bar{x}_n, \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_\pm)) \tag{3.19}$$

对所有 n 和 $m \geqslant 1$都成立。

注记 3.20（全局间隔）。1. 作为此定理的推论，我们将证明直间距序列是拟测地线：

$$d(x_n, x_{n+m}) \geqslant clm - 2\delta$$

其常数为 $c = c(\Theta') > 0$。见推论 3.29。特别地，通过用测地线段插值序列(x_n)，我们得到 X中的一条莫尔斯拟测地线。

2. 定理 3.18 是对 Gromov 双曲测地度量空间几何中两个熟知事实的高秩推广：其一是局部拟测地线（满足适当参数条件）是全局拟测地线；其二是莫尔斯引理，它指出拟测地线始终与测地线保持一致的近距离。在高秩情形下，拟测地线当然不一定接近测地线；相反，在直度假设下，它们接近菱形／韦尔锥／平行集。

3. 显然，我们可以加强推论 3.16：对于每个 $\epsilon < \pi$，都存在 $L_0(\epsilon)$，使得若 $\alpha \geqslant \pi - \epsilon$ 且 $L \geqslant L_0(\epsilon)$，则 c 是 X中的一致拟测地线。对于秩为 $\geqslant 2$的对称空间，类似的加强并不成立。例如，当 $W \cong S_3$ 且$\epsilon = 2\pi/3,$ 时，无论 Θ、Θ' 和 l 为何，定理 3.18 的结论对包含在同一个平坦中的序列就已经不成立。

为了证明该定理，我们先考察半无限序列，并证明：如果它们起初远离一个类型为 τ_{mod} 的理想单形，那么之后也会继续远离它。

定义 3.21（远离理想单形）。给定一个类型为τ_{mod} 的面 $\tau \subset \partial_{Tits}X$ 以及不同的点 x、$y \in X$，定义角

$$\angle_x^{\zeta}(\tau, y) := \angle_x(z, y)$$

其中，z 是测地射线 $x\xi$上的一个点（不同于 x），而 $\xi \in \tau$ 是类型为 ζ的点。

我们称序列 (x_n) 以 ϵ远离类型为 τ_{mod} 的单形 τ，如果

$$\angle_{x_n}^{\zeta}(\tau, x_{n+1}) \geqslant \pi - \epsilon$$

对所有 n均
成立。

引理 3.22（远离理想单形）。对于较小的 ϵ 和较大的 l、$\epsilon \leqslant \epsilon_0$ 和$l \geqslant l(\epsilon$、$\Theta)$，以下结论成立：

若序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$ 是 (Θ, ϵ)-直的且 l-等间距的，并且

$$\angle_{x_0}^{\zeta}(\tau, x_1) \geqslant \pi - 2\epsilon,$$

那么 (x_n) 以 ϵ远离 τ。

证明。由引理 2.10(ii)，单位速率测地线段 $c: [0, t_1] \to X$ 从 $p(0)$ 到 $p(1)$始终远离 τ达 $\epsilon(d(2\epsilon))$，并在时刻 $\geqslant l$远离 τ达 $\epsilon'(2\epsilon, \Theta, l)$，其中包括终止时刻 t_1。当 $l(\epsilon, \Theta)$ 充分大时，我们有 $\epsilon'(2\epsilon, \Theta, l) \leqslant \epsilon$。于是，$c$在时刻 t_1远离 τ达 ϵ，这意味着 $\angle_{x_1}^{\zeta}(\tau, x_0) \leqslant \epsilon$。由 x_1处的直性和三角不等式，再次得到 $\angle_{x_1}^{\zeta}(\tau, x_2) \geqslant \pi - 2\epsilon$。接下来用归纳法即可。 □

注意，确实存在满足前一个引理假设的单形 τ。例如，可以将初始线段 x_0x_1 向后延伸至无穷远，并选取 $\tau = \tau(x_1x_0)$。

现在我们来考察双无限序列。

以下我们假设，对于较小的 ϵ 和较大的 l，$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 (Θ,ϵ)-直的，且 l-等间距。首先，我们研究此类序列的渐近行为，并运用引理 3.22 的论证，找到一对对径理想单形 $\tau_\pm$，使得 (x_n) 从 τ_- 朝着 τ_+ 移动。

引理 3.23（向理想单形移动）。对于较小的 ϵ 和较大的 l、$\epsilon \leqslant \epsilon_0$、$l \geqslant l(\epsilon、\Theta)$，以下结论成立：

存在一对类型为 τ_{mod} 的对踵单形 $\tau_\pm$，使得不等式

$$\angle^{\zeta}_{x_n}(\tau_\mp, x_{n\pm1}) \geqslant \pi - 2\epsilon \tag{3.24}$$

对所有 n 均成立。

证明。1. 对每个 n，定义一个紧集 $C_n^\mp \subset$ 旗流形 (τ_{mod})

$$C_n^\pm = \{\tau_\pm : \angle^{\zeta}_{x_n}(\tau_\pm, x_{n\mp1}) \geqslant \pi - 2\epsilon\}.$$

如引理 3.22 的证明所示，在 x_{n+1} 处的直性蕴含 $C_n^- \subset C_{n+1}^-$。因此，族 $\{C_n^-\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成一个由非空紧子集组成的嵌套序列，故其交集非空，且包含一个单形 τ_-。类似地，存在一个单形 τ_+，对所有 n 均属于 C_n^+。

2. 尚需证明单形 τ_-、τ_+ 是对踵的。利用直性和三角不等式，我们得到

$$\angle^{\zeta}_{x_n}(\tau_-, \tau_+) \geqslant \pi - 5\epsilon$$

对所有 n 都成立。因此，若 $5\epsilon < \epsilon(\zeta)$，则根据注 2.4，单形 τ_-, τ_+ 互为对踵。 □

我们找到的这对相对单形 (τ_-, τ_+) 在 X 中确定了一个平行集。第二步是证明 (x_n) 与它的距离一致有界。

引理 3.25（接近平行集）。当 ϵ 足够小时且 l 足够大时，$\epsilon \leqslant \epsilon(\delta)$ 和 $l \geqslant l(\Theta、\delta)$ 满足：序列 (x_n) 与 $P(\tau_-, \tau_+)$ 的距离不超过 δ。

证明。该结论由不等式 (3.4)（引理 3.23 证明的第二部分）与引理 2.9 合并推出。

□

证明的第三步也是最后一步，是证明 (x_n) 到 $P(\tau_-, \tau_+)$ 的最近点投影 $(\bar{x}_n)$ 从 τ_- 向 τ_+ 移动。

引理 3.26（投影向理想单形移动）。当 ϵ 足够小时且 l、$\epsilon \leqslant \epsilon_0$ 和 $l \geqslant l(\epsilon、\Theta、\Theta')$ 足够大时，线段 $\bar{x}_n\bar{x}_{n+1}$ 是 Θ'-正则的，并且

$$\angle^{\zeta}_{\bar{x}_n}(\tau_-, \bar{x}_{n+1}) = \pi$$

对所有 n 均
成立。

证明。根据前一个引理，如果 ϵ_0 足够小且 l 足够大，那么 (x_n) 与 $P(\tau_-$ 的距离小于 δ_0，$\tau_+)$。由于 x_nx_{n+1} 是 Θ-正则的，根据 Δ-长度的三角不等式可知，线段 $\bar{x}_n\bar{x}_{n+1}$ 是 Θ'-正则的；同样，这要求 l 足够大。

令 ξ_+ 表示延伸该线段的射线的理想端点，即 $\bar{x}_{n+1} \in \bar{x}_n\xi_+$。那么 x_{n+1} 与射线 $x_n\xi_+$ 的距离小于 $2\delta_0$。由此可得

$$\angle^{\zeta}_{Tits}(\tau_-, \xi_+) \geqslant \angle^{\zeta}_{x_n}(\tau_-, \xi_+) \simeq \angle^{\zeta}_{x_n}(\tau_-, x_{n+1}) \simeq \pi$$

最后一步由不等式（3.24）得出。固定类型的理想点之间的蒂茨距离具有离散性 ζ，这实际上意味着

$$\angle^{\zeta}_{Tits}(\tau_-, \xi_+) = \pi,$$

也就是说，理想点 $\zeta(\tau_-)$ 和 $\zeta(\xi_+)$ 互为对踵。但在$\partial_\infty P(\tau_-、\ \tau_+)$中，与 τ_- 相对的单形只有 τ_+，因此 $\tau(\xi_+) = \tau_+$和

$$\angle^{\zeta}_{\bar{x}_n}(\tau_-, \bar{x}_{n+1}) = \angle^{\zeta}_{\bar{x}_n}(\tau_-, \xi_+) = \pi,$$

如所述。 □

定理 3.18 的证明。只需考虑双无限序列。

引理 3.26 的结论等价于 $\bar{x}_{n+1} \in V(\bar{x}_n$,$\mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+))$。结合引理 3.25 和 3.26，我们由此得到了关于 $m = 1$的定理。

Θ'-锥的凸性，参见命题 2.1，意味着

$$V(\bar{x}_{n+1}, \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+)) \subset V(\bar{x}_n, \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+)),$$

由归纳法可得，对所有 $m \geqslant 1$，断言均成立。 □

注记 3.27. 定理的结论蕴含 $x_{\pm n} \to \tau_\pm$ 在 $n \to +\infty$时旗收敛。然而，序列 $(x_n)_{n\in\pm\mathbb{N}}$ 一般不会在无穷远处收敛，而是聚集于 $\mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_\pm)$ 的紧子集。

3.5 到直路径的利普希茨缩回

考虑 $\mathbb{R}$ 中一个（可能是无限的）闭区间 J；我们假设 J 的端点为整数或无穷。设 p：$J \cap \mathbb{Z} \to P = P(\tau_-, \tau_+) \subset X$ 是一个 l-分离、 λ-利普希茨、 $(\Theta, 0)$-直粗序列，它背离 τ_- 并朝向 τ_+。我们通过仿射映射将区间 $[n, n+1]$ 映到测地线段 $p(n)p(n+1)$，从而将 p 延拓为分段测地线映射 $p\colon J \to P$。延拓后仍将其称为 p。

引理 3.28. 存在 $L = L(l、\ \lambda、\ \Theta)$ 以及一个从 X到 p的 L-利普希茨缩回，即存在一个$_-$ $_-L$-利普希茨映射 $r\colon X \to J$，使得 $r \circ p = Id$。特别地， $p\colon J \cap \mathbb{Z} \to X$ 是一个 $(L、\ A)$-$^-$ $^-$拟测地线，其中 $L、\ A$ 仅依赖于 $l、\ \lambda、\ \Theta$。

证明。只需证明存在一个收缩映射。由于 P 在 X中是凸的，只需构造一个映射 $P \to J$。取一般点 $\xi = \xi_+ \in \tau_+$，并令 $b_\xi\colon P \to \mathbb{R}$ 表示布塞曼函数，其归一化方式使得对于某个 $z \in J \cap \mathbb{Z}$，有 $b_\xi(p(z)) = 0$。于是 Θ-正则性

关于 p 的假设意味着分段线性函数 $b_\xi \circ p\colon\ J \to \mathbb{R}$ 的斜率严格为正，且有一个正的下界。假设 p是 l-分离的、 λ-利普希茨的，这意味着

$$l \leqslant |p'(t)| \leqslant \lambda$$

对于每个 t （导数存在时）。 p 上的直度假设意味着函数 $h := b_\xi \circ p\colon\ J \to \mathbb{R}$ 严格递增。结合这些观察，我们得出，对于某些 $L = L(l, \lambda, \Theta)$， h 是一个 L-双 Lipschitz 同胚。最后，我们定义

$$r : P \to J, \quad r = h^{-1} \circ b_\xi.$$

由于 b_ξ 是 1-Lipschitz 的，因此映射 r 是 L-Lipschitz 的。根据构造， $r \circ p = Id.$ □

推论 3.29. 假设 $p\colon\ J \cap \mathbb{Z} \to X$ 是一个等间距的 l、 λ-Lipschitz、 (Θ, ϵ)-直序列。取某个 Θ' 使得 $\Theta \subset int(\Theta')$，并令 $\delta = \delta(l, \Theta, \Theta', \epsilon)$ 为定理 3.18 中的常数。那么对于 $L = L(l - 2\delta, \lambda + 2\delta, \Theta')$，有：

1. 存在一个 $(L, 2\delta)$-粗利普希茨缩回 $X \to J$。

2. 映射 p是 一个 (Θ', D', L', A')-拟测地线，其中 D', L', A' 仅依赖于 $l, \lambda, \Theta, \Theta', \epsilon$.

证明。该结论由上述引理与定理 3.18 结合即可立即得出。 □

用分段测地路径的术语重新表述，我们得到

定理 3.30（菱形串定理）。对于任意一对韦尔凸子集 $\Theta < \Theta'$以及一个数 $D \geqslant 0$，存在正数 ϵ, S, L, A，它们仅依赖于数据 (Θ, Θ', D)，使得以下结论成立。

设 c 是 X 中一条按弧长参数化的分段测地路径（有限或无限），由拼接测地线段 $x_i x_{i+1}$ 得到，并且对所有 i 都满足：

1. 每条线段 $x_i x_{i+1}$ 都是 Θ-正则的，且长度为 $\geqslant S$。

2.
$$\angle^{\zeta}_{x_i}(x_{i-1}, x_{i+1}) \geqslant \pi - \epsilon.$$

那么路径 c 是 $(\Theta'、 D、 L、 A)$-莫尔斯的。

3.6 局部莫尔斯拟测地线

根据定理 3.30，足够直且间距足够大的分段测地路径是莫尔斯的。本节将证明，反过来，莫尔斯性质在适当意义下蕴含直性；具体而言，对于间距足够大的四元组，其对应的中点三元组可以任意接近直。（但对于四元组本身，一般而言这并不成立。）

定义 3.31（四元组条件）。对于点 $x, y \in X$，我们用 $\mathsf{mid}(x, y)$ 表示测地线段 xy 的中点。若对于所有满足 $t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3 \geqslant s$ 的 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in I$，中点三元组满足 (Θ, ϵ, l, s)-四元组条件，则映射 $p\colon\ I \to X$ 满足该条件

$$(\mathrm{mid}(t_1, t_2), \mathrm{mid}(t_2, t_3), \mathrm{mid}(t_3, t_4))$$

是 (Θ,ϵ)-直且间距为 l。

命题 3.32（莫尔斯性质蕴含四元组条件）。对于 $L, A, \Theta, \Theta', D, \epsilon, l$，存在一个尺度 $s = s(L, A, \Theta, \Theta', D, \epsilon, l)$，使得每条 (Θ, D, L, A)-莫尔斯拟测地线对任意 $s' \geqslant s$都满足$(\Theta', \epsilon, l, s')$-四元组条件。

证明。令 $p\colon I \to X$ 为一条 (L, A, Θ, D)-莫尔斯拟测地线，并令 $t_1, \ldots, t_4 \in I$ 使得$t_2 - t_1$, $t_3 - t_2, t_4 - t_3 \geqslant s$。我们简记 $p_i := p(t_i)$，并将 $m_i =$ 记作 (p_i, p_{i+1}) 的中点。

关于直性，只需证明线段 m_2m_1 是 Θ'-正则的，并且$\angle^{\zeta}_{m_2}(p_2, m_1) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$，前提是 s 相对于给定数据充分大。

根据莫尔斯性质，存在一个菱形 $\diamondsuit_\Theta(x_1, x_3)$，使得 $d(x_1, p_1), d(x_3, p_3) \leqslant D$ 且 $p_2 \in N_D(\diamondsuit_\Theta(x_1, x_3))$。该菱形张成唯一的平行集 $P(\tau_-, \tau_+)$。（必然有 $x_3 \in V(x_1, \mathsf{st}_\Theta(\tau_+))$ 且 $x_1 \in V(x_3, \mathsf{st}_\Theta(\tau_-))$。）

我们将 p_i 和 m_i 在平行集上的投影分别记为 $\bar{p}_i$ 和 $\bar{m}_i$。

我们首先注意到，只要 s 足够大，m_2（以及 m_3）就会任意接近平行集。若此结论不成立，则通过极限论证可得到一条测地线，它与 $P(\tau_-, \tau_+)$ 的豪斯多夫距离 $\in (0, D]$ 严格为正且有限，并且渐近于 $\mathsf{st}_\Theta(\tau_\pm)$ 中的理想点。然而，所有渐近于 $\mathsf{st}_\Theta(\tau_\pm)$ 中理想点的直线都包含在 $P(\tau_-, \tau_+)$ 中。

接下来，我们考察线段 $\bar{m}_2\bar{m}_1$ 和 $\bar{m}_2\bar{p}_2$ 的方向，并证明它们具有相同的 τ-方向。由于 $\bar{p}_2$ 与 $V(\bar{p}_1$的距离不超过 $2D$，$\mathsf{st}_\Theta(\tau_+))$，我们可知点$\bar{p}_1$ 与 $V(\bar{p}_2$的距离不超过 $2D$，$\mathsf{st}_\Theta(\tau_-))$，因此 $\bar{m}_1$ 与 $V(\bar{p}_2$的距离也不超过 $2D$，$\mathsf{st}_\Theta(\tau_-))$。因此，当 s 足够大时，$\bar{p}_1, \bar{m}_1 \in V(\bar{p}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_-))$。类似地，$\bar{m}_2 \in V(\bar{p}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_+))$，从而$\bar{p}_2 \in V(\bar{m}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_-))$。$\Theta'$-锥的凸性（参见命题 2.1）意味着 $\bar{m}_1 \in V(\bar{m}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_-))$ 也成立。特别地，当 s 足够大时，$\angle^{\zeta}_{\bar{m}_2}(\bar{p}_2, \bar{m}_1) = 0$。

当 s 足够大时，m_2 可以任意接近平行集，因此通过另一个极限论证可得，若 s 足够大，则 $\angle^{\zeta}_{m_2}(p_2, m_1) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$。

关于间距，我们利用 $\bar{m}_1 \in V(\bar{p}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_-))$ 和 $\bar{m}_2 \in V(\bar{p}_2, \mathsf{st}_{\Theta'}(\tau_+))$。由此可得

$$d(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \geqslant c \cdot (d(\bar{m}_1, \bar{p}_2) + d(\bar{p}_2, \bar{m}_2))$$

满足一个常数 $c = c(\Theta') > 0$，从而若 s 足够大，则 $d(m_1, m_2) \geqslant l$。 ge. □

定理 3.18 和命题 3.32 表明，拟测地线的莫尔斯性质等价于（相应间隔点列的）直性。由于直性是一个局部条件，这就导出了莫尔斯拟测地线的局部到整体结果，即：若莫尔斯性质在足够大的尺度范围内局部成立，则它在整体上也成立。

定义 3.33（局部莫尔斯拟测地线）。在 X 中，$p\colon I \to X$ 是一个 S-局部 (Θ, D, L, A)-莫尔斯拟测地线映射，当且仅当对所有 t_0，子路径 $p|_{[t_0,\ t_0+S]}$ 都是一个 (Θ, D, L, A)-莫尔斯拟测地线。

注意，局部莫尔斯拟测地线是一致粗利普希茨的。

定理 3.34（莫尔斯拟测地线的局部到整体原理）。对于 L, A, Θ, Θ', D，存在 S, L', A', D'，使得 X 中每条 S-局部 (Θ, D, L, A)-局部莫尔斯拟测地线都是一条(Θ', D', L', A')-莫尔斯拟测地线。

Proof. 我们选择一个辅助韦伊凸子集 Θ''，使得 $\Theta < \Theta'' < \Theta'$.

设 $p\colon I \to X$ 是一条 S-局部 $(\Theta、 D、 L、 A)$-局部莫尔斯拟测地线。我们考虑其在（较大）尺度 s 下的粗化及相应的中点序列，即令 $p_n^s = p(ns)$ 和 $m_n^s = \mathrm{mid}(p_n^s、 p_{n+1}^s)$。虽然随着尺度 s 增大，粗化本身通常不会变得任意地直，但根据命题 3.32，其中点序列确实会如此。我们希望它足够直且等间距的，以便对其应用定理 3.18 中的莫尔斯引理。因此，我们首先固定一个辅助常数 δ，并进一步固定辅助常数 l、ϵ，其取值由定理 3.18 根据 Θ'、Θ'' 和 δ 确定。然后，命题 3.32 应用于 $(\Theta、 D、 L、 A)$-莫尔斯拟测地线 $p|_{[t_0,\ t_0+S]}$，得到：如果 $S \geqslant 3s$ 且尺度 s 足够大（其大小取决于 L、A、Θ、Θ''、D、ϵ、l），则 (m_n^s) 是 $(\Theta''、 \epsilon)$-直的，并且是 l-等间距的。

现在我们可以将定理 3.18 应用于 (m_n^s)。由此得到一个邻近的序列 $(\bar{m}_n^s)$, $d(\bar{m}_n^s, m_n^s) \leqslant \delta$, 具有如下性质：对于所有 $n_1 < n_2 < n_3$，线段 $\bar{m}_{n_1}^s \bar{m}_{n_3}^s$ 都是一致正则的，并且点 $m_{n_2}^s$ 到菱形 $\diamondsuit_{\Theta'}(\bar{m}_{n_1}^s, \bar{m}_{n_3}^s)$ 的距离不超过 δ。

由于填充 (p_n^s) 的子路径 $p|_{[ns,(n+1)s]}$ 是 (L, A)-拟测地线（因为 $S \geqslant s$），因此对于所有 $t_1, t_2 \in I$，子路径 $p|_{[t_1,t_2]}$ 到带有 D' 的 Θ'-菱形的距离不超过 D'，其中 D' 取决于 L, A, s。

定理 3.18 的结论还意味着序列 (m_n^s) 具有全局间隔，参见注记 3.20，即 $d(m_n^s, m_{n'}^s) \geqslant c \cdot |n - n'|$ 且具有一个取决于 Θ', l 的正常数 c。因此，p 是一条全局 (L', A')-拟测地线，其中 L', A' 取决于 L, A, s, c。

结合这些信息，我们得到，对于某些常数 L'、A' 和 D'，只要尺度 S 相对于同一组数据足够大，p 就是一个 $(\Theta'、 D'、 L'、 A')$-莫尔斯拟测地线；这些常数取决于 L、A、Θ、Θ' 和 D。 □

3.7 莫尔斯映射的局部到整体原理

现在，我们从莫尔斯拟测地线的局部到整体结果——定理 3.34——推导出莫尔斯嵌入的局部到整体结果。

我们将讨论范围限定在从格罗莫夫双曲的 $(l、 a)$-拟测地度量空间Z 到对称空间 X的映射这一情形。

定义 3.35（局部莫尔斯嵌入）。若对任意定义在长度为 $\leqslant S$ 的区间 I 上的 $(l、 a)$-拟测地线 $q\colon I \to Z$，其像路径 $f \circ q$ 都是 X 中的一条 $(\Theta、 D、 L、 A)$- 莫尔斯拟测地线，则称映射 $f\colon Z \to X$ 为 S-局部$(\Theta、 D、 L、 A)$-莫尔斯映射。

定理 3.36（格罗莫夫双曲空间中莫尔斯嵌入的局部到整体原理）。对于 $l, a, L, A, \Theta, \Theta', D$，存在一个尺度 S和一组数据 (D', L', A')，使得从一个 (l, a)-拟测地线格罗莫夫双曲空间映入 X 的每个S-局部 (Θ, D, L, A)-莫尔斯嵌入，都是一个 (Θ', D', L', A')-莫尔斯嵌入。

证明。令 $f\colon Z \to X$ 表示局部莫尔斯嵌入。它将每条 (l,a)-拟测地线$q\colon I \to Z$映为 X 中的一条 S-局部 (Θ, D, L, A)-莫尔斯拟测地线 $p = f \circ q$。根据定理 3.34，若 $S \geqslant S(l, a, L, A, \Theta, \Theta', D)$，则$p$是 (L', A', Θ', D')-莫尔斯，其中 L', A', D' 取决于给定的数据。 □

下面给出该定理在测地格罗莫夫双曲空间情形下的另一种表述。

设 Z 是一个 δ-双曲测地空间。 Z 中的一个 R-球 $B(z,R)$ 不一定是凸的，但它是 δ-准凸的。特别地，将度量从 Z 限制到 $B(z,R)$ 上，得到一个$(1,\delta)$-拟测地度量空间。

定理 3.37（测地空间的莫尔斯嵌入的局部到整体原理）。对于 $L, A, \Theta, \Theta', D, \delta$，存在一个尺度 R和一组数据 (D', L', A')，使得如果 Z是一个 δ-双曲测地度量空间，并且将 f限制在任意 R-球上均为 $(\Theta, D, L, A, \mathbf{1}, \delta)$-莫尔斯，那么$f\colon Z \to X$ 是 (Θ', D', L', A')-莫尔斯。

4 群论应用

作为莫尔斯映射局部到整体判据的推论，本节将证明等距群作用的莫尔斯性质是一个开条件。此外，对于两个彼此接近的莫尔斯作用，它们在各自的 τ_{mod}-极限集上的作用也彼此接近，即可由一个接近恒等映射的等变同胚共轭。鉴于莫尔斯性质等价于前文讨论的渐近性质，这意味着渐近嵌入群具有结构稳定性。局部到整体结果的另一推论是，莫尔斯作用具有算法可识别性。

最后，我们通过构造高秩对称空间上自由群的莫尔斯-肖特基作用，来展示我们的技术。

4.1 莫尔斯作用的稳定性

我们考虑有限生成群 $\Gamma \curvearrowright X$ 的等距作用。

定义 4.1（莫尔斯作用）。若一个作用 $\Gamma \curvearrowright X$ Θ的某个（任意一个）轨道映射$\Gamma \to \Gamma x \subset X$ 是相对于 Γ上的某个（任意一个）字度量的 Θ-莫尔斯嵌入，我们就称该作用为 $\Gamma \curvearrowright X$ Θ-莫尔斯作用。若某个 τ_{mod}-魏尔凸紧子集 $\Theta \subset \mathsf{ost}(\tau_{mod})$使得一个作用$\Gamma \curvearrowright X$ τ_{mod}是 Θ-莫尔斯作用，我们就称该作用为$\Gamma \curvearrowright X$ τ_{mod}-莫尔斯作用。

注 4.2（莫尔斯作用是 τ_{mod}-正则且非扭曲的）。(i) 根据莫尔斯拟测地线的定义可立即得出，Θ-莫尔斯作用对于由 Θ 确定的单形类型 τ_{mod} 是 τ_{mod}-正则的。

(ii) G 的莫尔斯子群是非扭曲的，即轨道映射是拟等距嵌入。在 [KL1] 中，我们证明 G 的莫尔斯子群满足一个更强的性质：它们是 G的粗利普希茨收缩。这种收缩性质比非扭曲性更强：每个作为 G 粗收缩的有限生成子群，在 G中都是非扭曲的，但也存在不是粗收缩的非扭曲子群。例如，群

$\Phi := F_2 \times F_2$ 可以非扭曲地嵌入 $X = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$的等距变换群中。另一方面，取一个满同态 ϕ：$F_2 \to \mathbb{Z}$，并将子群 $\Gamma < \Phi$ 定义为同态

$$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \phi(\gamma_1) - \phi(\gamma_2).$$

那么， Γ是 Φ 的有限生成非扭曲子群（例如参见 [OS，定理 2]），但不是有限表示群（例如参见 [BR]）。因此， $\Gamma < G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ 是非扭曲的，但不是粗利普希茨收缩。

我们用 $\mathrm{Hom}_{\tau_{mod}}(\Gamma, G) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 表示 τ_{mod}-莫尔斯作用 $\Gamma \curvearrowright X$的子集。

类比局部莫尔斯拟测地线，我们定义双曲群（配备固定有限生成集）的局部莫尔斯群作用 ρ： $\Gamma \curvearrowright X$

定义 4.3. 若作用 ρ的轨道映射 $\Gamma \to \Gamma \cdot x \subset X$诱导出 Γ的凯莱图的 S-局部 (Θ, D, L, A)-局部莫尔斯嵌入，则称该作用 ρ关于基点 $x \in X$在尺度 S上是 S-局部 (Θ, D, L, A)-局部莫尔斯的，或 (Θ, D, L, A)-局部莫尔斯的。

根据莫尔斯嵌入的局部到整体结果（见定理 3.37），字双曲群的作用是莫尔斯作用，当且仅当它在足够大的尺度上是局部莫尔斯的。由于这是一个有限条件，因此莫尔斯性质在作用的扰动下保持稳定：

定理4.4（字双曲群的莫尔斯性质是开性质）。对于任意字双曲群 Γ，子集 $\mathrm{Hom}_{\tau_{mod}}(\Gamma, G)$ 在 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 中是开集。更确切地说，若 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\tau_{mod}}(\Gamma, G)$ 相对于基点 $x \in X$ 是 M-莫尔斯的，则存在 ρ 在 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 中的一个邻域，其中完全由相对于 x 的 M'-莫尔斯表示构成；这里 M' 仅取决于 M。

证明。设 $\rho : \Gamma \curvearrowright X$ 是一个莫尔斯作用。我们在 Γ 上固定一个字度量，并取一个基点 $x \in X$。于是存在数据 $M = (L, A, \Theta, D)$，使得轨道映射 $\Gamma \to \Gamma x \subset X$ 可以扩展为凯莱图 Y 在 Γ 上的一个 (Θ, D, L, A)-莫尔斯映射。

我们稍微放宽莫尔斯参数，也就是说，我们将满足严格不等式的 (L, A, Θ, D)-莫尔斯拟测地线视为 $(L, A+1, \Theta, D+1)$-莫尔斯拟测地线。对于每个尺度 S，轨道映射 $\Gamma \to \Gamma x \subset X$ 定义了一个 $(L, A+1, \Theta, D+1, S)$-局部莫尔斯嵌入 $Y \to X$。由于 Γ-等变性，这是一项有限条件，因为它等价于一个仅涉及有限个轨道点的条件。由于我们放宽了莫尔斯参数，所有充分接近 ρ 的作用也都满足同一条件。

定理 3.37 给出了一个尺度 S，使得所有 S-局部 $(\Theta, D+1, L, A+1)$-莫尔斯嵌入$Y \to X$ 对某个莫尔斯数据 M' 都是 M'-莫尔斯的，其中该莫尔斯数据仅取决于 $(L, A+1, \Theta, D+1, S)$。由此可知，所有充分接近 ρ 的作用 τ_{mod} 都是莫尔斯的。 □

推论 4.5。对于每个双曲群 Γ， 忠实Morse表示的空间

$$\mathrm{Hom}_{inj, \tau_{mod}}(\Gamma, G)$$

在同态空间$_{\tau_{mod}}(\Gamma, G)$中是开集。

证明。每个双曲群 Γ 都有唯一的极大有限正规子群 $\Phi \lhd \Gamma$ （如果 Γ是非初等的，那么 Φ 就是 Γ 在 $\partial_\infty\Gamma$上的作用的核）。由于莫尔斯作用是适当不连续的，每个莫尔斯表示 $\Gamma \to G$ 的核都包含于 Φ。由于同态空间$(\Phi, G)/G$ 是有限的，因此忠实Morse表示的集合在同态空间 $_{\tau_{mod}}(\Gamma, G)$中是开集。

□

关于字双曲群作用的莫尔斯条件开性的结果（参见定理4.4）可以进一步加强：莫尔斯作用的渐近行为连续变化：

定理4.6（莫尔斯作用具有结构稳定性）。莫尔斯作用的无穷远边界映射连续依赖于该作用。

证明。根据定理4.4，邻近的作用一致地具有莫尔斯性质。因此，结论可由莫尔斯拟射线的端点一致连续变化这一事实推出，参见引理3.13。

□

注4.7。（i）注意，由于无穷远边界映射是嵌入， Γ-作用在 τ_{mod}-极限集上的限制彼此拓扑共轭；对于邻近的作用，这种共轭可由一个接近恒等映射的同胚给出。

（ii）在秩一情形下，我们的论证为秩一对称空间上的凸紧致群作用的 Sullivan结构稳定性定理 [Su] 提供了另一种证明。其他证明可见 [La、GW] （针对高秩中的 Anosov子群），以及 [Co、Iz、Bo] （针对秩一对称空间）。

我们的下一个目标是将极限集上的拓扑共轭扩展到适当不连续作用域。回顾一下，在 [KLP4] 中，我们为旗流形 $\mathrm{Flag}(\nu_{mod}) = G/P_{\nu_{mod}}$ 上的 τ_{mod}-莫尔斯群作用构造了适当不连续作用域和余紧性域。此类域取决于某个辅助数据——平衡加厚 $\mathrm{Th} \subset W$，它是一个满足特定条件的 $W_{\tau_{mod}}$-左不变子集；参见 [KLP4，第 3.4] 节。设 $\nu_{mod} \subset \sigma_{mod}$ 为一个ι-不变面，且 Th 在 $W_{\nu_{mod}}$ 通过右乘所作的作用下保持不变（若 $\nu_{mod} = \sigma_{mod}$ ，则这一点自动成立，因为 $W_{\sigma_{mod}} = \{e\}$）。加厚 $\mathrm{Th} \subset W$ 定义了旗流形 $\mathrm{Flag}(\nu_{mod})$ 的加厚 $\mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)) \subset$ 。 [KLP4] （定理1.7）的主要结果之一是，每个 τ_{mod}-莫尔斯子群 $\Gamma < G$ 都在其上作适当不连续且余紧的作用

$$\Omega_{\mathrm{Th}}(\Gamma) := \mathrm{Flag}(\nu_{mod}) - \mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)).$$

定理4.8（莫尔斯商空间的稳定性）。假设 $\rho_n : \Gamma \to \rho_n(\Gamma) = \Gamma_n <G$ 是一个忠实的 τ_{mod}-莫尔斯表示序列，并收敛到一个 τ_{mod}-莫尔斯嵌入$\rho : \Gamma \hookrightarrow G$。那么：

1. 加厚序列 $\mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma_n))$ 在豪斯多夫意义下收敛到 $\mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma))$。

2. 如果 $\gamma_n \in \Gamma$ 是发散序列，那么经过抽取子序列后，序列 $(\rho_n(\gamma_n))$ 旗流形收敛到 $\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)$ 中的一个点。

3. 存在一列等变微分同胚 $h_n : \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)} \to \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma_n)}$，它们在紧集上一致收敛到恒等映射。

4. 特别地，对于所有充分大的 n，商轨形$\Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma_n)}/\Gamma_n$ 与$\Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)}/\Gamma$ 都是微分同胚的。

证明。1. 首先，设序列 $\tau_n \in$ 旗流形(τ_{mod}) 收敛于 $\tau \in$ 旗流形(τ_{mod})。那么，由于旗流形$(\nu_{mod}) = G/P_{\nu_{mod}},$，存在序列 $g_n \in G$、 $g_n \to e$，使得 $g_n(\tau) = \tau_n$。由于

$$g_n(\mathrm{Th}(\tau)) = \mathrm{Th}(g_n\tau) = \mathrm{Th}(\tau_n),$$

由此可知，我们对$\mathrm{Th}(\tau_n) \to \mathrm{Th}(\tau)$中的子集具有豪斯多夫收敛。此外，这种子集收敛是一致的：存在 $n_0 = n(\delta)$，使得如果对所有$n \geqslant n_0$均有 $d(\tau_n, \tau) < \delta$，那么 $d(\mathrm{Th}(\tau_n), \mathrm{Th}(\tau)) < \epsilon = \epsilon(\delta)$ 对所有 $n \geqslant n_0$均成立。这里，当 $\delta \to 0$时， $\epsilon \to 0$。由于极限集序列 $\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma_n)$豪斯多夫收敛于 $\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)$, 因此加厚序列$\mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma_n))$ 豪斯多夫收敛于$\mathrm{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma))$。这就证明了(1)。

2. 考虑凯莱图 Y 中 Γ 的测地射线序列 $e\xi_n$，使得对于所有 n， γ_n 都位于 $e\xi_n$ 的 R邻域内。由表示 ρ_n的一致 M'-莫尔斯性质可知，每个点 $\rho_n(\gamma_n)(x)$ 都属于韦尔锥$V(x$的 D'邻域, 其中 $\mathrm{st}(\tau_n))$，且 $\tau_n = \alpha_n(\xi_n)$， α_n： $\partial_\infty\Gamma \to \Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma_n)$ 是渐近嵌入。因此，根据旗收敛的定义，序列 $(\rho_n(\gamma_n))$ 和 (τ_n) 在 $\mathrm{Flag}(\tau_{mod})$中具有相同的旗极限。根据第 1 部分，序列 (τ_n) 子列收敛到 $\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)$中的一个点。因此， $(\rho_n(\gamma_n))$也同样如此。

3. 这一部分的证明大体上是标准的；在 X 为双曲空间的情形下，参见 [Iz] 。商轨形 $O = \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)}/\Gamma$ 具有自然的 (F G)结构，其中 F $= \mathrm{Flag}(\nu_{mod})$。 ˆ 轨形 O 具有有限多个连通分支。设 Z 为其中一个连通分支，并设 $Z \subset \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)}$ 为投影到 Z上的一个ˆ 连通分支。只需在每个连通分支 Z 上构造映射 h_n ，然后通过 ρ_n-等变性将这些映射延拓为 $\Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)}$的映射 h_n 即可。

ˆ 覆盖映射 $Z \to Z$ 诱导出一个满同态 ϕ： $\pi_1(Z) \to \Gamma_Z$，其中 Γ_Z 是 Z的 Γ-ˆ ˜ˆ ˜稳定子。令 dev： $Z \to Z \subset \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma)}$ 为发展映射，其中 $Z \to Z$ 是万能覆盖。根据 Ehresmann-Thurston整体变换定理（参见 [Lo], [CEG], [Go], [K1，第 7.1]节），对于所有充分大的 n，同态 $\phi_n := \rho_n \circ \phi$ 是˜一个 (F G)-结构的整体变换。进一步，发展映射 dev_n： $Z \to$ F 在 C^∞-拓扑下于紧集上一致收敛到 devˆ。由于 $\pi_1(Z)$ 包含在 ϕ的核中，因此它⌢ ˆ也属于 ϕ_n的核。因此，映射 dev_n 可下降为映射 dev_n： $Z \to$ F。

⌢ ˆ 序列 dev_n 仍在紧集上一致收敛到恒等嵌入 $Z \hookrightarrow$ F。取 Γ_Z-作用的一个紧基本集 $C \subset Z$，即一个紧子集，其 Γ-轨道 ˆ ⌢等于 Z。根据定理的第 1 部分，对于所有充分大的 n， $dev_n(C) \subset \Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma_n)}$。⌢ˆ ˆ 因此，我们可以假设 $dev_n(Z)$ 包含在 $\Omega\mathrm{Th}^{(\Gamma_n)}$的一个连通分支 Z_n 中。由商轨形的紧性， dev_n 投影为一个有限对一的（光滑）轨形覆盖映射 ˆ ⌢ˆ ˆ ˆ c_n： $Z \to Z_n := Z_n/\rho_n(\Gamma_Z)$。因此， dev_n： $Z \to Z_n$ 也是覆盖映射。若 Z_n⌢ 是单连通的，则可得 dev_n 是一个微分同胚，正如所需（而这正是

⌢Izeki 在 [Iz]中完成证明的方式）。我们将通过直接论证证明 dev_n 是一个微分同胚。

⌢假设每个 dev_n 都不是单射。那么，根据这些映射的等变性，经过提取后，存在收敛序列 $z_n \to z$、 $z'_n \to z'$ （取值于 Z ）以及一个序列 $\gamma_n \in \Gamma$ ，使得

$$\rho_n(\gamma_n)\widehat{dev}_n(z_n) = \widehat{dev}_n(z'_n), \quad \gamma_n(z_n) \neq z'_n.$$

如果序列 (γ_n) 包含于 Γ 的某个有限子集中，就会与 Z上的 $dev_n \to id$ 紧集上一致收敛⌢ ⌢矛盾。因此，经过提取后，我们可以假设 (γ_n) 是一个发散序列。因此，我们通过序列 $(\rho_n(\gamma_n))$在点z、 z' 之间得到一个动力学关系。根据第 2 部分，序列 $(\rho_n(\gamma_n))$ 旗标累积到$\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)$。这个动力学关系进而与平衡加厚 Th 的厚性相矛盾，见[KLP4，第 5 节。2]以及 [KLP4]中定理 6.8 的证明。

我们得出映射

$$\widehat{dev}_n : \hat{Z} \to \hat{Z}_n$$

当 n 足够大时，它们都是微分同胚。由于 $\rho_n : \Gamma \to \Gamma_n$ 是同构，发展映射的等变性意味着，当 n 足够大时，映射 $h_n : \Omega\text{Th}^{(\Gamma)} \to \Omega\text{Th}^{(\Gamma_n)}$ 是微分同胚。

4. 本部分是第 3 部分的直接推论。 □

注 4.9. (i) 当 X 是双曲空间时，等变微分同胚 $h_n : \Omega(\Gamma) \to \Omega(\Gamma_n)$ 与极限集 $\Lambda(\Gamma) \to \Lambda(\Gamma_n)$ 的等变同胚结合，可得到等变同胚 $\partial_\infty X \to \partial_\infty X$，参见 [Tu, Iz]。高秩情形下不存在这样的延拓，因为一般而言，增厚极限集 $\text{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma)) \to \text{Th}(\Lambda_{\tau_{mod}}(\Gamma_n))$ 之间不存在等变同胚。群作用于双曲平面乘积的情形已经可以看出这一点。

(ii) 将旗流形上的群作用替换为对称空间的芬斯勒紧化上的作用，并将旗流形增厚 Th $(\Lambda_{\tau_{mod}})$ 替换为芬斯勒增厚 $\text{Th}_{F\ddot{u}}(\Lambda_{\tau_{mod}}) \subset \partial_{F\ddot{u}}X$时，定理 4.8 的一个类似结论仍然成立。要证明这一点，需要将 Ehresmann–Thurston 全纯单值定理推广到带角光滑流形这一范畴，我们在此不作探讨。

4.2 Schottky作用

在本节中，我们将直序列的局部到整体结果（定理 3.18）应用于构造自由群的莫尔斯作用，从而推广并加强 Tits 的乒乓构造。

我们考虑两条定向的 τ_{mod}-正则测地线 a, b，它们位于 X 中。令 $\tau_{\pm a}, \tau_{\pm b} \in \text{Flag}(\tau_{mod})$ 表示它们分别渐近于的单形，并令 $\theta_{\pm a}, \theta_{\pm b} \in \sigma_{mod}$ 表示它们在 $\partial_\infty X$ 中的前向/后向理想端点的类型。（注意， $\theta_{-a} = \iota(\theta_a)$ 和 $\theta_{-b} = \iota(\theta_b)$。 ）令 Θ 为 $\text{ost}(\tau_{mod}) \subset \sigma_{mod}$ 的一个紧凸子集，且在 ι 下不变。

[1]也就是说，我们得到的自由子群不仅是嵌入的，而且在 G 中还是渐近嵌入的。

定义 4.10（测地线的一般位置对）。若四个单形 $\tau_{\pm a}, \tau_{\pm b}$ 两两相对，则称测地线对 (a, b) 处于一般位置。

设 α、$\beta \in G$ 是轴向等距变换，其轴分别为 a 和 b，并沿这些测地线朝正方向平移。那么 $\tau_{\pm a}$ 和 $\tau_{\pm b}$ 分别是 α 和 β 在 Flag(τ_{mod})上的吸引/排斥不动点。

对于每一对数 m、$n \in \mathbb{N}$，我们考虑由两个生成元生成的自由群的表示

$$\rho_{m,n} : F_2 = \langle A, B \rangle \to G$$

将生成元 A 映射到 α^m，将 B 映射到 β^n。我们将其视为等距作用 $\rho_{m,\ n} \colon F_2 \curvearrowright X$。

定义 4.11（舒托基子群）。G的 τ_{mod}-舒托基子群是 G的自由 τ_{mod}-渐近嵌入子群。

如果 G 的秩为一，这一定义意味着要求 Γ 是凸紧致且自由的。等价地，它是 G 的一个离散有限生成子群，不含非平凡的椭圆元素和抛物元素，且其极限集完全不连通（参见参见 [K1]）。我们注意到，这一定义与秩一李群中舒托基群的标准定义基本一致，前提是允许此类群在无穷远处的基本域由两两不交的紧子流形作为边界，而这些紧子流形不必是拓扑球面；详细讨论见 [K1]。

定理 4.12（莫尔斯舒托基作用）。若测地线对 (a, b) 是一般的，且若 $\theta_{\pm a}, \theta_{\pm b} \in$ 属于 (Θ)，则当 m, n 足够大时，作用 $\rho_{m,\ n}$ 是 Θ-莫尔斯的。因此，这样的 $\rho_{m,\ n}$ 是单射，其像是 G 的一个 τ_{mod}-舒托基子群。

备注 4.13。特别地，这些作用是忠实且非扭曲的，参见备注 4.2。

证明。令 $S = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}\}$ 为标准生成集。我们考察 F_2 中满足以下性质的序列 (γ_k)：对所有 k，都有 $\gamma_k^{-1}\gamma_{k+1} \in S$ 且 $\gamma_{k+1} \neq \gamma_{k-1}$。它们对应于 S 所关联的 F_2 的凯莱树中的测地线段，这些线段连接顶点。

令 $x \in X$ 为基点。根据引理 3.8，我们必须证明轨道 $F_2 \cdot x$ 中对应的序列 $(\gamma_k x)$ 是一致的 Θ-莫尔斯序列。（例如，这意味着映射 $\mathbb{R} \to X$ 将区间 $[k, k+1)$ 映到点 $\gamma_k x$，且这些映射是一致的 Θ-莫尔斯拟测地线。）如同定理 3.34 的证明，我们将通过对相关的中点序列应用直间距序列的局部到整体结果（定理 3.18）来证明这一点。注意，序列 $(\gamma_k x)$ 本身不能指望是直的。

考虑到 Γ-作用，所有中点序列的一致直性取决于轨道中某个有限构形的几何性质。这是以下事实的推论。考虑线段 $x\alpha^{\pm m}(x)$ 的中点 $y_{\pm m}$，以及线段 $x\beta^{\pm n}(x)$ 的中点 $z_{\pm n}$。

引理 4.14. 当 m, n 足够大时，四元组 $\{y_{\pm m}, z_{\pm n}\}$ 可任意分离且为 Θ-正则。此外，对于这四个点中的任意一个，它与另外三个点相连的线段和连接它与 x 的线段之间的角都可以任意小。

证明. 这四个点彼此之间以及与 x 之间都可以任意分离，因为根据我们的一般位置假设，轴 a 和 b 彼此发散。

由对称性，只需对点 y_m 验证命题的其余部分，即证明当 m、n 充分大时，线段 $y_m y_{-m}$ 和 $y_m z_n$ 是 Θ-正则的，并且 $\lim_{m\to\infty} \angle^{\zeta}_{y_m}(x、\ y_{-m}) = 0$ 和 $\lim_{n,\ m\to\infty} \angle^{\zeta}_{y_m}(x、z_n) = 0$。

轨道点 $\alpha^{\pm m}x$ 和中点 $y_{\pm m}$ 都包含在轴 a 的一个管状邻域内。因此，当 m 和 $\angle_{y_m}(x、y_{-m}) \to 0$ 充分大时，线段 $y_m x$ 和 $y_m y_{-m}$ 是 Θ-正则的。这也意味着 $\angle^{\zeta}_{y_m}(x、\ y_{-m}) \to 0$。

为验证关于 $(y_m、\ z_n)$ 的断言，我们利用这样一个事实：由于一般性条件，单形 τ_a 和 τ_b 互为对置，并考虑平行集 $P = P(\tau_a、\ \tau_b)$。由于测地线 a 和 b 正向渐近于 P，点 x、y_m、z_n 到 P 的距离一致有界。我们将它们在 P 上的投影记为 $\bar{x}$、$\bar{y}_m$、$\bar{z}_n$。

令 $\Theta'' \subset \mathrm{int}(\Theta)$ 为一个辅助韦伊凸子集，使得 $\theta_{\pm a}, \theta_{\pm b} \in \mathrm{int}(\Theta'')$。由于点 y_m 位于以 $\bar{x}$ 为起点、渐近于 a 的射线的管状邻域内，因此当 m 充分大时，我们有 $\bar{y}_m \in V(\bar{x}, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_a))$。类似地，当 n 充分大时，$\bar{z}_n \in V(\bar{x}, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$。由此可得 $\bar{x} \in V(\bar{y}_m, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$，并利用 Θ-锥的凸性（命题 2.1），可得 $\bar{z}_n \in V(\bar{y}_m, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$。

锥 $V(y_m, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$ 与锥 $V(\bar{y}_m, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$ 的豪斯多夫距离一致有界，因为这两个锥的豪斯多夫距离不超过其顶点之间的距离 $d(y_m, \bar{y}_m)$。因此，存在点 $x', z'_n \in V(y_m, \mathrm{st}_{\Theta''}(\tau_b))$，它们与 x, z_n 一致接近。由于当 $m, n \to \infty$ 时，$d(y_m, x'), d(y_m, z'_n) \to \infty$，因此当 m, n 充分大时，线段 $y_m x$ 和 $y_m z_n$ 是 Θ-正则的。此外，由于 $\angle^{\zeta}_{y_m}(x', z'_n) = 0$ 和 $\angle_{y_m}(x, x') \to 0$，并且 $\angle_{y_m}(z_n, z'_n) \to 0$，可得 $\angle^{\zeta}_{y_m}(x, z_n) \to 0$。

□

定理的证明结束。该引理表明，对于任意给定的 l, ϵ，只要 m, n 足够大，四点序列 $(\gamma_k x)$ 的中点三元组就是 (Θ, ϵ)-直且 l-等间距的；参见四元组条件（定义 3.31）。这意味着，当 m, n 足够大时，所有序列 $(\gamma_k x)$ 的中点序列都是 (Θ, ϵ)-直且 l-等间距的。因此，定理 3.18 推出这些序列 $(\gamma_k x)$ 是一致 Θ-莫尔斯的。

□

注 4.15. 1. 将上述论证推广到有限生成元的自由群，可以构造莫尔斯绍特基子群，使其极限点的类型集合 $\theta(\Lambda) \subset \sigma_{mod}$ 与给定的 ι-不变韦伊凸子集 Θ 在豪斯多夫距离意义下任意接近。这为使用粗几何论证证明 [Be] 中的第二个主定理提供了一种替代方法。

2. 在 [DKL] 中，定理 4.12 被推广到了 G的莫尔斯子群的自由积（证明过程采用了类似的论证）。

4.3 莫尔斯作用的算法识别

在本节中，我们将介绍一种算法，其输入为等距作用 $\rho\colon\ \Gamma \curvearrowright X$ 以及点$x \in X$；当且仅当作用 ρ 是莫尔斯作用时，该算法才会终止（否则，算法

将永远运行）。

我们先简要介绍 Riley 算法（见 [Ri]），该算法完成一项类似的任务，即检测 $X = \mathbb{H}^3$ 上的几何有限作用。假设给定子群 $\Gamma \subset PO(3$ 的有限（对称）生成元集 $g_1 = 1, \ldots, g_m$、$1)$ 以及一个基点$x \in X = \mathbb{H}^3$。该算法的思路是构造一个有限边数的狄利克雷基本域 D，使其对应于 Γ（中心位于 x）： $PO(3$ 中的每个几何有限子群 $1)$ 都有这样的基本域。（对于 $PO(n$、$1)$、$n \geqslant 4$ 中的几何有限子群，这一结论并不成立；不过，对于凸紧子群，该结论仍然成立。）给定一个有限边数的凸基本域，即可得出 Γ 是几何有限的。算法的具体步骤如下：对于每个k，定义由长度为 $\leqslant k$ 的字表示的子集 $S_k \subset \Gamma$，这些字由字母 $g_1, \ldots, g_m$ 构成。对于每个 $g \in S_k$，考虑半空间 $Bis(x, g(x)) \subset X$，它由线段$xg(x)$ 的垂直平分面围成，且包含点 x。然后计算交集

$$D_k = \bigcap_{g \in S_k} Bis(x, g(x)).$$

检查 D_k 是否满足庞加莱基本域定理的条件。如果满足，那么 $D = D_k$ 就是 Γ 的有限边基本域。如果不满足，则将 k 增加 1 并重复此过程。显然，当且仅当 Γ 是几何有限群时，此过程才会终止。

可以改进该算法，以检测一个几何有限群是否为凸紧致群。具体而言，构造出狄利克雷域 D 后，检查以下情况：

1. 狄利克雷域 D 的理想边界上是否有孤立理想点（这些点对应二阶尖点，而凸紧致群中不允许存在此类尖点）。

2. D 的理想边界上是否包含相切圆弧，且其切点由抛物元素固定（这些切点来自“理想顶点循环”）。这类点对应一阶尖点，而凸紧致群中同样不允许存在此类尖点。

检查第 1 项和第 2 项是一个有限过程；完成后，即可得出结论： Γ 是凸紧致群。

关于作用于双曲平面和三维双曲空间的群的离散性算法，更多详情请参阅 [Gi1, Gi2, GiM, K2] and [KL2, 第 1 节。8]

现在我们考虑一般对称空间上的群作用。设 Γ 为一个双曲群，并固定一个有限（对称）生成集；我们赋予群 Γ 由该生成集确定的字度量。

对于每个 n，令 $\mathcal{L}_n$ 表示映射 $q\colon [0, 3n] \cap \mathbb{Z} \to \Gamma$ 的集合，这些映射是测地线 $\tilde{q}\colon \mathbb{Z} \to \Gamma$ 的限制，且满足 $q(0) = 1 \in \Gamma$。鉴于 Γ 上的测地自动结构（例如参见 [Ep，定理 3.4。5]），集合 $\mathcal{L}_n$ 可通过有限状态自动机描述。

假设 $\rho\colon \Gamma \rightharpoonup X$ 是对称空间 X 上的等距作用；我们固定一个基点 $x \in X$ 以及相应的轨道映射 $f\colon \Gamma \to \Gamma x \subset X$。我们还固定模型球面单形 σ_{mod} 中的一个 ι-不变面 τ_{mod}，其中 X。接下来要描述的算法将检测该作用 ρ 是否为 τ_{mod}-莫尔斯。

注记 4.16. 如果事先没有固定面 τ_{mod}，我们就会并行运行针对每个面 τ_{mod} 的算法。

对于该算法，我们将使用一族特殊的（可数的）递增魏尔凸紧子集 $\Theta = \Theta_i \subset \mathrm{ost}(\tau_{mod}) \subset \sigma_{mod}$，它们穷尽 $\mathrm{ost}(\tau_{mod})$；特别地，$\mathrm{ost}(\tau_{mod}) \subset \sigma_{mod}$ 中的每个紧 ι-不变凸子集都包含在某个 Θ_i 中：

$$\Theta_i := \{v \in \sigma : \min_{\alpha \in \Phi_{\tau_{mod}}} \alpha(v) \geqslant \frac{1}{i}\}, \tag{4.17}$$

其中，$\Phi_{\tau_{mod}}$ 是在面 τ_{mod} 上取值为零的单根集合 Φ（相对于 σ_{mod}）的子集。显然，集合 Θ_i 满足所需的性质。此外，我们只考虑 L 和 D 为自然数的情形。

接下来，考虑序列

$$(L_i, \Theta_i, D_i) = (i, \Theta_i, D_i), i \in \mathbb{N}.$$

为了检测 τ_{mod}-莫尔斯作用，我们将使用定理 3.18 和命题 3.32 给出的莫尔斯拟测地线的局部刻画。由于我们要考虑的拟测地线具有离散性，只需假设加性拟等距常数 A 为零。

考虑如下函数

$$l(\Theta, \Theta', \delta), \epsilon(\Theta, \Theta', \delta)$$

如定理 3.18 中所述。利用这些函数，对于集合 $\Theta = \Theta_i$、$\Theta' = \Theta_{i+1}$ 和常数 $\delta = 1$，我们定义数

$$l_i = l(\Theta, \Theta', \delta), \epsilon_i = \epsilon(\Theta, \Theta', \delta).$$

接下来，对于数 $L = L_i$、$D = D_i$ 以及集合 $\Theta = \Theta_i$、$\Theta' = \Theta_{i+1}$，考虑数

$$s_i = s(L_i, 0, \Theta_i, \Theta_{i+1}, D_i, \epsilon_{i+1}, l_{i+1})$$

如命题 3.32 中所述。根据该命题，每条 $(L_i, 0, \Theta_i, D_i)$-莫尔斯拟测地线都满足 $(\Theta_{i+1}, \epsilon_{i+1}, l_{i+1}, s)$-四元组条件，其中所有 $s \geqslant s_i$ 均成立。注意，序列 s_i 事先未必递增。令 $S_1 = s_1$，并递归定义单调序列 S_i：

$$S_{i+1} = \max(S_i, s_{i+1}).$$

那么，每条 $(\Theta_i, D_i, L_i, 0)$-莫尔斯拟测地线也满足 $(\Theta_{i+1}, \epsilon_{i+1}, l_{i+1}, S_{i+1})$-四元组条件。

现在我们可以描述该算法了。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们按照上述方法计算数值 l_i、ϵ_i，然后计算 S_i。接着，我们考察 Γ、$q \in \mathcal{L}_{S_i}$ 中的有限离散路径，以及 X、$p(t) = q(t)x$、$t \in [0, 3S_i] \cap \mathbb{Z}$ 中相应的离散路径。对于每个 i，路径 q 的数量（因此 p 的数量）是有限的，且受群 Γ 的增长函数所界定。

对于每条离散路径 p，我们检查 $(\Theta_i、\ \epsilon_i、\ l_i、\ S_i)$-四元组条件。如果存在某个 $i = i_*$，使得所有路径 p 都满足该条件，则算法终止：由定理 3.18 可知，映射 f 将 Γ 中所有标准化离散双无限测地线映射为X中的莫尔斯拟测地线。因此，此时作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 是莫尔斯的。反过来，假设 Γ 的作用是 $(\Theta、\ D、\ L、\ 0)$-莫尔斯的。那么， f 会将所有等距嵌入 $\tilde{q}\colon \mathbb{Z} \to \Gamma$ 映射为 $(\Theta、\ D、\ L、\ 0)$-莫尔斯拟测地线 $\tilde{p}$，这些拟测地线位于 X 中。根据序列的性质

$$(L_i, \Theta_i, D_i),$$

因此，对于某个 i,

$$(L, \Theta, D) \leqslant (L_i, \Theta_i, D_i),$$

即， $L \leqslant L_i, \Theta \subset \Theta_i, D \leqslant D_i$；因此，所有双无限离散路径 $\tilde{p}$ 都是 $(\Theta_i, D_i, L_i, 0)$-莫尔斯拟测地线。根据数值 l_i, ϵ_i, S_i的定义，可知所有离散路径 $p = f \circ q, q \in \mathcal{L}_{S_i}$ 都满足 $(\Theta_{i+1}, \epsilon_{i+1}, l_{i+1}, S_{i+1})$-四元组条件。因此，在这种情况下，算法将在步骤 $i + 1$ 终止。

因此，当且仅当该作用是莫尔斯作用（对于某些参数）时，算法才会终止。如果该作用不是莫尔斯作用，算法将永远运行下去。 □

注 4.18. 将上述算法应用于秩一对称空间 X 和不含非平凡正规有限子群的双曲群 Γ，可以验证给定的表示$\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(X)$ 是否忠实且其像是否为凸余紧像。我们未能在现有文献中找到这一结果；不过可参见 [GK]。

5 附录：莫尔斯拟测地线的更多性质

这是本文中唯一未收录于 [KLP1] 的部分。我们在此汇集了莫尔斯拟测地线的若干性质，这些性质在我们工作的其他部分也很有用。

5.1 对称空间的芬斯勒几何

在 [KL1], （另见 [KLP5], ）中，我们考察了 G-不变的一类“多面体”芬斯勒度量，其定义在 X 上。事实证明，这些度量的几何性质和渐近性质非常适用于研究正则子群的几何性质和动力学性质。它们为 X 提供了一种芬斯勒测地线梳理；在许多方面，这种梳理比 X 上由标准黎曼度量所给出的测地线梳理更适合分析 X 的渐近几何。这些芬斯勒度量在本文中也发挥着基础作用。我们简要回顾其定义和一些基本性质，更多细节请参见 [KL1，第 5 节。1]

令 $\bar{\theta} \in \mathrm{int}(\tau_{mod})$ be 一个张成面型 τ_{mod} 的类型。 $\bar{\theta}$-芬斯勒距离 $d^{\bar{\theta}}$ on X is 定义如下的 G-不变伪度量:

$$d^{\bar{\theta}}(x, y) := \max_{\theta(\xi)=\bar{\theta}} \big(b_\xi(x) - b_\xi(y)\big)$$

¯for $x, y \in X$，其中最大值取遍所有类型为 $\theta(\xi) = \theta$ 的理想点 $\xi \in \partial_\infty X$ 。¯当且仅当相对于 $\bar{\theta}$， σ_{mod} 的半径为 $< \frac{\pi}{2}$ 时，它是正的，即为一种（非对称）度量。这又等价于 θ 不包含在 σ_{mod} 的非平凡球面联结分解的某个因子中；例如，当 X 不可约时，这一条件总是成立。

如果 $d^{\bar{\theta}}$ 为正，则它等价于黎曼度量。一般而言，即使它只是一个伪度量，在一致正则点对上，它仍等价于黎曼度量 d。更确切地说，如果点对 x、 y 是 Θ-正则的，那么

$$L^{-1}d(x,y) \leqslant d^{\bar{\theta}}(x,y) \leqslant Ld(x,y)$$

其中常数为 $L = L(\Theta) \geqslant 1$。

关于芬斯勒距离的对称性，有如下恒等式:

$$d^{\iota\bar{\theta}}(y,x) = d^{\bar{\theta}}(x,y)$$

因此， $d^{\bar{\theta}}$ 对称当且仅当 $\iota\bar{\theta} = \bar{\theta}$。我们称 $d^{\bar{\theta}}$ 为类型 τ_{mod}的芬斯勒度量。

X 中的 $d^{\bar{\theta}}$-球是凸的，但不是严格凸的。（它们与经过球心的平坦子空间的交集是多面体。）因此，连接给定两点 x、 y 的 $d^{\bar{\theta}}$-测地线并不唯一。为简化记号， xy 表示连接 x 和 y的某条 $d^{\bar{\theta}}$-测地线。所有 $d^{\bar{\theta}}$-测地线 xy 的并集等于 τ_{mod}-菱形 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x、\ y)$；也就是说，一个点位于 $d^{\bar{\theta}}$-测地线xy 上，当且仅当它属于 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x、\ y)$，见 [KLP5]。因此，芬斯勒几何提供了对菱形的另一种描述。请注意，采用这种描述，即使线段 xy 不是 τ_{mod}-正则的，也可以定义菱形 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}(x、\ y)$。这种退化的 τ_{mod}-菱形包含在一个更小的全测地子空间中，即包含在所有含有点 x、 y的 τ_{mod}-平行集的交集中。对测地线和菱形的描述还表明，不带参数的 $d^{\bar{\theta}}$-测地线只依赖于面型 τ_{mod}，而不依赖于 $\bar{\theta}$。我们将$d^{\bar{\theta}}$-测地线称为 τ_{mod}-芬斯勒测地线。请注意，黎曼测地线是芬斯勒测地线。

我们将 Θ-正则的 τ_{mod}-芬斯勒测地线称为 Θ-芬斯勒测地线。若 xy 是一条 Θ-正则（黎曼）线段，则 Θ-芬斯勒测地线 xy 的并集等于 Θ-菱形 $\diamondsuit_\Theta(x, y)$。

X 中的每条 τ_{mod}-芬斯勒射线都包含于某个 τ_{mod}-韦尔锥中；对于包含在 $V(x$ 中的 τ_{mod}-芬斯勒射线，我们将其记为 $x\tau$，其中 $\mathsf{st}(\tau))$。类似地，每条 τ_{mod}-芬斯勒直线都包含于某个 τ_{mod}-平行集中；我们将向前/向后渐近于两个对踵单形 $\tau_\pm \in$、(τ_{mod}) Flag，且包含于 $P(\tau_-, \tau_+)$ 中的定向 τ_{mod}-芬斯勒直线记为 $\tau_-\tau_+$ 。

Θ-正则芬斯勒测地线的例子可以如下构造。设 (x_i) 是平行集 $P(\tau_-, \tau_+)$ 中的一个（有限或无限）序列，其中每条黎曼线段 x_ix_{i+1} 都是 τ_+-纵向且 Θ′-正则的。那么这些测地线段的拼接是

反过来，每条 Θ-正则芬斯勒测地线 $c : I \to X$ 都可以用分段黎曼芬斯勒测地线 c'逼近: 取一个数 $s > 0$ ，并考虑一个极大的 s-分离子集 $J \subset I$。然后令 c' 为连续点对 i、 $j \in J$ 之间黎曼测地线段 $c(i)c(j)$的拼接。鉴于这一逼近过程，菱形串定理（定理 3.30）仍然成立，只需允许用Θ-正则芬斯勒线段替代黎曼测地线段 x_ix_{i+1} 。

5.2 菱形的稳定性

在高秩的非正曲率对称空间中，菱形可视为测地线段的芬斯勒几何替代物。

哈达玛流形（以及更一般的 $CAT(0)$ 度量空间）中的黎曼测地线段对其端点具有一致连续性：由距离函数的凸性可知，

$$d_{Haus}(xy, x'y') \leqslant \max(d(x,x'), d(y,y')).$$

在 [KLP2，命题 3.70] 中，我们证明了菱形 $\diamondsuit_{\tau_{mod}}$ 对其端点连续变化。

下面我们将对充分大的 Θ-菱形随其端点的变化幅度建立一致控制。

引理 5.1. 对于 $d' > d > 0$，存在 $C = C(\Theta、\ \Theta'、\ d、\ d')$，使得以下结论成立：

若线段 $x_-x_+ \subset X$ 是 Θ-正则的，长度为 $\geqslant C$，且 $y_\pm \in B(x_\pm、\ d)$，则线段 y_-y_+ 是 Θ'-正则的，且 $\diamondsuit_\Theta(x_-、\ x_+) \subset N_{d'}(\diamondsuit_{\Theta'}(y_-、\ y_+))$。

证明。对于 Θ'的正则 性，当 C 充分大时，由 Δ-三角不等式可知 y.

假设不存在某个常数 C，使得第二个断言也成立。那么存在点的序列 $x_n^\pm$，满足 $d(x_n^-, x_n^+) \to +\infty, y_n^\pm$，以及 $d(x_n^\pm, y_n^\pm) \leqslant d, x_n \in \diamondsuit_\Theta(x_n^-, x_n^+)$，还有 $y_n \in \diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+)$，满足 $d(x_n, \diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+)) = d(x_n, y_n) = d'$。我们可以假设它们在 X中分别收敛于$x_n \to x_\infty$ 和 $y_n \to y_\infty$。

经过抽取后，至少有一个序列 $(x_n^\pm)$ 发散。需要考虑两种情况。

首先假设两个序列 $(x_n^\pm)$ 都发散。那么它们是一致的 τ_{mod}-正则序列，并且经过抽取后，我们有 τ_{mod}-旗流形收敛 $x_n^\pm, y_n^\pm \to \tau_\pm \in$旗流形$(\tau_{mod})$。极限单形$\tau_\pm$ 互为对踵（因为 $x_n \to x_\infty$）。我们注意到

$$d(x_n, \partial\diamondsuit_{\Theta'}(x_n^-, x_n^+)), d(y_n, \partial\diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+)) \to +\infty.$$

由此可知，菱形序列 $\diamondsuit_{\Theta'}(x_n^-, x_n^+)$ 和 $\diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+)$ 都豪斯多夫收敛到 τ_{mod}-平行集 $P = P(\tau_-, \tau_+)$。由于 $x_n \in \diamondsuit_\Theta(x_n^-, x_n^+)$，因此 $x_\infty \in P$。另一方面，由于 $d(x_n, \diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+)) = d'$，所以 $d(x_\infty, P) = d'$，这就产生了矛盾。

其次，假设只有一个序列 $(x_n^\pm)$ 发散；不妨在抽取子序列后，设 $x_n^- \to x_\infty^-$和 $y_n^- \to y_\infty^-$ 在 X 中收敛到极限点，且 $d(x_\infty^-, y_\infty^-) \leqslant d$，并且 $x_n^+ \to \tau_+ \in$ 旗流形 (τ_{mod})。现在， x_n 到以 x_n^+ 为顶点且包含 x_n 的 Θ'- 魏尔锥边界的距离趋于无穷，因此 $\diamondsuit_{\Theta'}(x_n^-, x_n^+) \to V(x_\infty^-,\ \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+))$；同理， $\diamondsuit_{\Theta'}(y_n^-, y_n^+) \to V(y_\infty^-,\ \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+))$。渐近极限魏尔锥的豪斯多夫距离为 $d(x_\infty^-, y_\infty^-)$。另一方面，$x_\infty \in V(x_\infty^-,\ \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+))$ 且 $d(x_\infty, V(y_\infty^-,\ \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+))) = d'$，再次产生矛盾。

这表明，对于充分大的 C，(ii)也成立。 □

我们用芬斯勒测地线的术语重新表述这一结果：

引理5.2. 存在 $C = C(\Theta, \Theta', d, d')$ 使得以下结论成立：若 x_-x_+ 是 X 中的一条 Θ-芬斯勒测地线，且 $d(x_-, x_+) \geqslant C$ 和 $y_\pm$ 是满足 $d(y_\pm, x_\pm) \leqslant d$的点，那么每个

位于 x_-x_+ 上的点 x ，都与 Θ'-芬斯勒测地线 y_-y_+上的某个点 y 的距离小于 d' 。

注意，我们在此并未声称，对于 x_-x_+ 上的所有点 x ，都可以取同一条芬斯勒测地线 y_-y_+ 。

现在我们将这一稳定性结果应用于莫尔斯拟测地线。 Θ-莫尔斯拟测地线 p 的定义有一个略显恼人的特点： $I \to X$ ，即 $p([t_1,t_2])$ 不要求与由 $p(t_1),p(t_2)$ 张成的某个 Θ-菱形保持一致的近距离。（原因之一是线段 $p(t_1)p(t_2)$ 不必是 Θ-正则的。）尽管如此，引理 5.1 推出：

引理 5.3。对于任意莫尔斯数据 $M=(\Theta,B,L,A)$ 和 $\Theta'>\Theta$，存在 $C=C(M,\Theta')$ 和 D' ，使得只要 $d(x_1,x_2)\geqslant C$，线段 $x_1x_2=p(t_1)p(t_2)$ 就是 Θ'-正则的，并且 $p([t_1,t_2])$ 位于由 $\diamondsuit_{\Theta'}(x_1,x_2)$ 张成的 Θ'-菱形的 D'-邻域内。

5.3 莫尔斯拟测地线的芬斯勒逼近

下一个定理证明，每条（足够长的）莫尔斯拟测地线都与一条具有相同端点的芬斯勒测地线保持一致的近距离。在此定理中，为方便记号，我们允许莫尔斯拟测地线 p 定义在扩展实数轴上的闭区间 I 上；这只是对映射 $I'=I\cap\mathbb{R}\to X$ 的一种简写，其中，当 $I'\ni t\to\pm\infty$, $p(t)\to p(\pm\infty)\in$ 旗流形(τ_{mod})。当我们说此类映射 p,c 彼此之间的距离不超过 D' 时，这仅表示它们在 I' 上的限制彼此之间的距离不超过 $\leqslant D'$。

定理 5.4（芬斯勒逼近定理）。对于每个莫尔斯数据 $M=(\Theta,D,L,A)$,$\Theta'>\Theta$以及一个正数 S, 都存在满足以下条件的 $C=C(M,\Theta',S),D'=D'(M,\Theta',S)$ 。

设 $p\colon I=[t_-,t_+]\to X\cup\mathbf{Flag}(\tau_{mod})$ 是连接点 $x_\pm=p(t_\pm)\in X\cup\mathbf{Flag}(\tau_{mod})$ 的 M-莫尔斯拟测地线，且 $d(x_-,x_+)\geqslant C$。那么存在一条 Θ'-芬斯勒测地线 x_-x_+ ，配有单调参数化 $c\colon I\to x_-x_+$ ，使得：

(a) 映射 $p,c\colon I\to X$ 彼此之间的距离不超过 $\leqslant D'$ 。

(b) x_-x_+ 是一条等间距的 S 分段黎曼测地线，即 x_-x_+ 的每个黎曼线段的黎曼长度均为 $\geqslant S$。

证明。我们将在 $x_\pm$ 都属于 X 的情形下证明这一点，因为当一个或两个点 $x_\pm$ 属于 $\mathbf{Flag}(\tau_{mod})$ 时，证明方法类似：只需将菱形替换为韦尔锥或平行集。

根据 M-莫尔斯拟测地线的定义，对于所有子区间 $[s_-,\ s_+]\subset[t_-,\ t_+]$，都存在一个 Θ-菱形

$$\diamondsuit_\Theta(y'_-,y'_+)$$

其 D-邻域包含 $p([s_-,\ s_+])$，且对于 $y_\pm=p(s_\pm)$，我们有

$$d(y_\pm,y'_\pm)\leqslant D.$$

因此，应用引理 5.1 的第一部分，我们得出：只要 $d(y_-、\ y_+) \geqslant C_1 = C_1(M、\ \Theta')$，黎曼线段$y_-y_+$就是 Θ'-正则的。根据 p 的拟测地线性质，最后一个不等式可由分离条件得出

$$s_+ - s_- \geqslant s = s(M, \Theta').$$

当然，这也适用于 $[s_-、\ s_+] = [t_-、\ t_+]$，因此利用引理 5.1 的第二部分，我们得到

$$p(I) \subset N_D\left(\diamondsuit_\Theta(x'_-, x'_+)\right) \subset N_{D+D_1}\left(\diamondsuit_{\Theta'}(x_-, x_+)\right),$$

其中 $D_1 = D_1(M、\ \Theta')$。令

$$\bar{y}_\pm \in \diamondsuit' := \diamondsuit_{\Theta'}(x_-, x_+) = V(x_-, \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_+)) \cap V(x_+, \mathrm{st}_{\Theta'}(\tau_-))$$

表示 $y_\pm = p(s_\pm)$ 的最近点投影。只要 $s_+ - s_- \geqslant s'(M、\ \Theta')$，黎曼线段 $\bar{y}_-\bar{y}_+$ 也都是 Θ'-正则的，且长度为 $\geqslant S$。此外，与命题 3.32 的证明类似，我们可以选取 s'，使得每条线段 $\bar{y}_-\bar{y}_+$ 都是 τ_+- 纵向的。

从现在起，我们假设 $t_+ - t_- \geqslant s''(M、\ \Theta')$，这可以通过假设

$$L^{-1}(d(x_-, x_+) - A) \geqslant s'(M, \Theta').$$

取一个包含 $t_\pm$ 的极大 s'-分离子集 $J \subset I$。对每个 $j \in J$，定义点

$$z_j := \overline{p(j)} \in \diamondsuit'.$$

于是，对于所有连续的 $i、\ j \in J、\ s' \leqslant |j - i| \leqslant 2s'$，有

$$L^{-1}s' - (A + 2D + 2D_1) \leqslant d(z_i, z_j) \leqslant 2Ls' + (A + 2D + 2D_1). \tag{5.5}$$

接着，我们令 c 表示对于连续的 $i、\ j \in J$ 拼接黎曼线段 z_iz_j 所得到的曲线，其中我们使用 $[i、\ j] \to z_iz_j$ 的仿射参数化。因此，c 是一条 Θ'-芬斯勒测地线。现在取满足下式的最小 $s'' \geqslant s'(M、\ \Theta')$

$$S \leqslant L^{-1}s'' - (A + 2D + 2D_1),$$

不等式 (5.5) 表明，c 满足逼近定理的两个要求，其中

$$D' = 2Ls'' + (A + 2D + 2D_1) + (D + D_1) + (2Ls'' + A). \quad \square$$

注 5.6。当 p 的定义域无界时，可以证明一个稍强的结果，即可以取 $\Theta' = \Theta$。参见 [KL3，第 6] 节。

5.4 改变莫尔斯拟测地线

下面我们考虑 M-莫尔斯拟测地线 p 在 X 中的某些修改，它们表示为拼接 $p = p_- \star p_0 \star p_+$，其中 $x_\pm$ 是 p_0 的端点，而 $y_\pm、\ x_\pm$ 是 $p_\pm$ 的端点。（与上一节一样，我们允许 $y_\pm$ 位于 $X \cup$ 旗流形(τ_{mod}) 中。）

这些修改将具有 $p' = p'_- \star p'_0 \star p'_+$ 的形式，其中 $p'_\pm$ 和 p'_0 都是莫尔斯的。我们将看到，在某些假设下，整个 p' 仍然是莫尔斯的（对于合适的莫尔斯数据M'）。

我们首先分析将 p 延拓为双无限路径的问题。

引理 5.7（延拓引理）。假设

$$p_\pm \subset V_\pm = V(x_\pm, \mathrm{st}(\tau_\pm)).$$

每当 $y_\pm$ 属于 X 时，我们令 $c_\pm$ 为包含在 $V_\pm$ 中、连接 $y_\pm$ 与 $\tau_\pm$ 的 Θ-正则芬斯勒射线。于是，对于每个 $\Theta' > \Theta$，存在一个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M'，使得拼接

$$\hat{p} = c_- \star p \star c_+$$

是 M'-莫尔斯的，只要 $d(x_\pm, y_\pm) \geqslant C = C(M, \Theta')$ 成立。

证明。我们固定一个满足 $\Theta < \Theta_1 < \Theta'$ 的辅助子集 Θ_1。令 $S = S(\Theta_1, \Theta', 1)$、$\epsilon = \epsilon(\Theta_1, \Theta', 1)$ 为菱形串定理（定理 3.30）中的常数。

根据定理 5.4，存在一条 Θ'-正则芬斯勒测地线

$$\bar{c} = y_- \bar{x}_- \star \bar{x}_- \bar{x}_+ \star \bar{x}_+ y_+$$

位于距路径 p不超过 $D_1 = D_1(M, \Theta', S)$ 的范围内，使得 $\bar{c}$ 是由长度为 $\geqslant S$ 的线段拼接而成，且 $d(x_\pm, \bar{x}_\pm) \leqslant D_1$。我们用 $z_\pm y_\pm$ 表示包含 $y_\pm$ 的 $\bar{x}_\pm y_\pm$ 的子线段。

由于 $d(x_\pm, \bar{x}_\pm) \leqslant D_1$，对每个 $\epsilon > 0$ 以及足够大的 $C_1 = C_1(D_1, \Theta')$，不等式 $d(x_\pm, y_\pm) \geqslant C_1$ 意味着

$$\angle^\zeta_{y_\pm}(x_\pm, \bar{x}_\pm) \leqslant \epsilon.$$

因此，

$$\angle^\zeta_{y_\pm}(z_\pm, \tau_\pm) \geqslant \pi - \epsilon$$

并且，因此，分段测地路径

$$\hat{c} = c_- \star \bar{c} \star c_+$$

是 (Θ_1, ϵ)-直且等间距为 S。因此，根据定理 3.30，拼接 $\hat{}c$ 是 M'-莫尔斯的，其中 $M_1 = (\Theta', 1, L, A)$。由于路径 $\hat{}p$ 距 $\hat{}c$ 不超过 D_1，它是 M'-莫尔斯的，其中$M' = M_1 + D_1$。 □

下一个引理在 [DKL, Thm. 4.11] 中已证明，适用于 p, p' 是有限路径的情形。对于（双）无限路径，证明方法相同，故略去。

引理 5.8（替换引理）。假设 $p' = p'_- \star p'_0 \star p'_+$ 是 X 中一列 M-莫尔斯拟测地线的拼接，且 $p_\pm$、$p'_\pm$ 与 p_0、p'_0 的端点分别相同。那么对于任意 $\Theta' > \Theta$，都存在一个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M'，使得路径 p' 是 M'-莫尔斯的。

在接下来的引理中，我们将通过改变 $p_\pm$ 并保持 p_0 不变或仅对其做小幅移动（“摆动 p 的头部和尾部”），来修改路径 p。

引理 5.9（摆动引理 I）。假设路径 $p_\pm$、$p'_\pm$ 都是无限的。令 $p'_\pm$ 为具有有限终端点 $x_\pm$ 的 M-莫尔斯拟测地线，并设 $p' := p'_- \star p_0 \star p'_+$。给定$\Theta' > \Theta$，存在 $\epsilon = \epsilon(M、\Theta') > 0$ 以及一个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M'，使得若

$$\mu := \max(\angle^{\zeta}_{x_\pm}(p'_\pm(\pm\infty), p_\pm(\pm\infty))) < \epsilon,$$

那么 p' 是 M'-莫尔斯的。

证明。我们固定一个辅助紧致Weyl凸子集 $\Theta_1 \subset$，使得 $\Theta < \Theta_1 < \Theta'$。设 $\tau_\pm = p_\pm(\pm\infty)$、$\tau'_\pm = p'_\pm(\pm\infty)$。

根据引理 5.8，存在一个包含 Θ_1 的莫尔斯数据 M_1，使得对于任意Θ_1-正则芬斯勒测地射线 $c_\pm := x_\pm\tau_\pm$，其拼接 $c_- \star p_0 \star c_+$ 是 M_1-莫尔斯的。

令 $M_2 > M_1 + 1$ 为包含 Θ' 的莫尔斯数据，并令 $S > 0$ 满足：若 X 中的路径 q 是 S-局部 $M_1 + 1$-莫尔斯的，则 q 是 M_2-莫尔斯的（见定理 3.34）。令 ϵ 满足：对于 $x \in X$、τ、$\tau' \in$ 旗流形，若 $\angle^{\zeta}_x(\tau、\tau') < \epsilon$，则 $V(x$ 中每条长度为 $\leqslant S$ 的 Θ_1-正则 Finsler线段 $\mathrm{st}(\tau'))$，都位于某条 Θ_1-正则、长度为 $\leqslant S$、位于 $V(x$ 中的 Finsler线段 $\mathrm{st}(\tau))$ 的单位距离以内。现在我们假设 $\mu < \epsilon$。

由于 $p'_\pm$ 是 M-莫尔斯射线，它们距连接 $x_\pm$ 和 $\tau'_\pm$ 的 Θ_1-正则 Finsler射线 $c'_\pm = x_\pm\tau'_\pm$ 的距离为 $D_1 = D_1(M、\Theta_1)$。定义一条新路径 $c' := c'_- \star p_0 \star c'_+$。

根据我们对 ϵ 的选择，$c'_\pm$ 的长度为 S 的 Θ_1-正则芬斯勒子线段 $s'_\pm = x_\pm y'_\pm$ 与 $c_\pm$ 的长度为 S 的 Θ_1-正则芬斯勒子线段 $s_\pm = x_\pm y_\pm$ 的距离不超过 1，其中 $c_\pm = x_\pm\tau_\pm$ 是连接 $x_\pm$ 与 $\tau_\pm$ 的 Θ_1-芬斯勒测地线。

拼接

$$s_- \star p_0 \star s_+$$

是 M_1-莫尔斯的；并且由于 $c'_\pm$ 是 Θ_1-芬斯勒测地线，路径 c' 是局部 S- $M_1 + 1$-莫尔斯的。根据我们对 S 的选择，路径 c' 是 M_2-莫尔斯的。由于 c' 与 p' 的距离不超过 D_1，路径 p' 是 $M_2 + D_1$-莫尔斯的。最后，我们令 $M' := M_2 + D_1$。 □

我们通过允许有限莫尔斯拟测地线来推广这一引理。我们继续采用引理 5.9 的设定；现在允许路径 $p_\pm$ 和 $p'_\pm$ 是有限的，分别连接 $y_\pm$、$x_\pm$ 和 $y'_\pm$、$x_\pm$。（$y_\pm$、$y'_\pm$ 中的一些可能位于 $\mathsf{Flag}(\tau_{mod})$ 中。）不过，我们假设距离 $d(x_\pm、y_\pm)$、$d(x'_\pm、y_\pm)$ 足够大，$\geqslant C$。

引理 5.10（摆动引理 II）。给定 $\Theta' > \Theta$，存在 $C \geqslant 0$、$\epsilon > 0$ 和一个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M'，使得如果

$$\mu := \max(\angle^{\zeta}_{x_\pm}(y'_\pm, y_\pm)) < \epsilon,$$

and

$$\nu := \min(d(x_\pm, y_\pm), d(x_\pm, y'_\pm)) \geqslant C$$

那么 p' 是 M'-莫尔斯。

证明。取一个辅助紧致Weyl凸子集 $\Theta_2, \Theta < \Theta_2 < \Theta'$。

按照引理 5.7，我们通过（必要时）沿着 Θ-芬斯勒测地线 $y_\pm\tau_\pm$ 和 $y'_\pm\tau'_\pm$ 延拓路径 $p_\pm$、$p'_\pm$，来定义双无限测地线延拓 $\hat{}p$、$\hat{}p'$。根据引理 5.7，存在 $C > 0$ 和莫尔斯数据 M_2（包含 Θ_2），二者均依赖于 M 和 Θ_2，使得路径 $\hat{}p$ 是 M_2-莫尔斯的。同一引理应用于路径 $\hat{}p'_\pm$，可知它们也都是 M_2-莫尔斯的。

根据构造，

$$\mu := \angle^{\zeta}_{x_\pm}(y'_\pm, y_\pm) = \angle^{\zeta}_{x_\pm}(\tau'_\pm, \tau_\pm).$$

现在，结论由引理 5.9 得出。 □

最后，我们证明一个更一般的摆动引理，其中允许扰动整条路径 p。我们考虑以下拼接

$$p = p_- \star p_0 \star p_+, \quad p' = p'_- \star p'_0 \star p'_+$$

M-莫尔斯拟测地线，并假设 p_0、p'_0 彼此之间的距离不超过 D_0。路径 $p_\pm$ 连接 $y_\pm$、$x_\pm$，而路径 $p'_\pm$ 连接 $y'_\pm$、$x'_\pm$。

引理 5.11（摆动引理 III）。给定 $\Theta' > \Theta$，存在 $C \geqslant 0$、$\epsilon > 0$ 和一个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M'，使得若

$$\mu := \max(\angle^{\zeta}_{x_\pm}(y'_\pm, y_\pm)) < \epsilon,$$

and

$$\nu := \min(d(x_\pm, y_\pm), d(x'_\pm, y'_\pm)) \geqslant C$$

则 p' 是 M'-莫尔斯的。

证明。与之前一样，我们固定一个辅助紧致Weyl凸子集 Θ_3、$\Theta < \Theta_3 < \Theta'$。于是 $p'_\pm$与 Θ_3-正则芬斯勒测地线 $c_\pm := y'_\pm x_\pm$的距离不超过 $D_3 = D_3(M, \Theta_3)$。我们对路径对应用引理 5.10

$$p, p'' := c_- \star p_0 \star c_+.$$

因此，只要 $\mu \leqslant \epsilon = \epsilon(M, \Theta_3, \Theta')$ 以及 $\nu \geqslant C = C(M, \Theta_3, \Theta')$，则对于某个包含 Θ' 的莫尔斯数据 M_3，p'' 是 M_3-莫尔斯的。由于路径 p''和 p'彼此的距离为$D' := \max(D_0, D_3)$，路径 p'是 $M' := M_3 + D'$-莫尔斯的。 □

参考文献

[BR] G. Baumslag, J. Roseblade, 《自由群直积的子群》，《伦敦数学学会杂志》(2)，第 30 卷（1984年），第 1 期，第 44–52 页。[Be] Y. Benoist, 《线性群的渐近性质》，《几何与泛函分析》，第 7 卷（1997年），第 1 期，第 1–47 页。[Bo] B. Bowditch, 《几何有限表示空间》，manicures《芬兰科学院年刊·数学》，第 23 卷（1998年），第 2 期，第 389–414 页。

[CEG] R. Canary、D. B. A. Epstein、P. Green，《Thurston 笔记札记》，载于《双曲空间的解析与几何方面（考文垂/达勒姆，1984年）》，第 3–92 页，《伦敦数学学会讲义丛书》第 111 卷，剑桥大学出版社，剑桥（1987年）。[CDP] M. Coornaert、T. Delzant、A. Papadopoulos，《群的几何与理论：Gromov 双曲群》，《数学讲义》第 1441 卷，施普林格出版社，柏林，1990年。[Co] K. Corlette，《极限集的豪斯多夫维数 I》，《数学发明》第 102 卷（1990年），第 3 期，第 521–541 页。[DKL] S. Dey、M. Kapovich、B. Leeb，《Anosov 子群的组合定理》，《数学杂志》第 293 卷（2019年），第 1–2 期，第 551–578 页。[DK1] S. Dey、M. Kapovich，《Anosov 子群的 Klein-Maskit 组合定理：自由积》，电子预印本，arXiv:2205.03919，2022年。[DK2] S. Dey、M. Kapovich，《Anosov 子群的 Klein-Maskit 组合定理：混合》，电子预印本，arXiv:2301.02354，2023年。[Eb] P. Eberlein，《非正曲率流形的几何》，芝加哥大学出版社，1997年。[Ep] D.B.A. Epstein、J. Cannon、D. Holt、S. Levy、M. Paterson、W. Thurston，《群中的字处理》，Jones and Bartlett 出版社，波士顿，马萨诸塞州，1992年。[Gi1] J. Gilman，《 $PSL(2、\mathbb{R})$的二生成离散子群》，《美国数学学会回忆录》，第 117 卷（1995年），第 561 号。[Gi2] J. Gilman，《 $PSL(2、\mathbb{C})$中的算法、复杂性与离散性判据》，《数学分析杂志》，第 73 卷（1997年），第 91–114 页。[GK] J. Gilman、L. Keen，《典范六边形与 $PSL(2\mathbb{C})$ 离散性问题》，电子预印本，arXiv:1508.00257v3。[GiM] J. Gilman、B. Maskit，《二生成福克斯群的算法》，《密歇根数学杂志》，第 38 卷（1991年），第 1 期，第 13–32 页。[Go] W. Goldman，《流形上的几何结构与表示簇》，载于《群表示的几何》，《当代数学》第 74 卷，1987年，第 169–198 页。[G] M. Gromov，《双曲群》，载于《群论论文集》，第 75–263 页，《数学科学研究所出版物》第 8 卷，施普林格出版社，纽约，1987年。[GW] O. Guichard、A. Wienhard，《Anosov 表示：不连续域与应用》，《数学发明》第 190 卷（2012年），第 2 期，第 357–438 页。

[Iz] H. Izeki, 《克莱因群的拟共形稳定性及平坦共形结构空间的嵌入》, 《共形几何与动力学》, 第 4 卷（2000年）, 第 108–119 页。[K1] M. Kapovich, 《双曲流形与离散群》, 《数学进展》, Birkhäuser 出版社, 2000年。[K1] M. Kapovich, 《高维中的克莱因群》。载于《群与空间的几何和动力学：纪念 Alexander Reznikov》, M. Kapranov 等编, Birkhäuser 出版社, 《数学进展》第 265 卷, 2007年, 第 485–562 页。[K2] M. Kapovich, 《离散性不可判定》, 《国际代数与计算杂志》, 第 26 卷（2016年）, 第 467–472 页。[KKL] M. Kapovich、S. Kim、J. Lee, 《扩张群作用的 Sullivan 结构稳定性》, 电子预印本, arXiv:1904.06921, 2019年。[KL1] M. Kapovich、B. Leeb, 《对称空间及某些局部对称空间的芬斯勒边界化》, 《几何与拓扑》, 第 22 卷（2018年）, 第 2533–2646 页。[KL2] M. Kapovich、B. Leeb, 《对称空间的离散等距变换群》, 《群作用手册》第四卷 MSRI 讲义, ALM 丛书, 国际出版社, L. Ji、A. Papadopoulos、S-T. Yau 编, 第 5 章, 第 191–290 页。[KL3] M. Kapovich、B. Leeb, 《Anosov 子群刻画的相对化 I》, 电子预印本, arXiv:1807.00160, 2018年。[KL4] M. Kapovich、B. Leeb, 《Anosov 子群刻画的相对化 II》, 准备中。[KLM] M. Kapovich、B. Leeb、J.J. Millson, 《对称空间上的凸函数、多边形的边长以及无穷远处加权构型的稳定性不等式》, 《微分几何杂志》, 第 81 卷（2009年）, 第 297–354 页。[KLP1] M. Kapovich、B. Leeb、J. Porti, 《离散群在对称空间上的莫尔斯作用》, arXiv 电子预印本, 2014年, arXiv:1403.7671。[KLP2] M. Kapovich、B. Leeb、J. Porti, 《对称空间和欧几里得建筑中拟测地线的莫尔斯引理》, 《几何与拓扑》, 第 22 卷（2018年）, 第 3827–3923 页。[KLP3] M. Kapovich、B. Leeb、J. Porti, 《关于 Anosov 表示的一些近期结果》, 《变换群》, 第 21 卷（2016年）, 第 4 期, 第 1105–1121 页。[KLP4] M. Kapovich、B. Leeb、J. Porti, 《旗流形上的动力学：适当不连续作用域与余紧性》, 《几何与拓扑》, 第 22 卷（2017年）, 第 157–234 页。[KLP5] M. Kapovich、B. Leeb、J. Porti, 《Anosov 子群：动力学与几何刻画》, 《欧洲数学杂志》, 第 3 卷（2017年）, 第 808–898 页。

[KaLi] M. Kapovich、B. Liu，《负曲率受限的 Hadamard 流形中的几何有限性》，《芬兰科学院数学年刊》，第 44 卷（2019年），第 2 期，第 841–875 页。[La] F. Labourie，《Anosov 流、曲面群与射影空间中的曲线》，《数学发明》，第 165 卷，第 1 期（2006年），第 51–114 页。[Le] B. Leeb，《以渐近几何刻画不可约高秩对称空间和欧几里得建筑》，波恩数学论丛，第 326 卷（2000年），另见 arXiv:0903.0584（2009年）。[Lo] W. Lok，《局部齐性空间与克莱因群的变形》，博士论文，哥伦比亚大学（1984年）。[OS] A. Ol'shanskii、M. Sapir，《群上的长度函数与面积函数及拟等距 Higman 嵌入》，《国际代数与计算杂志》，第 11 卷（2001年），第 2 期，第 137–170 页。[1] M. Riestenberg，《莫尔斯拟测地线的定量局部到整体原理》，电子预印本，arXiv:2101.07162，2021年。[Ri] R. Riley，《Poincar ´e 基本多面体定理的计算机实现及其应用》，《计算数学》，第 40 卷（1983年），第 607–632 页。[Su] D. Sullivan，《拟共形同胚与动力系统。II. 结构稳定性蕴含克莱因群的双曲性》，《数学学报》，第 155 卷（1985年），第 3–4 期，第 243–260 页。[Ti] J. Tits，《线性群中的自由子群》，《代数学杂志》，第 20 卷（1972年），第 250–270 页。[Tu] P. Tukia，《关于几何有限莫比乌斯群的同构》，IHES 数学出版物，第 61 卷（1985年），第 171–214 页。

地址：
M.K.：加州大学戴维斯分校数学系，
美国加利福尼亚州戴维斯市，邮编
95616，电子邮箱：
kapovich@math.ucdavis.edu
B.L.：慕尼黑大学数学研究所，特
蕾西娅街 39 号，D-80333，德国慕
尼黑，电子邮箱：b.l@lmu.de J.P.：
巴塞罗那自治大学数学系，08193，
西班牙贝拉特拉，电子邮箱：
porti@mat.uab.cat