arXiv:2301.04600v1 [math.DG] 11 Jan 2023

非紧致 RCD(0,N) 空间的最大第一贝蒂数刚性

Zhu Ye*

首都师范大学数学系

摘要

设 $(M,d,\mathfrak{m})$ 是一个非紧致 RCD(0,N) 空间，满足 $N\in\mathbb{N}_+$ 且 $\mathrm{supp}\mathfrak{m}=M$。我们证明，若 M的第一贝蒂数等于 $N-1$，则 $(M,d,\mathfrak{m})$ 要么是一个具有灵魂 T^{N-1}的平坦黎曼 N流形，要么是度量乘积$[0,\infty)\times T^{N-1}$；两者的测度均为黎曼体积的常数倍，其中 T^{N-1} 是一个平坦环面。

1 引言

本文中始终令 $K\in\mathbb{R}$和 $N\in[1,\infty)$。RCD(K,N) 空间或 RCD$^*(K,N)$ 空间（[16],[17],[12],[4],[2]）都是黎曼流形在综合几何框架下的对应物，其里奇曲率下界为 K，维数上界为 N。许多适用于里奇曲率有下界的流形的经典结果，在综合几何框架下仍然成立。这里列出其中一些将在本文中用到的结果。在 [9], ，Gigli 在 RCD$(0,N)$ 空间上证明了分裂定理。在 [15], ，Mondino-Wei 证明了 RCD$^*(K,N)$ 空间的万有覆盖存在。该万有覆盖具有自然的 RCD$^*(K,N)$ 结构，使得覆盖投影是局部度量测度等距。最近，在[18], ，Wang 基于 [15], 的结果证明了 RCD$^*(K,N)$ 空间是半局部单连通的，因此其万有覆盖是单连通的。在 [6], ，Deng 证明了 RCD(K,N) 空间是非分支的。

*部分受国家自然科学基金 [11821101]和北京自然科学基金 [Z19003]资助。电子邮箱: 2210501006@cnu.edu.cn。

本文的主要目的是将 [20] 中的以下结果推广到$\mathrm{RCD}(0,N)$空间：

定理 1。 若 M 是一个开黎曼 n 维流形，且 $Ric_M \geq 0$，则 $b_1(M) \leq n-1$，且等号成立当且仅当 M 是一个具有灵魂 T^{n-1} 的平坦流形。

关于定理 [20] 的背景介绍，请参见 1。

在本文中，对于 $\mathrm{CD}^*(K,N)$ 空间 $(X,d,\mathfrak{m})$，我们总是假设 $\mathrm{supp}\mathfrak{m}=X$。这并非限制性条件，因为若 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是 $\mathrm{CD}^*(K,N)$，则 $(\mathrm{supp}\mathfrak{m},d,\mathfrak{m})$ 也是 $\mathrm{CD}^*(K,N)$。

以下是本文的主要结果：

定理 2。 设 $N\geq 2$，且 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个非紧致 $RCD(0,N)$ 空间。那么第一贝蒂数 $b_1(X) \leq [N]-1$。若 $N\in\mathbb{N}_+$，则等号成立当且仅当 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个带有灵魂 T^{N-1} 的平坦 N 维流形，或是 $[0,\infty)\times T^{N-1}$，且两者的 $\mathfrak{m}$ 都是勒贝格测度的倍数。

注 *1.* 上述结果是最优的，因为当 $N\notin\mathbb{N}_+$时，度量测度意义下的最大第一贝蒂数刚性不成立。事实上，对于每个 $h>0$，空间 $([0,\infty),d,V_h\mathcal{L}^1)$ 满足 $V_h(x)=f^h(x)$ 和 $f(x):[0,\infty)\to(0,2)$ 凸，因此是 $RCD(0,h+1)$ 空间，其中 d 是欧几里得距离，$\mathcal{L}^1$ 是勒贝格测度（参见 [7] 命题 *3.21*）。因此，对于每个 $0<h<N-[N]$，$([0,\infty),d,V_h\mathcal{L}^1)$ 与 $T^{[N]-1}$ 的乘积空间配备欧几里得距离和勒贝格测度后，都是 $RCD(0,N)$ 空间（关于 $RCD(0,N)$ 空间的相关张量化性质，参见 [4] 定理 *4.1* 和 [1]定理 *7.6*）。

作者猜想，在这种情况下度量刚性仍然成立，即(X,d)同构于一个带有灵魂 T^{N-1}的平坦 N 流形，或者 $[0,\infty)\times T^{N-1}$ 若 $(X,d,\mathfrak{m})$是一个非紧致 $RCD(0,N)$空间，且 $b_1(X)=[N]-1$。

由 [15]和 [18]可知，对于紧致 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间（$M,d,\mathfrak{m}$），第一贝蒂数 $b_1(M)\leq[N]$，且当且仅当（$M,d,\mathfrak{m}$）是一个 $T^{[N]}$且其 $\mathfrak{m}$ 为勒贝格测度的倍数时，等号成立。这推广了 Bochner 的经典定理。关于紧致 RCD 空间第一贝蒂数的更多结果，参见[14]。

正如 [20]，我们对定理 2 的方法是估计覆盖群作用的轨道增长。

定义*1.* *([20])* 用 $\#(A)$ 表示集合 A 中元素的个数。设 (X,d) 为度量空间，$Isom(X)$ 为其等距变换群。设 Γ 为 $Isom(X)$ 的子群。对于每个 $x\in X$，令 $D^\Gamma(x,r)=\{g\in\Gamma: d(x,g(x))\leq r\}$。

给定 $p \in [0,\infty)$，如果且仅如果 Γ 相对于 x 具有阶为$\geq p$ $(\leq p)$的多项式轨道增长，

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x,r))}{r^p} > 0 \ \ (\limsup_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x,r))}{r^p} < \infty).$$

我们称 Γ 相对于 x 具有 $>p$ 阶（$<p$）多项式轨道增长，当且仅当

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x,r))}{r^p} = \infty \ (=0).$$

容易验证，上述定义的多项式轨道增长性质不依赖于基点 x的选取。

与 [20], 定理 2 类似，它可由以下关于轨道增长的定理轻易推出（参见[20]中定理 1 的证明）：

定理 3. 设 $N \geq 2$，且设 $(X, d, \mathfrak{m})$是一个非紧致$RCD(0, N)$空间。设$\pi : (X, \tilde{p}) \to (X, p)$是其万有覆盖，甲板变换群为 Γ，其中$p \in X$。

若 N是整数，则 Γ 具有 $\leq N-1$阶多项式轨道增长。此外，Γ 不具有 $< N-1$阶多项式轨道增长，即存在 $r_i \to \infty$使得

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\tilde{p}, r_i))}{r_i^{N-1}} > 0$$

当且仅当$(X, d, \mathfrak{m})$是一个具有 $N-1$ 维灵魂的平坦 N-流形，或者$[0,\infty) \times X_1$与 X_1 构成一个紧致平坦 $(N-1)$-流形；两者的 $\mathfrak{m}$ 均为黎曼体积的倍数。

如果 N 不是整数，那么 Γ 的多项式轨道增长阶为 $< N-1$。

与[5] 和 [20], 类似，证明定理3 的关键在于控制某种意义上接近某个基点割迹的点集的体积增长（见引理1 (2)）。为得到引理1 (2)，我们将使用布伦-明可夫斯基不等式，替代 [20]中所用的体积元比较论证。$\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间的非分支性质对我们的证明也至关重要。

我们还将 [20] 中的定理 4（即定理 1.1 在轨道方面的版本）推广到非分支 $\mathrm{CD}^*(K,N)$ 空间：

定理 4。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个非分支 $CD^*(K,N)$ 空间。

(1) 设 $p, q \in X$，$p \neq q$。令 $E(p, q) = \{x = X \mid d(p, x) = d(q, x)\}$。那么$\mathfrak{m}(E(p, q)) = 0$。

(2) 设 $\pi:\ \left(\bar{X},\bar{d},\bar{\mathfrak{m}},\bar{x}_0\right)\to(X,d,\mathfrak{m},x_0)$ 为一个正规覆盖，其甲板变换群为 G（这里 $\left(\bar{X},\bar{d},\bar{\mathfrak{m}}\right)$ 是 $(X,d,\mathfrak{m})$ 的提升，参见 *[4]* 第 *7.2* 节或 *[15]* 第 *2.2* 节）。那么对每个 $r>0$，我们都有：

$$\#(D^G(\bar{x}_0,2r))\cdot\mathfrak{m}(B_r(x_0))\geq\bar{\mathfrak{m}}(B_r(\bar{x}_0)),\tag{1.1}$$
$$\#(D^G(\bar{x}_0,r))\cdot\mathfrak{m}(B_r(x_0))\leq\bar{\mathfrak{m}}(B_{2r}(\bar{x}_0)).\tag{1.2}$$

自 [19] 以来，人们早已知道，具有非负里奇曲率的开流形至少具有线性体积增长（即 $\liminf_{R\to\infty}\frac{\text{体积}(B_R(p))}{R}>0$）。这一事实~~对 RCD(0, N)~~ 空间也成立（参见 [10]）。因此，以下定义是有意义的：

定义 2. 设 $(X,\ d,\ \mathfrak{m})$ 是一个非紧致的 $RCD(0,\ N)$ 空间。当且仅当以下条件成立时，我们称 X 具有最小体积增长：

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(B_R(p))}{R}<\infty\ for\ some\ p\in X.$$

设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个 CD(0, N) 空间。根据 Bishop-Gromov不等式，极限 $\lim_{r\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(B_r(p))}{r^N}$ 总是存在，且与 $p\in X$ 的选取无关。若 $\lim_{r\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(B_r(p))}{r^N}>0$，则称 X具有欧几里得体积增长。否则~~，称~~ X 在无穷远处塌缩。

以下定理推广了 [20], 中的定理 2，是定理 3 和定理 4 (2) (1.1)的直接推论：

定理 5. 设$(X,\ d,\ \mathfrak{m})$ 是一个非紧致$RCD(0,\ N)$ 空间，并设 $p\in X$。令~~$\pi:(X,$~~ $d,\ \tilde{\mathfrak{m}})\to(X,\ d,\ \mathfrak{m})$ 为其万有覆盖。若 X 具有最小体积增长，则：

~~若~~ $N\notin\mathbb{N}_+$，则 X 在无穷远处塌缩；
若 $N\in\mathbb{N}_+$，则 X 具有欧几里得体积增长，当且仅当$(X,\ d)$ 是一个平坦的 N-流形，其灵魂维数为 $N-1$，或者 $[0,\infty)\times X_1$，其中 X_1 是一个紧致平坦的$N-1$ 流形。

定理 5 可视为定理 2中刚性结果的推广。事实上，根据定理 4，当 $N\in\mathbb{N}_+$，$b_1(X)=N-1$ 意味着 X 具有最小~~体积增长，且 X 具有欧几里得体积增长。

2 预备知识

本节列出本文将用到的 CD*(K, N) 空间和 RCD*(K, N) 空间的性质。这里不提供这些空间的定义，因为本文不会明确用到它们。

1 当 $K = 0$ 时，CD*(0, N) 条件与 CD(0, N) 条件相同。

2 A $\mathrm{CD}^*(K,N)$ 空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个完备测地空间（参见 [13] 引理 3.5）.

3 RCD*(K, N) 空间是一个无穷小希尔伯特 CD*(K, N) 空间（关于无穷小希尔伯特条件的定义，参见 [15] 及其中的相关参考文献）。特别地，RCD*(K, N) 空间是 CD*(K, N) 空间。

4 对于 $K \in \mathbb{R}$、$N \geq 1$、$0 \leq t \leq 1$ 和 $\theta \in \mathbb{R}_+$，令

$$\sigma_{K,N}^{(t)}(\theta) := \begin{cases} \infty & \text{if } K\theta^2 \geq N\pi^2, \\ \frac{\sin(\sqrt{\frac{K}{N}}t\theta)}{\sin(\sqrt{\frac{K}{N}}\theta)} & \text{if } K > 0, K\theta^2 < N\pi^2, \\ t & \text{if } K = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\frac{K}{N}}t\theta)}{\sinh(\sqrt{-\frac{K}{N}}\theta)} & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

我们将使用以下布伦-明可夫斯基不等式来证明引理 1：

定理6。*([4]*命题*6.1*）设 K，$N \in \mathbb{R}$ 并设 $N \geq 1$。假设$(X$，d，$\mathfrak{m}$）是一个 $CD^*($ K，N）空间。那么对于所有博雷尔集 A，$B \subset M$ 以及 $t \in [0, 1]$,

$$\mathfrak{m}(Z_t(A,B))^{\frac{1}{N}} \geq \sigma_{K,N}^{(1-t)}(\Theta) \cdot \mathfrak{m}(A)^{\frac{1}{N}} + \sigma_{K,N}^{(t)} \cdot \mathfrak{m}(B)^{\frac{1}{N}},$$

其中 $Z_t(A,\ B) = \{x \in X \mid$ 存在 $a \in A$ 和 $b \in B$，使得 $d(a,\ x) = td(a,\ b)$ 以及 $d(b,\ x) = (1-t)d(a,\ b).\}$，并且其中

$$\Theta := \begin{cases} \inf_{x_0 \in A, x_1 \in B} \mathrm{d}(x_0, x_1), & K \geqslant 0, \\ \sup_{x_0 \in A, x_1 \in B} \mathrm{d}(x_0, x_1), & K < 0. \end{cases}$$

5 我们还需要非光滑情形下的分裂定理，它推广了著名的 Cheeger-Gromoll 分裂定理 [5]:

定理 7。（[9]）设（X，d，m）是一个具有 $1 \leq N < \infty$ 的 *RCD(0, N)* 空间。假设 X 包含一条直线。那么（X，d，m）与（$X' \times \mathbb{R}$，$d' \times d_E$，$m' \times \mathcal{L}^1$）同构，其中 d_E 是欧几里得距离，$\mathcal{L}^1$ 是勒贝格测度；若 $N \geq 2$，则（X'，d'，m'）是一个 *RCD(0, N − 1)* 空间，而若 $N < 2$，则为单点集。

6 我们要求单连通万有覆盖的存在性:

定理 8。（[15],[18]）设（X，d，m）是某些 $K \in \mathbb{R}$、$1 <$ $N < \infty$ 对应的 *RCD*(K, N)*-空间。那么（X，d，m）存在一个单连通万有覆盖（X，d，$\tilde{m}$），其本身是一个 *RCD*(K, N)*-空间。

7 当且仅当不存在 X 中满足 $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ 和 $d(x, w) = d(x, y) + d(y, w)$ 的四个不同点 x, y, z, w 时，我们称测地度量空间 (X, d) 为非分支的。

定理 9。 *([6])* 设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个 $RCD(K, N)$ 空间。那么 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是非分支的。

8 最后，我们将使用以下关于度量等距群的分裂结果。在 [5] 中，该结果是在 N 为黎曼流形的条件下得到的。

命题 1。 设 (N, d) 是一个不含直线的度量空间，并设 $k \in \mathbb{N}_+$。那么，度量乘积 $N \times \mathbb{R}^k$ 上的任意等距变换 F 都可分解为 $F = (f, g)$，其中 f 是 N 上的等距变换，g 是 $\mathbb{R}^k$ 上的等距变换。

我们将在附录中证明命题 1 。

3 证明

本节中，我们将先证明定理 4，然后证明定理 3，因为我们证明定理 3 时会稍微用到定理 4。

设 (X, d) 是一个完备测地空间，并设 $p \in X$。令

$$C_r(p) = \{q \in X \mid \forall z \in X \backslash B_r(q), d(p, q) + d(q, z) > d(p, z)\}.$$

那么，$C_r(p)$在 X 中是开集。集合 $C(p) := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{i^{-1}}(p)$ 称为 p 的割迹。

设 $I=[0,l]$ 或 $[0,\infty)$，其中 $0<l<\infty$。我们称一条测地线 $\gamma:I\to X$，满足 $\gamma(0)=p$，相对于 p 是不可延拓的，当且仅当 $I=[0,l]$ 且 $\gamma(l)\in C(p)$，或者 $I=[0,\infty)$，即 γ 是一条射线。所有相对于 p 的不可延拓测地线的集合记为 $\mathrm{NE}(p)$。

下面的测度估计是证明我们的定理的关键。

引理 1. 设 $N>1$，并设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个非分支 $CD^*(K,N)$ 空间。设$p\in X$。

(1) 若 $A\subset X$ 是一个博雷尔集，且对于每个$\gamma\in$， $A\cap\gamma$ 至多包含一个点 $NE(p)$。那么 $\mathfrak{m}(A)=0$。

(2) 若 $K=0$，则对于每个 $r>0$，有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(C_r(p)\cap B_R(p))}{R^{N-1}}=0. \tag{3.1}$$

证明。(1)不失一般性，我们可以假设 $K=-1$。对于每个 $i,R\in\mathbb{N}_+$，令

$$\begin{aligned}A(R)&=A\cap(B_R(p)\backslash B_{R^{-1}}(p)),\\ A_{ij}(R)&=A\cap\big(B_{R^{-1}+\frac{j+1}{i}}(p)\backslash B_{R^{-1}+\frac{j}{i}}(p)\big),j=0,1,\cdots,Ri-1.\end{aligned}$$

利用 $A_{ij}(R)$ $\{p\}$ 的布伦-明可夫斯基不等式以及时间 $t_{ij}=1-\frac{(2R)^{-1}}{R^{-1}+\frac{j+1}{i}}$，我们得到:

$$\mathfrak{m}(Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R),\{p\}))\geq c(N,R)\mathfrak{m}(A_{ij}(R))$$

其中 $c(N,R)>0$。注意，由于非分支条件以及 A 的性质，集合 $Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R)$ $\{p\})$ 彼此不相交。还要注意，对于每个 j，集合 $Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R)$ $\{p\})$ 都包含于 $B_{(2R)^{-1}}(p)$ $\backslash B_{(2R)^{-1}-\frac{1}{i}}(p)$ 中。现在，如果每个 $Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R)$ $\{p\})$ 都是博雷尔集，则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(A(R))&=\sum_{j=0}^{Ri-1}\mathfrak{m}(A_{ij}(R))\\ &\leq(c(N,R))^{-1}\sum_{j=0}^{Ri-1}\mathfrak{m}(Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R),\{p\}))\\ &\leq(c(N,R))^{-1}\mathfrak{m}(B_{(2R)^{-1}}(p)\backslash B_{(2R)^{-1}-\frac{1}{i}}(p)).\end{aligned}$$

令 $i\to\infty$，我们得到 $\mathfrak{m}(A(R))=0$。由于 $A\backslash\{p\}=\bigcup_{R=1}^{\infty}A(R)$，我们得到 $\mathfrak{m}(A)=0$。

一般而言， $Z_{t_{ij}}(A_{ij}(R)\ \{p\})$ 可能不是可测的。在这种情况下，我们使用 $\mathfrak{m}$ 的内正则性（注意， $\mathfrak{m}$ 是一个 Radon测度，参见[8] 中的定理7.8）。对于每个 $\epsilon > 0$ ，我们都可以找到紧集 $K_{ij} \subset A_{ij}(R)$，使得 $\sum_{j=0}^{Ri-1} \mathfrak{m}(A_{ij(R)} \backslash K_{ij}) < \epsilon$。注意， $Z_{t_{ij}}(K_{ij},\ \{p\})$ 也都是紧集。因此

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(A(R)) &< \sum_{j=0}^{Ri-1} \mathfrak{m}(K_{ij}) + \epsilon \\ &\leq (c(N,R))^{-1} \sum_{j=0}^{Ri-1} \mathfrak{m}(Z_{t_{ij}}(K_{ij}, \{p\})) + \epsilon \\ &\leq (c(N,R))^{-1} \mathfrak{m}(B_{(2R)^{-1}}(p) \backslash B_{(2R)^{-1}-\frac{1}{i}}(p)) + \epsilon.\end{aligned}$$

由于 i 和 ϵ 是任意的，我们得出 $\mathfrak{m}(A(R)) = 0$。

(2)我们使用以下子引理:

子引理 1. 设 $R > 1$ ，并且 $A \subset B_{R+1}(p) \backslash B_R(p)$ 是紧集。记 K_A为连接 p 与点 $a \in A$的所有测地线的并集。令 $V_A = B_1(p) \cap K_A$。则 $\mathfrak{m}(A) \leq N(R+1)^{N-1} \mathfrak{m}(V_A)$。

假设子引理 1 成立。不失一般性，我们可以假设 $r = 1$。对于 3, $\cdots$，令 $C_i = C_1(p) \cap (B_{i+1}(p) \backslash B_i(p))$。由 $\mathfrak{m}$ 的内正则性，我们可以选取紧集 $C_i' \subset C_i$ ，使得 $\sum_{i=2}^{\infty} \mathfrak{m}(C_i \backslash C_i') < 1$。注意，由于非分枝条件以及 $C_1(p)$ 的定义，对于 $|i-j| \geq 2$，有 $V_{C_i'} \cap V_{C_j'} = \{p\}$。 C_i' 的紧性保证 $K_{C_i'}$ 是紧集，因此 $V_{C_i'}$ 是博雷尔集。所以

$\sum_{i=2}^{\infty}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) \le 2\mathfrak{m}(B_1(p))$。由子引理 1，我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}(C_1(p)\cap B_R(p)) \le& \mathfrak{m}(B_2(p)) + \sum_{i=2}^{[R]}\mathfrak{m}(C_i)\\
<& \mathfrak{m}(B_2(p)) + \sum_{i=2}^{[R]}\mathfrak{m}(C_i') + 1\\
\le& \mathfrak{m}(B_2(p)) + \sum_{i=2}^{[R]} N(i+1)^{N-1}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) + 1\\
=& \mathfrak{m}(B_2(p)) + \sum_{i=2}^{[\sqrt{R}]} N(i+1)^{N-1}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) + \sum_{i=[\sqrt{R}]+1}^{[R]} N(i+1)^{N-1}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) + 1\\
\le& \mathfrak{m}(B_2(p)) + 2N([\sqrt{R}]+1)^{N-1}\mathfrak{m}(B_1(p))\\
&+ N([R]+1)^{N-1}\sum_{i=[\sqrt{R}]+1}^{[R]}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) + 1.
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{R\to\infty}\sum_{i=[\sqrt{R}]+1}^{[R]}\mathfrak{m}(V_{C_i'}) = 0$，我们得到了（3.1）。

子引理 *1* 的证明。注意 K_A 是紧集，因此 V_A 是博雷尔集。对 A应用布伦-明可夫斯基不等式，$\{p\}$ 以及 $t = 1 - \frac{1}{R+1}$，得到：

$$\mathfrak{m}(Z_t(A,\{p\})) \ge (1-t)^N\mathfrak{m}(A). \tag{3.2}$$

令 $F = V_A\backslash B_{\frac{R}{R+1}}(p)$，则 $Z_t(A,\{p\}) \subset F$。对 V_A、$\{p\}$ 和 $t' = \frac{1}{R+1}$应用布伦-明可夫斯基不等式，得到：

$$\mathfrak{m}(Z_{t'}(V_A,\{p\})) \ge (1-t')^N\mathfrak{m}(V_A) \tag{3.3}$$

注意 $Z_{t'}(V_A,\{p\}) = V_A\backslash F$，因此由（3.3）可得：

$$\mathfrak{m}(F) \le \left(1 - \left(1 - \frac{1}{R+1}\right)^N\right)\mathfrak{m}(V_A) \le N(R+1)^{-1}\mathfrak{m}(V_A). \tag{3.4}$$

现在，3.2）和（3.4）合起来可得：

$$\mathfrak{m}(A) \le (R-1)^N\mathfrak{m}(F) \le N(R+1)^{N-1}\mathfrak{m}(V_A).$$

□

□

注 2. 设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个非分支 $CD^*(K, N)$ 空间。由引理可立即得到*1* （*1*）：一点 $p \in X$ 的割迹测度为 *0*。

定理的证明 *4*. (1) 对任意 $\gamma \in \mathrm{NE}(p)$，我们证明 $E(p,q) \cap \gamma$ 至多包含一个点。这由引理 $\mathfrak{m}(\mathrm{E}(p,q)) = 0$ 推出 1 (1)（注意，$E(p,q)$是闭集，因此是博雷尔集）。

假设在 $\mathrm{E}(p,q) \cap \gamma$ 中有两个点 a, b，并且 $d(p,a) < d(p,b)$。那么

$$\begin{aligned} d(b,q) &= d(b,p) \\ &= d(p,a) + d(a,b) \\ &= d(q,a) + d(a,b). \end{aligned}$$

这会导致测地线分支。

(2) 注意，根据 [4],，$(X, d, \bar{\mathfrak{m}})$ 仍然是一个非分支 $\mathrm{CD}^*(K, N)$ 空间，因此可以将 (1) 的结果应用于 $(X, d, \bar{\mathfrak{m}})$。对于任意 $g \in G$，令 $D_g = \{z \in X \mid d(z, \bar{x}_0) < d(z, g\bar{x}_0)\}$。非分枝条件意味着

$$\partial D_g = \{z \in \bar{X} \mid d(z, \bar{x}_0) = d(z, g\bar{x}_0)\}.$$

由 (1)，对每个 $g \in G$，$\mathfrak{m}(\partial D_g) = 0$。定义与 $\bar{x}_0$ 相关联的狄利克雷域 F，其定义为 $F = \bigcap_{g \in G,\ g \neq e} D_g$。记 F 在 X中的闭包为 $\overline{F}$。由于 $\partial F = \overline{F} \backslash F$ 是∂D_g的可数并中，我们得到 $\mathfrak{m}(\partial F) = 0$。于是，(2) 的证明可逐字仿照 [3] 中定理 1.1 和[20]中定理 4 的证明。

□

注意，$\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间是非分支的，见 [6]。因此引理 1 (2) 适用于$\mathrm{RCD}(0, N)$ 空间。

定理 *3* 的证明。由分裂定理可得

$$(\tilde{X}, d_{\tilde{X}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{x}_0) \cong (Y \times \mathbb{R}^k, d_Y \times d_{\mathbb{R}^k}, \mathfrak{m}_Y \times \mathcal{L}^k, (y_0, 0^k)),$$

其中 $k \leq [N]$ 是一个整数，$\mathcal{L}^k$ 是勒贝格测度，而 $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ 是一个不含直线的单连通 $\mathrm{RCD}(0, N-k)$ 空间。以下有三种可能性：

情形 1. $k = [N]$，则 Y 是一个点。因此，$(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个平坦的 $[N]$-流形，且 $\mathfrak{m}$ 与黎曼体积成比例。在这种情况下，Γ 具有多项式轨道增长

阶数为 $\leq k-1=[N]-1$，并且 Γ 不具有阶数为$<[N]-1$的多项式轨道增长，当且仅当 X具有一个 $[N]-1$维灵魂（参见[20]的命题 4 (1)）。

情形 2. $k=[N]-1$，那么 $(Y,d_Y,\mathfrak{m}_Y)$ 是一个 RCD(0, $N-[N]+1$) 空间。由于$N-[N]+1<2$，根据 [11] 中的推论 1.2，我们有 $(Y,d_Y)=[0,T]$，其中$T\geq 0$；或者 $(Y,d_Y)=[0,\infty)$，因为 Y是单连通的且 $Y\neq\mathbb{R}$。

如果 $(Y,\ d_Y)=[0,T]$，那么可以使用定理 4 (2) (1.2) 以及以下事实：$(X,\ d,\ \mathfrak{m})$ 具有至少线性的体积增长，从而得出 Γ 具有阶为 $\leq[N]-2$的多项式轨道增长。

如果 $(Y,d_Y)=[0,\infty)$，那么 $\mathrm{Isom}_{met}(Y)$（ Y的度量等距群）是平凡的。因此 $\Gamma\subset\mathrm{Isom}_{met}(\mathbb{R}^k)$。若 $\mathbb{R}^k/\Gamma$ 是紧流形，则根据比伯巴赫定理，Γ 有一个有限指数正规子群 $\mathbb{Z}^k$ （平移部分）。因此，Γ 具有阶为 $\geq k$ 的多项式轨道增长，并且 $\leq k$ （参见[20]中的引理 3）。若$\mathbb{R}^k/\Gamma$ 是开流形，则 Γ 具有阶为 $\leq k-1=[N]-2$的多项式轨道增长（参见 [20]中的命题 4 (1)）。

情形 3。 $k\leq[N]-2$。那么（Y， d_Y， $\mathfrak{m}_Y$）是一个具有 $N-k\geq 2$ 的 RCD(0, $N-k$) 空间，因此引理 1 (2) 适用于 Y。固定一个 $l>0$，使得 $B_l(g_1\cdot\tilde{x}_0)\cap B_l(g_2\cdot\tilde{x}_0)=\emptyset$、$\forall g_1$、$g_2\in\Gamma$、$g_1\neq g_2$。由于 Y 不包含直线，根据反证法，存在一个 $h>0$，使得

$$\mathrm{Isom}_{met}(Y)\cdot B_l(y_0)\subset B_h(y_0)\cup C_h(y_0),$$

其中 $\mathrm{Isom}_{met}(Y)$ 是 Y 的度量等距群（参见 [20] 中的引理 1）。

由于度量等距群 $\tilde{X}$ 分裂，因此有

$$\bigcup_{g\in\Gamma,d_{\tilde{X}}(\tilde{x}_0,g\cdot\tilde{x}_0)\leq R}B_l(g\cdot\tilde{x}_0)\subset((B_h(y_0)\cup C_h(y_0))\cap B_{R+l}(y_0))\times B_{R+l}(0^k),\forall R>0.$$

So

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{m}}(B_l(\tilde{x}_0))\cdot\#(D_R^\Gamma(\tilde{x}_0))&\leq\mathfrak{m}_Y((B_h(y_0)\cup C_h(y_0))\cap B_{R+l}(y_0))\cdot\mathcal{L}^k(B_{R+l}(0^k))\\&\leq\big(\mathfrak{m}_Y(B_h(y_0))+\mathfrak{m}_Y(C_h(y_0)\cap B_{R+l}(y_0))\big)\omega_k(R+l)^k\\&=\omega_k\mathfrak{m}_Y(B_h(y_0))(R+l)^k+\omega_k f(R+l)(R+l)^{N-1}.\ (*)\end{aligned}$$

其中 $\omega_k=\mathcal{L}^k(B_1(0^k))$ 以及 $\mathfrak{m}_Y(C_h(y_0)\cap B_{R+l}(y_0))=f(R+l)(R+l)^{N-k-1}$，并且根据 $\lim_{r\to\infty}f(r)=0$ 引理 1 (2)，有 Γ 在此情形下具有阶为$<N-1$ 的多项式轨道增长。

现在，若 $N\notin\mathbb{N}$，我们得出 Γ 具有阶数为 $<N-1$ 的多项式轨道 .

若 $N \in \mathbb{N}$，我们得出 Γ 具有阶数为 $\leq N-1$ 的多项式轨道。现在考虑 Γ 不具有阶数为 $< N-1$ 的多项式轨道的情形。此时，k只能等于 N或 $N-1$。若 $k = N$，则 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个平坦的 N-流形，具有一个 $N-1$ 维的灵魂，并且 $\mathfrak{m}$ 是黎曼体积的倍数。若$k = N-1$，则 $(Y, d_Y) = [0, \infty)$，且 $\mathbb{R}^k/\Gamma$ 是一个紧集平坦 $(N-1)$-流形，如情形 2 中所分析。由于 $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ 是一个 RCD(0, 1) 空间，$\mathfrak{m}_Y$只能是 $\mathcal{L}^1$ 的倍数（见下文注 3）。证明完毕。

□

注 *3.* 若 $(Y, d_Y) = [0, \infty)$ 和 $(Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y)$ 是一个 *RCD(0, 1)* 空间，我们证明$\mathfrak{m}_Y$只能是 $\mathcal{L}^1$ 的倍数：对于 $i \in \mathbb{N}_+$，令 $I_j = [\frac{j}{i}, \frac{j+1}{i}], j = 0, 1, 2, \cdots$。对 $A = I_j \cup I_{j+1}$，$B = \{\frac{j}{i}\}$和 $t = \frac{1}{2}$应用布伦-明可夫斯基不等式，得到 $\mathfrak{m}_Y(I_j) \geq \frac{1}{2}\mathfrak{m}_Y(A)$。类似地，$\mathfrak{m}_Y(I_{j+1}) \geq \frac{1}{2}\mathfrak{m}_Y(A)$。由于单点的测度为 0，我们有 $\mathfrak{m}_Y(I_j) = \mathfrak{m}_Y(I_{j+1})$。由于 j 是任意的，我们得到$\mathfrak{m}_Y([p, q]) = c(q-p)\ \forall 0 \leq p \leq q, p, q \in \mathbb{Q}$，其中 $c = \mathfrak{m}_Y([0, 1]) > 0$。通过取极限，我们得出 $\mathfrak{m}_Y([a, b]) = c(b-a)\ \forall 0 \leq a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$。由于 $[0, \infty)$ 的每个开集都是可数个互不相交区间的并，我们得出 $\mathfrak{m}_Y = c\mathcal{L}^1$ 在开集上成立。由测度论中的一个经典结果可知，$\mathfrak{m}_Y = c\mathcal{L}^1$ 在所有博雷尔集上成立。

4 附录：命题 1 的证明

固定 $(p, v) \in N \times \mathbb{R}^k$，并令 $F(p, v) = (q, w)$。则 $F(\{p\} \times \mathbb{R}^k) = \{q\} \times \mathbb{R}^k$，因为 F 将一条直线映射为另一条直线，且 N 不包含直线。

断言 1. $F(N \times \{v\}) = N \times \{w\}$.

证明。对于 $n \in N$，假设 $F(n, v) = (m, w')$。注意，(p, v) 是 $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ 上距 (n, v) 最近的唯一点。因此，$F(p, v) = (q, w)$ 是 $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ 上距 $F(n, v)$ 最近的唯一点。由于 (q, w') 是 $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ 上距 $F(n, v) = (m, w')$ 最近的唯一点，我们得到 $w = w'$。因此 $F(N \times \{v\} \subset N \times \{w\})$。同样的论证表明 $F^{-1}(N \times \{w\}) \subset N \times \{v\}$。这就证明了该断言。

□

由断言 1，存在等距变换 $f\colon N \to N$和 $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$，使得 $F(x, v) = (f(x)\ w)$ $F(p, y) = (q, g(y))\ \forall x \in N, y \in \mathbb{R}^k$。

现在我们验证 $F(x, y) = (f(x)\ g(y))$。为此，注意到 (x, v) 是 $N \times \{v\}$ 上距离 (x, y) 最近的唯一点，而 (p, y) 是 $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ 上距离 (x, y) 最近的唯一点。因此，$F(x, v) = (f(x)\ w)$ 是

$N \times \{w\}$ 上距离 $F(x, y)$ 最近的唯一点，而 $F(p, y) = (q, g(y))$ 是 $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ 上距离 $F(x, y)$ 最近的唯一点。也就是说，$F(x, y) = (f(x)\ g(y))$。

5 致谢

作者感谢其导师荣晓春教授提出这一问题，并给予有益的讨论。

参考文献

[1] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli、Andrea Mondino 和 Tapio Rajala。度量测度空间中具有 σ-有限测度的黎曼里奇曲率下界。美国数学会汇刊，367(7):4661–4701，2015年。[2] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。黎曼里奇曲率有下界的度量测度空间。《杜克数学杂志》，163(7):1405–1490，2014年。[3] Michael T. Anderson。非负里奇曲率完备流形的拓扑。《拓扑学》，29(1):41–55，1990年。[4] Kathrin Bacher 和 Karl-Theodor Sturm。度量测度空间曲率维数条件的局部化与张量化性质。《泛函分析杂志》，259(1):28–56，2010年。[5] Jeff Cheeger 和 Detlef Gromoll。非负里奇曲率流形的分裂定理。《微分几何杂志》，6:119–128，1971年。[6] Qin Deng。RCD(K,N) 空间中切锥的 Hölder 连续性及其在非分支性方面的应用。*arXiv:2009.07956v2*，2020年。[7] Matthias Erbar、Kazumasa Kuwada 和 Karl-Theodor Sturm。度量测度空间中熵曲率维数条件与 Bochner不等式的等价性。《数学发明》，201(3):993–1071，2015年。[8] Gerald B. Folland。《实分析：现代技术及其应用》。《纯粹与应用数学》，Wiley-Interscience丛书：教材、专著与论著。纽约：Wiley，第2版，1999年。[9] Nicola Gigli。非光滑情形下的分裂定理。*arXiv:1302.5555*，2013年。[10] Xian-Tao Huang。具有线性体积增长的非紧 RCD(0, N) 空间。《几何分析杂志》，28(2):1005–1051，2018年。[11]Yu Kitabeppu 和 Sajjad Lakzian。低维$RCD^*(K,N)$ 空间的刻画。《分析、几何与度量空间》，4:187–215，2016年。[12] John Lott 和 Cedric Villani。通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率。《数学年刊》（第*2*辑），169(3):903–991，2009年。

[13]Mattia Magnabosco、Lorenzo Portinale 和 Tommaso Rossi。强 Brunn–Minkowski 不等式及其与 CD 条件的等价性。*arXiv:2210.01494v1*，2022年。[14] Ilaria Mondello、Andrea Mondino 和 Raquel Perales。RCD 空间的修正第一贝蒂数上界及环面稳定性结果。《***Comment. Math. Helv.***》，97(3):555–609，2022年。[15] Andrea Mondino 和 Guofang Wei。关于 RCD$^*(K,N)$ 空间的万有覆盖与基本群。《***J. Reine Angew. Math.***》，753:211–237，2019年。[16] Karl-Theodor Sturm。度量测度空间的几何 I。《***Acta Math.***》，196(1):65–131，2006年。[17] Karl-Theodor Sturm。度量测度空间的几何 II。《***Acta Math.***》，196(1):133–177，2006年。[18] Jikang Wang。RCD$^*(K,N)$ 空间是半局部单连通的。*arXiv:2211.07087*，2022年。[19] 丘成桐。完备黎曼流形的一些函数论性质及其在几何中的应用。《***Indiana Univ. Math. J.***》，25:659–670，1976年。[20] Zhu Ye。非负里奇曲率开流形的最大第一贝蒂数刚性。*arXiv:2212.05530*，2022年。