arXiv:2301.04569v1 [math.AG] 11 Jan 2023

A SHA 维数三中的超几何秩上界 E

´ ´ ´CHRISTINE BERKESCH 和 MARIA-CRUZ FERNANDEZ-FERNANDEZ

摘要。我们为一个具有三维环面作用的 A-超几何系统的秩与 A 的标准化体积之商给出了一个精确的上界；在此情形下，该上界为二。

引言

A-超几何 D-模，也称为 GKZ 系统，于 [GGZ87, GKZ89] 中引入，用以推广经典超几何方程。这些关于多个复变量的线性偏微分方程组由矩阵 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{d\times n}$ 确定，其列为 $a_k \in \mathbb{Z}^d$，满足 $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}^d$，并带有参数向量 $\beta \in \mathbb{C}^d$。我们假设A 是尖锐的，即 A 中的所有列都位于 $\mathbb{R}^d$ 的同一个不包含原点的线性半空间内。

定义 1.1. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 $\mathbb{C}^n$上的坐标，对应的偏导数为$\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$，因此 $\mathbb{C}^n$ 上的魏尔代数 D 由 $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$生成。令

$$I_A := \langle \partial^u - \partial^v \mid u, v \in \mathbb{N}^n, Au = Av\rangle \subseteq \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$$

表示 A的环面理想，并令 $E_i := \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\partial_j$ 为 A的第 i个欧拉算子。参数为 $\beta \in \mathbb{C}^d$ 的A-超几何 D-模 是左 D-模

$$M_A(\beta) := D/D \cdot \langle I_A, E_1 - \beta_1, \ldots, E_d - \beta_d\rangle.$$

无论如何选择 A 和 β，模 $M_A(\beta)$ 都是全纯的 [GGZ87, Ado94]。因此，在非奇异点处，$M_A(\beta)$的全纯解芽空间的维数，也称为其（全纯）秩，是有限的。当 $\beta \in \mathbb{C}^d$ 为一般的时，$M_A(\beta)$的秩等于矩阵 A [在格 $\mathbb{Z}^d$内的标准化体积 vol(A) GKZ89, Ado94]；该体积是列 A 与原点的凸包 $\Delta_A \subseteq \mathbb{R}^d$ 的欧几里得体积除以 $d!$；但一般而言，这只是一个下界 [SST00, MMW05]。集合

$$\mathcal{E}(A) := \{\beta \in \mathbb{C}^d \mid \operatorname{rank}(M_A(\beta)) > \operatorname{vol}(A)\}$$

称为 A 的 例外配置，它是一个余维至少为二的仿射子空间配置，与环面环 $\mathbb{C}[\partial]/I_A$[MMW05] 的局部上同调模密切相关。参数 $\beta \in \mathcal{E}(A)$ 称为 秩跃变 参数。关于如何根据 A 在 β 处的 秩格 $\mathbb{E}^\beta$，组合计算 $M_A(\beta)$ 的秩，其公式见 [Oku06, Ber11]。遗憾的是，这些公式中的交错符号无法为 $M_A(\beta)$ 的秩给出较强的上界。一个例外是 $d = 2$ 的情形，文献 [CDD99] 证明了

2010 数学主题分类。13N10,32C38, 33C70,14M25。CB 获得了 NSF 项目 DMS2001101 的部分资助。MCFF 获得了项目 PID2020-117843GB-I00（西班牙科学与创新部）、P20-01056 和 US-1262169（安达卢西亚自治区政府经济、知识、企业与大学部及欧洲区域发展基金）的部分资助。

$\mathrm{rank}(M_A(\beta)) \leq \mathrm{vol}(A) + 1$ 是一个紧确上界。对于任意的 d、A 和 β，此前已知的 $M_A(\beta)$ 的全纯秩上界如下：

$$\mathrm{rank}(M_A(\beta)) \leq \begin{cases} 4^d \cdot \mathrm{vol}(A) & \text{if } I_A \text{ is homogeneous [SST00],} \\ 4^{d+1} \cdot \mathrm{vol}(A) & \text{otherwise [BFM18].} \end{cases}$$

然而，人们认为这些上界大得多。在 [BF22], 中，我们证明，当 β 是秩跳跃参数中的一般的参数时（即，在 [Ber11] 中是简单的），则

$$\frac{\mathrm{rank}(M_A(\beta))}{\mathrm{vol}(A)} \leq (d-1), \tag{1.1}$$

并且，我们通过构造一系列例子证明这个界是紧的；对于这些例子，比值 $\mathrm{rank}(M_A(\beta))/\mathrm{vol}(A)$ 趋于 $d-1$。不过，这种情况忽略了秩跳跃参数 β，而这些参数可能产生最大的跳跃。事实上，存在一些例子族，其比值 $\mathrm{rank}(M_A(\beta))/\mathrm{vol}(A)$ 随着 d [Fer13] 呈指数增长。在本文中，我们证明，当 $d = 3$ 时，对于所有参数 β，界 (1.1) 均成立，且为严格不等式。

定理 1.2。 对于所有 $A \in \mathbb{Z}^{3\times n}$ 和 $\beta \in \mathbb{C}^3$，均有一个严格且尖锐的不等式：

$$\frac{\mathrm{rank}(M_A(\beta))}{\mathrm{vol}(A)} < 2. \tag{1.2}$$

概要。 我们将在第 2 节介绍埃尔哈特理论中的结果，并在第 3 节讨论秩跃变。接下来，在第 4 节中，我们考虑 Δ_A 具有一次次数时的秩跃变。最后，在第 5 节中完成定理 1.2 的证明。

致谢。 感谢 Christian Haase 提出并证明引理 5.1，为本文提供了契机。我们也感谢 Laura Felicia Matusevich、Vic Reiner 和 Uli Walther 就与本文相关的问题进行了有益的交流。

2. 埃尔哈特理论预备知识

设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个格多面体，即 $\mathbb{R}^d$ 中有限个 $\mathbb{Z}^d$ 中点的凸包。我们用 $|\Delta \cap \mathbb{Z}^d|$ 表示 Δ 中格点集合的基数。函数 $g_\Delta(t) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 定义为

$$g_\Delta(k) := |k\Delta \cap \mathbb{Z}^d|$$

计算 Δ 的 k 倍膨胀中的格点数量。埃尔哈特证明了该函数是 k 中的一个多项式，如今称为 Δ 的 埃尔哈特多项式 。此外，他还证明，当多胞体 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 d 维时， $g_\Delta(k)$ 的次数为 d，其首项系数等于相对于 $\mathbb{Z}^d$ 的 Δ 的标准化体积，即 Δ 的欧几里得体积除以 $d!$ [埃尔哈特。 Δ 的 埃尔哈特级数是生成函数

$$E_\Delta(t) := \sum_{k\geq 0} g_\Delta(k) t^k.$$

以下结果是众所周知的（例如，参见 [BN07] 及其中的参考文献）。

定理 2.1. 对于格多面体 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$，存在

$$h^*(t) = 1 + h_1^* t + \cdots + h_k^* t^k,$$

称为 h-多项式的 Δ，满足以下性质：

(1) $E_\Delta(t) = h^*(t)/(1-t)^{d+1}$,
(2) $h_j^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *for all* $j = 1, \ldots, k$,
(3) $\mathrm{vol}(\Delta) = 1 + h_1^* + \cdots + h_k^*$,
(4) $h_1^* = |\Delta \cap \mathbb{Z}^d| - d - 1$, *and*
(5) *the leading coefficient* $h_k^* = |(d+1-k)\Delta^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$, *where* Δ° *denotes the interior of* Δ.

Δ 的次数 记作 deg(Δ)，定义为 Δ 的 h-多项式的次数。一个有趣的事实是

$$\deg(\Delta) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid |i\Delta^\circ \cap \mathbb{Z}^d| = \varnothing,\ \forall 1 \leq i \leq d-j\}.$$

由定理 2.1可知，次数为零的格多胞体是基本单形，也就是说，其顶点构成 $\mathbb{Z}^d$的仿射格基。Batyrev 和 Nill 对次数为一的多胞体进行了分类 [BN07, 定理 2.5]；他们证明，deg(Δ) ≤ 1 当且仅当 Δ是一个例外单形 或一个劳伦斯棱柱，下面我们将给出定义。

首先，若 F是 Δ 的一个面，且 $|\Delta \cap \mathbb{Z}^d| - |F \cap \mathbb{Z}^d| - \mathrm{codim}(F) = 0$，则称 Δ 是以 F为底的迭代棱锥 。例外三角形 是一个二维基本单形的 2 倍。例外单形 是以一个例外三角形为底的（$d-2$）重棱锥。换言之， Δ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的如下凸包：

$$e_0, e_0 + 2(e_1 - e_0), e_0 + 2(e_2 - e_0), e_3, \ldots, e_d$$

其中 $e_0, \ldots, e_d$是 $\mathbb{Z}^d$的某个仿射格基。最后，高度为 $b_1, \ldots, b_d \geq$0的劳伦斯棱柱 ，记作 $L(b_1, \ldots, b_s)$，是 $\mathbb{R}^d$ 中的如下凸包：

$$e_0, e_0 + b_1(e_d - e_0), e_1, e_1 + b_2(e_d - e_0), \ldots, e_{d-1}, e_{d-1} + b_d(e_d - e_0),$$

其中， $e_0, \ldots, e_d$是 $\mathbb{Z}^d$的某个仿射格基。

若 $b_1 + \cdots + b_d \geq 2$ [满足 BN07，命题 2.4]，则劳伦斯棱柱 $L(b_1, \ldots, b_d)$的次数为一。否则，它是一个次数为零的基本单形。

注 2.2. 劳伦斯棱柱 $L(b_1, \ldots, b_d)$的标准化体积为 $b_1 + \cdots + b_d$。

3. 秩跳跃的预备知识

本节中，我们回到尖矩阵 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ 且满足 $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}^d$的情形。我们很快会将讨论限制在 $d = 3$的情形，但以下定义并不需要这一限制。回顾一下， $\Delta_A \subseteq \mathbb{R}^d$表示 A 的列与原点的凸包。 A 的列集也记作 A。若 Δ_F是多胞体 $\Delta_A \subseteq \mathbb{R}^d$ 的一个面，且 $A \cap \Delta_F = F$，则称 A 的子矩阵 F（或其列集的一个子集）为 A的面 ，记作$F \preceq A$。特别地，空集和 A 都是 A的面。对于一个面 $F \preceq A$，考虑格平移的并集

$$\mathbb{E}_F^\beta := \left[\mathbb{Z}^d \cap (\beta + \mathbb{C}F)\right] \smallsetminus (\mathbb{N}A + \mathbb{Z}F) = \bigsqcup_{b \in B_F^\beta} (b + \mathbb{Z}F),$$

其中， $B_F^\beta \subseteq \mathbb{Z}^d$ 是一组格平移代表元。由于 $|B_F^\beta|$ 是 $\mathbb{Z}F$在 $\mathbb{E}_F^\beta$中出现的平移数，根据定义，它等于 $[\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{Q}F\colon\ \mathbb{Z}F]$ 与沿着 $\beta + \mathbb{C}F$ 且包含于 $\mathbb{N}A + \mathbb{Z}F$中的 $\mathbb{Z}F$ 的平移数之差。

给定集合 $\mathcal{J}(\beta) := \{(F,b) \mid F \preceq A,\, b \in B_F^\beta\}$，$A$ 在 β 处的秩格 定义为

$$\mathbb{E}^\beta := \bigcup_{(F,b)\in\mathcal{J}(\beta)} (b+\mathbb{Z}F).$$

注意，A at β 的秩格恰好是那些包含于 $\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{N}A$ 且满足 $\beta \in (b+\mathbb{C}F)$ 的集合 $(b+\mathbb{Z}F)$ 的并集。这与仿射半群 $\mathbb{N}A$ 的空洞集合密切相关，即集合 $(\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{R}_{\geq 0}A) \setminus \mathbb{N}A$。

若集合 $\mathcal{J}(\beta)$ 中关于 $b+\mathbb{Z}F$ 上的包含关系极大的有序对 (F,b) 都对应于唯一的面 $G \preceq A$，则秩跳跃参数 β 对面 $G \preceq A$ 是简单 的。

[Ber11] 中的主要结果说明，如何根据 $\mathbb{E}^\beta$ 和 Δ_A 的组合结构计算 $M_A(\beta)$ 的秩。当秩跳跃参数 β 对于面 $G \preceq A$ 是简单的时，给出了秩的显式公式（关于这一特例，参见 [Oku06] ）；在这种情况下，

$$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) = \operatorname{vol}(A) + |B_G^\beta| \cdot (\operatorname{codim}(G)-1) \cdot \operatorname{vol}_{\mathbb{Z}G}(G). \tag{3.1}$$

例 3.1. [Ber11, 例 6.21] 中证明，若 $\beta \in \mathbb{C}^d$ 满足：A 在 β 处的秩格只涉及两个面 F_1 和 F_2，则 M 在 β 处的秩跃变为

$$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) - \operatorname{vol}(A) = \sum_{i=1}^{2} \Big(|B_{F_i}^\beta| \cdot [\operatorname{codim}(F_i)-1] \cdot \operatorname{vol}(F_i)\Big) + |B_G^\beta| \cdot C^\beta \cdot \operatorname{vol}(G), \tag{3.2}$$

其中 $G = F_1 \cap F_2$，常数 C^β 定义为

$$C^\beta = \binom{\operatorname{codim}(G)}{2} - \operatorname{codim}(G) + 1 - \binom{\operatorname{codim}(F_1)}{2} - \binom{\operatorname{codim}(F_2)}{2} + \binom{\operatorname{codim}(\mathbb{C}F_1+\mathbb{C}F_2)}{2}.$$

当 $d=3$时，Okuyama [Oku06] 给出了 $M_A(\beta)$的秩公式，如下所示。

定理 3.2. [Oku06, 定理 2.6] 设 $d=3$ 且 $\beta \in \mathbb{C}^3$。在$\mathcal{J}(\beta)$ 上定义一个等价关系如下:

$$(F,b) \sim (G,c) \quad \textit{if and only if} \quad (b+\mathbb{Z}F) \cap (c+\mathbb{Z}G) \neq \varnothing.$$

令 $\mathcal{F}_A(\beta)$ 表示 $\mathcal{J}(\beta)$ 在 $\sim$下的等价类集合。对每个 $\Lambda \in \mathcal{F}_A(\beta)$，令 $\mathcal{J}_\Lambda^\beta$ 表示面偏序集中由满足$(F,b) \in \Lambda$ （其中某个 $b \in \mathbb{Z}^3$）的面 F 构成的序复形。则 A 在 $\beta \in \mathbb{C}^d$ 处的秩跃变为

$$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) - \operatorname{vol}(A) = \sum_{\Lambda\in\mathcal{F}_A(\beta)} j_\Lambda(\beta),$$

其中

$$j_\Lambda(\beta) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\textit{rays } F\in\mathcal{J}_\Lambda^\beta} (\operatorname{vol}(F)-1)+m-1 & \textit{if } \widetilde{H}_p(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong 0 \textit{ for } p\neq 0,\ \widetilde{H}_0(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong \mathbb{C}^{m-1} \textit{ with } m>1, \\ \operatorname{vol}(F) & \textit{if } \widetilde{H}_p(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong 0 \textit{ for all } p, \textit{ so } \mathcal{J}_\Lambda^\beta \textit{ consists of a ray } F, \\ 2 & \textit{if } \widetilde{H}_{-1}(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong \mathbb{C},\ \widetilde{H}_p(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong 0 \textit{ for } p\neq -1, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

4. 当 $M_A(\beta)$ 的 Δ_A 次数为一次时的秩跃变

回顾一下，我们用 Δ_A 表示由 A 的列和原点构成的凸包。当 Δ_A 是一个次数为一的格多面体时，它是一个例外单形，或是一个高度为b_1、.....、 $b_d \in \mathbb{N}$的劳伦斯棱柱。本节中，我们将计算当 Δ_A 是前者，或是后者且 $d = 3$时， $M_A(\beta)$ 可能出现的秩跃变。

引理 4.1。 若 $\Delta = \Delta_A$ 是一个例外单形，则 $M_A(\beta)$ 没有秩跳跃参数。

证明。 若 Δ_A 是以一个例外三角形为底的迭代棱锥，则以下情况之一成立：

(i) Δ_A 是一个例外三角形；(ii) Δ_A （在刚性变换意义下）是 $\mathbb{R}^3$ 中的原点与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$的凸包；(iii) A 是 [SW12，定义 3.4] 中定义的、以面 $F \preceq A$ 为底的迭代棱锥 ，其中Δ_F是形如(i)或(ii)中 Δ_A 的多胞体。

对于(iii)，$\mathbb{C}^d = \mathbb{C}F \oplus \overline{\mathbb{C}F}$和 rank($M_A(\beta)$) = rank($M_F(\beta^F)$)，其中 $\beta = \beta^F + \overline{\beta^F}$对于唯一的 $\beta^F \in \mathbb{C}F$和 $\beta^F \overline{\in} \mathbb{C}F$成立（见 [SW12，引理 3.7]）。因此，只需处理(i)和(ii)两种情况。
对于 (i)，为简便起见，我们可以假设 e_0 是 $\mathbb{R}^2$ 的原点。在这种情况下， $2e_1$、 $2e_2$ 中的顶点是 Δ_A 的列。此外，由于 $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}^d$，集合 $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ 中至少有两个元素也是 A 的列。如果 e_1、 e_2 是 A 的列，那么 e_1+e_2 属于 $\mathbb{N}A$，且 $\mathbb{N}A$ 是正规配置。如果 e_1+e_2 和某个 e_i 是 A 的列，那么 $\mathbb{N}A$ 有一个一维空洞集，由 $e_j + \mathbb{N}\{e_j\}$ 给出，其中 $j \neq i$。由于这是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个余维一格平移，且它是 $\mathbb{N}A$ 中唯一的空洞集，根据 (3.1)，它不会产生秩跳跃参数。
对于 (ii)，由于 $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}^3$， $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 中至少有两个向量必定也属于 A。穷举搜索表明，这些构型均不会产生任何秩跳跃参数。

因此，在所有 Δ_A 为例外单形的情形下， $M_A(\beta)$ 都不存在会导致秩跳跃的参数 β。□

本节要考虑的最后一种情形是， Δ_A 为高度为 b_1、 b_2、 $b_3 \in \mathbb{N}$ 的劳伦斯棱柱。

引理 4.2. 若 Δ 同构于一个形如 $L(b_1、\ b_2、\ b_3)$ 的三维劳伦斯多胞体，则

$$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) < 2 \cdot \operatorname{vol}(A).$$

证明。 由于 $M_A(\beta)$ 在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ 变换下不变，且其秩在重新排列 A的列时保持不变，我们首先注意到，若 $\Delta = \Delta_A$ 同构于一个劳伦斯棱柱，则为简便起见，可假设 $\Delta = L(b_1、\ b_2、\ b_3)$ 如 §2 所示，其中 e_0 为原点， $\{e_1, e_2, e_3\}$为 $\mathbb{R}^3$的标准基。

若 b_2 或 b_3 为零，则 A 是一个以二维面为底面的棱锥，因此 rank($M_A(\beta)$) $\leq$ vol(A) $+ 1$; 事实上，棱锥构造不会增加秩 [SW12],，而 vol(A) $+ 1$ 是当 $d = 2$ [CDD99]时可能达到的最大秩。因此，我们可以假设b_2、 $b_3 \geq 1$。

如果 b_2， $b_3 \geq 1$ 但 $b_1 = 0$，那么 Δ 有四条包含原点的边，每条边的体积为 1，格指数为 1。根据定理 3.2，有六个非平凡的潜在序复形

$\mathcal{J}_\Lambda^\beta$ 需要考虑，并注意到每个 β 都有唯一的非平凡 $\Lambda \in \mathcal{F}_A(\beta)$。对于可能的 $\mathcal{J}_\Lambda^\beta$，其中 $\widetilde{H}_0(\mathcal{J}_\Lambda^\beta) \cong \mathbb{C}^{m-1}$ 对应于 $m > 1$，$j_A(\beta) = j_\Lambda(\beta) = m-1 \le 3$。在其余情况下，$j_A(\beta) \in \{1,2\}$。现在可得

$$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) \le 3 + \operatorname{vol}(A). \tag{4.1}$$

如果 $\operatorname{vol}(A)$ 为 2 或 3，那么 Δ_A 分别等于原点与 $\left[\begin{smallmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right]$ 或 $\left[\begin{smallmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&2&0&1\end{smallmatrix}\right]$ 的列构成的凸包。在两种情况下，$\mathcal{E}_A = \varnothing$，因此 $j_A(\beta) = 0$。于是，如果 $b_1 = 0$、$b_2 \ge 1$、$b_3 \ge 1$，且 $j_A(\beta) > 0$，那么 $\operatorname{vol}(A) \ge 4$。因此，由 (4.1) 可知，当 $b_1 = 0$ 时，$\operatorname{rank}(M_A(\beta)) < 2 \cdot \operatorname{vol}(A)$。

在证明的其余部分，我们可以假设 $b_1, b_2, b_3 \ge 1$。因此，A 的边是直线 $\ell_1 = \mathbb{R}e_1 \cap A$，$\ell_2 = \mathbb{R}e_2 \cap A$ 和 $\ell_3 = \mathbb{R}e_3 \cap A$。然而，由于 Δ 的顶点 e_1 和 e_2 必然是 A 的列，因此对于所有 $j = 1, 2$，以及所有 $j = 1, 2$ 和所有 $\beta \in \mathbb{C}^3$，$\operatorname{vol}^{\mathbb{Z}\ell_j}(\ell_j) = 1$。

再次根据定理 3.2，对于给定的 $\Lambda \in \mathcal{F}_A(\beta)$，可能的序复形 $\mathcal{J}_\Lambda^\beta$ 有七种。现在我们来考察这些情况。

令 v 表示 $A \cap \mathbb{R}e_3$ 与原点的凸包的标准化体积，其中原点位于由 $\mathbb{Z}(A \cap \mathbb{R}e_3)$ 张成的格内。如果 Λ 中按包含关系极大的格平移是分别对应于 ℓ_1、ℓ_2 和 ℓ_3 的三条射线，那么 $j_\Lambda(\beta) = 1 + v$。如果 Λ 中按包含关系极大的所有元素都是面，那么定理 3.2 推出 $j_\Lambda(\beta) = 0$。其余情形中，$F_A(\beta)$ 的极大元素分别为一个面和一条直线、两条直线，或一条直线。在每种情形下，

$$j_\Lambda(\beta) = \begin{cases} v & \text{if (one of) the line(s) is } \ell_3, \\ 1 & \text{if } \ell_3 \text{ is not among the lines.} \end{cases}$$

在所有情况下，$\mathcal{F}_A(\beta)$ 中唯一额外的 Λ 都来自 ℓ_3 的平移。每个这样的 Λ 都将具有 $j_\Lambda(\beta) = v$，且至多有 $[\mathbb{Z}e_3 : \mathbb{Z}(A \cap \mathbb{R}e_3)] - 1$ 个这样的 Λ 位于 $\mathcal{F}_A(\beta)$ 中。

比较计算 β 处 $M_A(\beta)$ 的秩跃变时，定理 3.2 允许的 $j_\Lambda(\beta)$ 可能的和，可得

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(M_A(\beta)) - \operatorname{vol}(A) &\le 1 + [\mathbb{Z}e_3 : \mathbb{Z}(A \cap \mathbb{R}e_3)] \cdot v \\ &= 1 + [\mathbb{Z}e_3 : \mathbb{Z}(A \cap \mathbb{R}e_3)] \cdot \operatorname{vol}_{\mathbb{Z}(A \cap \mathbb{R}e_3)}(\operatorname{conv}(\{\mathbf{0}, A \cap \mathbb{R}e_3\})) \\ &= 1 + b_3. \end{aligned}$$

最后，当 $b_1 + b_2 \ge 2$ 时，我们整理不等式以计算所需结果；这是最后剩下的情形：

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(M_A(\beta)) &\le \operatorname{vol}(A) + 1 + b_3 \\ &< \operatorname{vol}(A) + 2 + b_3 \\ &\le \operatorname{vol}(A) + b_1 + b_2 + b_3 \\ &= 2 \cdot \operatorname{vol}(A). \end{aligned}$$

□

5. 三维情形下秩的上界

在本节中，我们 证明定理 1.2。首先，我们陈述一个 Christian Haase 与我们分享的引理 .

引理 5.1。 设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一个凸格多面体， ℓ_1、.....、 ℓ_r 是 Δ 中包含固定顶点 v 的边。那么

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{vol}(\ell_j) \leq \mathrm{vol}(\Delta) + 2. \tag{5.1}$$

此外，如果 (5.1) 中等号成立，那么 Δ 是一个3-单形，并且至少有一个面的标准化体积为一。

证明。 由于对于任意边 ℓ，都有 $\mathrm{vol}(\ell) = |\mathbb{Z}^3 \cap \ell| - 1$，因此根据定理 2.1，

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{vol}(\ell_j) + 1 \leq |\Delta \cap \mathbb{Z}^3| = h_1^* + 4 \leq \mathrm{vol}(\Delta) + 3. \tag{5.2}$$

这就得到了所需的不等式。此外，如果

$$h_1^* + 4 = \mathrm{vol}(\Delta) + 3, \tag{5.3}$$

那么 $h_2^* = h_3^* = 0$，因此 Δ 的次数为 1。Batyrev 和 Nill 刻画了所有 [中具有 h-多项式且次数为一的多胞体（BN07，定理 2.5]）。在这一分类中，使 (5.2) 中第一个不等式成为等式的多胞体，恰好是至少有一个面体积为一的单形。□

定理 *1.2* 的证明。 根据 [BF22，推论 2.2], ，不妨设 $\beta \in \mathcal{E}_A$ 不是单纯的。由定理 3.2 中的 Okuyama 公式，在 $d = 3$的情况下，

$$\mathrm{rank}(M_A(\beta)) - \mathrm{vol}(A) \leq \left(\sum_F \mathrm{vol}_{\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{C}F}(F) \right) - 1, \tag{5.4}$$

其中， F 遍历 A的所有一维面。
反证法，假设存在某个 $A \in \mathbb{Z}^{3\times n}$ 和 $\beta \in \mathbb{C}^3$，使得

$$\mathrm{rank}(M_A(\beta)) \geq 2 \cdot \mathrm{vol}(A);$$

in 特别地， $M_A(\beta)$在 β 处的秩跃变至少为$\mathrm{vol}(A)$。于是，由(5.4),

$$\mathrm{vol}(A) \leq \left(\sum_F \mathrm{vol}_{\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{C}F}(F) \right) - 1, \tag{5.5}$$

其中，求和遍历 Δ 中所有包含原点的边 F。将此式与(5.2)结合可得

$$\mathrm{vol}(A) + 2 \leq \left(\sum_F \mathrm{vol}_{\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{C}F}(F) \right) + 1 \leq |\Delta \cap \mathbb{Z}^3| = h_1^* + 4 \leq \mathrm{vol}(A) + 3, \tag{5.6}$$

其中，求和仍遍历 Δ 中所有包含原点的边 F。比较(5.6)中的两端项可知，所列三个不等式中恰有两个必须取等号。根据第三个不等式，我们区分两种情况。

首先，考虑 (5.6) 中的第三个不等式取等号的情形，因此 $h_1^* + 1 = \mathrm{vol}(A)$。由定理 2.1 可知 $h_2^* = h_3^* = 0$。因此，根据 [BN07, 定理 2.5]， Δ 要么是以例外三角形为底的（迭代）棱锥，要么是劳伦斯多胞体。引理 4.1 和 4.2 处理了这些情形，并表明在此情形下不等式 (1.2) 是严格的。

最后，我们还需考虑 (5.6) 中的第三个不等式严格成立的情形，此时前两个不等式均取等号。现在 (5.6) 变为

$$\mathrm{vol}(\Delta)+2=\left(\sum_F \mathrm{vol}_{\mathbb{Z}^3\cap\mathbb{C}F}(F)\right)+1=|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|=h_1^*+4<\mathrm{vol}(\Delta)+3.$$

由于求和遍历了所有以原点为顶点的 F Δ 的边，第二个等式表明， Δ 中的所有格点都位于 Δ 的一条边上，该边以原点为顶点且 Δ 没有内部格点。因此， Δ 中不包含原点的每条边的体积均为 1。我们将证明，没有任何符合这一情形的 Δ 具有高于 1 的秩跳跃。首先，注意到$h_1^*+2=\mathrm{vol}(\Delta)$，因此 $h_2^*+h_3^*=1$ 因为 $h_1^*+h_2^*+h_3^*+1=\mathrm{vol}(\Delta)$。

如果 $h_2^*=0$ 和 $h_3^*=1$，那么根据定理 2.1 中的性质 (5)， Δ 必须含有一个内部格点，这与假设矛盾。因此，我们必处于 $h_2^*=1$ 和 $h_3^*=0$的情形。鉴于 $d=3$，可推出 $\deg(\Delta)=2$。根据 [Tre10，定理 2]， Δ满足以下两种可能情形之一。

首先， Δ 可能同构于原点与 conv $\left[\begin{smallmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$ in$\mathbb{R}^3$ 的列所构成的凸包，因此 $\mathrm{vol}(\Delta)=9$ and $|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|=11$。在这种情况下， Δ 是以二维面为底的棱锥，因此根据 [CDD99, SW12],

$$\mathrm{rank}(M_A(\beta))\leq\mathrm{vol}(A)+1<2\cdot\mathrm{vol}(A).$$

其次，由于 Δ 不同构于原点与 conv $\left[\begin{smallmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$in $\mathbb{R}^3$ 的列所构成的凸包，因此 [Tre10，定理 2]推出以下等价命题成立：

(1) $\mathrm{vol}(\Delta)\leq 4\cdot(|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|+1)$，(2) $|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|\leq 3\cdot|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|+7$，以及 (3) $|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|\leq\frac{3}{4}\cdot\mathrm{vol}(\Delta)+4$。

此外，根据 [Tre10 引理 9], $\mathrm{vol}(\Delta)=|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|+|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|-3$。将此与式 (5.6) 中的 $|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|=\mathrm{vol}(\Delta)+2$ 结合可得 $|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|=1$。因此

$$|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|\leq 3|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|+7=10\quad\text{and}\quad\mathrm{vol}(\Delta)=|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|-2\leq 8.$$

现在， Δ的 Ehrhart 多项式

$$g_\Delta(t)=g_3t^3+g_2t^2+g_1t+1,$$

满足以下约束。首先， $|\Delta\cap\mathbb{Z}^3|=\mathrm{vol}(\Delta)-2$，因此

$$g_3+2=\mathrm{vol}(\Delta)+2=b=g_\Delta(1)=g_3+g_2+g_1+1,$$

这意味着 $g_1=1-g_2$。接下来，由于 Δ没有内部格点，根据 Ehrhart 互反定理，即 $g_{\Delta^\circ}(t)=(-1)^dg_\Delta(-t)$,

$$0=|\Delta^\circ\cap\mathbb{Z}^3|=-g_\Delta(-1)=g_3-g_2+g_1-1.$$

最后，由于 $i=|(2\Delta)^\circ\cap\mathbb{Z}^3|=1, 1=-g_\Delta(-2)=8g_3-4g_2+2g_1-1$。然而，这些方程

$$g_1=1-g_2,\quad 0=g_3-g_2+g_1-1,\quad\text{and}\quad 1=8g_3-4g_2+2g_1-1$$

彼此不相容，因此没有符合此情形的 Δ。穷尽所有可能性后，我们得出结论：如果 (5.6) 中的第三个不等式是严格不等式，那么秩$(M_A(\beta))<2\cdot\mathrm{vol}(A)$。

最后， [BF22 第 3] 节构造的一系列例子证明，(1.2) 中的上界是尖锐的。□

参考文献

[Ado94] Alan Adolphson, 《超几何函数与单项式生成的环》, Duke Math. J. 73 (1994), 269–290. 1[BN07] Victor Batyrev 和 Benjamin Nill, 《没有内部格点的格多面体的倍数》, Moscow Mathematical Journal 7 (2007), no. 2, 195–207. 2, 3, 7[Ber11] Christine Berkesch, 《超几何系统的秩》, Compos. Math. 147 (2011), no. 1, 284–318. 1, 2, 4[BFM18] Christine Berkesch、Jens Forg˚ard 和 Laura Felicia Matusevich, 《关于 A-超几何函数的参数行为》, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), no. 6, pp. 4089–4109. 2[BF22] Christine Berkesch 和 Mar´ıa-Cruz Fern´andez-Fern´andez, 《关于 A-超几何 D-模的秩与 A的标准化体积》, Bull. London Math. Society, 54 (2022), no. 1, pp. 182–192. 2, 7, 8[CDD99] Eduardo Cattani、Carlos D'Andrea 和 Alicia Dickenstein, 《与单项式曲线相关的 A-超几何系统》, Duke Math. J. 99 (1999), no. 2, 179-207. 1, 5, 8[Ehr62] Eug`ene Ehrhart, 《关于有理齐次的 `维多面体》, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 616–618. 2[Fer13] Mar´ıa Cruz Fern´andez Fern´andez, 《A-超几何系统秩跳跃的指数增长》, Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), no. 4, 1397–1404. 2[GGZ87] I. M. Gel'fand、M. I. Graev 和 A. V. Zelevinskiĭ, 《全纯方程系统与超几何型级数》, Dokl. Akad. Nauk SSSR 295 (1987), no. 1, 14–19. 1[GKZ89] I. M. Gel'fand、A. V. Zelevinskiĭ 和 M. M. Kapranov, 《超几何函数与环面簇》, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 23 (1989), no. 2, 12–26. 更正见同刊 27 (1993), no. 4, 91. 1[Hoc72] M. Hochster, 《环面的不变量环、由单项式生成的 Cohen–Macaulay 环与多胞体》, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 318–337.[MMW05] Laura Felicia Matusevich、Ezra Miller 和 Uli Walther, 《超几何族的同调方法》, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 4, 919–941. 1[MW07] L. F. Matusevich、U. Walther, 《通过 Laurent 多项式实现 A-超几何系统的任意秩跃变》, J. London Math. Soc. (2) 75 (2007) 213–224.[Oku06] Go Okuyama, 《环面三维簇的 A-超几何秩》, Int. Math. Res. Not. 2006, Article ID 70814, 38. 1, 4[SST00] Mutsumi Saito、Bernd Sturmfels 和 Nobuki Takayama, 《超几何微分方程的 Gr¨obner 变形》, Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1, 2[SW12] Mathias Schulze 和 Uli Walther, 《共振等价于 A-超几何系统的可约性》, Algebra Number Theory 6 (2012), no. 3, 527–537. 5, 8[Tre10] Jason Treutlein, 《二度格多面体》, J. Combin. Theory Ser. A 117 (2010), no. 3, 354–360. 8

明尼苏达大学数学学院。电子邮件地址:
cberkesc@umn.edu

´塞维利亚大学代数系。电子邮件地址:
mcferfer@algebra.us.es