arXiv:2301.04651v2 [cs.ET] 6 Dec 2023

基于正交光子空间伊辛机求解20736节点加权最大割问题 *

Xin Ye、Wenjia Zhang、Shaomeng Wang、XiaoxuanYang、Zuyuan He先进光通信系统与网络国家重点实验室 上海交通大学 上海 200240，中国 {Wenjia Zhang}wenjia.zhang@sjtu.edu.cn

摘要

为应对具有挑战性的组合优化问题，基于自然启发式伊辛模型的模拟计算机正受到越来越多的关注，以期颠覆性地克服传统电子计算机即将面临的局限。光子空间伊辛机凭借全连接特性，已成为求解大规模最大割问题的一种独特且原始的方案。然而，自旋配置和自旋翻转需要两组相互独立的空间光调制器（SLM）分别进行振幅调制和相位调制，这将导致光学对准与耦合面临巨大的工程难题。我们提出了一种新型正交光子空间欧拉伊辛机，仅利用单个空间光调制器即可实现大规模且灵活的自旋相互作用配置与自旋翻转，并通过向检测到的光信号中添加数字白噪声，提出了一种噪声增强方法。实验结果表明，该方案能够加速求解（非）加权、（非）全连接的20736节点最大割问题，其性能明显优于数字计算机上的模拟和启发式算法结果。

1 引言

最大割问题是组合优化中的一个基本 NP难问题，可用于描述数据聚类、机器调度和图像识别等实际应用。该问题可以表述为一个不含局部场的等价伊辛模型，即 $H = -\sum_{<l,\ k>} J_{l,\ k} x_l x_k$ 其中 $J_{l,\ k}$ 表示自旋之间的相互作用，二元自旋态为 $x_l \in \{1, -1\}$。光子伊辛机旨在通过迭代采样，或根据特定组合优化问题已建立的映射直接演化系综能量，来搜索伊辛模型的基态 [10, 2, 3, 4]。在这些方案中，将自旋编码为空间光调制器（SLM）中相位矩阵的空间光子伊辛机，可将伊辛模型转换为另一种形式:

$$H = -\sum_{<l,k>} \varepsilon_l \varepsilon_k x_l x_k \tag{1}$$

其中，相互作用系数 $J_{l,\ k}$ 由振幅调制 ε_l 和 ε_k [2]设定。凭借出色的连通性和可扩展性，该方案非常适合求解具有全连接相互作用的大规模最大割问题 [3]。然而，已有的若干伊辛机方案往往侧重于求解基准无权最大割问题，因为这类问题很容易映射为伊辛模型，其中 $J_{l,\ k}$ 取值为 $\{0, \pm 1\}$；而加权问题则更具实际意义，也更为复杂。

本文利用正交光子空间伊辛机（Q-SIM），成功求解了20736节点加权最大割问题。为配置权重，我们基于欧拉公式进行强度配置，并在先前提出的架构 [4] 中扩展了正交相位配置。此外，我们将实验扩展至稠密图实例，并将结果与数值模拟及其他已评述方法所得结果进行比较。实验结果表明，最大割值比

*

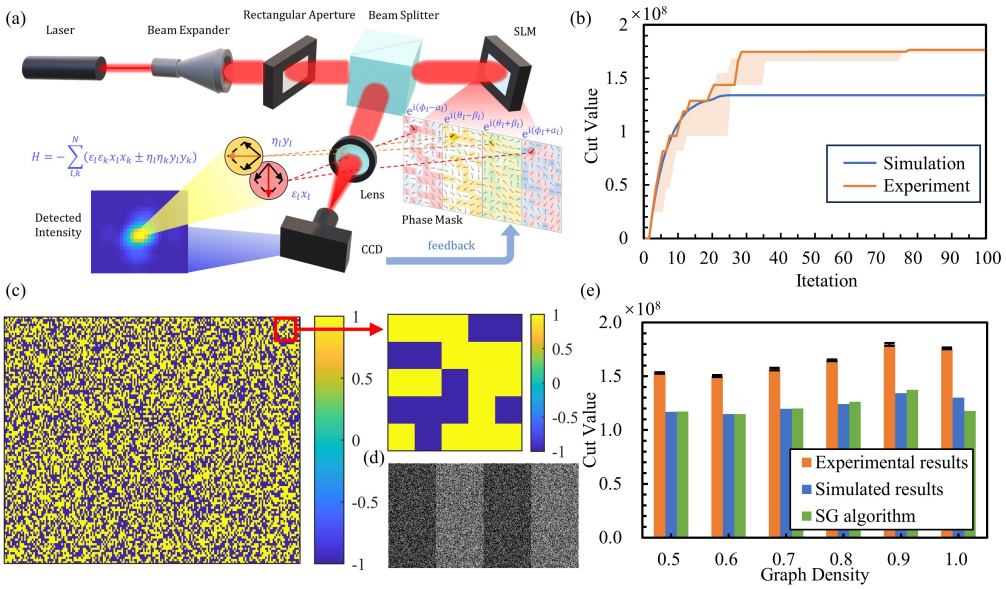


图 1：（a）采用相位到振幅配置的 Q-SIM 示意图及其原理。（b）割值随时间的变化：实验结果（橙线）与模拟结果（蓝线）。浅橙色区域表示十次实验结果分布的区间，橙线表示均值。（c）（b）中的最终实验自旋态。（d）（b）中的最终实验相位掩模。（e）图密度为$[0.5, 1.0]$的最大割问题实验结果。

模拟结果高出33%，比标准 Sahni-Gonzales（SG）算法高出34%。此外，我们的方法显著提升了整体速度。

2 架构与原理

如图 1（a）所示，扩展相干光源照射到空间光调制器屏幕上。空间光调制器的相位掩模由四个部分构成，用于同时编码相互作用系数和自旋态，使具有振幅信息的自旋能够由四个不同的分量表示：$e^{i(\phi_k-\alpha_k)}$、$e^{i(\theta_k-\beta_k)}$、$e^{i(\phi_k+\alpha_k)}$、$-e^{i(\theta_k+\beta_k)}$。这里，$\phi_k \in \{0,\pi\}$和 $\theta_k \in \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$是两组相互正交的相位，用于构建 Q-SIM，如我们先前的工作[4]所示。这些正交相位使低秩矩阵能够灵活配置，从而克服式 1 的形式所施加的秩=1 固有限制。此外，利用这一架构，还成功配置了一些振幅为负的非完全连接伊辛模型。另一方面，根据欧拉公式，$e^{i(\phi_k-\alpha_k)}$ 与$e^{i(\phi_k+\alpha_k)}$ 之和可以构成自旋的振幅

$$\varepsilon_k x_k = \frac{1}{2}[e^{i(\phi_k-\alpha_k)} + e^{i(\phi_k+\alpha_k)}] \tag{2}$$

其中 $\varepsilon_k = \cos\alpha_k$。这种方法简化了振幅配置步骤，同时消除了振幅非负的限制。随后，经透镜进行二维傅里叶变换后，电荷耦合器件相机检测到的中心强度可表示为

$$I(0,0) = (x^T\varepsilon + y^T\eta)(\overline{\varepsilon^T x + \eta^T y}) \tag{3}$$

关于正交光子空间伊辛机原理以及基于欧拉公式的强度配置方法的具体推导过程，详见附录A和B。

现在可以将加权最大割实例映射到伊辛模型中求解。当定义一个割时，相应的割值可写为 $W = \frac{1}{2}\sum_{<l,\ k>} w_{l,\ k}(1 - x_l x_k)$，其中 $w_{l,\ k}$ 是第 l 个节点与第 k 个节点之间的边权重。我们所采用的相关哈密顿量为 $H = \sum_{<l,\ k>} w_{l,\ k} x_l x_k$，其权重可表示为 $w_{l,\ k} = \cos\alpha_l \cos\ \alpha_k \pm \cos\ \beta_l \cos\ \beta_k$。因此，我们可以在实验过程中通过最大化中心强度来搜索最大割值。在这里，我们计算初始检测强度I与目标强度I_T之间的欧几里得距离 $\|I_T - I\|_2$，并将其作为模拟退火（SA）算法的代价函数，从而生成

新的相位掩模，以刷新空间光调制器屏幕。该过程不断循环，以控制哈密顿量演化，直至系统稳定于基态。基于模拟退火算法的实验装置详情和操作流程见附录 C 和 D。

3 实验与讨论

鉴于精确求解器通常无法处理 1000 个节点的问题，我们需要在传统电子计算平台上进行基准计算。为了解决更大规模的实例，我们选择采用一种称为 SG 算法的经典贪心启发式算法 [10]。对于包含 20736 个节点的最大割问题，在中央处理器（Intel i9-13900K，5.8 GHz）上执行 SG 算法平均需要 11 小时。对于全连接最大割问题，SG 方法生成的最大割值为 1.178×10^8，而我们的方法在速度提升 122 倍的同时，产生了更高的割值 1.759×10^8，如图 1(b) 所示。此外，我们还进行了模拟，以仿真光子伊辛机的运行。值得注意的是，我们发现模拟结果同样劣于实验结果。

最后，我们将最大割问题的实验和模拟结果外推至图密度为 $[0.5, 1.0]$ 的情况，并与 SG 算法进行比较。结果如图 1(e) 所示，从统计上证明，与模拟结果和 SG 算法相比，我们的方案在处理大规模最大割问题方面具有显著优势，优于电子计算机。实验最大割值平均超过 SG 算法 34%，在图密度为 1.0 时最高可达到 49%，这恰好体现了全连接系统的固有优势。此外，实验结果通常比模拟结果高出约 33%。这些结果将在附录 E 给出的计算结果中进一步说明。我们推测，对噪声较为敏感的检测可能会在实验中引入一定扰动，从而更容易跳出局部能量极小值。这一内在特性与模拟退火算法更加契合，因此提升了机器性能。事实上，已有相关工作报道，噪声增强的光子伊辛机可用于求解大规模组合优化问题[5]。

4 讨论与结论

我们对本系统求解最大割问题的性能进行了比较分析（详见附录 F），并与其他伊辛机进行了对比，发现本系统具有以下优势：(1) 能够高效求解大规模最大割问题。(2) 对（非）全连接最大割问题具有灵活的映射能力，可任意分配振幅。(3) 实验装置简便且成本低廉。

总之，我们针对最大割问题实例，采用相位到振幅配置，对 Q-SIM 进行了广泛实验。该系统能够有效求解最多包含 20736 个节点的稠密图加权问题，与经典求解器相比，性能提升超过 30%。因此，我们的方案在光学计算范式下展现出卓越的优化性能和快速的计算速度，是解决大规模 NP 问题的极具竞争力的方案。

致谢

本工作得到国家重点研发计划（项目编号：2019YFB1802903）、国家自然科学基金委员会（项目编号：62175146 和 62235011）以及鹏城实验室重大重点项目（PCL2021A14）的支持。

参考文献

[1] Toshimori Honjo、Tomohiro Sonobe、Kensuke Inaba、Takahiro Inagaki、Takuya Ikuta、Yasuhiro Yamada、Takushi Kazama、Koji Enbutsu、Takeshi Umeki、Ryoichi Kasahara 等。10万自旋相干伊辛机。*Science Advances*，7(40):eabh0952，2021年。[2] D Pierangeli、G Marcucci 和 C Conti。通过空间光调制实现的大规模光子伊辛机。*Physical Review Letters*，122(21):213902，2019年。[3] Yisheng Fang、Junyi Huang 和 Zhichao Ruan。空间光子伊辛机中相变的实验观测。*Physical Review Letters*，127(4):043902，2021年。[4] Wenchen Sun、Wenjia Zhang、Yuanyuan Liu、Qingwen Liu 和 Zuyuan He。正交光子空间伊辛机。《光学快报》，47(6):1498–1501，2022年。

[5] Davide Pierangeli、Giulia Marcucci、Daniel Brunner 和 Claudio Conti。噪声增强型空间光子伊辛机。*Nanophotonics*，9(13):4109–4116，2020年。

正交光子空间伊辛机演示

在空间光子伊辛机中，经过振幅调制和相位编码后的电场为

$$E_k = \sum_k^N \varepsilon_k x_k rect_W(x - x_k) \tag{4}$$

其中 $x_k = e^{i\phi_k} \in \{-1, 1\}$。透镜后焦平面处的电场对应于 E_k 的傅里叶变换。

$$\widetilde{E_k} = \sum_k^N \varepsilon_k x_k \delta_W(x - x_k) \tag{5}$$

因此，电荷耦合器件检测到的中心强度为

$$I(0,0) = x^T \varepsilon^T \varepsilon x \tag{6}$$

其中 $x^N \in \{-1, 1\}^N$。

在正交光子空间伊辛机中，空间光调制器配置了两个规模相同、同时运行的伊辛模型。自旋值（x^N， y^N）同时更新，并由关系矩阵 A 决定

$$y = Ax \tag{7}$$

其中 $A = diag(a_1, a_2, ..., a_N)$， $a_k \in \{-i, i\}$。编码在 SLM 上的两组相位彼此正交：$\phi_k(x) \in \{0, \pi\}$， $\phi_k(y) \in \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$。与式 6 类似，CCD 上检测到的强度图像为

$$I(0,0) = (x^T \varepsilon^T + y^T \eta^T)(\overline{\varepsilon x + \eta y}) \tag{8}$$

因此，相互作用矩阵可表示为

$$J = \varepsilon^T \varepsilon \pm \eta^T \eta \tag{9}$$

在该方程中，自由参数 ε_k 和 η_k 的组合决定 J_k 为正或负，从而实现对低秩矩阵的灵活配置。

B 基于欧拉公式的振幅配置方法详细推导

振幅调制后的入射光照射到 SLM 上，其横向电场可表示为式 4。根据欧拉公式的推论 $e^{i\cos^{-1}\varepsilon'} + e^{-i\cos^{-1}\varepsilon'} = 2\varepsilon'$，令 $\alpha = \cos^{-1}\varepsilon'$，则归一化至 $[-1, 1]$ 的振幅表示为

$$\varepsilon' = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \tag{10}$$

将式 10 代入式 4，得

$$E_k = \sum_k^N \frac{1}{2}[e^{i(\phi_k - \alpha_k)} + e^{i(\phi_k + \alpha_k)}] rect_W(x - x_k) \tag{11}$$

式 11 可改写为

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_k^N [e^{i(\phi_k + (-1)^{2k-1}\alpha_k)} + e^{i(\phi_k + (-1)^{2k}\alpha_k)}] rect_W(x - x_k) \tag{12}$$

集合 $\{l | l = 2k - 1, k = 1, 2...N\}$和 $\{l | l = 2k, k = 1, 2...N\}$可合并为一个集合 $\{l | l = 1, 2...2N\}$，因此式 12 可简化为

$$E_l = \frac{1}{2}\sum_l^{2N} [e^{i(\phi_l + (-1)^l \alpha_l)}] rect_W(x - x_l) \tag{13}$$

式 13 符合相位调制后的电场形式，因此无需振幅调制。为此，需要两倍数量的像素，并对空间光调制器上的相位进行 $\phi_{l,SLM} = \phi_l + (-1)^l \alpha_l$。

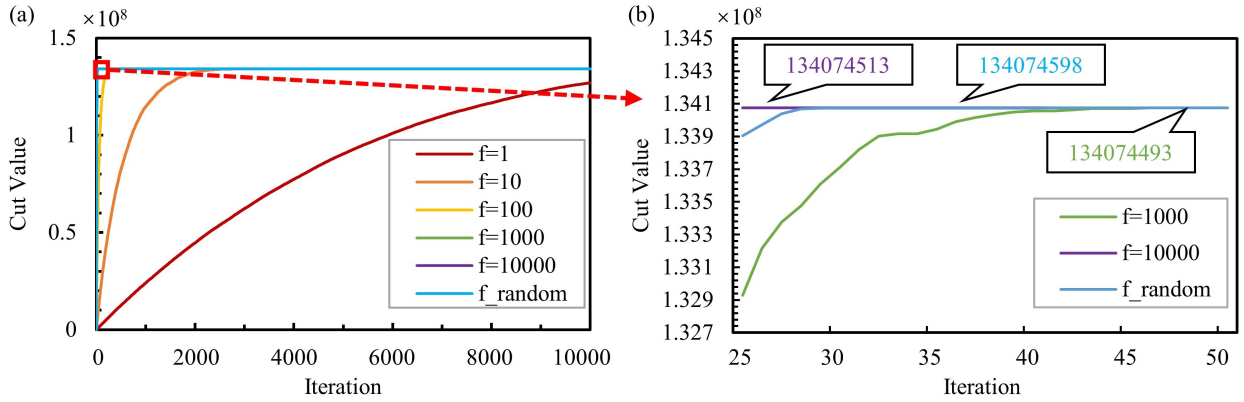


图 2：**20736节点最大割问题的割值随每次迭代翻转的自旋数变化**。(a) 在每次迭代翻转特定数量的自旋（$f = 1$、10、100、1000、10000）和随机数量（f_random）的情况下，割值的模拟演化。(b) 大量固定翻转数与随机翻转数之间优化结果的细节。

C 实验装置

具体而言，我们使用中心波长为 632 nm 的稳定型红色氦氖激光器（Thorlabs 稳定型氦氖激光器）作为光源。激光器在强度稳定模式下工作时，输出功率保持恒定在 1.2 mW，强度稳定度为 ±0.2%，从而避免功率波动对实验结果造成影响。激光器后方依次设置 40 倍光束扩束装置和矩形光阑，以产生足够大的矩形光斑，完全覆盖所用的反射式纯相位空间光调制器（HOLOEYE LETO-3-CFS-127，1920×1080 像素，像素间距为 6.4 μm）。因此，所有像素均被激活，以最大限度提高像素利用率，同时尽可能减少调制相关的像素对准问题。此外，我们选择 10×10 个像素作为自旋单元进行均匀调制，以减少位置偏差。为分离空间光调制器的入射光路和反射光路，我们在光路中放置了一个分束器（BS）。分束器其中一条光路上放置的透镜（焦距 $f = 150$ mm）对来自空间光调制器的光场进行二维傅里叶变换。后方的电荷耦合器件（CCD，相机型号 QSI 660i， 2758×2208 像素，16 位数字分辨率）相机检测透镜后焦平面上的光强。理论上，中心位置的光强包含足够的测量信息。然而，单像素光强容易因位置偏差而产生严重误差，而全像素图像则会包含更多来自高阶衍射光和自然光的噪声。因此，我们最终将检测区域设定为 10×10 个像素，每个像素的尺寸为 4.54 μm。此外，每次迭代中我们检测 5 次并取平均值，两次检测之间间隔一秒。

D 算法与操作

Usi使用模拟退火算法，我们通过以下步骤搜索最大割问题的解 .

输入：自旋数 N，权重向量 w，n×n 伊辛相互作用矩阵 $J = w^T * w$，退火系数 λ，终止温度 T_{end}，目标强度 I_T

输出：最优自旋向量 $x_{end} \in \{-1, 1\}^N$，最大割值 W_{end}

初始化：随机自旋向量 $x \leftarrow x_0 \in \{-1, 1\}^N$、割值 $W \leftarrow W_0$、哈密顿量 $H \leftarrow H_0$、退火温度 $T \leftarrow T_0$

当 $T > T_{end}$

随机翻转若干个自旋，生成新的自旋态；

更新空间光调制器；

通过电荷耦合器件检测强度 I_{new}；

计算 W_{new}、 H_{new}；

如果 $\|I_T - I_{new}\|_2 < \|I_T - I\|_2$

表1：最大割问题的实验、模拟和 SG 结果

密度	实验		模拟	SG	增长率（相较于 SG）	
	max	ave			max	ave
0.5	153704302	153039395	116980988	117136449	31.22%	30.65%
0.6	151121359	150150495	114841395	114847656	31.58%	30.74%
0.7	157960371	156723864	119879172	119899908	31.74%	30.71%
0.8	166267212	164785788	124132477	126118964	31.83%	30.66%
0.9	181297365	179571382	134334306	137372580	31.97%	30.72%
1.0	176701819	175863542	130222153	117751430	50.06%	49.35%

$x \leftarrow x_{new}$;$W \leftarrow W_{new}$;
$H \leftarrow H_{new}$; 否则如果 $rand$
$(0, 1) < e^{-\frac{H-H_{new}}{T}} x \leftarrow x_{new}$
$W \leftarrow W_{new} H \leftarrow H_{new}$结束
if 结束 if$T \leftarrow \lambda * T$结束
while

返回 x,W
唯一非平凡之处在于，自旋翻转的数量和顺序是随机生成的，这与其他已报道的方案不同，后者每次只翻转一个自旋[1, 2, 3]。这是因为，对于大规模问题，每次只翻转一个自旋无法有效确保快速收敛。我们的方案降低了搜索结果对初始值的依赖，并显著提高了收敛速度。图2比较了每次迭代的翻转次数对收敛率的影响。显然，每次只翻转一个自旋会阻碍快速收敛。固定的翻转次数也可能限制搜索空间，进而使搜索受限于局部最优解。图中清楚地表明，随机翻转更有利于问题收敛和优化。

E 实验与模拟结果

最大割问题的实例由包含 20736 个节点的图构成，边权为从区间 [-10,10] 中选取的随机浮点数，图密度为 $d \in \{0.5, 1\}$；这些实例参照 Rudy 生成的实例[4]。我们采用 SG 算法、数值模拟和实验求解这些问题，结果如表1所示。

易受噪声影响的检测可能会给实验带来一些不确定性。我们推测，正是这种差异使系统更容易跳出局部最优解，并更好地适应模拟退火算法，从而得到更优的解。事实上，已有多项相关研究报告称，噪声加速、噪声增强和噪声诱导的光子伊辛机可用于求解大规模组合优化问题 [5, 6, 7]。我们在实验中加入数字白噪声，从而精确控制噪声，其噪声水平由归一化噪声方差决定。以图密度为 0.5 的最大割问题为例，图3(a)展示了使用我们的 Q-SIM 在不同噪声水平下求解该问题所得的结果。图3(b)则展示了图3(a)中在最优噪声水平下割值的完整演化过程。

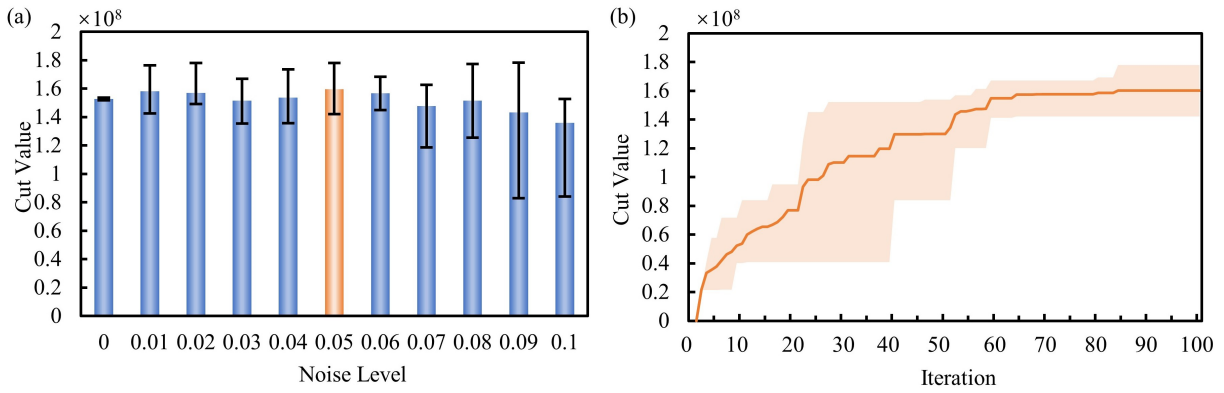


图 3：**注入噪声对 Q-SIM 性能的影响**。(a) 在数字噪声水平为 0–0.1 时，求解 20736节点最大割问题（密度 =0.5）的实验结果。最优噪声水平下的结果以橙色条标示。(b) 噪声水平为 0.05 时割值的实验演化。浅橙色区域表示十次实验的结果分布区间，橙色线表示均值。

表 2：比较基于 Q-SIM 的相位到幅度调制方法与其他方法在求解最大割问题时的性能。

伊辛机	实现	问题类型	问题规模	求解时间
8-FPGA SB 机器 [8]	Easy	全连接、加权	16,384 节点	1.2 毫秒
PRIS [9]	Easy	全连接，无权重	100节点	每步63纳秒
采用 DOPO 的 CIM [10]	非常困难	全连接，无权重	100000节点	785 μ秒
带 OEPO 的 CIM [11]	Hard	稀疏、无权重	56节点	4.5 μ秒
D-Wave 2000Q [12, 13]	非常困难	稀疏、加权	2500 个节点	$> 10^4$ 秒（适用于 55 个节点）
Q-SIM（我们的方法）	Easy	全连接，加权	20000 个节点	325 秒

F 关于光学伊辛机求解最大割问题性能的讨论 ms

我们在表 2 中比较了基于 Q-SIM 的相位到幅度调制与其他伊辛机在求解最大割问题时的性能。我们评估了实现方式、问题类型和规模、求解时间（或速度）等相关指标，并得出以下结论：

1. 高效求解大规模最大割问题。与大多数解决方案相比， [8, 9, 11, 12], 我们能够轻松求解规模超过 20,000 的最大割问题，接近迄今报道的最高纪录 [10]。事实上，在实验中，为确保伊辛系统的一致性，我们采用相邻的 10×10 像素作为同一编码的操作单元，因此并未充分利用所有像素点。通过进一步优化对准和探测能力，问题规模有望扩大百倍。
2. 灵活映射任意振幅的（非）全连接最大割问题。考虑到实验设置，许多方案倾向于展示求解基准稀疏无权最大割问题 [9, 10, 11]的过程。显然，无权重降低了复杂度，而全连接问题比稀疏问题更具实际价值，也更难实现 [8]。因此，许多设计都竭力实现全连接。量子退火机以牺牲规模为代价，而相干伊辛机也通过各种方案弥补这一不足。实现加权则更加困难。然而，这正是光学伊辛机的优势所在；我们的设计通过灵活切换全连接与非全连接、加权与无权重问题，进一步放大了这一优势。

3. 简单且经济高效的实验搭建。量子退火机需要低温环境，因此功耗大、成本高。即便是相干伊辛机，也对实验条件有严格要求。为将光学损耗和光学增益控制在阈值范围内，并确保自旋间耦合，需要使用长达数十公里的光纤振荡器，这会带来相当大的往返损耗。相比之下，我们基于简单空间光调制器的方法，在实验成本和可操作性方面更具优势。

尽管不同的伊辛机在解决最大割问题时各具优势，例如超大规模、 [10], 超高速、 [9], 高稳定性、 [11], 以及任意最大割问题映射 [8, 9], , 但我们的设计采用更经济的实验架构，实现了接近最大规模的规模

并且能够自由映射（非）全连接、（非）加权最大割问题，这对于解决NP难问题具有更大的实际意义。尽管该设计在计算速度方面仍有很大提升空间，且受到数据光电传输和空间光调制器刷新频率的限制，但其速度仍优于电计算，甚至优于量子退火。

参考文献

[1] Pierangeli D, Marcucci G, Conti C. 空间光子伊辛机上的绝热演化[J]. Optica, 2020年, 7(11): 1535-1543[2] Ouyang J, Liao Y, Ma Z, et al. 一种按需光子伊辛机：通过相位编码和强度检测简化哈密顿量计算[J]. arXiv 预印本 arXiv:2207.05072, 2022年[3] Fang Y, Huang J, Ruan Z. 空间光子伊辛机中相变的实验观测[J]. Physical Review Letters, 2021年, 127(4): 043902[4] Rinaldi, G. Rudy. 1998. http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/rudy.tar.gz[5] Pierangeli D, Marcucci G, Brunner D, et al. 噪声增强型空间光子伊辛机[J]. Nanophotonics, 2020年, 9(13): 4109-4116[6] Prabhu M, Roques-Carmes C, Shen Y, etal. 在光子集成电路中加速循环伊辛机[J]. Optica, 2020年, 7(5): 551-558[7] Böhm F, Alonso-Urquijo D, Verschaffelt G, et al. 噪声注入型模拟伊辛机实现超快速统计抽样和机器学习[J]. Nature Communications, 2022年, 13(1): 5847[8] Tatsumura K, Yamasaki M, Goto H. 利用模拟分岔的多芯片架构扩展伊辛机规模[J]. Nature Electronics, 2021年, 4(3): 208-217[9] Roques-Carmes C, Shen Y, Zanoci C, et al. 光子伊辛机的启发式循环算法[J]. Nature communications, 2020年, 11(1): 249[10] Honjo T, Sonobe T, Inaba K, et al. 10万自旋相干伊辛机[J]. Science Advances, 2021年, 7(40): eabh0952[11] Cen Q, Ding H, Hao T, et al. 基于光电参量振荡器的大规模相干伊辛机[J]. Light: Science and Applications, 2022年, 11(1): 333[12] Inc, D.-W. S. 二次优化的混合求解器。https://www.dwavesys.com/media/soxph512/hybrid- solvers-for-quadratic-optimization.pdf (2022年)[13] Dutta S, Khanna A, Assoa A S, et al. 基于耦合随机相变纳米振荡器的伊辛哈密顿量求解器[J]. Nature Electronics, 2021年, 4(7): 502-512