arXiv:2301.04640v1 [math.GM] 2 Jan 2023

多指标特殊函数 $\mathrm{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(z)$ 的性质

R. Droghei[a]

[a]弗朗切斯科·塞韦里科学高中，欧洲大道 36 号，03100 弗罗西诺内（FR），意大利

摘要

本文研究了一种多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 的若干相关性质，该函数源自涉及卡普托分数阶导数的多阶分数阶超贝塞尔算子的特征值问题。我们证明，对于该特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$所涉及参数的特定取值，它可化为 Delerue 超贝塞尔函数。本文还讨论了 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 的拉普拉斯变换，并在特定情形下得到超贝塞尔函数与多指标米塔-莱夫勒函数之间，或简而言之，经典 Wright 函数与 Mittag-Leffler 函数之间的著名函数关系。此外，我们证明了该多指标特殊函数满足涉及分数阶导数的递推关系。在一种特殊情形下，据我们所知，我们推导出了 Mittag-Leffler 函数的一个新微分递推关系。我们还给出了三参数函数$\mathcal{W}_{\alpha,\ \beta,\ \nu}$ 关于参数的导数，其结果是系数为双伽马函数与伽马函数之商的无穷幂级数。

关键词

分数阶微积分中的特殊函数；超贝塞尔型算子；Wright 函数和米塔格-莱夫勒函数；Caputo 导数；特殊函数的递推关系；超贝塞尔函数

1. 引言

如今，人们对分数阶微分方程的关注日益增加，因为与整数阶微分方程相比，分数阶微分方程更适合用于研究物理学、工程学和经济学等不同领域的各种问题 [1], [2], [3]。它们确实具有描述许多材料记忆性和遗传性质的基本特征。其中一些函数是在分拆理论框架下为解决数论问题而引入的。赖特函数便是其中一例，由 E. M. Wright 在其关于渐近分拆公式的文章中引入[4], [5], [6] 和 [7],[8], [9]。

近年来，许多作者研究了分数阶微积分（FC）中的多重指标特殊函数（SF），这类函数出现在分数阶多阶型微分方程及方程组的解中（例如超贝塞尔算子和拟贝塞尔算子） [10], [11]。其中，我们只想提及最一般的函数：Fox H 函数和 Wright 广义超几何函数 [12]。事实上，只需将它们的参数设为整数值，就能得到经典的特殊函数。

在上一篇论文中 [13] ，作者研究了一种涉及 Caputo 导数的超贝塞尔型算子。通过求解与该分数阶算子相关的特征值问题，作者引入了一个以级数形式展开的函数；在某些特定情况下，它可归入分数阶

联系 R. Droghei。电子邮箱：riccardo.droghei@francescoseveri.org

微积分中广为人知的特殊函数。据我们所知，迄今尚未有人研究过这一特殊函数。不过，如前所述，在某些特殊情况下，它可化为一些已知的特殊函数，而这些函数本身又是贝塞尔函数、超贝塞尔函数以及更一般的多指标 Mittag-Leffler 函数的特例。

这种多指标特殊函数在前一篇论文中被称为 m-p 广义 Wright 函数，在非线性分数阶微分方程及其等时 ω-修正版本[13],[14]中发挥着重要作用。它也是拉盖尔导数和拉盖尔型指数函数 [15],[16], [17], [18]应用的一种自然推广。在这篇综述文章中，我们首先想考察文献 [13]所研究的多指标特殊函数的若干性质。

本文的结构安排如下。第 2 节回顾文献 [13] 中引入的多指标函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 的定义及其与超贝塞尔函数的联系。此外，还介绍了仅含 3 个参数时的较简单函数$\mathcal{W}_{\alpha,\ \beta,\ \nu}$。第 3 节计算函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$的拉普拉斯变换，并据此推导出该函数与其他已知特殊函数之间的一些新函数关系。本文的主要结果在第 4 节中介绍。在这一节中，我们给出了函数$\mathcal{W}_{\alpha,\ \beta,\ \nu}$ 的递推关系，并由此得到了 Mittag-Leffler 函数的一个新微分递推关系。第 5 节研究函数$\mathcal{W}_{\alpha,\ \beta,\ \nu}$ 关于参数的导数。

2. 多指标特殊函数 $\mathrm{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(z)$

文献 [13], 中研究的多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(z)$, 其作为复变量 z 和参数 α_j、 $j = 1$、...、$n+1$ 以及 ν_j、 $j = 1$、...、 n 的函数，由级数表示定义如下:

$$\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_{n+1} i + a_j)}{\Gamma(\alpha_{n+1} i + b_j)} \cdot \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_{n+1} k + b_{n+1})} \tag{1}$$

.

其中

$$a_j = 1 + \sum_{m=1}^{j} (\nu_{m-1} - \alpha_m);$$

$$b_j = 1 + \sum_{m=1}^{j} (\nu_{m-1} - \alpha_{m-1}). \tag{2}$$

且关系 $a_j = b_j - \alpha_j$ 与 $j = 1..n + 1$.

$\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(z)$ 是 $\alpha_j > 0$、 $j = 1..n + 1$; $\nu_j \in \mathbb{C}$、 $j = 1..n$ 和 $\alpha_0 = \nu_0 = 0$ 时的整函数。

定理 2.1. 多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(\lambda x^{\alpha_{n+1}})$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, ..., n + 1$ 和 $\nu_j > 0$, $j = 1..n$, 满足以下涉及分数阶超贝塞尔型算子的分数阶微分方程。*[*证明见 *[13]]*

$$\hat{D}_{nL}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(\lambda x^{\alpha_{n+1}}) = \lambda\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(\lambda x^{\alpha_{n+1}}); \tag{3}$$

其中

$$\hat{D}_{nL}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})} = x^{\sum_{s=1}^{n}(\alpha_s-\nu_s)}\frac{d^{\alpha_{n+1}}}{dx^{\alpha_{n+1}}}x^{\nu_n}\frac{d^{\alpha_n}}{dx^{\alpha_n}}x^{\nu_{n-1}}\frac{d^{\alpha_{n-1}}}{dx^{\alpha_{n-1}}}\cdots x^{\nu_1}\frac{d^{\alpha_1}}{dx^{\alpha_1}}. \tag{4}$$

2.1. 超贝塞尔函数作为一个特例

Delerue 超贝塞尔函数（或贝塞尔函数的多指标类比），其阶为 d，指标为 μ_1,..., μ_d, 由 Delereu 于 1953年 引入 [19]，是第一类贝塞尔函数的推广（另见 [20]），定义如下:

$$\mathcal{J}_{\mu_d}(z) = z^{-\frac{\mu_1+\ldots+\mu_d}{d+1}}J_{\mu_d}((d+1)\sqrt[d+1]{z}) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^k}{k!\prod_{j=1}^{d}\Gamma(k+\mu_j+1)}. \tag{5}$$

在多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 中令 $\alpha_j = 1$、 $j = 1$、...、$n+1$，可得关系式

$$\mathcal{W}^{(\bar{1},\bar{\nu})}(z) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+a_j)\mathcal{J}_{an}(-z),. \tag{6}$$

其中 a_j 在式（2）中定义。这并不令人意外，因为超贝塞尔函数满足所谓的高阶超贝塞尔微分算子，该算子由 Dimovski 和 Kiryakova 引入 [21], [22], ，并可由式（3）令所有参数 $\alpha_j = 1$ 且 $j = 1..n+1$ 得到，即整数阶导数。

2.2. 三参数函数 $\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}$

本节分析式（1）的较简单情形，其中 $n = 1$、 $\alpha_2 = \beta$、 $\alpha_1 = \alpha$ 和 $\nu_1 = \nu$:

$$\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(x^\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(\beta i+1-\alpha)}{\Gamma(\beta i+1)}\frac{x^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+1-\alpha+\nu)}. \tag{7}$$

命题 2.2. 显然，上述函数（7）满足以下分数阶微分方程

$$\hat{D}_{\alpha,\beta,\nu}f(x) = x^{\alpha-\nu}\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(x^\nu\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x)\right) = f(x), \tag{8}$$

涉及阶数为 α、$\beta \in$（0,1）的两个 Caputo 意义下的分数阶导数。其中

$$f(x) = \mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(x^\beta)$$

.

注 1. Weinstein 算子和贝塞尔-克利福德算子 令 $\alpha = \beta = 1$ 和 $\nu = k$, $k \geq 1$, 算子 $D_{\alpha,\beta,\nu}$ 变为

$$\hat{D}_{1,1,k} = xB_k = x\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{x}\frac{d}{dx}\right) = x^{-k+1}\frac{d}{dx}x^k\frac{d}{dx}$$

其中 B_k 是著名的温斯坦算子（或贝塞尔算子），源自所谓的达布-温斯坦关系 [23], [24]。在 [25] 中，Hayek详细研究了算子$D_{1,1,k+1}$ ，并将其解称为二阶贝塞尔-克利福德函数$C_\nu(x) = x^{-\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}(2\sqrt{x}) = \Gamma^{-1}(\nu+1)\,{}_0F_1(\nu+1; -x)$，其中 $I_\nu(x)$是第一类修正贝塞尔函数。后来，在 [26] 中，他通过修改超贝塞尔函数 $J^{(2)}_{\mu},_\nu(x)$，引入了双指标三阶贝塞尔-克利福德函数:

$$C_{\mu,\nu}(x) = x^{-\frac{\mu+\nu}{3}}J^{(2)}_{\mu,\nu}(3\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_2(\mu+1, \nu+1; -x); \tag{9}$$

满足与该算子相关的三阶贝塞尔-克利福德微分方程

$$\hat{B}_{\mu,\nu} = x^{-\nu}\frac{d}{dx}x^{\mu-\nu+1}\frac{d}{dx}x^{\nu+1}\frac{d}{dx}. \tag{10}$$

显而易见，双参数算子$B_{\mu,\nu}$ 等价于算子 (4)，$D^{(\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},\{\nu_1,\nu_2\})}{}_{2L}$ ，其中 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$； $\nu_1 = \nu + 1$ 且 $\nu_2 = \mu - \nu + 1$；因此，三阶贝塞尔-克利福德函数 (9) 等于

$$C_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathcal{W}^{(\{1,1,1\},\{\nu+1,\mu-\nu+1\})}(x).$$

这些微分算子常见于数理物理的偏微分方程中（尤其是流体力学、弹性力学和跨声速流），例如广义贝塞尔热方程以及广义轴对称势（GASP）理论的其他方程中 [27]。

2.2.1. 的特殊情形 $\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}$

For $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$ 和 $\nu = \mu$ 该函数对应于经典 Wright 函数 on

$$\mathcal{W}_{1,\lambda,\mu}(x^\lambda) = W_{\lambda,\mu}\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}\right)^k}{k!\Gamma(\lambda k+\mu)}. \tag{11}$$

对于 $\alpha = 0$, $\beta \to \alpha$, $\nu \to \beta - 1$ ，该函数对应广义 Mittag-Leffler 函数

$$\mathcal{W}_{0,\alpha,\beta-1}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \tag{12}$$

当 $\alpha=\beta=\nu$ 时，关系式成立

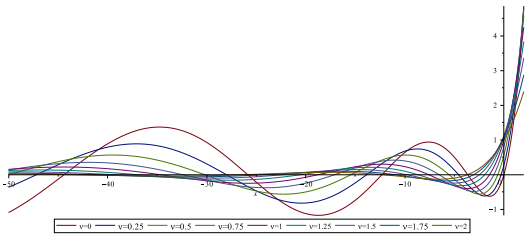
$$\mathcal{W}_{\nu,\nu,\nu}(x^\nu)=E_{1;\nu,1}(x^\nu)$$

其中 $E_{\alpha;\nu,\gamma}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma^{\alpha+1}(\nu k+\gamma)}$ 是 α-米塔格-莱夫勒函数。

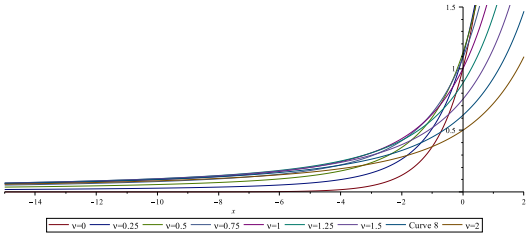
此外，我们在下表中给出三参数函数 $\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}$ 的一些示例，并在图1中展示该函数在参数 α、β、ν取不同值时的变化；

整数阶导数	分数阶导数
$\mathcal{W}_{0,1,0}(x)=e^x$	$\mathcal{W}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{x})=+I_0(2\sqrt{x})+L_0(2\sqrt{x})$
$\mathcal{W}_{0,1,n}(x)=\frac{e^x}{x^n}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^{i-n}}{i!}$ 其中 $n\in\mathbb{N}$	$\mathcal{W}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\sqrt{x})=+I_1(2\sqrt{x})+L_1(\sqrt{x})$
$\mathcal{W}_{1,1,0}(x)=\sqrt{x}I_1(2\sqrt{x})$	$\mathcal{W}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}(\sqrt{x})=\frac{\text{双曲正弦}(2\sqrt{x})+\text{双曲余弦}(2\sqrt{x})-1}{\sqrt{\pi x}}$
$\mathcal{W}_{1,1,\nu}(x)=x^{-\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}(2\sqrt{x})$	$\mathcal{W}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},2}(\sqrt{x})=\frac{(2\sqrt{x}-1)e^{2\sqrt{x}}-2x+1}{2x\sqrt{\pi x}}$

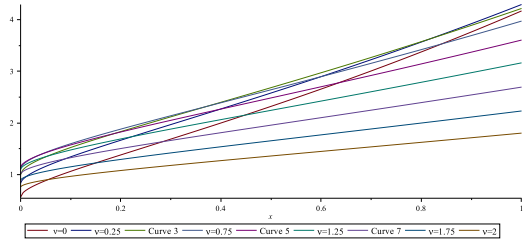
其中，$I_\alpha(x)=i^{-\alpha}J_\alpha(ix)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}(\frac{x}{2})^{2m+\alpha}$ 是第一类修正贝塞尔函数，$L_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{x}{2}^{2m}}{\Gamma}\right)\frac{}{(m+\frac{3}{2})\Gamma(m+\nu+\frac{3}{2})}$是修正斯特鲁维函数。



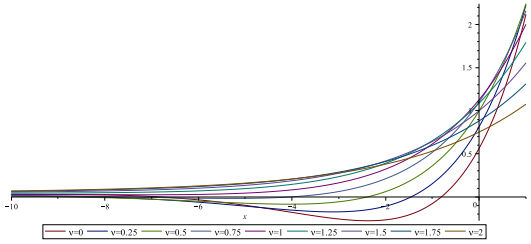
(a) Plot 的函数 $\mathcal{W}_{0,1,\nu}(x)$ for $\nu=0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1;\ 1.25;\ 1.5;\ 1.75;\ 2$。



(b) Plot 的函数 $\mathcal{W}_{1,1,\nu}(x)$ for $\nu=0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1;\ 1.25;\ 1.5;\ 1.75;\ 2$。



(c) 函数图 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\nu}(\sqrt{x})$，适用于 $\nu=0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1;\ 1.25;\ 1.5;\ 1.75;\ 2$。



(d) Plot 的函数 $\mathcal{W}_{\frac{1}{2},1,\nu}(x)$，适用于 $\nu=0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1;\ 1.25;\ 1.5;\ 1.75;\ 2.$

图1。

3. 拉普拉斯变换

让我们计算 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(\lambda x)$ 的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}(\lambda x^{\alpha_{n+1}}),s\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_{n+1}i+a_j)}{\Gamma(\alpha_{n+1}i+b_j)}\frac{\lambda^k x^{\alpha_{n+1}k}}{\Gamma(\alpha_{n+1}k+b_{n+1})}dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda^k\Gamma(\alpha_{n+1}i+a_j)}{\Gamma(\alpha_{n+1}i+b_j)\Gamma(\alpha_{n+1}k+b_{n+1})}\int_0^\infty e^{-sx}x^{\alpha_{n+1}k}dx$$
$$= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_{n+1}i+a_j)\Gamma(\alpha_{n+1}k+1)}{\Gamma(\alpha_{n+1}i+b_j)\Gamma(\alpha_{n+1}k+b_{n+1})}\left(\frac{\lambda}{s^{\alpha_{n+1}}}\right)^k. \quad (13)$$

第 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 个的解析性质表明，所得的拉普拉斯变换是一个解析函数，在无穷远处趋于零，并在 $s=0$ 处呈现本性奇点。

注 2. 若设 $\alpha_j=1$，$j=1,...,n+1$，则多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 将与超贝塞尔函数相关，如式 (6) 所示。经过一些计算，我们得到超贝塞尔函数的拉普拉斯变换与多指标米塔-莱夫勒函数之间的以下函数关系。关于这两个函数的更一般关系，可参见 Kiryakova 和 Luchko 的文章 [28]。

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{W}^{(\bar{1},\bar{\nu})}(\lambda x),s\right) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+a_j)\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(k+a_{j+1}+1)}\left(\frac{\lambda}{s}\right)^k$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+a_j)\frac{1}{s}E^{(n)}_{(1,1,...,1),(a_{j+1}+1)}\left(\frac{\lambda}{s}\right). \quad (14)$$

注 3. $\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(x)$ 的拉普拉斯变换可作为式 (13) 的一个特例得到，如下所示:

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(\lambda x^\rho),s\right) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\beta\Gamma(\beta i+1-\alpha)}{\Gamma(\beta i+1)}\frac{\Gamma(\rho k+1)}{\Gamma(\beta k+1-\alpha+\nu)}\left(\frac{\lambda}{s^\rho}\right)^k; \quad (15)$$

并且，当参数为 $\alpha=1$ 时，我们得到赖特函数的著名拉普拉斯变换，它可以用双参数 Mittag-Leffler 函数表示。

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{W}_{1,\beta,\nu}(\lambda x),s\right) = \mathcal{L}\left(W_{\beta,\nu}(\lambda x),s\right) = \frac{1}{s}E_{\beta,\nu}\left(\frac{\lambda}{\beta\, s}\right). \quad (16)$$

•

4. $\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}$的递推关系

递推关系是递归定义一列数值的方程；给定一个或多个初始项后，该数列的每个后续项都由前面的项作为函数来定义。广义赖特函数的微分递推关系可用于研究分数阶微分方程，并且可以直接从级数表示中得到。

$$x^{\alpha+\beta}\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}\left(x^{\nu-\alpha+\beta}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu+\beta}(x^{\beta})\right)-2x^{\nu+\beta}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(x^{\beta})+x^{\alpha+\nu}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu-\beta}(x^{\beta})=0. \tag{17}$$

备注 4. 在 $\alpha=\beta=1$ 情况下； $\nu=n+1$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$，并且

$$\frac{d}{dx}\mathcal{W}_{1,1,n}(x)=\mathcal{W}_{1,1,n+1}(x)=C_n(x);$$

我们得到贝塞尔-克利福德函数 $C_n(x)$ 的著名三项递推关系

$$xC_{n+2}(x)+(n+1)C_{n+1}(x)=C_n(x). \tag{18}$$

备注 5. Wright 函数和 Mittag-Leffler 函数的分数阶导数递推关系。根据广义赖特函数与经典赖特函数之间的关系 (11)，关系 (17) 变为

$$\frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}}\left(z^{\lambda+\nu-1}W_{\lambda,\lambda+\nu}\left(\frac{z^{\lambda}}{\lambda}\right)\right)=z^{\nu-1}W_{\lambda,\nu}\left(\frac{z^{\lambda}}{\lambda}\right); \tag{19}$$

使用公式

$$\frac{d}{dz}W_{\lambda,\nu-\lambda}\left(\frac{z^{\lambda}}{\lambda}\right)=z^{\lambda-1}W_{\lambda,\nu}\left(\frac{z^{\lambda}}{\lambda}\right). \tag{20}$$

在 $\alpha=0$ 情况下，且 $\beta\to\alpha$， $\nu\to\beta-1$，广义赖特函数与 Mittag-Leffler 函数之间存在以下关系：

$$\mathcal{W}_{0,\alpha,\beta-1}(z)=E_{\alpha,\beta}(z). \tag{21}$$

特别是，由递推关系 (17) 可得米塔格-莱夫勒函数涉及分数阶导数的新递推关系。

$$z^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dz^{\alpha}}\left(z^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z^{\alpha})\right)-2z^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})+z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta-\alpha}(z^{\alpha})=0. \tag{22}$$

5. 关于 $W_{\alpha,\beta,\nu}$ 参数的偏导数

本节受阿佩尔布拉特和 Mainardi 的研究启发 [29], [30]，分析函数中所含三个参数对应的导数。我们可以将参数视为变量，从而求得关于这些参数的导数。这些导数会导出涉及双伽马（ψ）函数和伽马函数的无穷幂级数。

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(\beta i+1-\alpha)}{\Gamma(\beta i+1)}\frac{\psi(\beta k+1-\alpha+\nu)}{\Gamma(\beta k+1-\alpha+\nu)}z^k; \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(\beta i+1-\alpha)}{\Gamma(\beta i+1)}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+1-\alpha+\nu)}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{k} j\left[\psi(\beta j+1-\alpha)-\psi(\beta j+1)\right]-k\psi(\beta k+1-\alpha+\nu)\right]; \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathcal{W}_{\alpha,\beta,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(\beta i+1-\alpha)}{\Gamma(\beta i+1)}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+1-\alpha+\nu)}\left[-\sum_{j=1}^{k}\psi(\beta j+1-\alpha)+\psi(\beta k+1-\alpha+\nu)\right]; \tag{25}$$

其中，$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ 表示双伽马函数。

备注 6. 在 $\alpha=1$ 的情况下，并考虑双伽马函数的性质 $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$；我们得到 Apelblat-Mainardi 文章（[30]）中关于经典赖特函数的公式 (5) 和 (6)

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\mathcal{W}_{1,\beta,\nu}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \beta}W_{\beta,\nu}\right)(\beta z) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\psi(\beta k+\nu)}{k!\Gamma(\beta k+\nu)}\right)kz^k;$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{W}_{1,\beta,\nu}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}W_{\beta,\nu}\right)(\beta z) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\psi(\beta k+\nu)}{k!\Gamma(\beta k+\nu)}\right)z^k.$$

通过设置参数 $\alpha=0$、$\beta\to\alpha$ 和 $\nu\to\beta-1$，我们得到了阿佩尔布拉特论文（[29]）中的公式 (95) 和 (96)。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathcal{W}_{0,\alpha,\beta-1}(z) = \frac{\partial}{\partial \alpha}E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k\psi(\alpha k+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right)z^k;$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\mathcal{W}_{0,\alpha,\beta-1}(z) = \frac{\partial}{\partial \beta}E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\psi(\alpha k+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right)z^k.$$

6. 结论

本文旨在研究与多指标特殊函数 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 及其三参数版本相关的若干性质。一项重要成果是发现了 $\mathcal{W}^{(\bar{\alpha},\bar{\nu})}$ 与 Delerue超贝塞尔函数之间的联系。本文分析了该函数关于参数的拉普拉斯变换、递推关系和导数。特别是，我们发现，当参数取某些特殊值时，可以得到一些众所周知的关系。事实上，超贝塞尔函数的拉普拉斯变换与多指标米塔格-莱夫勒函数之间存在一个简单的函数关系。

利益冲突声明

作者未报告任何潜在利益冲突。

致谢

作者感谢 Roberto Garra博士提供重要信息、帮助和建议。

参考文献

[1] Podlubny I.《分数阶微分方程》。学术出版社，圣迭戈；1999年。[2] Mainardi F.《线性黏弹性中的分数阶微积分与波：数学模型导论》。世界科学出版社；2010年。[3] Gorenflo R, Kilbas AA, Mainardi F, Rogosin SV.《米塔格-莱夫勒函数、相关主题及应用》（第540页）。美国纽约州纽约：施普林格；2020年。[4] Wright E. M.《渐近分拆公式：I. 平面分拆》。《数学季刊》，第os-2卷，第1期；1931年；第177–189页。https://doi.org/10.1093/qmath/os- 2.1.177[5] Wright E. M.《渐近分拆公式：（II）加权分拆》。《伦敦数学会会刊》，2(1)；1934年；第117-141页。https://doi.org/10.1112/plms/s2- 36.1.117[6] Wright E. M.《渐近分拆公式。III. 分拆为k次幂》。《数学学报》，63(1)；1934年；第143-191页。https://doi.org/10.1007/BF02547353[7] Wright EM.《具有指数奇点的幂级数系数》。《伦敦数学会杂志》8；1933年；第71–79页。[8] Wright EM.《广义贝塞尔函数的渐近展开》。《伦敦数学会会刊》（第二辑）38；1935年；第257–270页。[9] Wright EM.《广义超几何函数的渐近展开》。《伦敦数学会杂志》10；1935年；第287–293页。[10] Garra R, Polito F.《涉及Hadamard导数的一些算子》。《积分变换与特殊函数》；2013年。https://doi.org/10.1080/10652469.2012.756875。[11]Dubovski PB, Slepoi JA.《分数阶准贝塞尔方程级数解的构造与分析》。《分数阶微积分与应用分析》25；2022年；第1229–1249页。https://doi.org/10.1007/s13540-022-00045-z[12] Kiryakova V.《某些“新”而不新的特殊函数的分数阶微积分：K类、多指标类和S类模拟》。《AIP会议论文集》。2172，050008；2019年。

[13] Droghei R.《借助多指标特殊函数求解分数阶超贝塞尔微分方程》。《分数阶微积分与应用分析》24；2021年；第1559–1570页。https://doi.org/10.1515/fca-2021-0065[14] Droghei R, Garra R.《等时分数阶偏微分方程》。《TICMI讲义》21；2020年；第43–51页。[15] Dattoli G, Ricci PE.《拉盖尔型指数函数及相关圆函数与双曲函数》。《格鲁吉亚数学杂志》，10(3)；2003年；第481-494页。[16] Bretti G, Ricci PE.《拉盖尔型特殊函数与种群动力学》。《应用数学与计算》，187(1)；2007年；第89-100页。[17] Ricci PE.《拉盖尔型指数函数、拉盖尔导数及其应用：综述》。《数学》8，2054；2020年。[18] Garra R, Tomovski Z.《若干非线性拉盖尔型扩散方程的精确结果》。《数学建模与分析》，26(1)；2021年；第72-81页。[19] Delerue P.《关于符号演算 `n变量及超贝塞尔函数（II）》。《布鲁塞尔皇家科学学会年刊》3；1953年；第229–274页。[20] Kiryakova V.《广义分数阶微积分及其应用》。朗文–约翰·威立，哈洛、纽约；1994年。[21] Dimowski I, Kiryakova V.《广义泊松变换及超贝塞尔函数的相应表示》。《保加利亚科学院通报》39，第10期；1986年；第20-32页。[22] Dimowski I, Kiryakova V.《超几何函数的广义泊松表示》 ${}_pF_q$，$p<q$《使用分数阶积分》。载于：16th 保加利亚数学家联盟春季会议论文集。索非亚；1987年；第205-212页。[23] Weinstein A.《广义辐射问题与欧拉-泊松-达布方程》。《巴西数学汇刊》3；1955年；第125-147页。[24] Kiryakova V, Hernandez-Suarez V.《贝塞尔-克利福德三阶微分算子及相应的拉普拉斯型积分变换》。《数学论文集》340；1995年；第143-161页。[25] Hayek N.《微分方程`及其应用研究》 $xy''+(\nu+1)y'+y=0$。《数学集刊》18，第1-2期；1967年；第57-174页。[26] Hayek N.《三阶贝塞尔-克利福德函数》。《第十二届葡萄牙-西班牙数学会议论文集》（布拉加）；1987年；第346-351页。[27] Weinstein A.《广义轴对称势理论》。《美国数学会通报》59，20；1955年。[28] Kiryakova V, Luchko Yu.《多指标米塔格-莱夫勒函数及其在应用分析中求解分数阶问题的应用》。《AIP会议论文集》1301，597；2010年；doi: 10.1063/1.3526661。[29] Apelblat A.《拉普拉斯变换方法中对米塔格-莱夫勒函数关于参数求导》。《数学》，8(5)，657；2020年。[30] Apelblat A, Mainardi F.《赖特函数关于参数的求导及其他结果》。「arXiv」电子预印本，arXiv-2009；2020年。

附录 A. 分数阶微积分

为了使本文内容自成体系，我们简要回顾分数阶微积分算子的主要定义和性质。

设 $\gamma\in\mathbb{R}^+$。黎曼-刘维尔分数阶积分定义为

$$J_x^{\gamma}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^x(x-x')^{\gamma-1}f(x')dx', \tag{A1}$$

其中

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx,$$

是欧拉伽马函数。

注意，根据定义， $J_x^0 f(x) = f(x)$。

此外，它满足半群性质，即 $J_x^\alpha J_x^\beta f(x) = J_x^{\alpha+\beta} f(x)$。分数阶导数有多种定义（例如参见 [1]）。本文采用 Caputo 意义下的分数阶导数，即

$$D_x^\gamma f(x) = J_x^{m-\gamma} D_x^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^x (x-x')^{m-\gamma-1} \frac{d^m}{d(x')^m} f(x') \, \mathrm{d}x', \ \gamma \neq m. \quad \text{(A2)}$$

容易证明以下分数阶导数与积分的性质（例如参见 [1]），这些性质将在分析中用到:

$$D_x^\gamma J_x^\gamma f(x) = f(x), \quad \gamma > 0, \quad \text{(A3)}$$

$$J_x^\gamma D_x^\gamma f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}, \qquad \gamma > 0, \ x > 0, \quad \text{(A4)}$$

$$J_x^\gamma x^\delta = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+\gamma+1)} x^{\delta+\gamma} \qquad \gamma > 0, \ \delta > -1, \ t > 0, \quad \text{(A5)}$$

$$D_x^\gamma x^\delta = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-\gamma+1)} x^{\delta-\gamma} \qquad \gamma > 0, \ \delta > -1, \ t > 0. \quad \text{(A6)}$$