使用显式方法进行电路仿真

Mahesh B. Patil[1] 和 V.V.S. Pavan Kumar Hari[2]

[1]印度理工学院孟买分校电气工程系[2]印度理工学院孟买分校能源科学与工程系

2023年1月12日

arXiv:2301.04595v1 [cs.CE] 11 Jan 2023

摘要

本文介绍了使用显式方法仿真电路，尤其是电力电子应用中的电路。文中讨论了将前向欧拉法应用于半波整流器，并指出固定步长法的局限性；还讨论了在半波整流电路中实现允许采用可变时间步长的龙格-库塔-费尔伯格（RKF）法，并指出其优势。此外，文中还通过更多示例介绍了为使用 RKF 方法进行仿真而建立电路方程的方法，并阐述了与电力电子电路相关的稳定性和精度问题及其解决机制。最后，文中介绍了这项工作的未来计划。

1 引言

电路仿真软件包（例如 NGSPICE [1],PSIM [2], PSCAD [3]）通常采用隐式方法（如后向欧拉法和梯形法），对含有时间导数的电路方程进行离散化。由于这些隐式方法无条件稳定，仿真器的时间步长不受稳定性问题的限制。换言之，使用这些方法时，时间步长由精度要求而非稳定性约束决定 [4]。因此，尽管隐式方法每个时间步长的计算量更大，但对于时间常数极小的电路而言，它们仍是唯一可行的选择。

另一方面，显式方法（例如龙格－库塔－费尔伯格（RKF） [5] 和多曼－普林斯（DP） [6] 4-5 配对方法）每个时间步长所需的计算量较少，非常适用于时间常数不太小的非刚性系统。遗憾的是，许多实际关注的电路确实存在较小的时间常数这些较小的时间常数源于开关较小的导通电阻，或半导体器件相关的较小电容。在这种情况下，采用显式方法的仿真器不得不使用非常小的时间步长，尽管从精度角度看，完全可以使用大得多的时间步长。因此，显式方法在电子电路中的应用受到严重限制。

如果将开关视为理想器件，电力电子电路便提供了一个独特的机会，可以利用显式方法的

效率优势——显式方法每个时间步长的计算量更小。仿真器 PLECS [7] 利用这一思路，实现了对各种电力电子电路的快速仿真。然而，可能由于 PLECS 具有商业属性，关于 PLECS 4.6 手册中概述的这些思路究竟如何实现，公开资料中几乎没有任何细节。

本文旨在讨论使用显式方法进行电力电子电路仿真时涉及的各种问题。我们将通过几个示例说明基本实现方案、面临的各种挑战，以及应对这些挑战的一些方法。

2 半波整流器

图 1 所示为一个半波整流电路。在

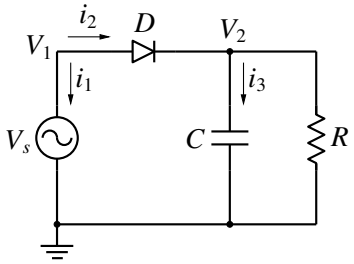

图1：半波整流电路。源电压表示为$V_s = V_m$ 正弦t。

下文中，我们将讨论如何使用隐式方法（后向欧拉法）、固定时间步长的显式方法（前向欧拉法）以及可变时间步长的显式方法（RKF）处理该电路。所有情况下采用的参数值为：$V_m = 10\,\mathrm{V}$、$f = 50\,\mathrm{Hz}$、$C = 1\,\mathrm{mF}$、$R = 200\,\Omega$。二极管导通状态下的电压降取为 $V_{\mathrm{on}} = 0\,\mathrm{V}$。

2.1 后向欧拉法（BE 法）

电容方程$dV_C\,dt = i_C\,C$使用后向欧拉法离散化后为：

$$\frac{V_{C,n+1} - V_{C,n}}{h} = \frac{i_{C,n+1}}{C}, \tag{1}$$

其中，X_n 和 X_{n+1} 分别表示在$t = t_n$和$t = t_{n+1}$时X的数值计算值。在半波整流电路中，式 1 给出：

$$i_{C,n+1} = \frac{C}{h}\,(V_{2,n+1} - V_{2,n}). \tag{2}$$

使用式 2，并采用改进节点分析（MNA）方法 [8] 组装电路方程，可得：

$$i_{1,n+1} + G_D\,(V_{1,n+1} - V_{2,n+1}) = 0, \tag{3}$$

$$G_D\,(V_{2,n+1} - V_{1,n+1}) + \frac{C}{h}\,[V_{2,n+1} - V_{2,n}] + G\,V_{2,n+1} = 0, \tag{4}$$

$$V_{1,n+1} - V_m \sin \omega t_{n+1} = 0, \tag{5}$$

其中$G = 1/R$。二极管建模为$G_D = 1/R_D$，其中二极管导通时$R_D = R_{\mathrm{on}}$，未导通时$R_D = R_{\mathrm{off}}$。通过分别将R_{on}和R_{off}设为足够小和足够大，可实现理想二极管特性。

注意，式 3–5 构成了一个非线性方程组（变量为$V1_{,n+1}$、$V2_{,n+1}$、$i1_{,n+1}$），因为G_D 是二极管电压（$V_1 - V_2$）的非线性函数。为求解该方程组，电路仿真器通常采用牛顿–拉夫逊（N-R）迭代法，在每个时间点进行若干次 N-R 迭代时都必须求解雅可比方程，因此计算开销较大。

从积极的一面来看，后向欧拉法具有无条件稳定性，因此从稳定性的角度而言，不会对时间步长施加上限。此外，它还能以直接简便的方式纳入复杂的半导体器件模型。

2.2 前向欧拉（FE）法

图 1 所示电路的电容方程可以使用前向欧拉法离散化为：

$$\frac{V_{2,n+1} - V_{2,n}}{h} = \frac{i_{3,n}}{C}. \tag{6}$$

由于$V2_{,n}$、$i3_{,n}$ 已知，因此只需代入求值即可得到$V2_{,n+1}$，即：

$$V_{2,n+1} = V_{2,n} + \frac{h}{C}\,i_{3,n}. \tag{7}$$

现在，将$V2_{,n+1}$ 视为已知量，通过列写电路方程，即可求出t_{n+1}时刻其余变量。所得方程例如可写为：

$$V_{1,n+1} - V_m \sin \omega\, t_{n+1} = 0, \tag{8}$$

$$i_{2,n+1} - G_D\,[V_{1,n+1} - V_{2,n+1}] = 0, \tag{9}$$

$$i_{2,n+1} - i_{3,n+1} - G\,V_{2,n+1} = 0, \tag{10}$$

一个包含三个变量$V1_{,n+1}$、$i2_{,n+1}$和$i3_{,n+1}$的三元方程组。注意，G_D 仍是一个非线性函数（$V1_{,n+1} - V2_{,n+1}$），因此情况与后向欧拉法类似。

为减少每个时间步长所需的计算量，现在将原电路替换为两个电路：一个二极管导通，另一个二极管截止，如图 2 所示。这两个电路分别

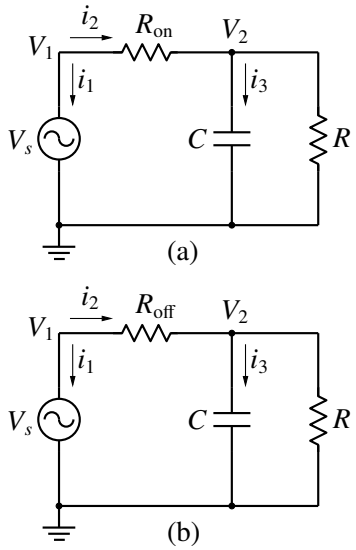

图2：图1中的电路在两种情况下的状态：(a)二极管导通，(b)二极管截止。

线性，并对应一个方程组（方程（8-10）），一种情况下为 $R_D = R_{\mathrm{on}}$，另一种情况下为 $R_D = R_{\mathrm{off}}$。

方程（8-10）可写为 $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的形式。例如，当二极管导通时，我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -G_D^{\mathrm{on}} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,n+1} \\ i_{2,n+1} \\ i_{3,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \sin\omega\, t_{n+1} \\ -G_D^{\mathrm{on}}\, V_{2,n+1} \\ G\, V_{2,n+1} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中 $G_D^{\mathrm{on}} = 1/R_{\mathrm{on}}$。请注意，方程中不涉及时间步长 h，因此$\mathbf{A}$ 矩阵与时间无关。这带来一个重要影响，即对于特定的开关配置，$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{A}^{-1}$ 只需计算一次，相较于隐式方法可显著提升速度。

在某些电路中，用R_{on} 或R_{off}替代开关可能会引发稳定性问题，因为R_{on}（较小的电阻）可能导致较小的RC型时间常数，而R_{off}（较大的电阻）则可能导致较小的L/R型时间常数。在这种情况下，仿真器不得不采用非常小的时间步长。因此，最好令$R_{\mathrm{on}} = 0$和$R_{\mathrm{off}} = \infty$，也就是用短路或开路替代开关。

在半波整流电路中，使用$R_{\mathrm{on}} = 0$会带来一个问题：电压源直接跨接在电容器两端，导致$\mathbf{A}$矩阵变为奇异。对电路稍作修改，即在电容器串联一个电阻R_1（如图3所示），即可解决此问题。电阻R_1 应取较小值（本文取10mΩ），以免改变电路的工作状态。

图3中导通和关断电路的方程组可以用不同方式书写。下文中，我们采用一种系统化的流程，这种流程也很容易扩展到其他电路。我们先在除参考节点以外的所有节点处列写基尔霍夫电流定律方程，然后列写元件方程。请注意

$$V_{C,n+1} = V_{C,n} + \frac{1}{C}\, i_{3,n} \tag{12}$$

被视为已知值。方程组可表示为

$$i_{1,n+1} + i_{2,n+1} = 0, \tag{13}$$

$$-\,i_{2,n+1} + i_{3,n+1} + i_{5,n+1} = 0, \tag{14}$$

$$-\,i_{3,n+1} + i_{4,n+1} = 0, \tag{15}$$

$$V_{1,n+1} = V_m \sin\omega\, t_{n+1}, \tag{16}$$

$$V_{2,n+1} - V_{3,n+1} = V_{C,n+1}, \tag{17}$$

$$i_{4,n+1} - G_1 V_{3,n+1} = 0, \tag{18}$$

$$i_{5,n+1} - G V_{2,n+1} = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} V_{1,n+1} - V_{2,n+1} &= 0 \quad \text{if } D \text{ is on}, \\ i_{2,n+1} &= 0 \quad \text{if } D \text{ is off}. \end{aligned} \tag{20}$$

式 13–20 可写成矩阵形式 A x = b，其中解向量 x 由 $V1,_{n+1}$、$V2,_{n+1}$、$V3,_{n+1}$、$i1,_{n+1}$、$i2,_{n+1}$、$i3,_{n+1}$、$i4,_{n+1}$ 和 $i5,_{n+1}$ 组成，而 b 包含 $V_{C,n+1}$ 和 $V_{s,n+1}$，二者均为已知值。由于电路中有一个开关，因此有两个可能的 A 矩阵：$A^{(on)}$ 和 $A^{(off)}$，分别对应二极管的导通状态和关断状态。一般而言，A 矩阵的数量为 2^N，其中 N 是电路中开关的数量。求解 A x = b 后，我们需要确保二极管的状态与计算中所用的 A 矩阵一致。例如，在半波整流器中，若使用了 $A^{(off)}$，则 $i2,_{n+1}$ 必须为正值。若不是，则需要舍弃该解，改用 $A^{(on)}$，并重新求解 A x = b。若 $A^{(on)}$ 已在先前计算（并存储），那么求解 A x = b 所需的计算量很小。

请注意，无需为所有 2^N 种开关配置预先计算$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{-1}$ 矩阵。在许多电力电子电路中，实际访问的开关配置只占很小一部分，预先计算（并存储）所有可能的$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{A}^{-1}$矩阵会浪费时间和内存。相反，应动态地计算并存储这些矩阵，即在遇到特定开关配置时再进行计算。总体流程如算法1所示。我们将这种在电路中使用显式方法的方案称为 ELEX（电气显式）方案。由于以下将要解释的原因，前向欧拉法并不是 ELEX 方案的理想选择。相反，更适合采用变步长法（例如 RKF 或 DP）。

算法1ELEX 方案

1: 初始化开关状态向量（$\mathbf{S}$）。
2: $t \leftarrow 0$
3: **当**$t < t_{\mathrm{end}}$ **时**
4: 更新源输出。
5: 更新状态变量。
6: 计算 $\mathbf{b}$
7: **如果** 为$\mathbf{A(S)}$，**则**
8: 计算$\mathbf{A(S)}$ 和 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{(S)}$。
9: **结束条件判断**
10: 求解$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$。
11: 计算$\mathbf{S}_{\mathrm{new}}$（新的开关状态）
12: **如果** $\mathbf{S} \neq \mathbf{S}_{\mathrm{new}}$ **then**
13: 选择新的$\mathbf{S}$。
14: 转到 7
15: **结束如果**
16: **结束 while**

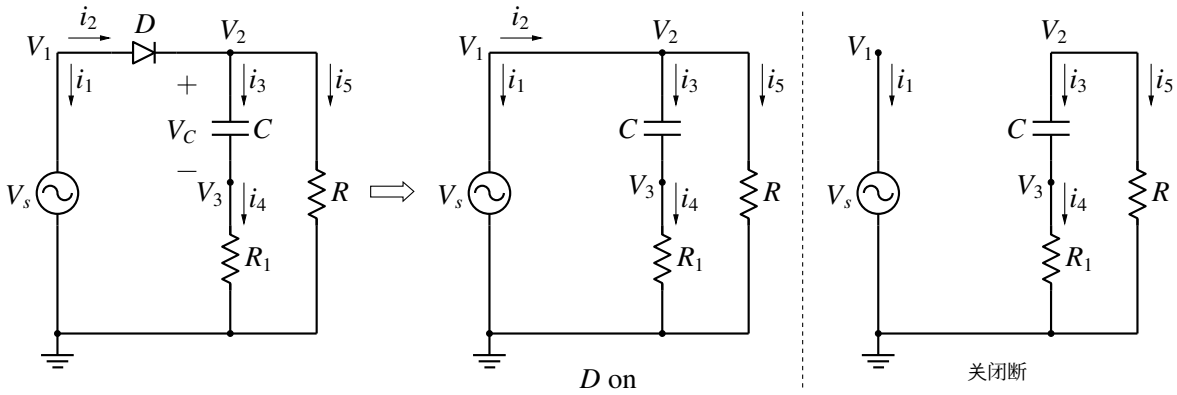

图3：在图1所示的半波整流电路中串联加入R_1，以及二极管导通或截止时的等效电路。

现在我们讨论前向欧拉法应用于图3所示电路时涉及的稳定性问题。充电时间常数和放电时间常数 τ_1 及 τ_2 分别为

$$\tau_1 = (R_1 \parallel R)\, C \simeq R_1 C = 10\,\mu\text{sec}, \tag{21}$$

$$\tau_2 = (R_1 + R)\, C \simeq R\, C = 0.2\,\text{sec}. \tag{22}$$

当时间步长h 大于 $2\,\tau$ 时，前向欧拉法会变得不稳定。显然，在充电阶段，我们需要使用小于 $2\,\tau_1$ 或 20 μsec 的 h 。由于前向欧拉法采用固定时间步长，因此整个仿真过程中都必须使用这一较小的时间步长（20 μsec），在一个周期内至少需要$T/\tau_1 = 20$ 毫秒/20μsec，即 10^3 个时间点。从精度角度来看，并不需要如此多的时间步长，因此前向欧拉法对于许多应用来说太慢了。

图4和图5展示了稳定性问题。使用h < 20 μsec 时（图4），仿真结果符合预期。使用$h = 20$ μsec 时（图5和图6），可以看到二极管电流出现振荡，这表明前向欧拉法的行为不稳定。

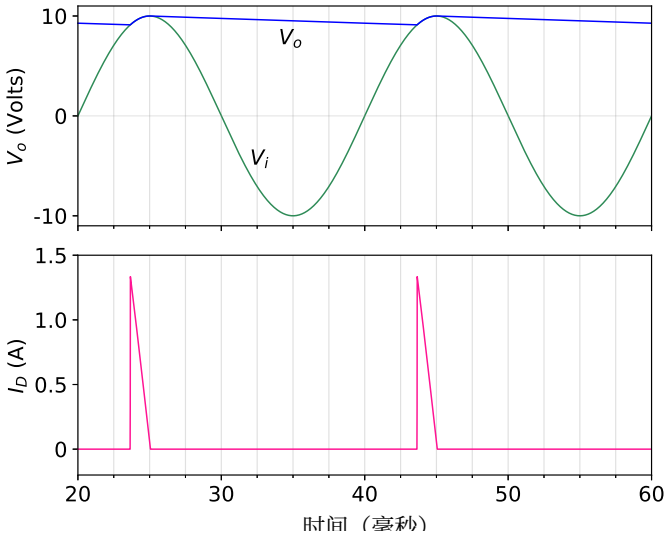

图4：使用前向欧拉法计算图3所示半波整流电路的输入和输出电压及二极管电流，时间步长为$h = 10$ μ秒。

2.3 龙格-库塔-费尔伯格（RKF）法

RKF方法是一种自适应（可变）时间步长方法，它结合使用四阶龙格－库塔方法和五阶龙格－库塔方法，以估算给定时间步长内的局部截断误差（LTE）。如果局部截断误差小于用户指定的容差，则允许下一个时间步长大于当前时间步长。另一方面，如果局部截断误差大于容差，则当前时间步长会被舍弃，并尝试使用更小的时间步长。与前向欧拉法（一次函数求值）相比，RKF方法在每个时间步长都需要更多计算（六次函数求值）。不过，其自动时间步长功能可以大幅减少仿真所需的时间点总数，同时满足局部截断误差约束，因此效率远高于前向欧拉法。

单个常微分方程（ODE）的 RKF方法$dx\,dt = f(t, x)$可描述如下。首先，计算$k_1, k2, \cdots, k_6$ as,

$$k_1 = h\, f(t_n, x_n), \tag{23}$$

$$k_2 = h\, f\left(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_{2,1}\, k_1\right), \tag{24}$$

$$k_3 = h\, f(t_n + \alpha_3 h, x_n + \sum_{j=1}^{2} \beta_{3,j}\, k_j), \tag{25}$$

$$k_4 = h\, f(t_n + \alpha_4 h, x_n + \sum_{j=1}^{3} \beta_{4,j}\, k_j), \tag{26}$$

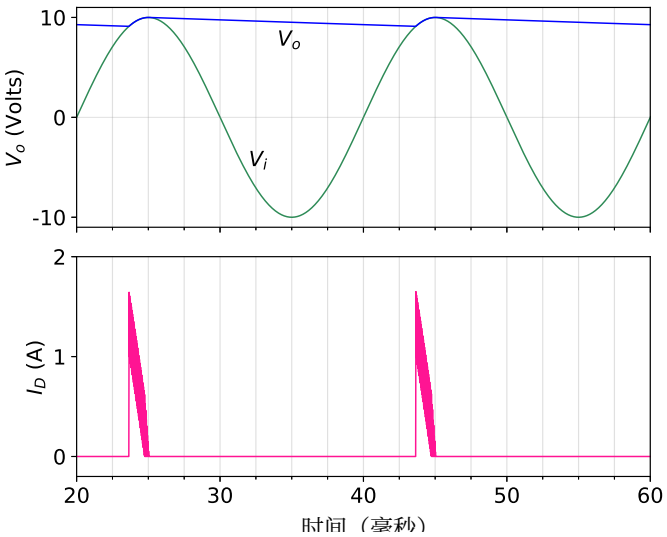

图5：对于图3所示的半波整流电路，使用时间步长$h = 20$ μsec的前向欧拉法得到的输入和输出电压及二极管电流。

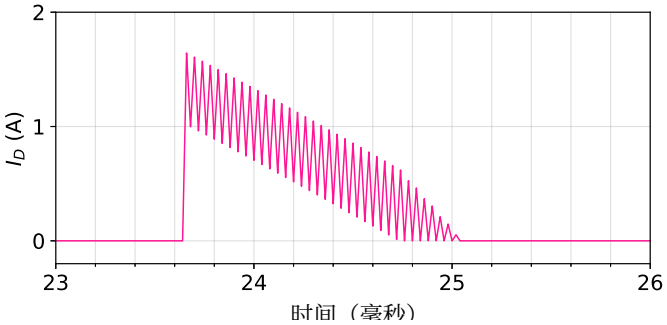

图6：对于图3所示的半波整流电路，使用时间步长$h = 20$ μsec的前向欧拉法得到的二极管电流。

$$k_5 = h\, f(t_n + \alpha_5 h, x_n + \sum_{j=1}^{4} \beta_{5,j}\, k_j), \tag{27}$$

$$k_6 = h\, f(t_n + \alpha_6 h, x_n + \sum_{j=1}^{5} \beta_{6,j}\, k_j), \tag{28}$$

其中 $\alpha_i \le 1$。x_{n+1} 的四阶和五阶估计为

$$x_{n+1}\,(4^{\text{th}}\text{ order}) = x_n + \sum_{j=1}^{5} \gamma_j^{(4)}\, k_j, \tag{29}$$

$$x_{n+1}\,(5^{\text{th}}\text{ order}) = x_n + \sum_{j=1}^{6} \gamma_j^{(5)}\, k_j. \tag{30}$$

上述方程中的常数 α, β, γ 可在 [5]中找到。四阶与五阶x_{n+1} 值之差可用于估算局部截断误差。如果局部截断误差小于容差，那么五阶x_{n+1} 值将被接受为t_{n+1}时刻常微分方程的数值解；否则，当前时间步长将被拒绝，并根据局部截断误差估算值 [5]计算修正后的h 值。

对于图3所示的半波整流器，常微分方程由电容器得出，表示为

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\, i_3 \tag{31}$$

（见图3）。将RKF方法应用于此问题的第一步是计算k_1（见公式23），即

$$k_1 = h\,\frac{1}{C}\, i_{3,n}, \tag{32}$$

其中$i3,_n$ 是在i_3 处、t_n 时的数值解，且已知。对于下一步 RKF 计算（式 24），我们按以下步骤计算i_3 的中间值（记为$i_3^{(2)}$）。

(i) Update $V_C^{(2)}$ as

$$V_C^{(2)} = V_{C,n} + \beta_{2,1}\, k_1. \tag{33}$$

(ii) 将$V_s^{(2)}$ 更新为

$$V_s^{(2)} = V_m\, \sin\omega\,(t_n + \alpha_2\, h). \tag{34}$$

(iii) 求解以下方程组，并确保用于求解方程的**A** 矩阵（二极管导通或关断对应的矩阵）与解一致。

$$i_1^{(2)} + i_2^{(2)} = 0, \tag{35}$$

$$-\,i_2^{(2)} + i_3^{(2)} + i_5^{(2)} = 0, \tag{36}$$

$$-\,i_3^{(2)} + i_4^{(2)} = 0, \tag{37}$$

$$V_1^{(2)} = V_s^{(2)} \tag{38}$$

$$V_2^{(2)} - V_3^{(2)} = V_C^{(2)}, \tag{39}$$

$$i_4^{(2)} - G_1 V_3^{(2)} = 0, \tag{40}$$

$$i_5^{(2)} - G V_2^{(2)} = 0, \tag{41}$$

$$\begin{matrix} V_1^{(2)} - V_2^{(2)} = 0 & \text{if } D \text{ is on,} \\ i_2^{(2)} = 0 & \text{if } D \text{ is off.} \end{matrix} \tag{42}$$

现在我们可以计算k_2 和$V^{(3)}{}_C$ 了

$$k_2 = h\,\frac{1}{C}\, i_3^{(2)}, \tag{43}$$

$$V_C^{(3)} = V_C^{(2)} + \beta_{3,1}\, k_1 + \beta_{3,2}\, k_2. \tag{44}$$

然后计算$V_s^{(3)}$，令其等于$V_m \sin\ \omega(t_n\ +\ \alpha_3\, h)$，求解电路方程以得到$i_3^{(3)}$，并计算$k_3$。按此方法继续，我们计算$k_1, k2, \cdots, k_6$, ，最后得到$V_{C,n+1}$ 的四阶和五阶估计（方程 29 和 30）。如果电路中有多个电容器和电感器，我们将对每个状态变量（电感电流和电容器电压）求解方程 33，更新源值，然后求解电气方程。

图 7 显示了使用 RKF方法得到的结果。RKF方法所采用的时间点以十字标记显示在$V_i(t)$图中。可以看出，在充电阶段（时间常数较小），RKF方法采用较小的时间步长。在放电阶段，时间常数较大，RKF方法采用大得多的时间步长——本例中受用户指定的最大时间步长 0.5毫秒限制——因此，与前向欧拉法相比，总时间点数量大幅减少。

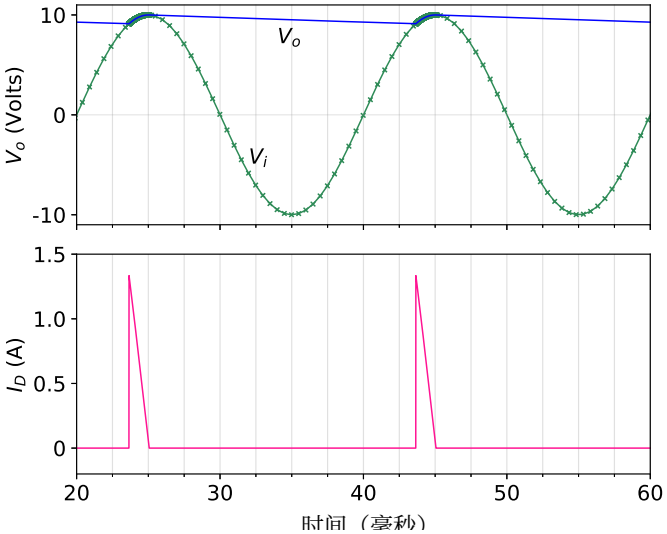

图 7：使用 RKF方法对图3所示半波整流电路进行仿真得到的输入和输出电压以及二极管电流。仿真时间点以十字标记显示在V_i 图中。

半波整流器的示例揭示了在电路中使用显式方法的根本局限，即由于稳定性约束，必须采用较小的时间步长。然而，在一些值得关注的电力电子电路中，ELEX 方案基本上通过完全避免较小的时间常数，绕过了稳定性问题；在这种情况下，时间步长受精度而非稳定性的限制。

3 串联开关

考虑图 8 (a) 所示的受控开关，例如理想化的 MOS 晶体管。在 ELEX 方案中，我们

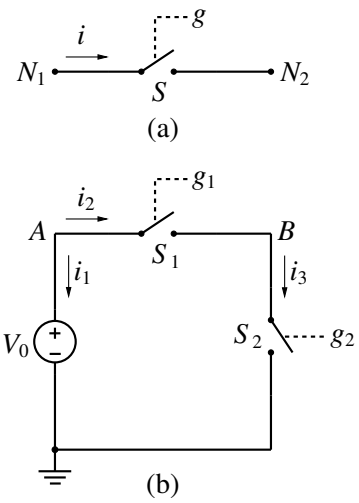

图 8：（a）受控开关的示意图；（b）由两个受控开关串联组成的电路。

可以将开关方程写为

$$\begin{array}{ll} V_{N1} - V_{N2} = 0 & \text{if } D \text{ is on,} \\ i = 0 & \text{if } D \text{ is off.} \end{array} \tag{45}$$

在大多数情况下，上述方法都能很好地工作。然而，对于某些特定情况，这个简单模型可能会失效。例如，考虑图 8(b) 所示的电路，其中 V_0 是一个直流（已知）电压。如果 $g_1 = 1$ 和 $g_2 = 0$，我们预计 $V_B = V_0$。如果 $g_1 = 0$ 和 $g_2 = 1$，我们预计 $V_B = 0$（见图 9）。当 g_1 和 g_2 均为零时，我们预计施加电压 V_0 会在两个开关之间平均分配，因此 V_B 应为 5 V，如图 9 所示。现在让我们将 ELEX 方案应用于该电路。

我们再次以系统的方式写出方程，先写出基尔霍夫电流定律方程，随后写出元件方程，得到

$$i_1 + i_2 = 0, \tag{46}$$

$$i_2 - i_3 = 0, \tag{47}$$

$$V_A = V_0, \tag{48}$$

$$\begin{array}{ll} V_A - V_B = 0 & \text{if } g_1 = 1, \\ i_2 = 0 & \text{if } g_1 = 0, \end{array} \tag{49}$$

$$\begin{array}{ll} V_B = 0 & \text{if } g_2 = 1, \\ i_3 = 0 & \text{if } g_2 = 0, \end{array} \tag{50}$$

其中，我们已将式 45 应用于两个开关中的每一个。

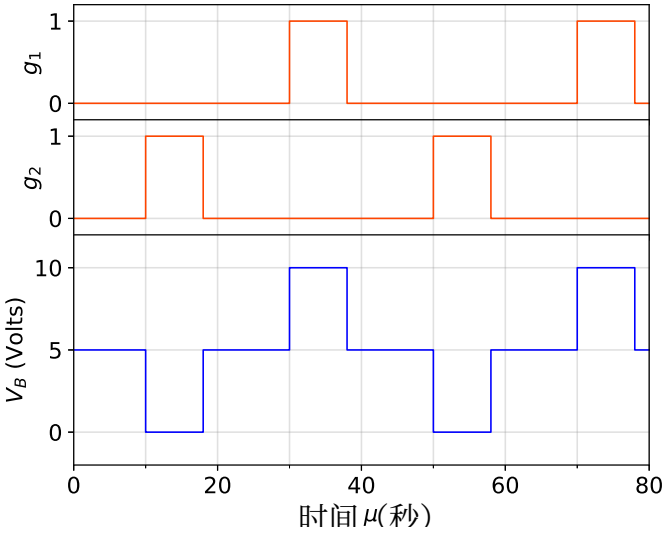

图 9：当图 8(b) 中的电路采用 $V_0 = 10\,\mathrm{V}$ 时，预期的示例波形。

如果g_1 和g_2 中的一个为高电平，方程 46-50 会给出预期结果。对于$g_1 = g_2 = 0$的情况，不存在解，因为节点B变成了孤立节点。换句话说，如果将方程写成$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$的形式，那么$\mathbf{A}$ 最终会变成奇异矩阵。尽管这种情况在电力电子电路中很少见，但通用仿真程序必须能够适当地处理这种情况。

当 S_1 和 S_2 均处于关断状态时，我们预计 V_0 会在它们之间均匀分压，这表明在关断状态下，应将开关建模为一个较大的电阻 R_{off} 。然而，在 ELEX 方案中，我们希望避免这种表示方式，因为它可能产生较小的 L/R 型时间常数。我们需要的是一种既能让电压在开关之间分配，又无需用 R_{off} 替代开关的方法。实现这两个相互冲突目标的一种方法如下。

当栅极电压较高时，我们继续使用理想开关方程对开关建模

$$V_{N1} - V_{N2} = 0. \tag{51}$$

当栅极电压较低时，我们使用图 10 所示的模型，其中 $G' = 1/R_{\text{off}}$ 是一个较小的电导。

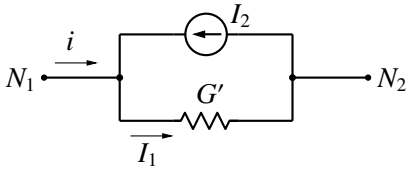

图 10：在 ELEX 方案中实现的关断状态受控开关等效电路。

电流I_2 由下式给出：

$$I_2 = \frac{k-1}{k_{\max}-1}\,G'\,(V_{N1} - V_{N2}), \tag{52}$$

其中 k 取值为 1、2、 $\cdots$、$k_{\max}$。关断状态下的开关电流i随后表示为

$$i - G'\,(V_{N1} - V_{N2}) = -\frac{k-1}{k_{\max}-1}\,G'\,(V_{N1} - V_{N2}). \tag{53}$$

当$k = 1$时，方程 53 相当于移除图 10 中的电流源I_2 ，仅保留G'。针对这一条件求解电路方程后，电压便会得到适当的赋值。对于图 8(b)的示例，我们将得到$V_B = V_0/2$。当$k = k_{\max}$时，方程 53 化简为$i = 0$，即关断状态下的理想开关方程，因为I_1 和I_2 变得相等。因此，通过将k 从 1 增加到$k_{\max}$，我们无需用R_{off}替换开关，就实现了建立适当节点电压的目标。对于图 8(b)的电路，$k_{\max} = 2$ 已经足够。至于对于其他某些电路是否需要$k_{\max}$的更大值，还有待观察。

对于给定的k值，方程 53 通过迭代方式求解，将右侧（RHS）的V_{N1}、V_{N2} 视为来自先前计算所得解的已知值。右侧部分成为$\mathbf{b}$ 的一部分，包含在$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$这一完整电路方程组中。求解$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$后，我们得到$V_{N1}$、$V_{N2}$的修订值，并利用这些值再次计算方程 53 的右侧，如此反复，直到收敛。对于图 8(b)的电路，两次迭代即可。

显然，上述过程会带来额外的计算成本，因此只有在理想开关模型（式 45）导致矩阵奇异时才应使用。在大多数电力电子电路中，理想开关模型似乎都能正常工作。

4 升压变换器

考虑图 11 所示的升压变换器电路。对于图中给定的参数值，稳态下的电感电流是不连续的，如图 12 所示。本节旨在说明电感电流的不连续特性所带来的挑战，并提出一种应对方法。

ELEX-RKF 方法用于求得t_{n+1} –处的解，假设与往常一样，t_n 处的解已可用–，其起始步骤为

$$k_1^{(C)} = h\,\frac{1}{C}\,i_{5,n}, \tag{54}$$

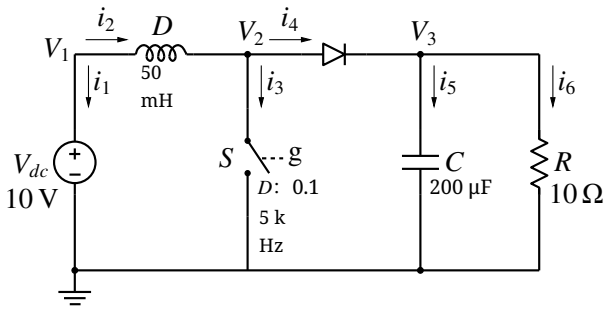

图 11：升压变换器电路。

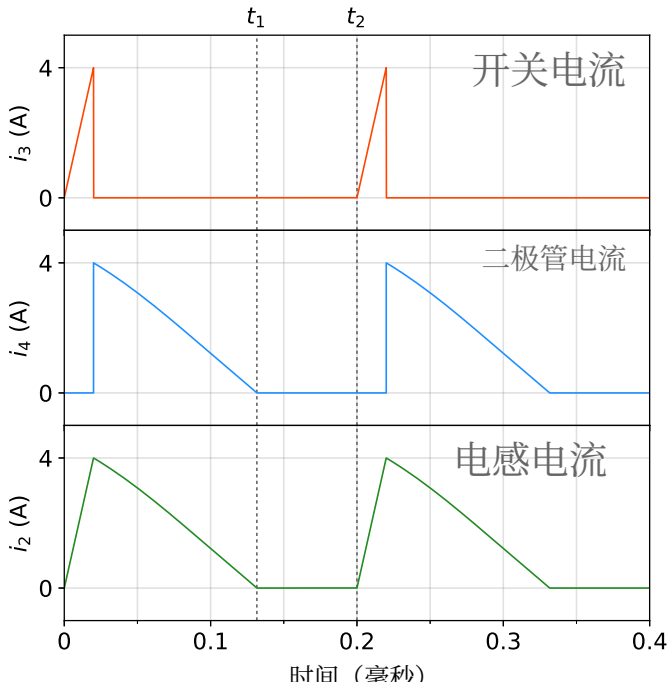

图 12：图 11 所示升压变换器电路的稳态波形。

$$k_1^{(L)} = h\,\frac{1}{L}\,V_{L,n}, \tag{55}$$

分别对应电容器和电感。该电路的电感电压为V_L $V_L = V_1 - V_2$。

接下来，我们得到$V^{(2)}{}_C$ 和 $i^{(2)}{}_L$，即V_C 和i_L的第 2 阶段更新，如下：

$$V_C^{(2)} = V_{C,n} + \beta_{2,1}\,k_1^{(C)}, \tag{56}$$

$$i_L^{(2)} = i_{L,n} + \beta_{2,1}\,k_1^{(L)}, \tag{57}$$

更新 MOS 开关的栅极电压值，然后求解以下电路方程

$$i_1^{(2)} + i_2^{(2)} = 0, \tag{58}$$

$$i_2^{(2)} - i_3^{(2)} - i_4^{(2)} = 0, \tag{59}$$

$$i_4^{(2)} - i_5^{(2)} - i_6^{(2)} = 0, \tag{60}$$

$$V_1^{(2)} = V_{dc}, \tag{61}$$

$$i_2^{(2)} = i_L^{(2)}, \tag{62}$$

$$V_3^{(2)} = V_C^{(2)}, \tag{63}$$

$$i_6^{(2)} - G\,V_3^{(2)} = 0, \tag{64}$$

$$i_4^{(2)} - i_d^{(2)} = 0, \tag{65}$$

$$i_3^{(2)} - i_{sw}^{(2)} = 0, \tag{66}$$

$$\begin{aligned} V_2^{(2)} - V_3^{(2)} &= V_{\text{on}} \quad \text{if } D \text{ is on,} \\ i_d^{(2)} &= 0 \quad\;\; \text{if } D \text{ is off,} \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} V_2^{(2)} &= 0 \quad \text{if } S \text{ is on,} \\ i_{sw}^{(2)} &= 0 \quad \text{if } S \text{ is off.} \end{aligned} \tag{68}$$

得到 RKF 过程第 2 阶段的解后，我们接着计算$k_2^{(C)}$、$k_2^{(L)}$，求解电路方程以得到第 3 阶段的解，依此类推。从某种意义上说，这是对我们在第 2.3 节中看到的 ELEX-RKF方案的直接扩展。不过，有一项重大变化是必需的。

在图 12 中t_1 到 t_2 的时间间隔内，S 和 D均关断，即$i_3 = i_4 = 0$。在此条件下，由方程 58-68 描述的$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$问题无解，因为$\mathbf{A}$ 变为奇异。直观来说，我们预期会出现这种情况，因为在没有电流通路时，仍试图为电感电流赋值。即使是稳态下处于连续导通模式的升压变换器，在暂态阶段（也就是电路达到稳态之前）也可能出现上述情况（D 和S 同时关断）。

奇异矩阵问题可以通过在R_P 与L 并联一个电阻来解决，如图 13 所示。R_P 值应选择为足够

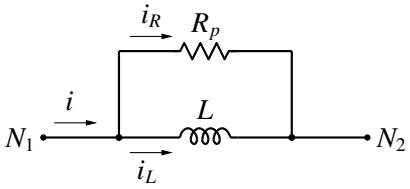

图1 3：在电感两端并联一个电阻以解决奇异矩阵问题（见正文）。

取一个较大的值（例如 1 MΩ），使其产生的电流可以忽略不计，从而基本不影响电路的解。加入R_P 后，电感电流方程（方程 62）将替换为

$$i_2^{(2)} - \left(V_1^{(2)} - V_2^{(2)}\right)/R_p = i_L^{(2)}, \tag{69}$$

即使图 11 中的i_3和i_4 变为零，电路矩阵**A** 仍然是非奇异的。

在时间t_1 （见图 12）二极管的关断过程需要谨慎处理，原因如下。ELEX-RKF方案中的电感电流会在 RKF过程中分多个阶段进行更新，第一步是

$$i_L^{(2)} = i_{L,n} + \beta_{2,1}\frac{h}{L}V_{L,n}, \tag{70}$$

其中，$\mathrm{i}_{L,n}$ 和 $\mathrm{V}_{L,n}$ 来自在 $\mathrm{t} = \mathrm{t}_n$处获得的解。必须尽可能准确地捕捉二极管关断点，即在进入二极管的关断状态之前，二极管电流应足够小。ELEX 方案使用二分搜索实现这一点——与 PLECS [7] 程序中一样——不断缩小精确关断点周围的区间，直到其足够小，例如$\Delta\mathrm{t} = 10^{-12}$ 秒。达到这一条件后，我们便有两个仿真时间点，一个位于关断事件之前，另一个位于之后，两者之间的间隔为 $\Delta\mathrm{t}$。将这两个点分别记为 $\mathrm{t}'_{\mathrm{on}}$ 和 $\mathrm{t}'_{\mathrm{off}}$。在 $\mathrm{t}'_{\mathrm{on}}$处，二极管仍处于导通状态，但 i_d （图 11 中的 i_4 ）很小，例如为 10^{-12} A或更小。在 $\mathrm{t}'_{\mathrm{off}}$处，二极管已关断，$\mathrm{i}_d$ 恰好为零，并且根据基尔霍夫电流定律，i_2 （图 11 中的 i_2 ）也为零，因为 MOS 开关已经关断。图 13 中 $\mathrm{t} = \mathrm{t}'_{\mathrm{off}}$ 时的电流 i_L 和 i_R 恰好相互抵消。这些电流分别很小但不为零。考虑到这种情况，为确保 i_L 迅速趋于零，我们可以使用

$$i_L^{(2)} = i_{2,n} + \beta_{2,1}\frac{h}{L}V_{L,n}, \tag{71}$$

而非公式70。注意，在公式71右侧，$i_{L,n}$ 已替换为$i2,_n$ 。

经过上述修改，ELEX-RKF方案能够准确处理图 11 所示的升压变换器电路。我们发现，如果t'_{on}时的二极管电流不够小，电感电流就不会降至零。当二极管进入关断状态时，会出现二极管和 MOS 开关均关断的情况，此时$i_L = -i_R$ （图13）。换言之，电流在L-R_P 回路中循环。这种情况极为不利，因为L-R_P 回路的时间常数L/R_P 很小，导致 RKF过程必须采用极小的时间步长，使仿真速度慢到无法实际使用。

在一般情况下，L-R_P 组合还有另一种用途。如果较大的电感电流被迫突然降为零，电流就会流经R_P，导致电感两端出现不切实际的巨大电压降。仿真器可以监测这一电压降，并发出适当的警告或错误消息。

5 闭环电路

在闭环电力电子电路中，还涉及与控制模块相关的其他变量。通常，电路会产生一个或多个反馈量（电流或电压），作为控制模块的输入，如图14所示。

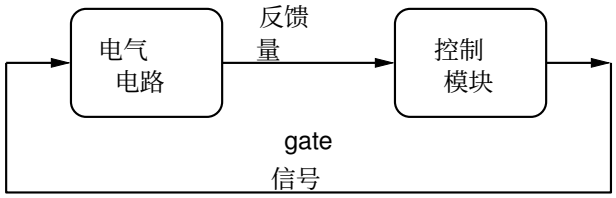

图14：闭环电力电子电路的典型结构。

控制模块继而生成电路所需的门极信号。通常，控制模块比电气模块更容易处理，因为它只涉及“流图”，而不涉及需要满足基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律的网络。在 ELEX-RKF 方案中，我们将使用显式方法处理控制模块，这需要按照流图的指示，对控制模块中的元件进行多次“遍历”（见 [9], [10]）。每次遍历时，只处理输入值已更新的元件。下面我们将通过两个示例说明如何将 ELEX-RKF 方案应用于闭环电路。

5.1 电流控制型两电平电压源变流器

电流控制型两电平电压源变流器的电路图及其控制模块如图 15 所示。我们已经了解了在 ELEX-RKF 方案中如何处理电压源、MOS 开关、电阻器和电感器。下面来看看如何处理该电路中的两个新电气元件，即电流表和电压表。电流表类似于一个 $V_{dc} = 0$ V 的直流电压源，满足以下方程：

$$V_{P2} - V_{P3} = 0. \tag{72}$$

$$i_9 - i_{fb} = 0, \tag{73}$$

电压表就像一个$I_{dc} = 0$ A 的直流电流源，满足方程，

$$i_{11} = 0, \tag{74}$$

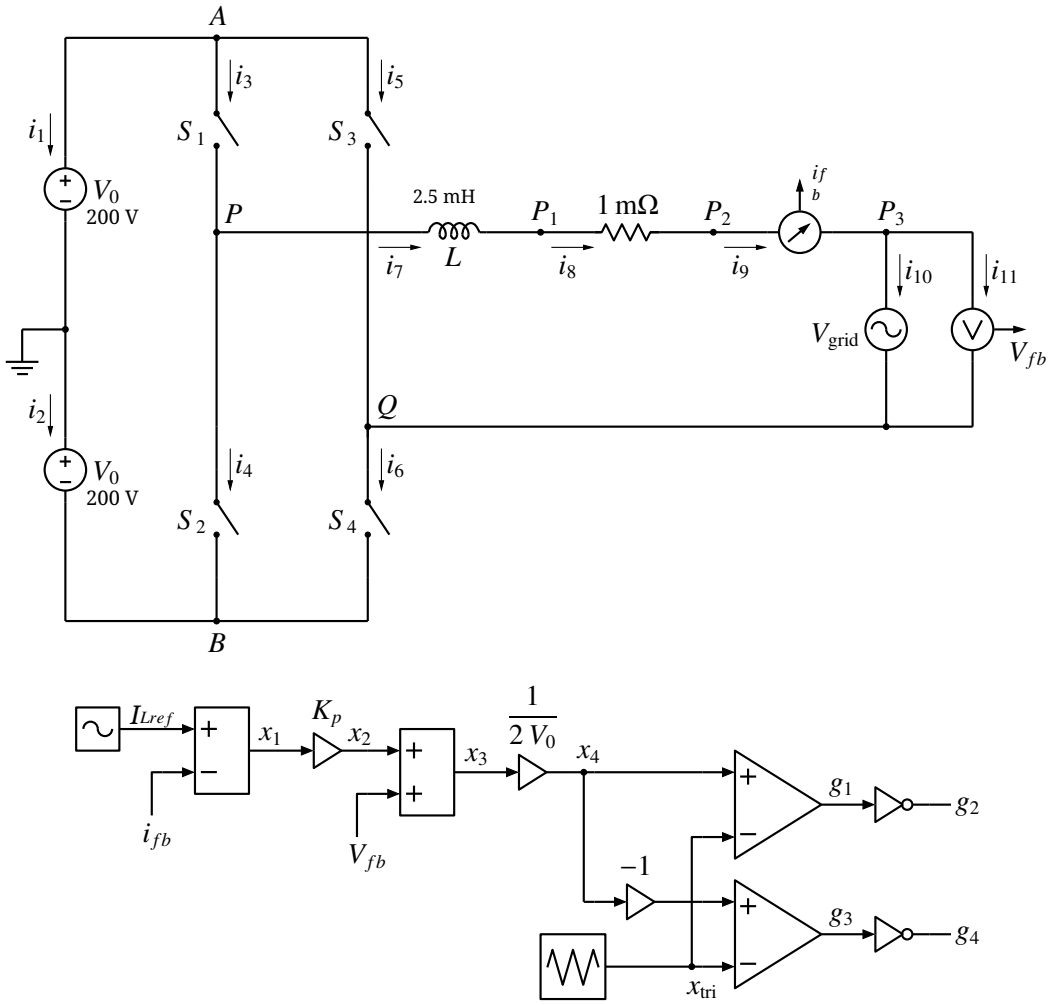

图15：电流控制型两电平电压源变流器的原理图。参考电流由$I^{Lref} = I_m \sin(\omega t + \phi)$给出，其中$I_m = 2.5\sqrt{2}$ A，$f = 50$ Hz，$\phi = -\pi/6$。三角波关于中心对称，最小值和最大值分别为 −1 和1，且$f_{\text{tri}} = 20$ kHz。K_P 由$K_P = \omega_{\text{tri}} L/10$给出。

$$V_{P3} - V_Q - V_{fb} = 0. \tag{75}$$

元件方程与基尔霍夫电流定律方程共同构成电气方程组。正如我们在第4节中所见，该方程组可写成$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$的形式。请注意，反馈变量$i_{fb}$和$V_{fb}$也包含在$\mathbf{x}$中。

在 RKF 过程的每个阶段，我们都会求解电气方程，并得到i_{fb}、V_{fb}。随后更新“控制”变量I^{Lref}、x_{tri}、x_1, x_2, x_3, x_4，，最后更新从g_1 到g_4的门极信号。在此示例中，控制模块不涉及任何状态变量。

控制变量按如下方式更新。首先，我们为I^{Lref}和x_{tri}赋予适当的值，以处理源元件。随后更新其余控制变量，方式如下

$$x_1 = I_{Lref} - i_{fb}, \tag{76}$$

$$x_2 = K_p\, x_1, \tag{77}$$

$$x_3 = x_2 - V_{fb}, \tag{78}$$

$$x_4 = \frac{1}{2\,V_0}\, x_3. \tag{79}$$

将x_4 或 $-x_4$ 与x_{tri}进行比较，即可得到门极信号g_1 至g_4 。

为准确解析门极信号波形，通过在比较器预期交越点前后添加额外时间点，限制仿真器时间步长，详情见[11]。图 16 展示了$i_{fb}(t)$的仿真结果，以及参考电流$I^{Lref}(t)$。图 17 以放大比例展示了这两个电流。

当比较器交越时间点未得到精确处理时（其他仿真参数均相同），所得的$i_{fb}(t)$仿真结果如图 18 所示。通过比较图 16 和图 18，我们可以清楚地看到，仿真精度

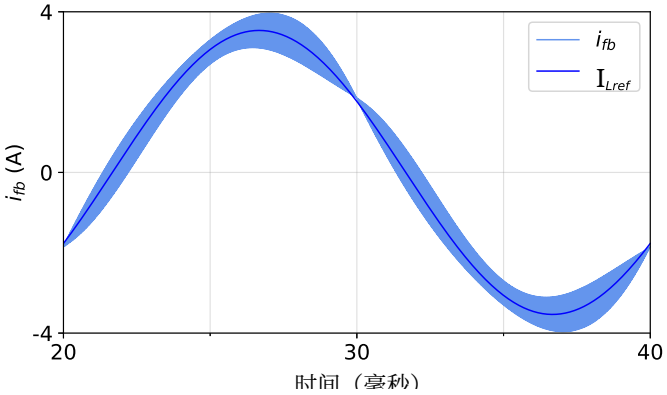

图1 6：电流控制型两电平电压源变流器（图15）的 ELEX-RKF 结果。

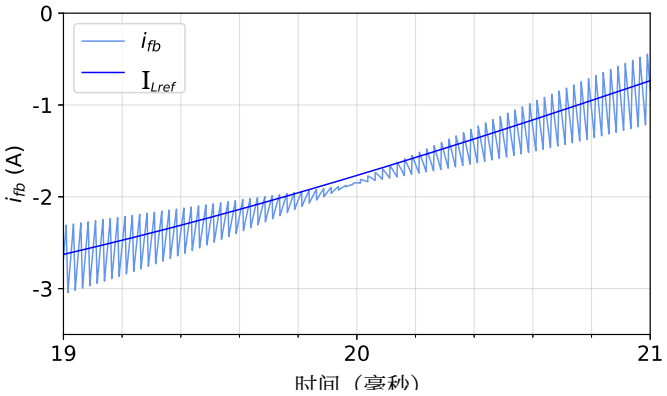

图17：电流控制型两电平电压源变流器（图15）的 ELEX-RKF 结果（放大显示）。

会受到比较器交越处理是否正确的显著影响。

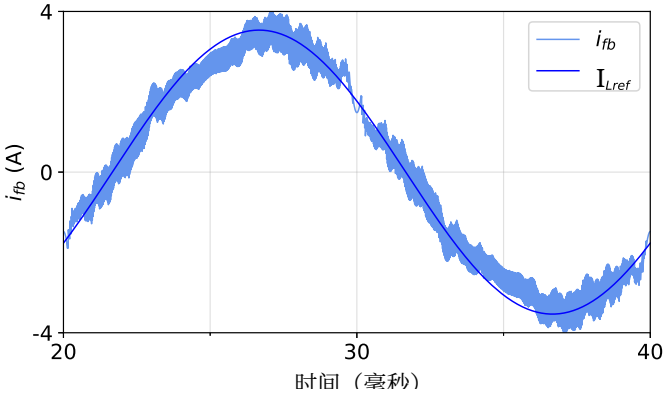

图18：当未准确处理比较器交越点时，电流控制型两电平电压源变流器（图15）的 ELEX-RKF 结果。

5.2 电压控制型降压直流-直流变换器

图19显示了一个电压控制型降压直流-直流变换器，其中电压参考值V_{ref} 在$t_{\text{step}} = 10$ 毫秒时从12 V变为 15 V。滤波器的传递函数为

$$H(s) = K_C \frac{1 + s/\omega_z}{1 + s/\omega_p}, \tag{80}$$

其中$K_C = 4.551 \times 10^3$，$\omega_z = 6.492 \times 10^3$ 弧度/秒，且 $\omega_p = 6.081 \times 10^5$ 弧度/秒。为使用 ELEX-RKF 方法仿真该电路，我们将$H(s)$改写为

$$H(s) = K_C \left[(\omega_p/\omega_z) + \frac{K}{1 + s/\omega_p} \right], \tag{81}$$

其中 $K = (1 - \omega_p/\omega_z)$。现在可以按照图 20 所示实现控制模块。

与前一个示例一样，在 RKF方法的每个阶段，我们先求解电气方程（$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$），然后更新控制模块变量，再进入下一个 RKF 阶段。控制模块变量的处理方式是先更新两个积分器输出。例如，在 RKF 第 2 阶段，我们有

$$x_4^{(2)} = x_{4,n} + h\beta_{2,1}\, x_{3,n}, \tag{82}$$

$$x_9^{(2)} = x_{9,n} + h\beta_{2,1}\, x_{8,n}, \tag{83}$$

并将 $x_9^{(2)}$ 限制为 $0 \le x_9^{(2)} \le 1$。接下来，我们更新 $(t_n + \alpha_2 h)$ 处的 $V^{(2)}$ ref 和 $x^{(2)}$ tri（锯齿波）源值，然后计算其余控制变量，如下：

$$x_1^{(2)} = V_{\text{ref}}^{(2)} - V_{fb}^{(2)}, \tag{84}$$

$$x_5^{(2)} = \omega_p\, x_4^{(2)}, \tag{85}$$

$$\begin{aligned} g^{(2)} &= 1 \quad \text{if } x_9^{(2)} > x_{\text{tri}}, \\ g^{(2)} &= 0 \quad \text{otherwise}, \end{aligned} \tag{86}$$

$$x_2^{(2)} = K\,\omega_p x_1^{(2)}, \tag{87}$$

$$x_6^{(2)} = \frac{\omega_p}{\omega_z}\, x_1^{(2)} \tag{88}$$

$$x_3^{(2)} = x_2^{(2)} - x_5^{(2)}, \tag{89}$$

$$x_7^{(2)} = x_6^{(2)} + x_4^{(2)}, \tag{90}$$

$$x_8^{(2)} = K_C\, x_7^{(2)}. \tag{91}$$

图 21 显示了$V_{\text{ref}}(t)$ 和$V_{fb}(t)$，图 22 则显示了V_{ref} 在$t = t^{\text{step}}$时从 12 V 变为 15 V 后控制器产生的门极脉冲。

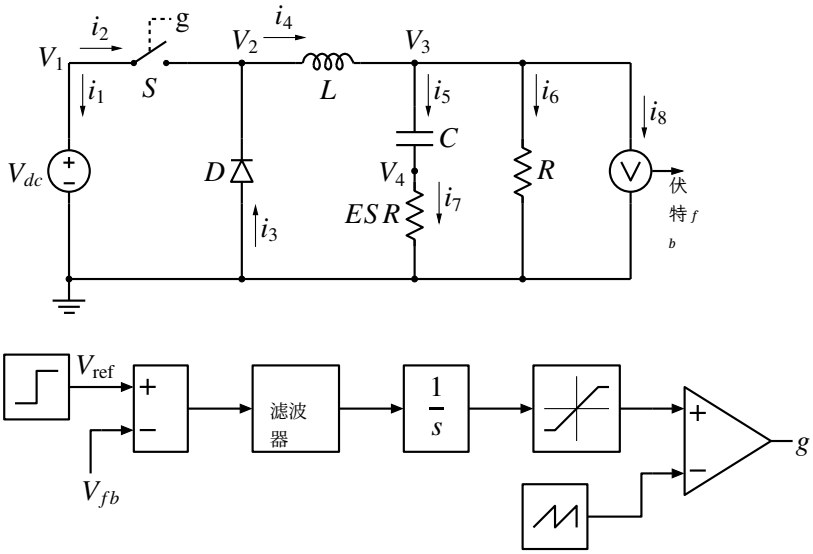

图19：降压变换器电路和控制模块。电路参数为 $V_{dc}=25\,\text{V}$、$C=500\,\mu\text{F}$、$L=24\,\mu\text{H}$、$R=4\,\Omega$、$ESR=0.08\,\Omega$。锯齿波的最小值和最大值分别为0和1，频率为400 kHz。

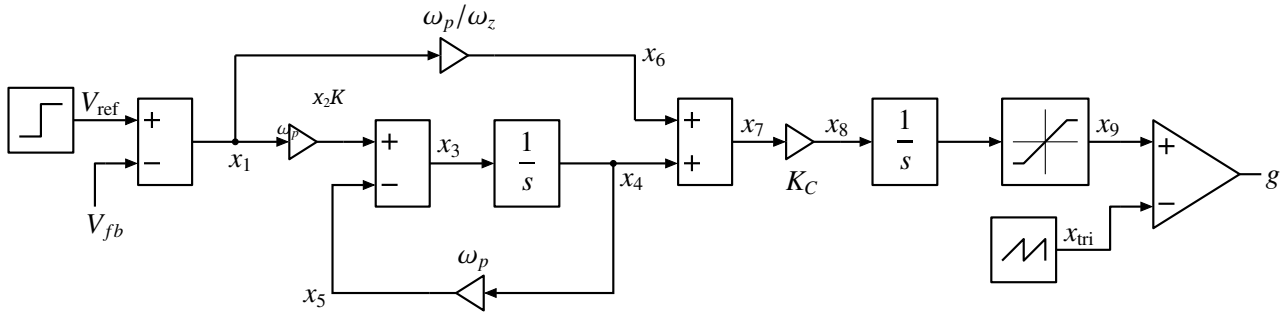

图20：ELEX-RKF i　图 19 所示电压控制降压变换器的控制模块实现。

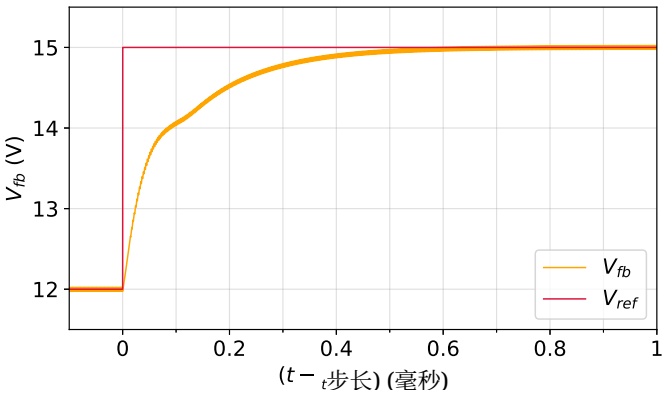

图21：采用ELEX-RKF方案得到的图19所示电压控制降压变换器的$V_{fb}(t)$曲线。

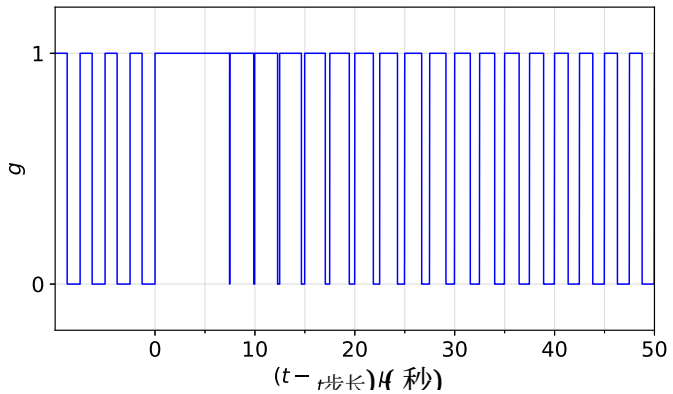

图22：采用ELEX-RKF方案得到的图19所示电压控制降压变换器的门极信号曲线。

6 结论与未来工作

总之，我们提出了一种名为 ELEX-RKF 的方法，用于采用显式方法，尤其是

RKF方法——用于仿真将开关视为理想开关的电力电子电路。文中解释了与隐式方案相比，ELEX-RKF方案具有更高仿真速度的原因，并指出了实现ELEX-RKF方案时遇到的若干挑战。通过适当的示例对这些问题进行了说明，同时介绍了解决这些问题的技术。文中还给出了使用ELEX-RKF方案对几种具有代表性的电力电子电路进行仿真所获得的结果。

计划开展以下后续工作。

1. 将在开源仿真软件包GSEIM [12], [13]中实现ELEX-RKF方案。目前，GSEIM仅允许对电路使用隐式方法，并采用MNA进行电路方程构造。加入ELEX-RKF选项将使GSEIM更加灵活，尤其适用于使用隐式方法需要耗费大量时间的电路。

2. PLECS [7] 使用Dormand-Prince（DP）4-5阶对求解常微分方程。DP方法的实现与RKF方法在概念上非常相似。预计GSEIM将允许用户选择ELEX-RKF和ELEX-DP选项。

3. 在本研究中，我们没有将 ELEX-RKF 方案的仿真时间与隐式方法进行比较。未来，我们计划使用 GSEIM 对典型电力电子电路进行此类比较，从而帮助用户有依据地选择解法。

参考文献

[1] P. Nenzi，“NGSPICE 电路仿真器版本 26，2014。”

[2] PSIM。 [在线]。网址：https://powersimtech.com/products/psim/capabilities-applications/

[3] PSCAD。 [在线]。网址：https://www.pscad.com/

[4] M.B.Patil, V.Ramanarayanan,V.T.Ranganathan,电力电子电路仿真。新德里：Narosa，2009。[5] R.L. Burden 和 J.D. Faires，数值分析。新加坡：Thomson，2001。

[6]Dormand-Prince方法。[在线]。可访问：https://en.wikipedia.org/wiki/Dormand%E2%80%93Prince method

[7]PLECS 4.6。 [在线]。网址：https://www.plexim.com/products/plecs

[8] W.J. McCalla，《计算机辅助电路仿真基础》。波士顿：Kluwer Academic Publishers，1987。

[9]M.B. Patil。《SEQUEL 用户手册：第 1 部分》。[在线]。网址：http://www.ee.iitb.ac.in/~sequel

[10] GSEIM 用户手册。 [在线]。网址：https: //gseim.github.io/build/html/index.html

[11] M. B. Patil、R. D. Korgaonkar 和 K. Appaiah，“GSEIM：一种支持显式和隐式方法的通用仿真器”，*S¯adhan¯a*，第 46 卷，第 4 期，第 1–13 页，2021 年。

[12] M.B. Patil、V.V.S. Pavan Kumar Hari、Ruchita D. Korgaonkar 和 Kumar Appaiah，“用于电力电子教育的开源仿真软件包”，网址：https://arxiv.org/abs/2204.12924。

[13]GSEIM。 [在线]。网址：https://github.com/gseim/gseim