arXiv:2301.04690v1 [cs.CC] 13 Oct 2022

关于（多）计算不可约性的函子视角

Jonathan Gorard[1,2]

[1]英国卡迪夫卡迪夫大学*

[2]英国剑桥剑桥大学†

2023年1月13日

摘要

本文旨在将计算不可约性这一概念形式化为：数据结构与基本计算范畴同相应的（一维）配边范畴之间的函子对应的正合性。我们将展示，通过为这两个范畴赋予对称幺半结构，并考察高维配边范畴的情形，可以得到这一形式体系的自然扩展；该扩展还能够涵盖非确定性或“多路”计算。在这类计算中，所量化的不仅是单条（确定性）计算路径行为的不可约性，还包括整个此类路径构成的“多路系统”中的分支与合并行为。最后，我们概述在最一般的情形下，所得的对称幺半函子如何被视为与刻画函子量子场论的 Atiyah-Segal 公理化的函子互为伴随。因此，我们最后论证，在函子化的量子力学和量子场论方法中，（多重）计算的不可约性可以被理解为时间演化局域性的对偶。在这一过程中，我们提出了对标准（幺半）范畴论方法的一种扩展：其中的态射被有效地赋予内在的计算复杂度数据，同时还配备了一个描述这些复杂度如何复合的代数（既包括按序列复合，也包括受幺半结构约束的并行复合）。我们还简要讨论了这一形式体系的一些可能扩展（例如涵盖因果性、空间复杂度、不可逆性、张量网络中的指标操作复杂度等概念），以及其对物理学的潜在影响（例如使我们能够在形式上区分熵的某些计算定义与多重计算定义）。

*gorardj@cardiff.ac.uk

†jg865@cantab.ac.uk

1 引言

计算不可约性最初由 Stephen Wolfram 于20世纪80年代提出[1], ，并在《一种新科学》中通过实证加以探索《一种新科学》[2] （NKS），随后又由作者在后续工作中进一步完善并形式化[3], 。它指的是这样一种普遍现象：任何足够复杂的计算过程，其结果都无法通过少于该系统自身进行显式演化所需的计算工作量来预测（或“捷径求解”）。因此，计算不可约性可以被视为对标准递归论概念——通用性与不可判定性——的一种扩展[4][5][6] （事实上，通过对角化很容易证明，任何图灵完备计算都必然是不可约的；而不可判定性可以被理解为不可约性的一种极限情形，在这种情形下，某些计算的长度变为无限）。在 NKS范式中（其中所有自然过程都被设想为与计算相对应），传统的理论科学方法便对应于计算可约的情形，因此可以借助足够复杂的科学与数学分析工具预先得出其结果。在自然系统中的复杂性这一抽象现象，反过来也可以被理解为对应于计算在根本上不可约的情形复杂性 ，因此理论科学家唯一合理的行动方式，就是对系统的行为进行显式模拟不可约[7][8][9]。

本文旨在将作者此前对计算不可约性的形式化定义，重新表述于更广阔的函子性[10]概念框架之中。在第 2 节中，通过考察这样一个范畴——其对象是数据结构，态射是基本计算（首先，本文选用图灵机作为计算形式模型；相应的范畴以图灵机纸带/读写头的配置及读写头位置为对象，以图灵机部分转移函数的应用为态射）——我们得以根据某个映射的组合性质，重新表述可约性/不可约性的定义。该映射将这个范畴映到另一个范畴，后者的对象是时间步/步数，态射是这些步数之间的离散区间。这样一来，原始的图灵机状态与计算范畴中的态射便具备了内在的计算复杂度数据，同时还赋予了它们一种自然代数结构（由该映射对合成运算的作用所编码），用于描述相应时间复杂度的复合方式。于是，计算不可约性对应于这些复杂度仅以纯加法方式复合的情形，因此该映射是一个纯函子；这使我们能够以相当精确的方式指出，不可约性即函子性。计算可约性则衡量该映射在多大程度上扭曲时间复杂度的纯加法合成，也就是说，它衡量偏离

纯函子性的程度。该映射的陪域（即步数与离散区间构成的范畴）可以解释为一种离散化：它来自（1 维）配边范畴，该范畴描述（0 维）流形之间的“边界粘合”。[11][12]

在第3节中，我们将继续证明：当我们的数据结构与基本计算范畴还配备了对称张量积结构（从而使其提升为对称幺半范畴[13]）时，它便能够描述由许多不同的分支与合并（单路）计算路径构成的多路系统；该多路系统的分支图 则描述了相应幺半范畴的张量积结构。此时，先前针对普通范畴和单路计算的不可约性形式体系可以非常自然地扩展到多重计算 情形。正如（单路）计算可约性可以表述为普通（顺序）复合计算时，时间复杂度加法性失真程度的一种度量，多重计算可约性 也可以表述为并行（张量积）复合计算时，时间复杂度加法性失真程度的一种度量。因此，多重计算不可约的计算，是指从数据结构与基本计算的（幺半）范畴到由步数的并行复合和离散区间的并行复合构成的（幺半）范畴（后者实际上描述了分支图的坐标化）的映射为纯对称幺半 函子的计算。这一思想以形式化的方式具体呈现了这样一种直觉：若要确定最终结果，必须明确追踪复合过程中的每一个中间步骤，则单路计算是不可约的；而若要确定系统整体的分支结构，必须明确追踪每一条单路计算路径，则多路计算是不可约的。这个对称幺半范畴之间的映射的陪域，现在可以解释为高维流形（配备黎曼结构）之间的配边高维范畴的一种离散化。我们讨论了普通计算不可约性如何源于多路系统定义中所用状态演化函数 的复杂性，而多重计算不可约性则源于其状态等价函数的复杂性，并强调这两个概念本质上彼此正交（例如，很容易通过许多计算可约的单路路径的张量积构造出多重计算不可约系统）。为说明这一点，我们还分析了多路超图重写系统的情形：其中，状态演化函数的计算复杂度与图灵机演化相当，但状态等价函数（基于超图同构）则复杂得多。在第4节中，我们将说明，在某种一般意义上，从数据结构与计算复...

将计算映射到步数和区间、刻画不可约计算的函子，可以被视为左伴随 函子：它与范畴量子力学中将时间时刻和区间映射到向量空间和线性同构的函子相伴[14]。因此，刻画计算不可约性的同一函子性，可以被视为在形式上与刻画非相对论量子力学中时间演化局域性的函子性对偶／伴随（在非相对论量子力学中，任一区间上的全局幺正演化都可以分解为若干子区间上的局域幺正演化）。自然地扩展这一思路，我们将展示，编码不可约多重计算的对称幺半函子，可以被视为从流形和配边到向量空间和线性同构、定义函子量子场论的对称幺半函子的左伴随；而多重计算不可约性的函子性，此时与*Atiyah-Segal* 粘合定律[15][16][17], 对偶／伴随，其中任一全局区间上的路径积分都可以分解为子区间上的局部路径积分。因此，我们主张，计算复杂性理论与范畴量子力学之间，以及多重计算复杂性理论与函子量子场论之间，存在一般性的伴随关系。我们还讨论了范畴量子力学和函子量子场论模型中固有的其他一些代数结构（尤其是相应范畴的对合$dagger$ 结构和紧 结构）可能因此具有哪些潜在的复杂性理论解释（例如，从反向计算的不可约性角度，或从交换多参数、多值函数复合中的自变量和值的角度来解释，此类函数如张量网络或幺半范畴弦图所描述，等等）；不过，对这些解释的完整分析超出了本文的范围。

最后，在第5节中，我们概述本文所发展的形式体系的一些更广泛影响，包括将普通（幺半）范畴论中的技术加以推广，以适用于态射表示具有相应计算复杂性类的显式计算的情形；因此，复合运算必须遵循底层代数，以反映各种计算的复杂性如何相互作用。我们还讨论了运用这些新代数技术，更系统地研究某种意义上比传统计算复杂性理论研究范围内的复杂性类和（多）计算复杂性类更“狂野”或结构更少（即其复合代数的性质不那么良好）的计算复杂性类和（多）计算复杂性类的可能性；此外，我们指出了多计算复杂性类与传统非确定性复杂性类之间的种种差异（具体而言，前者考察多路系统中分支与合并运算固有的计算复杂性，而不仅仅考察单个多路分支以非确定性方式产生的结果

）。我们概述了其对物理学的一些潜在影响，包括对熵的两种不同计算定义作出一种合理的区分：一种将微观状态视为系统可能的瞬时状态（因而基于计算不可约性），另一种则将微观状态视为系统可能的演化历史路径（因而基于多重计算不可约性）；这两种定义往往会被混为一谈。我们提出了一些可能的未来研究方向，包括扩展相关映射/函子，使其也能涵盖匕首结构和/或紧结构的保持；通过某些高阶范畴/高阶函子，将整体形式体系扩展到涵盖因果关系结构所编码的附加信息；以及扩展到多参数计算，即通过 全局-局部 多路系统所编码的计算，并将其描述为张量网络/弦图。

请注意，本文讨论的大多数（但绝非全部）范畴都是小的 （而所有非小范畴都已得到广泛研究，因此其行为至少在一定程度上是良好的）。因此，我们今后将不再考虑集合论问题，无论相关结构是集合还是正规类，都会使用“对象集”和“同态集”等术语。此外，请注意，复现本文结果、证明和图示所需的代码均为开源代码，并通过 *Wolfram* 函数库免费开放，例如，系统演化可使用 MultiwayTuringMachine、TuringMachineGlocalMultiwaySystem 和 MultiwaySystem，而底层范畴论结构的表示（以及自动化其上的定理证明过程）可使用 AbstractCategory、AbstractFunctor 和 AbstractStrict MonoidalCategory 等。

2 （单路）不可约性即函子性

我们首先采用作者在 [3]中提出的计算不可约性的形式化定义：**定义 1** 如果 f： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是定义在自然数上的函数，而 T 是一个图灵机，它在固定输入 i 下经过 n 步计算出 $f(i)$ 的值，那么，当且仅当存在一台图灵机 T^*，能在 m 步内计算出 $f(i)$， T的计算才是可约的，其中 $m < n$[5][6]。

因此，计算的可约性“程度”可以用差异来量化，即 $n - m$ 的值（反向的值，即对于满足 $m \geq n$ 的不可约计算而言的 $m - n$，称为 T^* 对 T 的模拟的减速 ）。请注意，此处及下文我们均假设所有图灵机都是单带图灵机；[7] 这样假设不失一般性，因为任何 k带

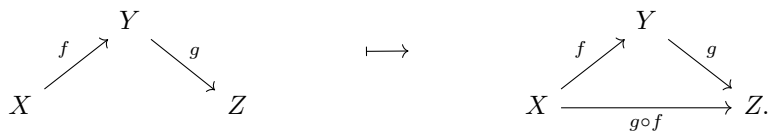
图灵机 M 若以时间 $f(n)$ 运行，则可由一台以时间 $O\left([f(n)\text{ 运行的单带图灵机 }M'\text{ 模拟}]^2\right)$，也就是说，对任意输入 x，$M'(x) = M(x)$[18][19]。我们还（隐式地）采用了 Hopcroft-Ullman 对单带图灵机 T 的形式化定义[6]：将其表示为一个七元组 $T = \langle Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$，其中包括有限字母表集合 $\Gamma \neq \varnothing$、空白符号 $b \in \Gamma$、输入符号 $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{b\}$、有限状态集合 $Q \neq \varnothing$、初始状态$q_0 \in Q$、接受状态 $F \subseteq Q$ 以及（部分）转移函数：

$$\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, F\}\,. \tag{1}$$

现在，我们可以构造一个范畴[10]，用来表示某个特定的形式（抽象）计算模型；其对象是数据结构，其态射是基本／原始计算。对于这里讨论的由图灵机 T 生成的范畴这一具体情形，我们将其记为 $\mathcal{T}$，并选择可能的有序三元组集合 $\Gamma^{\aleph_0} \times Q \times \mathbb{N}$ 作为它的对象集 $\mathrm{ob}(\mathcal{T})$。这些三元组由纸带状态、读写头状态和读写头位置组成（假设纸带长度无限）。我们希望其态射集 $\hom(\mathcal{T})$ 由图灵机 T 所有可能的有效转移构成。为构造这个态射集，我们因此先构造一个箭图（即有向多重图），其箭头／边对应于（部分）转移函数 δ 的应用；就当前目的而言，只需将所有这类可能箭头的集合视为 $N \times \left(\Gamma^{\aleph_0} \times Q \times \mathbb{N}\right)^2$，也就是说，将每个箭头视为一个有序三元组（$f, X, Y$），记作 $f\colon X \to Y$，由一个名称 $f \in N$ 和一对元素$X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{T})$ 组成（X 是箭头的源／定义域，Y 是其目标／陪域）。如果一开始将箭头／转移集合纳入态射集 $\hom(\mathcal{T})$，然后引入一个二元复合算子 $\circ$，使得：这个箭图便自由生成一个范畴。

$$\forall (f : X \to Y), (g : Y \to Z) \in \hom(\mathcal{T}), \qquad (g \circ f : X \to Z) \in \hom(\mathcal{T}), \tag{2}$$

也就是说，任意一对陪域与定义域相匹配的态射，都可以通过该运算符进行复合 $\circ$。如果 X、Y 和 Z 表示可能的图灵机状态（包括纸带状态、读写头状态和读写头位置），而 f 和 g 表示可能的图灵机转移，那么从底层箭图生成范畴的过程可以用图表表示如下：



(3)

由此得到的代数结构确实是一个范畴，因为算子 $\circ$ 继承了结合律：

$\forall (f\colon X \to Y)$, $(g\colon Y \to Z)$, $(h\colon Z \to W) \in$同态集 $(\mathcal{T})$,

$$((h \circ g) \circ f : X \to W) = (h \circ (g \circ f) : X \to W)\,, \quad (4)$$

根据 （部分）函数复合满足结合律这一事实，以及恒等公理，即 :

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{T})\,, \qquad \exists\,(id_X : X \to X) \in \hom\,(\mathcal{T})\,, \quad (5)$$

使得:

$$\forall\,(f : X \to Y) \in \hom\,(\mathcal{T})\,, \qquad (f \circ id_X : X \to Y) = (f : X \to Y)\,, \quad (6)$$

and:

$$\forall\,(g : Y \to X) \in \hom\,(\mathcal{T})\,, \qquad (id_X \circ g : Y \to X) = (g : Y \to X)\,, \quad (7)$$

成立，这是因为可以通过添加一个中性（“不移动”）操作 id 来扩充（部分）转移函数，如下所示:

$$\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, id\}\,. \quad (8)$$

请注意，由于此处讨论的图灵机都是确定性／经典的，也就是说，（部分）转移函数始终是单值的，因此所得箭图必定呈现为路径图、环图，或路径图与环图的并集。图2展示了这一构造的一个具体示例，所用的是图1所示的二状态、二颜色图灵机（在图灵机标准枚举中称为规则编号2506）。

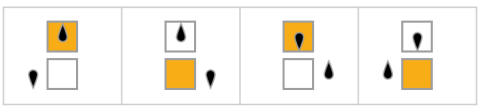


图1：规则编号2506的二状态、二颜色图灵机的图示，其中黑色图标表示读写头的位置和状态。

因此，获得表示图灵机 T 的完整范畴 $\mathcal{T}$ 这一过程，可以

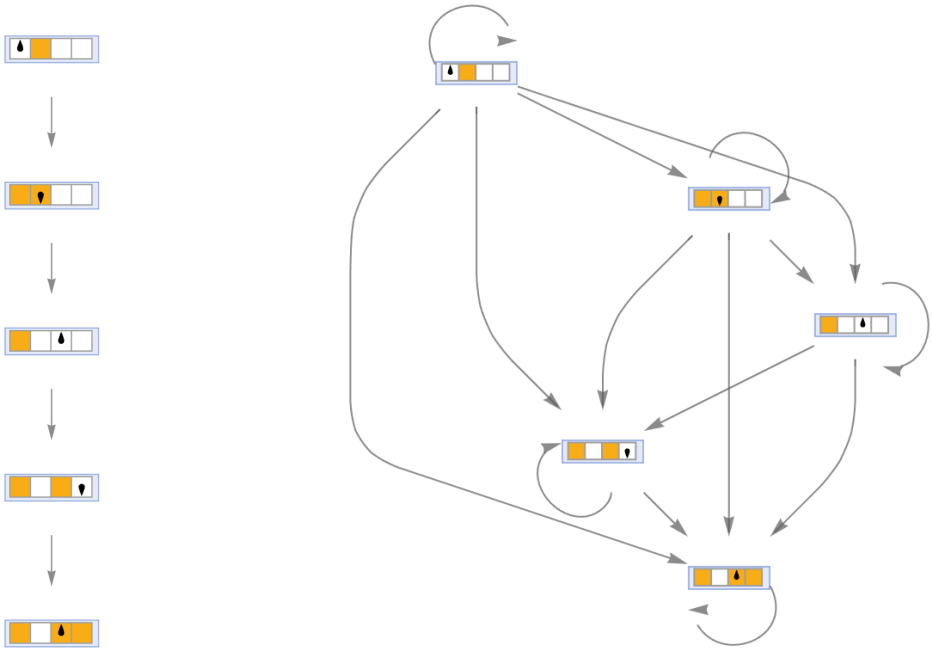


图2：左侧展示了二状态、二颜色图灵机规则2506从纸带状态 $\{0,1,0,0\}$ 开始演化4步的图论表示；箭图的每个箭头/边都表示图灵机转移函数的一次应用。右侧展示了由该箭图自由生成的范畴的图论表示。

从图论角度理解为对底层转移箭图取自反传递闭包。然而，至少从概念上说，取传递闭包这一操作似乎与计算不可约性的精神大相径庭——直觉上，这似乎意味着，只要存在从 X 到 Y 的一次计算，以及从 Y 到 Z 的另一次计算，就总能以相同的计算量直接从 X “跃进”到 Z。理想情况下，我们希望考虑某种“装饰过的”范畴，其中态射带有额外的元数据标签，用以表示该态射所指代的底层计算的计算复杂度；然后，我们可以定义一种代数，形式化地描述这些复杂度在复合算子 $\circ$ 的作用下如何变化。在这样的代数中，不可约计算对应于这样一些计算：它们的复杂度在复合下呈纯加性变化。也就是说，如果态射 $f\colon X \to Y$ 所对应的计算至少需要 n 步才能执行，而态射 $g\colon Y \to Z$ 所对应的计算至少需要 m 步才能执行，那么复合计算 $g \circ f\colon X \to Z$ 是不可约的（按照上文给出的定义），当且仅当它无法在少于 $n+m$ 步的情况下执行。反过来，如果这些计算的复杂度在复合下严格次可加，那么

复合计算是可约的（次可加性的“程度”对应于可约性的“程度”）。图3以此前讨论的二状态、二颜色图灵机规则为例，展示了这一直观理解：每条边/态射都标注了执行相应计算所需的转移次数；这里的合成运算纯粹是加法，这表明图中所示的所有计算都是不可约的。

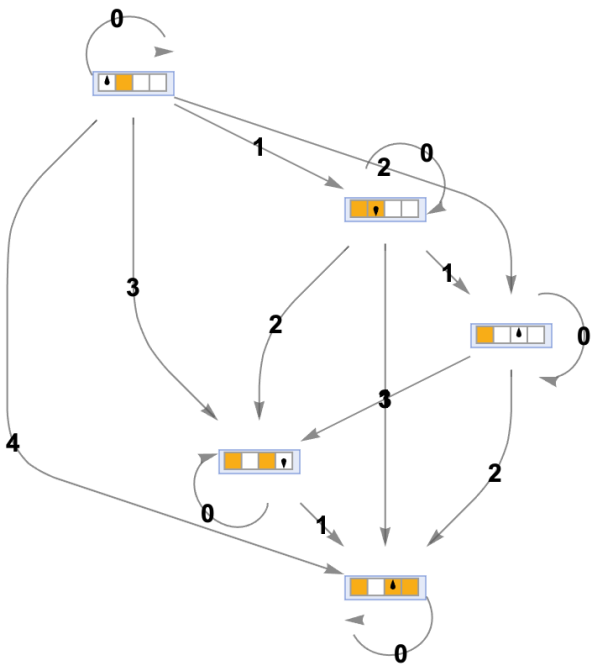


图3：由表示二状态、二颜色图灵机规则2506演化过程的箭图自由生成的范畴的图论表示，其中边/态射标注了额外的元数据，对应于执行所需计算所需的“步”（即转移）数。

为了将这一直观理解形式化，我们假设所有计算都是完全不可约的。现在可以考虑一个函数 Z'，它将我们的数据结构与计算范畴（对于图灵机而言，这就是上文定义的范畴 $\mathcal{T}$）映射到一个范畴 $\mathcal{B}$；该范畴的对象是自然数（即 $\mathrm{ob}\,(\mathcal{B}) = \mathbb{N}$），对应于步数/时间时刻；其态射则是这些步数/时间时刻之间的离散区间，即：

$$\hom(\mathcal{B}) = \{[n, m] \cap \mathbb{N} \,|\, n, m \in \mathbb{N} \text{ and } n \leq m\}\,. \tag{9}$$

如果现在为 $\mathcal{B}$ 赋予一种复合运算，即对离散（连续）区间 $\cup$取并集，那么它

显然构成一个范畴（其中 $[n,n]\cap\mathbb{N}=\{n\}$ 是任意 $n\in\mathbb{N}$的恒等态射）。此外，根据假设，所有计算都是不可约的（因此计算复杂度在复合时纯粹相加），所以函数 $Z'\colon\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ 显然构成一个函子[20]。更准确地说，Z' 是范畴 $\mathcal{T}$与 $\mathcal{B}$之间的一个映射，即:

$$\forall X\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad\exists Z'\left(X\right)\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{B}\right), \tag{10}$$

and:

$$\forall\left(f\colon X\to Y\right)\in\text{同态集}\left(\mathcal{T}\right)\qquad\exists\left(Z'\left(f\right)\colon Z'\left(X\right)\to Z'\left(Y\right)\right)\in\text{同态集}\left(\mathcal{B}\right),$$
$$\text{with }\left(Z'\left(f\right):Z'\left(X\right)\to Z'\left(Y\right)\right)=\left[Z'\left(X\right),Z'\left(Y\right)\right]\cap\mathbb{N}, \tag{11}$$

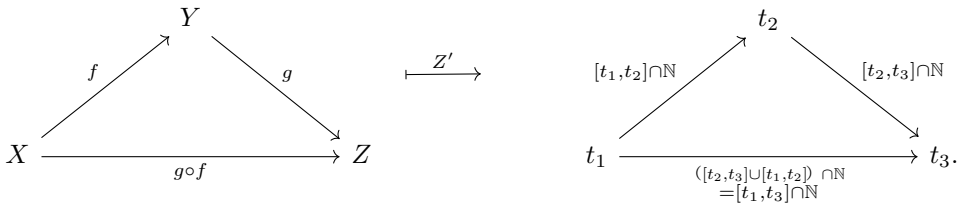
使得复合结构得以保留:

$$\forall\left(f\colon X\to Y\right),\ \left(g\colon Y\to Z\right)\in\text{同态集}\left(\mathcal{T}\right),$$
$$\left(Z'\left(g\circ f\right):Z'\left(X\right)\to Z'\left(Z\right)\right)=\left(Z'\left(g\right)\cup Z'\left(f\right):Z'\left(X\right)\to Z'\left(Z\right)\right)=\left[Z'\left(X\right),Z'\left(Z\right)\right]\cap\mathbb{N}, \tag{12}$$

并且所有恒等态射都得以保留:

$$\forall X\in\text{对象}\left(\mathcal{T}\right),$$
$$\left(Z'\left(id_X\right):Z'\left(X\right)\to Z'\left(X\right)\right)=\left(id_{Z'(X)}:Z'\left(X\right)\to Z'\left(X\right)\right)=\left[Z'\left(X\right),Z'\left(X\right)\right]\cap\mathbb{N}=\left\{Z'\left(X\right)\right\}. \tag{13}$$

如果 X、 Y 和 Z 分别表示在步数 t_1、 t_2 和 t_3 时到达的图灵机状态，而 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to Z$ 分别表示状态 X 与 Y 之间以及状态 Y 与 Z 之间的转移，那么范畴 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的这种函子性可以用下图表示:



(14)

通过这种方式， $\mathcal{B}$ 中的任意态射（例如 $|[t_1,t_2]\cap\mathbb{N}|$）的基数，在相差一个加法常数的意义下，表示 $\mathcal{T}$ 中相应计算的时间复杂度（例如 $f\colon\ X\to Y$）。由于这种函子关系仅在 $\mathcal{T}$ 中的所有计算都不可约时成立，因此我们可以得出结论：从某种精确意义上说，计算不可约性是函子性；此外，计算可约性恰好对应于映射 Z' 偏离纯函子的某种变形。图4展示了这一构造，所用的是前文所述的二状态、二颜色图灵机；每个顶点/对象都标注了其步数，每条边/态射则标注了其对应计算过程中经过的步数列表。

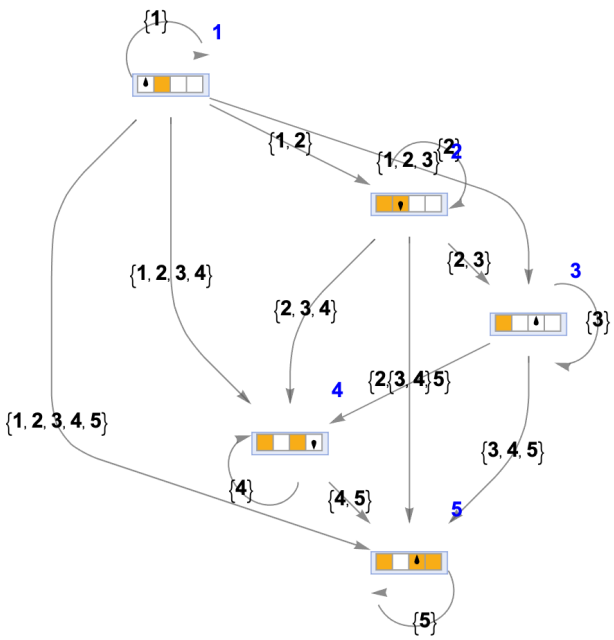


图4：从表示二状态、二颜色图灵机规则2506演化的箭图自由生成的范畴的图论表示，其中顶点/对象附有与其出现的步数相对应的额外元数据标签（以蓝色显示），边/态射附有与作为必要计算一部分所经过的所有中间步数相对应的额外元数据标签（以黑色显示）。

请注意，这种“复杂度代数”所遵循的公理在形式上几乎与那些公理完全相同

度量空间的性质：应用恒等转移 id （将一个状态映射到其自身）的复杂度始终为 0（或者可能为 1，具体取决于区间的定义方式）；应用任意两个不同状态之间的转移，其复杂度始终严格为正；并且在复合下，复杂度总是满足三角不等式（即非严格的次可加性）。唯一没有直接对应项的度量空间公理是对称性公理，因为转移未必可逆，而逆转一个转移的复杂度（若存在这种逆转）也未必等于执行该转移的复杂度。此外请注意，如果我们修改范畴 $\mathcal{B}$ 的定义，使其对象不再仅仅是自然数，而是实数（即 $\mathsf{ob}\,(\mathcal{B}) = \mathbb{R}$），且其态射不再仅仅是离散区间，而是连续区间，即：

$$\hom(\mathcal{B}) = \{[x, y] \,|x, y \in \mathbb{R} \text{ and } x \leq y\}, \tag{15}$$

复合运算仍采用标准的连续区间并集 $\cup$，那么上述论证在实质上并无改变：范畴 $\mathcal{T}$ 与新版本的范畴 $\mathcal{B}$ 存在函子对应，当且仅当它与旧范畴 $\mathcal{B}$ 存在函子对应。此项修改带来的唯一实质差异是，它确保函子/映射 Z' （不可约情形下为函子，可约情形下为映射）不可能是对象满射，但原本就没有要求它必须如此。不过，对范畴 $\mathcal{B}$ 稍作推广后的这一定义，确实有一个明确的优点：它使这一构造背后的拓扑直觉清晰显现。 $\mathbb{R}$ 的对象（表示时间时刻的实数）可以视为零维流形，其态射则可以视为这些流形之间的一维协边。因此， $\mathcal{B}$ 实际上是一个协边范畴[21]。

在此处及下文中，关于范畴 $\mathcal{B}$ 及其后代，我们采用协边范畴的形式化定义：它是一个有序三元组 $\langle \mathcal{B}, \partial, i \rangle$，其中 $\mathcal{B}$ 具有所有有限余积，并配备一个始对象 $\varnothing$； ∂ : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 是一个保留所有余积的加性自函子，而 i : $\partial \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ （其中 $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$表示 $\mathcal{B}$ 上的恒等函子，它将每个对象/态射映射到自身）是一个满足以下条件的自然变换：

$$\forall M \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{B}), \qquad \partial\,(\partial\,(M)) = \varnothing. \tag{16}$$

在上述内容中，一对对象 $M_1, M_2 \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{B})$ 的余积被视为一个对象 $M_1 \oplus M_2 \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{B})$，并配备一对典范嵌入态射：

$$\left(i_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2\right), \left(i_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2\right) \in \hom\left(\mathcal{B}\right), \tag{17}$$

这些态射具有泛性质，也就是说，对于任意配备了态射的对象 $M^* \in \mathsf{ob}\left(\mathcal{B}\right)$:

$$\left(i_1^* : M_1 \to M^*\right), \left(i_2^* : M_2 \to M^*\right) \in \hom\left(\mathcal{B}\right), \tag{18}$$

存在唯一态射（$u:\ M_1 \oplus M_2 \to M^*$）$\in$同态集（$\mathcal{B}$），使得:

$$\left(i_1^* : M_1 \to M^*\right) = \left(u \circ i_1 : M_1 \to M^*\right), \qquad \text{and} \qquad \left(i_2^* : M_2 \to M^*\right) = \left(u \circ i_2 : M_2 \to M^*\right). \tag{19}$$

Thi该条件可以通过下面的交换图简洁地重新表述 :

$$\begin{array}{ccccc} & & \forall M^* & & \\ & \overset{\forall i_1^*}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle \exists! u} & \overset{\forall i_2^*}{\nwarrow} & \\ M_1 & \xrightarrow[i_1]{} & M_1 \oplus M_2 & \xleftarrow[i_2]{} & M_2. \end{array} \tag{20}$$

该定义可以以显然的方式扩展到任意有限集合的对象 $M_j \in$ 对象（$\mathcal{B}$），从而得到一个有限余积 $\bigoplus M_j \in$ 对象（$\mathcal{B}$），并配备一个有限集合的（泛性质）注入态射: $_j$

$$\left(i_j : M_j \to \bigoplus_k M_k\right) \in \hom\left(\mathcal{B}\right). \tag{21}$$

始对象 $\varnothing \in$ 对象（$\mathcal{B}$）是一个特殊对象，使得对于任意对象 $M \in$ 对象（$\mathcal{B}$），都存在唯一态射（$u:$ $\varnothing \to M$）$\in$同态集（$\mathcal{B}$），即:

$$\varnothing \overset{\exists! u}{\dashrightarrow} \forall M. \tag{22}$$

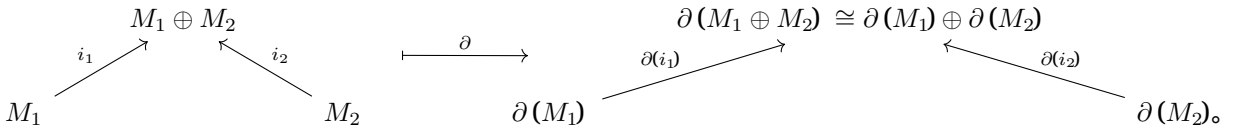
自函子是从一个范畴到其自身的任意函子，而加性函子是保持有限余积的任意函子（或者，在某些语境下，保持有限双积的任意函子，不过这里讨论的并非这种情况）；换言之，零对象在同构意义下保持不变:

$$\partial\left(\varnothing\right) \cong \varnothing \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{B}\right), \tag{23}$$

并且，对于任意一对对象 $M_1, M_2 \in \mathsf{ob}\left(\mathcal{B}\right)$，都存在一个同构:

$$\partial\left(M_1 \oplus M_2\right) \cong \partial\left(M_1\right) \oplus \partial\left(M_2\right), \tag{24}$$

它保持余积构造的典范单射态射：



(25)

这里的同构（用 $\cong$ 表示）指任意态射（$f\colon X \to Y$）$\in$ hom（$\mathcal{B}$），对于该态射，存在一个对应的态射 $\left(f^{-1}\colon Y \to X\right) \in$ hom（$\mathcal{B}$），它同时是 f 的左逆和右逆，即：

$$\left(f^{-1} \circ f : X \to X\right) = \left(id_X : X \to X\right), \qquad \text{and} \qquad \left(f \circ f^{-1} : Y \to Y\right) = \left(id_Y : Y \to Y\right). \tag{26}$$

最后，函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 之间的自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$ 由一族分量 态射刻画：

$$\forall X \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{C}\right), \qquad \exists\left(\eta_X : F\left(X\right) \to G\left(X\right)\right) \in \hom\left(\mathcal{D}\right), \tag{27}$$

满足：

$$\forall\left(f : X \to Y\right) \in \hom\left(\mathcal{C}\right), \qquad \left(\eta_Y \circ F\left(f\right) : F\left(X\right) \to G\left(Y\right)\right) = \left(G\left(f\right) \circ \eta_X : F\left(X\right) \to G\left(Y\right)\right), \tag{28}$$

或者，用交换图的形式表示：

$$\begin{array}{ccc} F\left(X\right) & \xrightarrow{F(f)} & F\left(Y\right) \\ {\scriptstyle \eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ G\left(X\right) & \xrightarrow[G(f)]{} & G\left(Y\right). \end{array} \tag{29}$$

这一协边范畴形式化定义背后的直觉可以表述如下。每个对象 $M \in$ ob $(\mathcal{B})$ 都被解释为一个（广义）流形；每个态射 $(f\colon M_1 \to M_2) \in$ hom $(\mathcal{B})$ 都被解释为这些流形之间的（广义）配边，也就是说，将这些流形沿其边界“粘合”在一起。始对象 $\varnothing$ 扮演空集/空流形的角色，而

加性自函子 ∂ 表示边界关系： $\partial(M)$（对于某个 $M \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{B})$）对应于流形 M 的（广义）边界，而条件 $\partial(\partial(M)) = \varnothing$ 则表示边界的边界总是空的。协边范畴 $\mathcal{B}$ 中的余积 $\oplus$ 扮演流形直和/不交并的角色。一对对象/流形 M_1， $M_2 \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ 可以称为**配边**（即它们的不交并构成高一维流形的边界），记作 $M_1 \sim M_2$，当且仅当：

$$\exists V_1, V_2 \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{B})\,, \qquad \text{such that} \qquad M_1 \oplus \partial\,(V_1) \cong M_2 \oplus \partial\,(V_2)\,, \tag{30}$$

其中 $\cong$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个同构；因此，配边关系 $\sim$ 是一种等价关系，在这种关系下，所有同构的对象／流形彼此配边：

$$\forall M_1, M_2 \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{B})\,, \qquad M_1 \cong M_2 \implies M_1 \sim M_2, \tag{31}$$

并且：

$$\forall M \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{B})\,, \qquad \partial\,(M) \sim \varnothing. \tag{32}$$

这种与协边范畴的联系看似只是一个相当琐碎的技术细节，但在接下来的讨论中，它将发挥关键作用；届时我们将探讨与范畴量子力学和函子量子场论的形式对应[14], ，以及计算不可约性与时间演化的局域性之间的关系。

3 多重计算不可约性即幺半函子性

现在我们继续考察非确定性（多路）计算的情形，其中作用于数据结构/计算状态上的（部分）转移函数不一定是单值的。这类计算可以通过多路系统[22], 来参数化，或者更准确地说，通过多路演化图[23][24], 来参数化；后者是一个有向无环图，其顶点表示计算状态，有向边则表示这些状态之间的单步转移。图6展示了多路系统构造的一个具体示例：该系统由图5所示的一对二状态、二颜色图灵机规则构成（在图灵机标准枚举中，规则编号为2506和3506）。将由此得到的多路演化图视为一个箭图，我们便能构造出该箭图所生成的范畴，这

自由地 一范畴是通过上一节概述的同一过程生成的，如图所示 7.



图5：两个二状态、二颜色图灵机规则（规则编号2506和3506）的图示，其中黑色图标表示读写头的位置和状态。

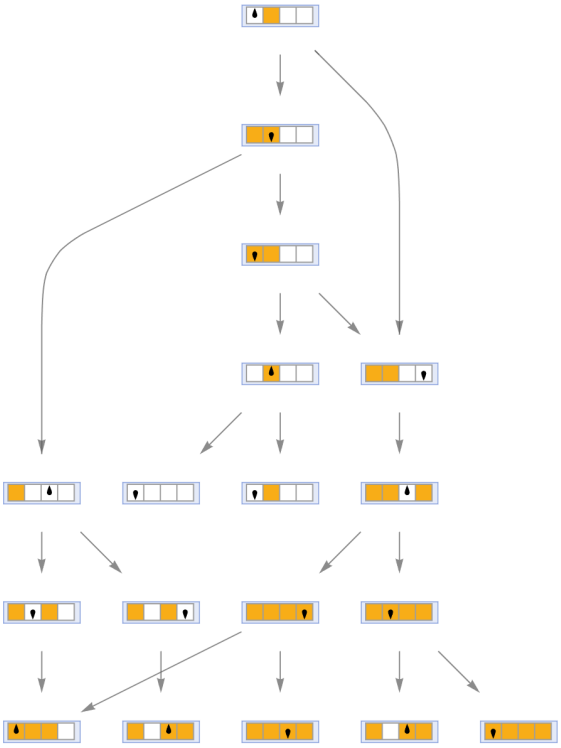


图6：从单带状态 $\{0,1,0,0\}$ 出发，经过 4 步演化得到的多路演化图，对应于由规则2506和3506的图灵机转移函数（并行）复合构造的二状态、二颜色图灵机的非确定性演化；每条边表示应用两个图灵机转移函数之一。

然而，我们现在可以利用分支图形式体系，通过一种大体上直接类似于 Rabin-Scott 幂集／子集构造[25] 的过程，将非确定性／多路计算转化为确定性／单路计算；Rabin-Scott 幂集／子集构造用于将非确定性有限自动机转换为确定性有限自动机。更具体地说，我们将多路演化图“叶化”为一组有序序列，其中包含互不相交的“类分支超曲面” Σ_t ，这些超曲面覆盖整个多路演化图，而其排序关系由一个全局时间函数定义：

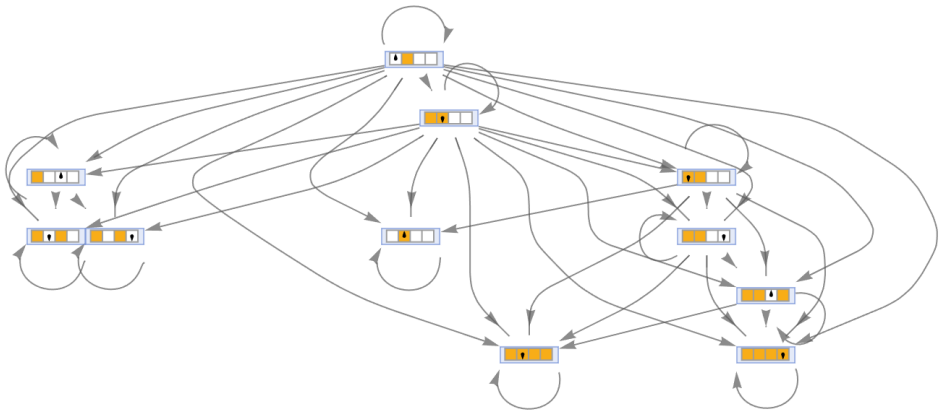


图7：由对应于二状态、二颜色图灵机非确定性演化的多路演化图自由生成的范畴的图论表示。该图灵机由规则2506和3506的图灵机转移函数的（并行）复合构造而成（视为箭图），从单带状态 $\{0,1,0,0\}$ 出发，经过 3 步演化。

$$t : V \to \mathbb{Z}, \qquad \text{such that} \qquad \Delta t \neq 0 \text{ everywhere}, \tag{33}$$

其中，V 是多路演化图的顶点集（即所有可达图灵机状态的集合），并且每个“类分支超曲面”现在都是该函数的一个等值集，满足：

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}, \qquad \Sigma_{t_1} = \{p \in V : t\,(p) = t_1\}\,, \qquad \text{and} \qquad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing \Longleftrightarrow t_1 \neq t_2. \tag{34}$$

分支图构成了这些抽象类分支超曲面的离散／组合表示；在全局时间函数的任意给定取值下，它以状态顶点之间的共同祖先距离来表示这种关系。也就是说，在分支图中，给定时间步的顶点 X 和 Y 相连，当且仅当它们在多路演化图中共享共同祖先状态 Z 。上文讨论的非确定性二状态二色图灵机演化所对应的多路演化图，其默认叶状分解如图 8 所示，相应的分支图序列如图 9 所示。因此，我们可以认为，每个多路系统都具有某种张量积 结构：其中，某些状态对会并行出现（根据全局时间函数的同时性面定义，即类分支超曲面），因而被视为“张量化”在一起；这样，整个多路系统便可分解为单一分支（即各个独立的确定性／单路计

算）的张量积。由此，分支图为每个时间步的多路计算张量积结构提供了一种组合描述，而整体的非确定性/多路计算则可以改写为在这些张量积／分支图上进行的确定性／单路计算。

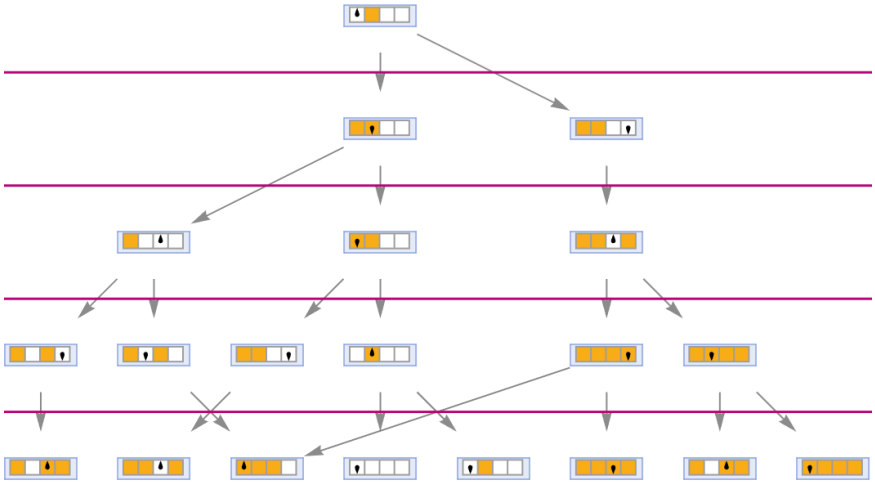


图 8：由规则2506和3506的转移函数并行复合构造的二状态、二颜色图灵机，其非确定性演化的多路演化图的默认“叶状分解”，从单带状态 $\{0,1,0,0\}$ 开始，经过 4 步。



图 9：与由规则2506和3506的转移函数并行复合构造的二状态、二颜色图灵机的非确定性演化的多路演化图的默认“叶状分解”相对应的“类分支超曲面”序列。

我们可以指出，我们的图灵机状态与转移范畴 $\mathcal{T}$ 如今（在非确定性／多路的情形下）是一个幺半范畴，从而在数学上严谨地表述这一直觉；这也正如 [26] 和 [27]中针对基于符号重写的一般多路系统所证明的那样。具体而言，这意味着 $\mathcal{T}$ 实际上是一个有序三元组 $\langle T, \otimes, I\rangle$，由一个底层范畴、一个张量积运算 $\otimes$ 以及一个指定的单位对象 $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{T})$ 组成。张量积运算由如下形式的双函子 编码：

$$\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}, \tag{35}$$

换言之，这是一个定义域为积范畴 $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$的函子，其对象集由 $\mathcal{T}$中的对象有序对构成：

$$\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\times\mathcal{T}\right)=\left\{(X,Y)\,|X,Y\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right)\right\},\tag{36}$$

其态射集由 $\mathcal{T}$ 中态射组成的有序对给出：

$$\hom\left(\mathcal{T}\times\mathcal{T}\right)=\left\{((f,g):(X_1,X_2)\to(Y_1,Y_2))\,|(f:X_1\to Y_1),(g:X_2\to Y_2)\in\hom\left(\mathcal{T}\right)\right\},\tag{37}$$

其中复合与恒等态射按分量定义，即：

$$\begin{aligned}&\forall\left((f_1,g_1):(X_1,X_2)\to(Y_1,Y_2)\right),\left((f_2,g_2):(Y_1,Y_2)\to(Z_1,Z_2)\right)\in\hom\left(\mathcal{T}\times\mathcal{T}\right),\\&\qquad\left((f_2,g_2)\circ(f_1,g_1):(X_1,X_2)\to(Z_1,Z_2)\right)=\left((f_2\circ f_1,g_2\circ g_1):(X_1,X_2)\to(Z_1,Z_2)\right),\end{aligned}\tag{38}$$

and:

$$\forall\left(X,Y\right)\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\times\mathcal{T}\right),\qquad\left(id_{(X,Y)}:(X,Y)\to(X,Y)\right)=\left((id_X,id_Y):(X,Y)\to(X,Y)\right),\tag{39}$$

分别。为了编码张量积运算应当（弱）满足结合律这一事实，应存在一个自然同构（即分量全为同构的自然变换） α，我们称之为结合子[28][29]，，其一般形式如下：

$$\alpha:(-)\otimes((-)\otimes(-))\cong((-)\otimes(-))\otimes(-),\tag{40}$$

其分量为：

$$\forall X,Y,Z\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad\alpha_{X,Y,Z}:X\otimes(Y\otimes Z)\cong(X\otimes Y)\otimes Z,\tag{41}$$

使得对于所有 X、Y、Z、$W\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right)$，下图（结合子相干条件）交换：

$$\begin{array}{ccccc} X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W)) & \xrightarrow{\alpha_{X,Y,Z\otimes W}} & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) & \xrightarrow{\alpha_{X\otimes Y,Z,W}} & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id_X\otimes\alpha_{Y,Z,W}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_{X,Y,Z}\otimes id_Z} \\ X\otimes((Y\otimes Z)\otimes W) & & \xrightarrow[\alpha_{X,Y\otimes Z,W}]{} & & (X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W, \end{array} \tag{42}$$

i.e:

$$\forall X,Y,Z,W\in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad \alpha_{X,Y,Z}\otimes id_Z\circ(\alpha_{X,Y\otimes Z,W}\circ id_X\otimes\alpha_{Y,Z,W})=\alpha_{X\otimes Y,Z,W}\circ\alpha_{X,Y,Z\otimes W}. \tag{43}$$

此外，为了编码张量积是（弱）幺的这一事实，也就是说，指定的单位对象 I 既是 $\otimes$的左单位，也是右单位，应该存在另外一对自然同构 λ 和 ρ，我们分别称之为左、右单位同构，其一般形式如下:

$$\lambda: I\otimes(-)\cong(-),\qquad \text{and}\qquad \rho:(-)\otimes I\cong(-), \tag{44}$$

分量为:

$$\forall X\in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad \lambda_X: I\otimes X\cong X,\qquad \text{and}\qquad \rho_X: X\otimes I\cong X, \tag{45}$$

s使得对于所有 X， $Y\in \mathsf{ob}\left(\mathcal{T}\right)$，以下图表（单位子相干性）都交换 :

$$\begin{array}{ccc} X\otimes(I\otimes Y) & \xrightarrow{\alpha_{X,I,Y}} & (X\otimes I)\otimes Y \\ & {\scriptstyle id_X\otimes\lambda_Y}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \rho_X\otimes id_Y} & \\ & X\otimes Y & \end{array}, \tag{46}$$

i.e:

$$\forall X,Y\in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad \rho_X\otimes id_Y\circ\alpha_{X,I,Y}=id_X\otimes\lambda_Y. \tag{47}$$

我们的幺半范畴 $\langle\mathcal{T},\otimes,I\rangle$ 继承了其张量积结构$\otimes$ 的结合律和单位性 $\sqcup$，而这源自不交并运算的结合律和单位性 $\sqcup$（图灵机的停机状态 $HALT$ 在其中充当单位对象 I，因为根据定义，与停机状态进行并行复合不会实质性地改变任何多路计算的结构，因为停机状态

不会演化）。此外，由于不交并运算也满足交换律，因此我们的幺半范畴实际上是对称的[30][31]，，也就是说，它还带有一个额外的自然同构 σ，称为对称同构 或辫子 同构，其一般形式如下：

$$\sigma : (-) \otimes (-) \cong (-) \otimes (-), \tag{48}$$

其分量为：

$$\forall X, Y \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{T}), \qquad \sigma_{X,Y} : X \otimes Y \cong Y \otimes X, \tag{49}$$

使对称/编织同构与结合子相容，也就是说，对于所有 $X, Y, Z \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{T})$，下列图表（本质上是一个额外的结合子相干条件）交换：

$$\begin{array}{ccc}
(X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{X,Y} \otimes id_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{-1}_{X,Y,Z}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{-1}_{Y,X,Z}} \\
X \otimes (Y \otimes Z) & & Y \otimes (X \otimes Z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{X,Y \otimes Z}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id_Y \otimes \sigma_{X,Z}} \\
(Y \otimes Z) \otimes X & \xrightarrow[\alpha^{-1}_{Y,Z,X}]{} & Y \otimes (Z \otimes X),
\end{array} \tag{50}$$

i.e:

$$\forall X, Y, Z \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{T}), \qquad id_Y \otimes \sigma_{X,Z} \circ \left(\alpha^{-1}_{Y,X,Z} \circ \sigma_{X,Y} \otimes id_Z\right) = \alpha^{-1}_{Y,Z,X} \circ \left(\sigma_{X,Y \otimes Z} \circ \alpha^{-1}_{X,Y,Z}\right). \tag{51}$$

此外，对称/编织同构应与左、右单位子同构相容，也就是说，对于所有$X \in \mathrm{ob}(\mathcal{T})$，以下图表（额外的单位子相干条件）交换：

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\sigma_{X,I}} & I \otimes X \\
& {\scriptstyle \rho_X} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \lambda_X} & \\
& X &
\end{array}, \tag{52}$$

i.e:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right), \qquad \lambda_X \circ \sigma_{X,I} = \rho_X. \tag{53}$$

最后，对称/编织同构应为对合/自逆的，也就是说，对于所有 X， $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{T})$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} & Y \otimes X & \\ {\scriptstyle \sigma_{X,Y}}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \sigma_{Y,X}} \\ X \otimes Y & \xrightarrow[id_{X\otimes Y}]{} & X \otimes Y, \end{array} \tag{54}$$

i.e:

$$\forall X, Y \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right), \qquad \sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y} = id_{X\otimes Y}. \tag{55}$$

请注意，如果我们放宽最后一个条件（即自然同构 σ 应当是幂等的/自逆的），那么得到的就不再是对称幺半范畴，而是较弱的辫子幺半范畴概念[32][33], ；在这种范畴中， σ 在一个 n重张量积上的作用并非通过对称群，而是通过辫群分解。对于辫子幺半范畴，我们还必须施加一个额外的结合子相干条件，即对于所有 X、 Y、 $Z \in \mathsf{ob}\left(\mathcal{T}\right)$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{id_X \otimes \sigma_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X,Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X,Z,Y}} \\ (X \otimes Y) \otimes Z & & (X \otimes Z) \otimes Y \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{X\otimes Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{X,Z} \otimes id_Y} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow[\alpha_{Z,X,Y}]{} & (Z \otimes X) \otimes Y, \end{array} \tag{56}$$

i.e:

$$\forall X, Y, Z \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right), \qquad \sigma_{X,Z} \otimes id_Y \circ (\alpha_{X,Z,Y} \circ id_X \otimes \sigma_{Y,Z}) = \alpha_{Z,X,Y} \circ (\sigma_{X\otimes Y,Z} \circ \alpha_{X,Y,Z}); \tag{57}$$

然而，对于对称幺半范畴，这一相干条件并非必要，因为它可以由第一结合子相干律与对称/编织同构的对合/自逆性质共同推导得出

对称/编织同构的。

和之前一样，我们现在可以考虑为范畴 $\mathcal{T}$ 的态射赋予额外的语义元数据，以指定这些态射以符号方式表示的相应计算的计算复杂度。不过，由于现在不仅可以按顺序复合计算（使用标准复合算子 $\circ$），还可以并行复合计算（使用张量积运算 $\otimes$），描述这些复杂度如何复合的代数就变得更加复杂。如前所述，（单路）计算不可约性以顺序复合 $\circ$的可加性为特征；也就是说，若态射 $f\colon X \to Y$ 至少需要 n 个计算步才能执行，而态射 $g\colon Y \to Z$ 至少需要 m 个计算步才能执行，那么它们的顺序复合 $g \circ f\colon X \to Z$ 至少需要 $n+m$个计算步才能执行。另一方面，由于存在张量积结构，我们现在可以用并行复合$\otimes$的可加性来刻画一种多重计算不可约性；也就是说，若态射 $f\colon X_1 \to Y_1$ 至少需要 n 个计算步才能执行，而态射 $g\colon X_2 \to Y_2$至少需要 m 个计算步才能执行，那么它们的并行复合 $f \otimes g\colon X_1 \otimes X_2 \to Y_1 \otimes Y_2$（作用于最初由状态 X_1 和 X_2构成的分支图上）是多重计算不可约的，当且仅当它无法在少于 $n+m$ 个计算步的情况下执行。同样，如果计算的复杂度在并行复合／张量积下表现为次可加，那么复合的（多路）计算就是多重计算可约的（次可加的程度量化了多重计算可约性的程度）。这一刻画背后的直觉是：“普通”的计算不可约性旨在描述这样一种情况：若不明确追踪所有中间步骤，就无法预先得知确定性计算的结果；与此相似，多重计算不可约性旨在描述这样一种情况：若不明确追踪构成其张量积的所有并行确定性／单路计算，就无法预先得知非确定性／多路计算的结果。图 10 以此前讨论的非确定性二状态二色图灵机为例，说明了这一点；每条边／态射都标注了执行相应计算所需的转移次数。顺序复合运算 $\circ$和并行张量积运算 $\otimes$ 都不是纯粹可加的，这表明该系统至少在一定程度上是多重计算可约的。

因此，我们可以根据映射 $Z'\colon \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ 的函子性，扩展先前对计算不可约性的形式化定义，以处理多重计算不可约性这一新情形。首先，假设非确定性图灵机 T 的多路系统中的所有单路计算路径都具有计算不可约性，那么 Z' 就是一个函子（如上所证）。

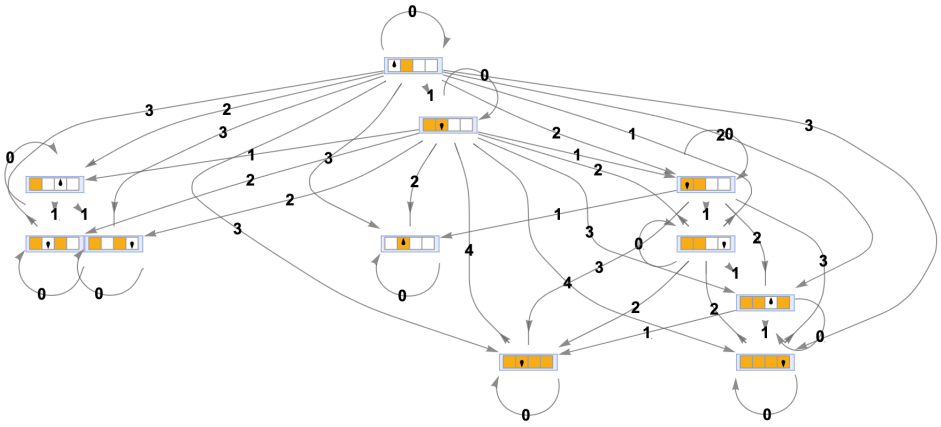


图 10：由多路演化图自由生成的范畴的图论表示。该多路演化图对应于一个二状态、二颜色图灵机的非确定性演化；这个图灵机由规则2506和3506的图灵机转移函数（作为箭图）进行（并行）复合构造而成。边/态射标注了额外的元数据，对应于完成所需计算所需的“步”（即转移）数。

此外，步数／时间时刻及其间（离散）区间构成的（离散）配边范畴 $\mathcal{B}$，可以很容易地赋予交换张量积结构（即集合与区间的不交并 $\sqcup$），其单位对象为集空集 $\varnothing$；请回想，对于更抽象、更一般的配边范畴，余积 $\oplus$ 起着不交并 $\sqcup$（即流形的直和）的作用，而始对象 $\varnothing$ 则起着空集／空流形的作用。因此，对称幺半范畴 $\langle \mathcal{B}, \oplus, \varnothing \rangle$ 中的对象所表示的，不只是与单个计算状态相关联的时间步（如上一节讨论的单路情形），还包括与同一“分支状超曲面”上的多个状态相关联的时间步的并行复合；因此，我们可以将范畴 $\mathcal{B}$ 视为对多路系统计算出的分支图时间有序序列进行“坐标化”。由此，$\langle \mathcal{T}, \otimes, I = HALT \rangle$ 和 $\langle \mathcal{B}, \oplus, \varnothing \rangle$ 都是对称幺半范畴；因此，在额外假设所有单路计算的并行复合都具有多重计算不可约性（因而所有计算复杂度在张量积下都呈现纯加性）的条件下，映射 $Z' : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ 构成一个对称幺半函子[34]。更准确地说，Z' 是一个幺半函子，即幺半范畴之间的函子：

$$Z' : \langle \mathcal{T}, \otimes, I = HALT \rangle \to \langle \mathcal{B}, \oplus, \varnothing \rangle \,, \tag{58}$$

保留张量积结构，具体来说，Z' 配备了一个态射

$(\varepsilon:\varnothing\to Z'(I))\in$ 同态集 $(\mathcal{B})$，以及一个从 $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{B}$ 的函子之间的自然变换 μ，其分量为：

$$\forall X,Y\in \mathrm{ob}(\mathcal{T}),\qquad \mu_{X,Y}:Z'(X)\oplus Z'(Y)\to Z'(X\otimes Y). \tag{59}$$

ε 和 μ 合称为幺半函子 Z'的相干映射，并满足与结合子 $\alpha^{\mathcal{T}}$，$\alpha^{\mathcal{B}}$、左单位元同构 $\lambda^{\mathcal{T}}$，$\lambda^{\mathcal{B}}$ 和右单位元同构 $\rho^{\mathcal{T}}$，$\rho^{\mathcal{B}}$相关的相干条件。结合子相干条件可表示为以下图表对所有 X，Y，$Z\in$ ob$(\mathcal{T})$均交换这一断言：

$$\begin{array}{ccc}
(Z'(X)\oplus Z'(Y))\oplus Z'(Z) & \xrightarrow{\alpha^{\mathcal{B}}_{Z'(X),Z'(Y),Z'(Z)}} & Z'(X)\oplus(Z'(Y)\oplus Z'(Z)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{X,Y}\oplus id^{\mathcal{B}}_{Z'(Z)}} & & \downarrow{\scriptstyle id^{\mathcal{B}}_{Z'(Z)}} \\
Z'(X\otimes Y)\oplus Z'(Z) & & Z'(X)\oplus Z'(Y\otimes Z) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{X\otimes Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{X,Y\otimes Z}} \\
Z'((X\otimes Y)\otimes Z) & \xrightarrow[Z'\left(\alpha^{\mathcal{T}}_{X,Y,Z}\right)]{} & Z'(X\otimes(Y\otimes Z)),
\end{array} \tag{60}$$

也就是说（回忆一下，配边范畴 $\mathcal{B}$ 中的合成运算由连续区间/配边的普通并集给出 $\cup$）：

$\forall X$，Y，$Z\in$ ob $(\mathcal{T})$，

$$\mu_{X,Y\otimes Z}\cup\left(id_{Z'(Z)}\cup\alpha^{\mathcal{B}}_{Z'(X),Z'(Y),Z'(Z)}\right)=Z'\left(\alpha^{\mathcal{T}}_{X,Y,Z}\right)\cup\left(\mu_{X\otimes Y,Z}\cup\mu_{X,Y}\oplus id^{\mathcal{B}}_{Z'(Z)}\right), \tag{61}$$

而左、右单位子相干条件则表示为以下图表对所有 $X\in$ ob$(\mathcal{T})$ 都交换：

$$\begin{array}{ccc} Z'(X)\oplus\varnothing & \xrightarrow{id^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}\oplus\varepsilon} & Z'(X)\oplus Z'(I) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{X,I}} \\ Z'(X) & \xleftarrow[Z'\left(\rho^{\mathcal{T}}_{X}\right)]{} & Z'(X\otimes I), \end{array} \tag{62}$$

i.e:

$$\forall X\in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad Z'\left(\rho^{\mathcal{T}}_{X}\right)\cup\left(\mu_{X,I}\cup id^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}\oplus\varepsilon\right)=\rho^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}, \tag{63}$$

and:

$$\begin{array}{ccc} \varnothing\oplus Z'(X) & \xrightarrow{\epsilon\oplus id^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}} & Z'(I)\oplus Z'(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{I,X}} \\ Z'(X) & \xleftarrow[Z'\left(\lambda^{\mathcal{T}}_{X}\right)]{} & Z'(I\otimes X), \end{array} \tag{64}$$

i.e:

$$\forall X\in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right),\qquad Z'\left(\lambda^{\mathcal{T}}_{X}\right)\cup\left(\mu_{I,X}\cup\epsilon\oplus id^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}\right)=\lambda^{\mathcal{B}}_{Z'(X)}, \tag{65}$$

分别。请注意，此处给出的定义针对的是一个松幺半函子；如果相干映射 ε和 $\mu_{X,Y}$对于所有 $X,Y\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right)$ 还都是同构或恒等映射，那么分别会得到一个强或严格幺半函子。幺半函子 $Z'\colon\langle\mathcal{T},\otimes,I\rangle\to\langle\mathcal{B},\oplus,\varnothing\rangle$ 也是对称的，即相干映射 ε 和 μ 还满足一个关于编织／对称同构 $\sigma^{\mathcal{T}}$, $\sigma^{\mathcal{B}}$的额外相干条件，该条件表示为以下图表对所有 $X,Y\in\mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right)$ 都交换:

$$\begin{array}{ccc} Z'(X)\oplus Z'(Y) & \xrightarrow{\sigma^{\mathcal{B}}_{Z'(X),Z'(Y)}} & Z'(X)\oplus Z'(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{X,Y}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{Y,X}} \\ Z'(X\otimes Y) & \xrightarrow[Z'\left(\sigma^{\mathcal{T}}_{X,Y}\right)]{} & Z'(Y\otimes X), \end{array} \tag{66}$$

i.e:

$$\forall X, Y \in \mathrm{ob}\left(\mathcal{T}\right), \qquad \mu_{Y,X} \cup \sigma^{\mathcal{B}}_{Z'(X),Z'(Y)} = Z'\left(\sigma^{\mathcal{T}}_{X,Y}\right) \cup \mu_{X,Y}. \tag{67}$$

如果 $\langle \mathcal{T}, \otimes, I \rangle$ 和 $\langle \mathcal{B}, \oplus, \varnothing \rangle$ 只是幺半范畴且具有编织结构，而非对称幺半范畴，那么满足上述相干条件的幺半函子 Z' 就会是一个编织幺半函子。

因此，如果 X_1、Y_1、X_2 和 Y_2 分别表示在步数 t_1、t_2、s_1 和 s_2时到达的图灵机状态，并且 $f\colon X_1 \to Y_1$ 和 $g\colon X_2 \to Y_2$ 分别表示状态 X_1 与 Y_1 之间，以及状态 X_2 与 Y_2 之间的转移，那么幺半函子（对称幺半函子）Z':

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \downarrow{\scriptstyle g} & \overset{Z'}{\longmapsto} \\ Y_1 & Y_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} t_1 & s_1 \\ \downarrow{\scriptstyle [t_1,t_2]\cap\mathbb{N}} & \downarrow{\scriptstyle [s_1,s_2]\cap\mathbb{N}} \\ t_2 & s_2, \end{array} \tag{68}$$

按照下图所示的方式保留（对称）张量积结构:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \otimes X_2 & & \\ \downarrow{\scriptstyle f\otimes g} & \overset{Z'}{\longmapsto} & \\ Y_1 \otimes Y_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} t_1 \oplus s_1 \\ \downarrow{\scriptstyle ([t_1,t_2]\cap\mathbb{N})\oplus([s_1,s_2]\cap\mathbb{N})} \\ t_2 \oplus s_2. \end{array} \tag{69}$$

因此，通过为 $\mathcal{B}$赋予张量积结构，所得的对称幺半范畴 $\langle \mathcal{B}, \oplus, \varnothing \rangle$实际上是一个高维配边范畴，其中对象可能是高维流形（由若干零维流形的直和／不交并构成），态射则可能是高维配边（由若干一维协边的直和／不交并构成），因为现在配边可以沿两个不同方向“粘合”（要么通过连续区间 $\cup$的标准并集进行顺序粘合，要么通过区间 $\sqcup$的张量积／直和进行并行粘合）。对于 $\mathcal{B}$中的任意给定态射，其所包含的各个（一维）区间的基数，除一个加法常数外，表示相应确定性／单路计算在 $\mathcal{T}$ 中的时间复杂度（如上一节分析的单路情形）；而该态射中张量积／直和内出现的不同（一维）区间的数量，除一个加法常数外，则表示由此得到的复合非确定性／多路计算在 $\mathcal{T}$中的时间复杂度。因此，我们可以得出结论：正如（单路）计算不可约性体现为 Z'的函子性，多重计算不可约性体现为 Z'的对称幺半函子性；正如计算可约性对应于偏离纯函子的变形

准确地说，计算可约性对应于 Z' 偏离纯函子的变形，而多重计算可约性则对应于 Z' 偏离对称幺半性质的变形。或许另一种更简洁的表述是：计算可约性对应于映射 Z' 对 $\mathcal{T}$中计算的顺序复合（$\circ$）造成多大程度的扭曲，而多重计算可约性则对应于映射 Z' 对 $\mathcal{T}$中计算的并行复合（$\otimes$）造成多大程度的扭曲。图11展示了这一构造，以前文讨论的非确定性二状态、二颜色图灵机为例；每个顶点／对象都标注了其步数，每条边／态射则标注了对应计算过程中经历的步数列表。请注意，在 $\circ$ 下的顺序情形中，用来描述附着于态射的时间复杂度如何复合的那些代数公理（即恒等态射、严格正性和次可加性／三角不等式），在 $\otimes$下的并行情形中同样成立。

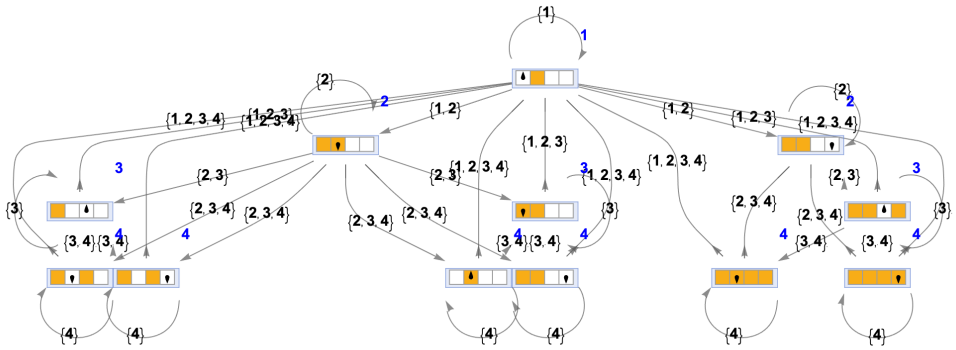


图11：由多路演化图自由生成的范畴的图论表示。该多路演化图对应于一个二状态、二颜色图灵机的非确定性演化；此图灵机由规则2506和3506的图灵机转移函数（视为箭图）的（并行）复合构造而成。顶点/对象附有额外元数据，标记其出现的步数（以蓝色显示）；边/态射则附有额外元数据，标记作为所需计算一部分所经过的所有中间步数。

从这种相当抽象的描述中，应该可以看出，计算不可约性与多重计算不可约性本质上是彼此正交的概念：映射 Z' 可以在完全保持张量积结构不变的同时，任意程度地扭曲序贯复合；反之亦然（或介于两者之间）。这相当直观地源于这样一个事实：计算不可约性是给定多路系统的状态演化函数 的副产物（即规定哪些状态可以从哪些其他状态经一步得到的函数，因此它为构造 $\mathcal{T}$中的态射提供规则），而多重计算不可约性则是给定多路系统的状态等价函数 的副产物（即规定哪些状态对被视为等价的函数，

因此，它为合并/等同 $\mathcal{T}$中的对象提供规则），而演化函数与等价函数的定义完全独立：可以定义一个计算复杂度任意高的状态演化函数，同时使状态等价函数基本上平凡；反之亦然（或者，同样地，取任何合理的中间情形）。例如，在迄今讨论的非确定性/多路图灵机中，状态等价函数是初等的（若两个图灵机状态的纸带状态、读写头状态和读写头位置均相同，则认为它们等价；这在算法上很容易判定），所有计算复杂度都源于状态演化函数。另一方面，在 Wolfram 模型[22][23][24], 背景下讨论的（超）图重写中，状态等价函数复杂得多，因为它必须考虑（超）图同构，而其确切的复杂度类 GI仍然未知（即尚不清楚 GI是 P完全、 NP完全还是 NP中间的）[35][36]。在接下来的分析中，我们将使用文献 [37]中介绍的“唯一性树”同构算法的推广版本。

通过将（有向/有序）超图 $H = \langle V, E \rangle$ 定义为元素之间有序关系（超边）的有限集合/多重集：

$$E \subseteq \mathcal{P}\left(V\right) \setminus \{\varnothing\}, \tag{70}$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示幂集，我们可以通过以下形式的跨 单态射[38][39]来形式化超图重写规则 $H_1 \to H_2$ 的概念：

$$L \xleftarrow{\ l\ } K \xrightarrow{\ r\ } R, \tag{71}$$

在某个范畴 $\mathcal{C}$（其对象是超图，态射表示子超图包含映射）中，其中 L 是指定规则左侧的超图模式， R 是指定规则右侧的超图模式，而 K 是指定在 “ 提取 ” 左侧并 “ 注入 ” 右侧时保持不变的子超图的模式。（请注意，按照 Kissinger[40] 和 Fong[41][42], 的术语，超图范畴，即配备了*Frobenius*代数结构 、从而确保所有弦图都对应于超图的对称幺半范畴，是构造此类重写系统特别自然的范畴背景。）在上文中，态射 $l\colon K \to L$ 和 $r\colon K \to R$ 构成一个跨 ，也就是说，它们是一对具有公共定义域的态射；而且它们是单态射 ，也就是说，它们是

单射/左可消去的：对于任意两对态射 $f_1 : X \to K$ 和 $f_2 : X \to K$，只要它们使以下任一图表交换：

$$\forall X \underset{\forall f_2}{\overset{\forall f_1}{\rightrightarrows}} K \xrightarrow{l} L\ , \qquad \text{or} \qquad \forall X \underset{\forall f_2}{\overset{\forall f_1}{\rightrightarrows}} K \xrightarrow{r} R, \tag{72}$$

必然有 $(f_1 :\ X \to K)\ =(f_2 :\ X \to K)$，即：

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C}) \qquad \forall (f_1 :\ X \to K),\ (f_2 :\ X \to K) \in \text{同态集}\,(\mathcal{C})\,,$$
$$(l \circ f_1 :\ X \to L)\ = (l \circ f_2 :\ X \to L) \qquad \Longrightarrow \qquad (f_1 :\ X \to K)\ =\ (f_2 :\ X \to K)\,, \tag{73}$$

and:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C}) \qquad \forall (f_1 :\ X \to K)\,,\ (f_2 :\ X \to K) \in \text{同态集}\,(\mathcal{C})\,,$$
$$(r \circ f_1 : X \to R) = (r \circ f_2 : X \to R) \qquad \Longrightarrow \qquad (f_1 : X \to K) = (f_2 : X \to K)\,. \tag{74}$$

这种超图重写规则的图形表示（其中的关系/超边为二元，即对应于集合替换规则 $\{\{x,y\},\{x,z\}\} \to \{\{x,z\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$——因为这种形式的任何超图重写规则都可以改写为作用于顶点间有序关系多重集上的符号集合替换规则）如图 12 所示。

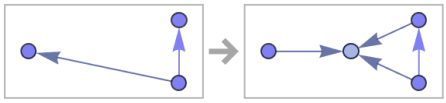
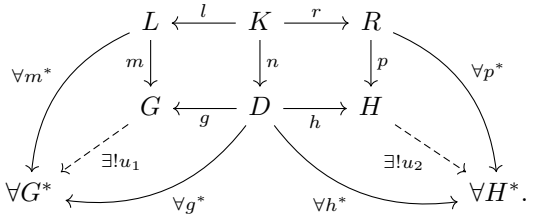


图 12：与集合替换系统 $\{\{x,y\},\{x,z\}\} \to \{\{x,z\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$ 对应的（超）图变换规则的图形表示。

于是，若存在一个态射（$m :\ L \to G$）$\in \in$同态集$(\mathcal{C})$，则可以称上文所示形式的超图重写规则匹配给定超图G；通过在该匹配处应用重写规则得到的结果超图 H，可以借助以下双推出图表[43]计算得出：



(75)

更具体地说， $D \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ 是一个超图，而（$n\colon K \to D$），（$g\colon D \to G$）$\in$是同态集$(\mathcal{C})$中的超图包含映射，且最左方交换方块交换:

$$(g \circ n : K \to G) = (m \circ l : K \to G)\,, \tag{76}$$

且是 在泛性质意义下，对于任意配备了包含映射的超图 $G^* \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$:

$$(m^* : L \to G^*)\,, (g^* : D \to G^*) \in \hom(\mathcal{C})\,, \tag{77}$$

存在唯一的包含映射 $(u_1\colon G \to G^*) \in \mathsf{hom}(\mathcal{C})$，使得:

$$(m^* : L \to G^*) = (u_1 \circ m : L \to G^*)\,, \qquad \text{and} \qquad (g^* : D \to G^*) = (u_1 \circ g : D \to G^*)\,. \tag{78}$$

这使得我们可以计算“余项”超图 D ob：从 G 中位于规则匹配 $m\colon L \to G$ 所定义位置的子超图中，提取出一个与 L 同构的子超图。进一步地， D, $H \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ 是超图，且 $(p\colon R \to H)$，$(h\colon D \to H) \in$ho m $(\mathcal{C})$ 是包含映射，并且最右方交换方块交换:

$$(h \circ n : K \to H) = (p \circ r : K \to H)\,, \tag{79}$$

且是 在泛性质意义下，对于任意配备了包含映射的超图 $H^* \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ s:

$$(p^* : R \to H^*)\,, (h^* D \to H^*) \in \hom(\mathcal{C})\,, \tag{80}$$

存在唯一的包含映射 $(u_2\colon H \to H^*) \in$同态集 $(\mathcal{C})$，使得:

$$(p^* : R \to H^*) = (u_2 \circ p : R \to H^*)\,, \qquad \text{and} \qquad (h^* : D \to H^*) = (u_2 \circ h : D \to H^*)\,. \tag{81}$$

进而，这使我们能够计算通过将一个子超图粘合

到残余超图 D 中由单射映射 $m : K \to D$（从不变子超图到残余超图）所定义的位置上，且该子超图与 R 同构，由此得到结果超图 R。这一双重推出构造产生了一类可能的超图转换，据此我们能够构造多路演化图（其顶点代表超图，其边代表超图重写）；这一过程与前文讨论的图灵机情形直接类似：上文给出的超图重写规则的一个具体示例见图 13，而由该多路演化图（视为箭图）自由生成的范畴则见图 14。图 15 展示了每个标记了相应态射/边所需超图转换数量的态射/边，以执行对应的计算。这说明复合 $\circ$ 和张量积 $\otimes$ 运算并非纯粹可加（尽管两者都在一定程度上接近可加），从而表明该系统在很大程度上是（多）计算不可约的，但并非完全如此。图 16 展示了这样的构造：每个顶点/对象都标记了其步数，每条边/态射都标记了在相应计算过程中经过的步数列表。正如预期的那样，我们看到超图重写系统在计算意义上比在多重计算意义上更可约（即复合运算 $\circ$ 受到映射 Z' 的扭曲程度大于张量积运算 $\otimes$）：这是因为基于超图同构的状态等价函数，其计算复杂度高于此前讨论的非确定性图灵机情形。

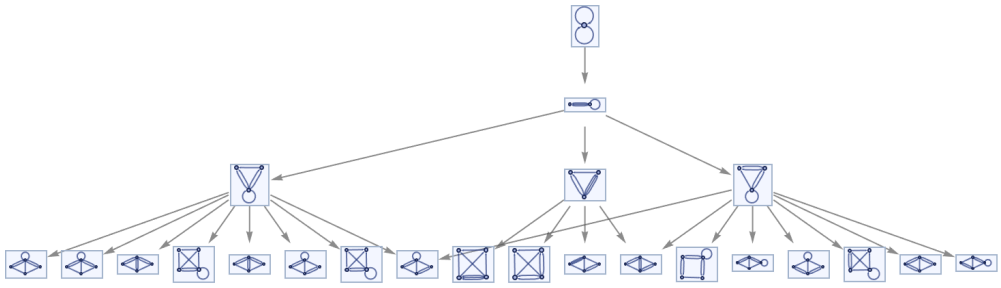


图 13：对应于集合替换系统 $\{\{x, y\}, \{x, z\}\} \to \{\{x, z\}, \{x, w\}, \{y, w\}, \{z, w\}\}$ 非确定性演化的多路演化图，从“双自环”初始条件开始，经过 3 步；每条边代表相应（超）图重写规则的一次应用。

双推出重写通常在粘合范畴 [44], 中进行，因此，黏合性是通常会对上述范畴 $\mathcal{C}$ 施加的条件；粗略地说，黏合性提供了充分条件，使推出能够沿单态射以构造双推出图表所需的方式“粘合”。更形式化地说，若一个范畴具有拉回，且所有沿单态射的推出都满足范坎彭方形 条件，则称该范畴为粘合范畴。具有

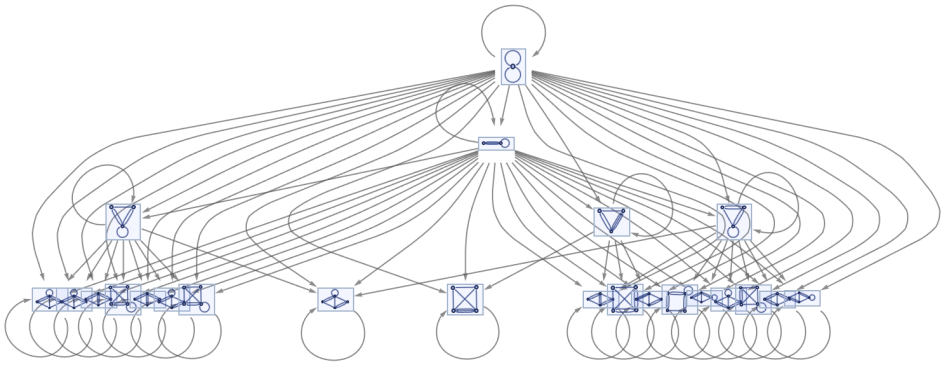


图 14：集合替换系统$\{\{x,y\},\{x,z\}\}\to\{\{x,z\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$（视为箭图）的非确定性演化所对应的多路演化图自由生成的范畴的图论表示；其初始条件为“双重自环”，演化 3 步。

拉回 si　　mplies 意味着，对于某个余跨度 （即一对具有共同陪域的态射　　）：

$$Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} Z \tag{82}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，存在一个对象 $P\in\mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ 和一对态射 $(f'\colon P\to Z)$，$(g'\colon P\to Y)\in\mathrm{hom}\,(\mathcal{C})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X, \end{array} \tag{83}$$

i.e:

$$(f\circ g' : P\to X)=(g\circ f' : P\to X)\,, \tag{84}$$

并且 th　at 具有泛性质，即对于任意配备态射的对象 $P^*\in\mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$　　s:

$$(f^* : P^*\to Z)\,,(g^* : P^*\to Y)\in\mathrm{hom}\,(\mathcal{C})\,, \tag{85}$$

存在唯一态射（$u\colon P^*\to P$）$\in$同态集（$\mathcal{C}$），使得：

$$(f^* : P^*\to Z)=(f'\circ u : P^*\to Z)\,,\qquad \text{and}\qquad (g^* : P^*\to Y)=(g'\circ u : P^*\to Y)\,, \tag{86}$$

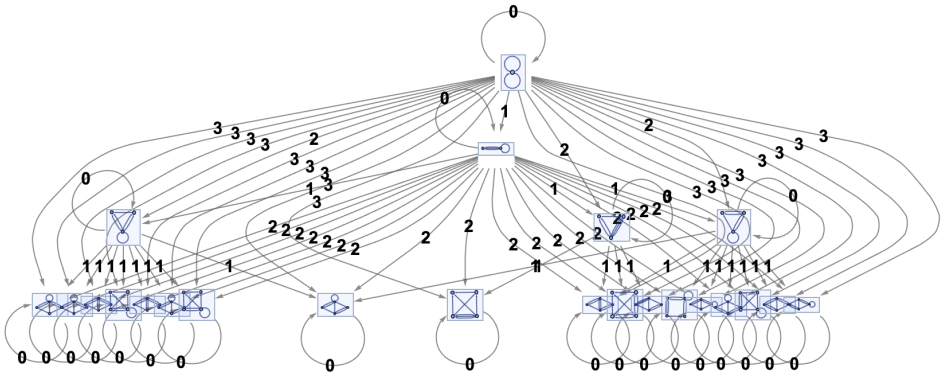


图 15：与集合替换系统$\{\{x,y\},\{x,z\}\}\to\{\{x,z\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$的非确定性演化相对应的多路演化图（视为箭图）自由生成的范畴的图论表示，其中边/态射带有额外的元数据标签，对应于执行所需计算所需的“步”（即重写规则应用）数量。

也就是说，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \forall P^* & \xrightarrow{\forall f^*} & \\ \downarrow{\scriptstyle \exists! u} & & \\ P & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X. \end{array} \qquad (87)$$

尽管沿余跨度具有拉回的条件相对容易陈述和理解，但另一方面，沿单态射的推出满足范坎彭方形条件则晦涩且技术性强得多。该条件断言，如果在以下图表中，对象 $W\in\mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 以及态射 $(f'\colon Y\to W),(g'\colon Z\to W)\in\mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ Y & \xrightarrow[f']{} & W \\ & \searrow^{\forall f^*} & \downarrow{\scriptstyle \exists! u} \\ & & \forall W^*, \end{array} \qquad (88)$$

构成跨 $(f\colon X\to Z)$，$(g\colon X\to Y)\in\mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$ 的推出，即：

$$(f'\circ g : X\to W)=(g'\circ f : X\to W), \qquad (89)$$

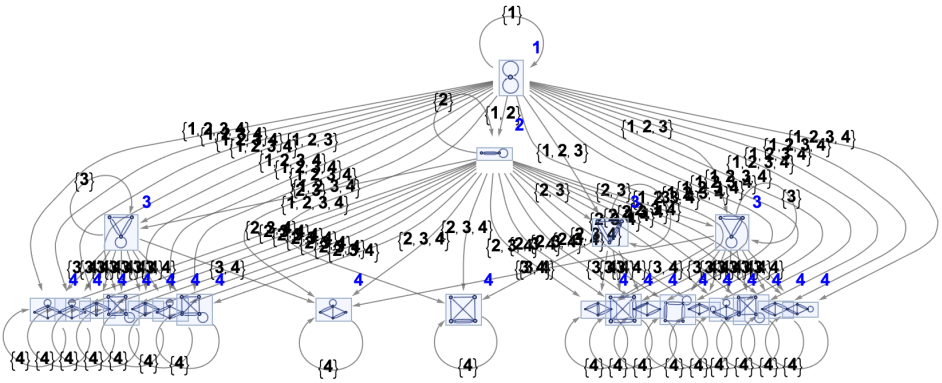


图 16：由与集合替换系统$\{\{x,y\},\{x,z\}\}\to\{\{x,z\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$的非确定性演化相对应的多路演化图自由生成的范畴的图论表示（该演化图被视为箭图），其中顶点/对象带有与其出现的步数相对应的附加元数据标签（以蓝色显示），边/态射则带有与作为所需计算一部分而 traversed 的所有中间步数相对应的附加元数据标签。

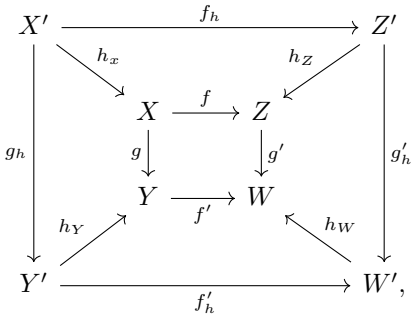
and:

$$\forall W^*\in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})\qquad \forall\,(f^*\colon\, Y\to W^*)\,,\ (g^*\colon\, Z\to W^*)\ \in \text{同态集}\,(\mathcal{C})\,,$$
$$\text{such that}\qquad (f^*\circ g: X\to W^*)=(g^*\circ f: X\to W^*)\,,\qquad \exists!\,(u: W\to W^*)\in \hom(\mathcal{C})\,, \tag{90}$$

使得:

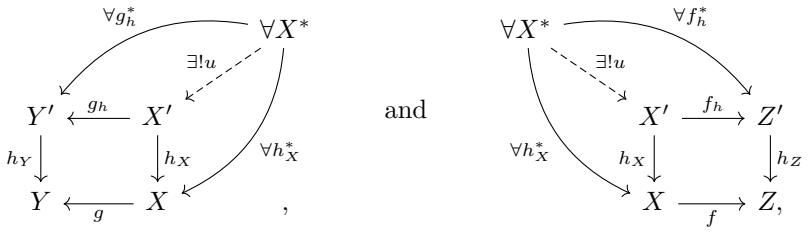
$$(f^*: Y\to W^*)=(u\circ f': Y\to W^*)\,,\qquad \text{and}\qquad (g^*: Z\to W^*)=(u\circ g': Z\to W^*)\,, \tag{91}$$

那么，当且仅当对于每个如下形式的交换立方体，该推出是一个范坎彭方形:



(92)

其中顶面和左侧面都是拉回方形；换言之，当且仅当在以下这对图表中，对象 $X' \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 连同态射 $(h_X\colon X' \to X)$，$(g_h\colon X' \to Y') \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$，以及对象 $X' \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 连同态射 $(f_h\colon X' \to Z')$，$(h_X\colon X' \to X) \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$：



(93)

分别构成余跨度 $(g\colon X \to Y)$，$(h_Y\colon Y' \to Y) \in$ 同态集 $(\mathcal{C})$ 和 $(f\colon X \to Z)$，$(h_Z\colon Z' \to Z) \in$ 同态集 $(\mathcal{C})$ 的拉回，即：

$$(g \circ h_X\colon X' \to Y) = (h_Y \circ g_h : X' \to Y)\,, \qquad \text{and} \qquad (f \circ h_X : X' \to Z) = (h_Z \circ f_h : X' \to Z)\,, \tag{94}$$

而且，还有：

$$\forall X' \in \text{对象}\,(\mathcal{C}) \qquad \forall\,(g^*_h\colon X^* \to Y'),\ (h^*_X\colon X^* \to X) \in \text{同态集}\,(\mathcal{C}),$$
$$\text{such that} \qquad (g \circ h^*_X : X^* \to Y) = (h_Y \circ g^*_h : X^* \to Y)\,, \qquad \exists!\,(u : X^* \to X') \in \hom(\mathcal{C})\,, \tag{95}$$

使得：

$$(h^*_X : X^* \to X) = (h_X \circ u : X^* \to X)\,, \qquad \text{and} \qquad (g^*_h : X^* \to Y') = (g_h \circ u : X^* \to Y')\,, \tag{96}$$

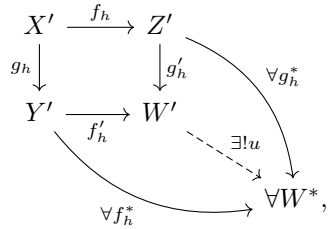
对于第一个（最左侧）图表的情况，以及：

$$\forall X' \in \mathsf{ob}\ (\mathcal{C}) \qquad \forall\ (f^*_h\colon\ X^* \to Z')\ ,\ \ (h^*_X\colon\ X^* \to X)\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\ ,$$
$$\text{使得}\ (f \circ h^*_X\colon\ X^* \to Z)\ =\ (h_Z \circ f^*_h\colon\ X^* \to Z) \qquad \exists!\ \ (u\colon\ X^* \to X')\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\ , \tag{97}$$

使得:

$$(h_X^* : X^* \to X) = (h_X \circ u : X^* \to X)\,, \qquad \text{and} \qquad (f_h^* : X^* \to Z') = (f_h \circ u : X^* \to Z')\,, \tag{98}$$

对于第二个（最右侧的）图表，推出方块与拉回方块之间满足某个相容条件。具体而言，该相容条件指出，后侧面是一个推出方块；换言之，在下图中，对象 $W' \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 以及态射 $(f'_h\colon\ Y' \to W')$ ，$(g'_h\colon\ Z' \to W') \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$:



(99)

构成跨 $(f_h\colon\ X' \to Z')$ ，$(g_h\colon\ X' \to Y') \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$ 的推出，即:

$$(f'_h \circ g_h : X' \to W') = (g'_h \circ f_h : X' \to W')\,, \tag{100}$$

and:

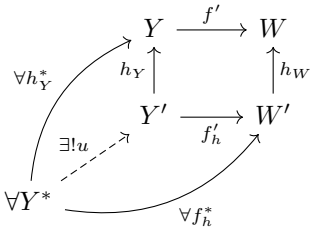
$$\forall W^* \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C}) \qquad \forall (f_h^*\colon\ Y' \to W^*)\,,\ (g_h^*\colon\ Z' \to W^*) \in \text{同态集}\,(\mathcal{C})\,,$$
$$\text{such that} \qquad (f_h^* \circ g_h : X' \to W^*) = (g_h^* \circ f_h : X' \to W^*)\,, \qquad \exists!\,(u : W' \to W^*)\,, \tag{101}$$

使得:

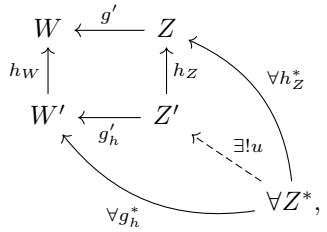
$$(f_h^* : Y' \to W^*) = (u \circ f'_h :' \to W^*)\,, \qquad \text{and} \qquad (g_h^* : Z' \to W^*) = (u \circ g'_h : Z' \to W^*)\,, \tag{102}$$

当且仅当底面和右侧面是拉回方块时，换言之，当且仅当以下这对图中的对象 $Y' \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 连同态射 $(f'_h\colon\ Y' \to W')$ 、$(h_Y\colon\ Y' \to Y) \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$，以及对象$Z' \in \mathsf{ob}\,(\mathcal{C})$ 连同态射 $(g'_h\colon\ Z' \to W')$ 、$(h_Z\colon\ Z' \to Z) \in \mathsf{hom}\,(\mathcal{C})$

图表:



and



(103)

分别构成余跨度 $(f' \colon Y \to W)$、$(h_W \colon W' \to W) \in \mathsf{hom}(\mathcal{C})$ 和 $(g' \colon Z \to W)$、$(h_W \colon W' \to W) \in \mathsf{hom}(\mathcal{C})$ 的拉回，即:

$$(h_W \circ f'_h : Y' \to W) = (f' \circ h_Y : Y' \to W)\,, \qquad \text{and} \qquad (h_W \circ g'_h : Z' \to W) = (g' \circ h_Z : Z' \to W)\,, \tag{104}$$

而且:

$$\begin{aligned} &\forall Y^* \in \text{对象}\ (\mathcal{C}) \qquad \forall\ (f^*_h \colon\ Y^* \to W')\,,\ \ (h^*_Y \colon\ Y^* \to Y)\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\,,\ \text{使得}\ (h_W \circ f^*_h \colon \\ &Y^* \to W)\ =\ (f' \circ h^*_Y \colon\ Y^* \to W) \qquad \exists!\ \ (u \colon\ Y^* \to Y')\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\,, \end{aligned} \tag{105}$$

使得:

$$(f^*_h \colon\ Y^* \to W')\ =\ (f'_h \circ u \colon\ Y^* \to W')\,, \quad \text{and} \quad (h^*_Y \colon\ Y^* \to Y)\ =\ (h_Y \circ u \colon\ Y^* \to Y)\,, \tag{106}$$

对于第一个（最左侧）图表的情形，以及:

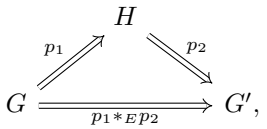
$$\begin{aligned} &\forall Z^* \in \text{对象}\ (\mathcal{C}) \qquad \forall (g^*_h \colon\ Z^* \to W')\,,\ (h^*_Z \colon\ Z^* \to Z)\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\,, \\ &\qquad \text{使得} \qquad (h_W \circ g^*_h \colon\ Z^* \to W)\ = (g' \circ h^*_Z \colon\ Z^* \to W) \qquad \exists!\ \ (u \colon\ Z^* \to Z')\ \in \text{同态集}\ (\mathcal{C})\,, \end{aligned} \tag{107}$$

使得:

$$(g_h^* : Z^* \to W') = (g'_h \circ u : Z^* \to W'), \qquad \text{and} \qquad (h_Z^* : Z^* \to Z) = (h_Z \circ u : Z^* \to Z). \tag{108}$$

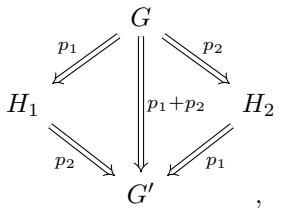
对于第二个（最右侧）图表的情况。尽管沃尔夫勒姆模型演化中所考虑的超图范畴及其子超图包含映射并非严格意义上的粘合范畴（由于每个超边内顶点的连接方式任意，因此无法保证沿单态射的所有推出都存在），但正如 Kissinger[45][46][47] 所指出的，它是某个粘合范畴的满子范畴，并且可以“嵌入”该环境粘合范畴中，从而继承足够的“黏合性”，以便执行双推出重写（通过选择性粘合性 或部分粘合性 的机制——本质上是要求将该子范畴嵌入粘合范畴的函子保留单态射）。

如 [48], 中所详述，可以通过结合代数图变换理论中的并发 定理和并行 定理，以非常明确的方式构造所得范畴 $\mathcal{T}$ 中超图及超图重写的普通复合结构与对称幺半结构。具体而言，若有一对超图产生式 p_1 和 p_2 （即对应于两次超图重写的两个单态射跨），分别将超图 G 重写为 H ，以及将超图 H 重写为 G'（称为 E-相关变换序列），那么并发定理便允许我们复合这些产生式，从而得到一个形如以下形式的 E-并发超图产生式 $p_1 *_E p_2$：



(109)

从而得到 $\circ$ in $\mathcal{T}$ 中态射的普通（顺序）复合。另一方面，如果有一对超图产生式 p_1 and p_2 ，产生了两个不同的、顺序独立变换序列 G to H_1 to G' 和 G to H_2 to G' （分别通过先应用 p_1 再应用 p_2 ，以及先应用 p_2 再应用 p_1 得到），那么并行定理允许我们将这些产生式复合起来，得到一个形如以下形式的并行超图产生式 $p_1 + p_2$:



(110)

从而得到 $\otimes$ in $\mathcal{T}$ 中态射的张量积（并行）复合，如所需。

4 与范畴量子力学和函子量子场论的对应关系

在传统的（非相对论）量子力学中，通常会为每个时刻 $t \in \mathbb{R}$关联一个系统对应的（希尔伯特）态空间 V_t ；对于每个时间区间 $[t_1, t_2]$，其中 $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $t_1 \leq t_2$，则关联一个对应的线性（幺正）时间演化算子 $U(t_1,\ t_2) : V_{t_1} \to V_{t_2}$。如果哈密顿量 $H(t)$ 是一个随 $t \in \mathbb{R}$平滑变化的厄米／自伴算子，那么我们可以用以下戴森公式（也称为平行移动的迭代积分展开）显式表示薛定谔方程中的 $U(t_1,\ t_2)$:

$$\hat{U}(t_1, t_2) = P \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} \hat{H}(t)\, dt\right), \tag{111}$$

其中 Pexp 表示非交换代数中的路径有序指数算子；对于哈密顿量 H 固定的时间无关情形，该式可简化为普通指数:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{H}(t) = \hat{H}, \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{U}(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t_2 - t_1)\,\hat{H}\right). \tag{112}$$

这一显式表示形式 $U(t_1,\ t_2)$ 清楚地揭示了量子力局部 时间演化的一项基本特征：它必然是局域于时间的。换言之，由于积分的线性性，“全局”时间区间 $[t_1, t_2]$ 总能细分为许多“局部”子区间，从而通过累积许多局部时间演化的效果，得到单一的全局时间演化。更形式化地说，我们有:

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}, \qquad \text{such that} \qquad t_1 \leq t_2 \leq t_3, \qquad \hat{U}(t_1, t_3) = \hat{U}(t_2, t_3) \circ \hat{U}(t_1, t_2), \tag{113}$$

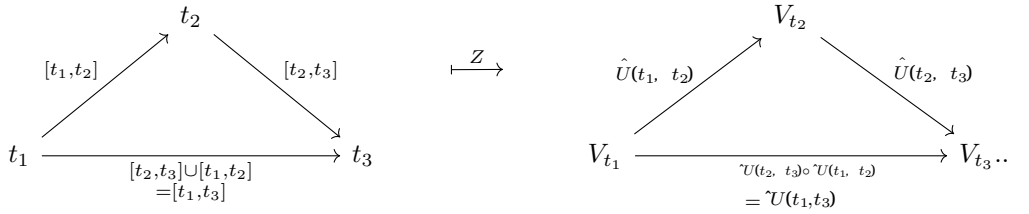
换言之，时间演化具有一种自然的复合结构 $\circ$，并且当它与以下条件结合时（该条件大体上无害，但并非完全无害）：

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{U}(t,t) = id_{V_t}, \tag{114}$$

由此可见，量子力学中的时间演化满足范畴所需的公理（结合律继承自线性算子乘积的结合律）；这正是 Abramsky 和 Coecke 提出范畴量子力学[49][50]的根本洞见。因此，若$\mathbf{Bord}_1^{Riem}$表示由（黎曼）流形及其配边构成的一维范畴，而$\mathbf{Vect}$ 表示由向量空间及其线性同构构成的范畴，那么量子力学中时间演化局域性的表述就简化为以下映射的表述：

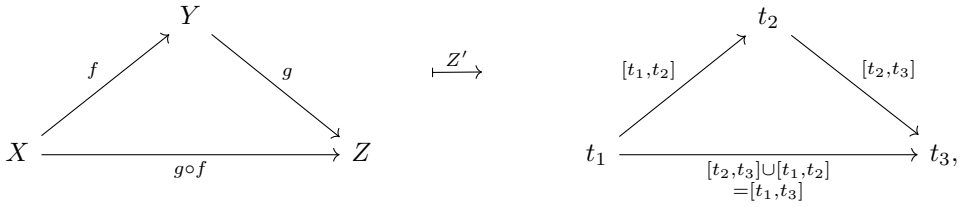
$$Z : \mathbf{Bord}_1^{Riem} \to \mathbf{Vect}, \tag{115}$$

是一个函子，也就是说（至少在此语境下），局域性就是函子性。范畴$\mathbf{Bord}_1^{Riem}$与$\mathbf{Vect}$ 之间的这种函子性可以用图示如下：



(116)

如果我们将（希尔伯特）态空间 V_t 视为数据结构，并将幺正时间演化算子 $\hat{U}(t_1,\ t_2)$ 视为基本计算（例如在量子信息论中，它们代表量子门复合所产生的作用），那么从结构上看，这与前文所述函子 Z'：$\mathcal{T} \to \mathcal{B}$ 从数据结构与计算范畴到流形与配边范畴的连续情形非常相似，只是定义域范畴与陪域范畴互换了：



(117)

在 pr 中考虑　　前文各节，尽管定义域范畴与陪域范畴互换了　　.

在最一般的函子量子力学理论中，该理论由从配边到计算的某个函子定义 $Z:\mathcal{B}\to\mathcal{T}$。虽然 Z 不一定总是 $Z':\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ 的严格逆函子，但这两个函子至少互为 伴随。形式上，$Z':\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ 是 $Z:\mathcal{B}\to\mathcal{T}$ 的左伴随，这一陈述对应于以下断言：对于每个对象（流形）$X\in\mathrm{ob}(\mathcal{B})$，存在一个从 Z' 到 X 的 泛态射（配边）$(\varepsilon_X:Z'(Z(X))\to X)\in\mathrm{hom}(\mathcal{B})$，其中 $Z(X)\in\mathrm{ob}(\mathcal{T})$ 是某个对象（数据结构）；泛性质要求，对于任意对象（数据结构）$Y\in\mathrm{ob}(\mathcal{T})$ 以及任意态射（配边）$(f:Z'(Y)\to X)\in\mathrm{hom}(\mathcal{B})$，都存在唯一的态射（计算）$(g:Y\to Z(X))\in\mathrm{hom}(\mathcal{T})$，使得：

$$(\varepsilon_X\circ Z'(g):Z'(Y)\to X)=(f:Z'(Y)\to X)\,. \tag{118}$$

该条件可以通过以下交换图简洁地重述：

$$\begin{array}{ccc} Z'(\forall Y) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Z'(\exists!g)} & \searrow^{\forall f} & \\ Z'(\exists Z(X)) & \xrightarrow[\exists\varepsilon_X]{} & \forall X. \end{array} \tag{119}$$

另一方面，$Z:\mathcal{B}\to\mathcal{T}$是右伴随 于 $Z':\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ 这一表述，对应于如下断言：对于每个对象（数据结构）$Y\in\mathrm{ob}(\mathcal{T})$，都存在一个泛态射 （计算）$(\eta_Y:Y\to Z(Z'(Y)))\in\mathrm{hom}(\mathcal{T})$，从 Y指向某个对象（流形）$Z'(Y)\in\mathrm{ob}(\mathcal{B})$；泛性质要求，对于任意对象（流形）$X\in\mathrm{ob}(\mathcal{B})$以及任意态射（计算）$(g:Y\to Z(X))\in\mathrm{hom}(\mathcal{T})$，都存在唯一态射（配边）$(f:Z'(Y)\to X)\in\mathrm{hom}(\mathcal{B})$，使得：

$$(Z(f)\circ\eta_Y:Y\to Z(X))=(g:Y\to Z(X))\,. \tag{120}$$

这一条件可以通过以下交换图简洁地重述：

$$\begin{array}{ccc} \forall Y & \xrightarrow{\exists\eta_Y} & Z(\exists Z'(Y)) \\ & \searrow^{\forall g} & \Big\downarrow{\scriptstyle Z(\exists!f)} \\ & & Z(\forall X)\,. \end{array} \tag{121}$$

正是在这个相当精确的意义上，我们才能声称，计算复杂性理论中的计算不可约性，与范畴量子力学中时间演化的局域性互为对偶／伴随：对于任意描述不可约计算的函子 $Z'\colon\ \mathcal{T}\to\mathcal{B}$，我们都可以唯一地构造一个相应的函子 $Z\colon\ \mathcal{B}\to\mathcal{T}$，用来描述局域量子时间演化，使得：

$$\forall X,\ \ X'\in \mathsf{ob}\,(\mathcal{B})\qquad \forall (f\colon\ X'\to X)\ \in \text{同态集}\,(\mathcal{B})\,,$$

$$\left(\varepsilon_X\circ Z'\left(Z\left(f\right)\right):Z'\left(Z\left(X'\right)\right)\to X\right)=\left(f\circ\varepsilon_{X'}:Z'\left(Z\left(X'\right)\right)\to X\right),\quad (122)$$

反过来，对于任意描述局域量子时间演化的函子 $Z:\mathcal{B}\to\mathcal{T}$，我们都可以唯一地构造一个相应的函子 Z'：$\mathcal{T}\to\mathcal{B}$，用以描述不可约计算，使得：

$$\forall Y,\ \ Y'\in \mathsf{ob}\,(\mathcal{T})\qquad \forall (g\colon\ Y\to Y')\ \in \text{同态集}\,(\mathcal{T})\,,$$

$$\left(Z\left(Z'\left(g\right)\right)\circ\eta_Y:Y\to Z\left(Z'\left(Y'\right)\right)\right)=\left(\eta_{Y'}\circ g:Y\to Z\left(Z'\left(Y'\right)\right)\right),\quad (123)$$

如下面这对交换图所示：

$$\begin{array}{ccc} Z'\left(Z\left(X'\right)\right) & \xrightarrow{Z'(Z(f))} & Z'\left(Z\left(X\right)\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{X'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} \\ X' & \xrightarrow[f]{} & X, \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta_Y} & Z\left(Z'\left(Y\right)\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Z\left(Z'(g)\right)} \\ Y' & \xrightarrow[\eta_{Y'}]{} & Z\left(Z'\left(Y'\right)\right). \end{array} \qquad (124)$$

更隐晦地说，这使我们能够提出这样的论断：在这一极为受限的意义上，计算复杂度理论与（非相对论）量子力学互为对偶／伴随。

在非确定性／多计算情形中，范畴 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{B}$ 都配备了（对称）幺半结构，因此伴随函子 Z' 和 Z 此时都是（对称）幺半函子：

$$Z':\langle T,\otimes,I\rangle\to\langle\mathcal{B},\oplus,\varnothing\rangle\,,\qquad \text{and}\qquad Z:\langle\mathcal{B},\oplus,\varnothing\rangle\to\langle\mathcal{T},\otimes,I\rangle\,,\qquad (125)$$

我们在伴随的右侧得到了非相对论量子力学中时间演化函子的高维类比。对于最初考虑的例子，其中范畴 $\mathcal{T}$

数据结构与计算的范畴被抽象地表示为向量空间与线性同构构成的范畴（其中张量积运算由通常的向量空间张量积给出），因此该函子具有如下形式：

$$Z : \mathbf{Bord}_d^{Riem} \to \mathbf{Vect}, \tag{126}$$

其中 $d > 1$。在量子场论的函子方法中（例如拓扑场论或二维共形场论中）[51][52], ，此类函子扮演传播子的角色，也就是非相对论量子力学中时间演化函子的洛伦兹不变类比：对于每个余维一类空超曲面 $M_{d-1} \in \mathsf{ob}\left(\mathbf{Bord}_d^{Riem}\right)$，该函子都指定一个对应的向量空间 $Z\left(M_{d-1}\right) \in \mathsf{ob}\left(\mathbf{Vect}\right)$，表示该超曲面上的状态空间；对于每个配边/时空/世界体积 $M \in \mathsf{hom}\left(\mathbf{Bord}_d^{Riem}\right)$ 及其边界 $\partial(M)$，即：

$$\left(M : \partial_{in}\left(M\right) \to \partial_{out}\left(M\right)\right) \in \hom\left(\mathbf{Bord}_d^{Riem}\right), \tag{127}$$

该函子指定一个对应的线性同构：

$$\left(Z\left(M\right) : Z\left(\partial_{in}\left(M\right)\right) \to Z\left(\partial_{out}\left(M\right)\right)\right) \in \hom\left(\mathbf{Vect}\right), \tag{128}$$

表示一个从超曲面 M 映射到超曲面 ∂_{out} 的过程所对应的传播子/散射振幅/S矩阵 $\partial_{in}\left(M\right)$ M。因此，正如计算不可约性可被视为与量子力学中时间演化的局域性形式对偶/伴随，多重计算不可约性也可被视为与遵循函子量子场论中的 Atiyah-Segal拼接定律[15][16][17] 形式对偶/伴随。根据该定律，对于一个可分解为子定义域 Σ_1 和 Σ_2（即 $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$）的定义域 Σ上的路径积分，必须等于先对定义域 Σ_2进行路径积分，再与对定义域 Σ_1 进行路径积分相组合的结果。

通常，定义范畴量子力学和函子量子场论中时间演化的对称幺半函子 $Z : \mathbf{Bord}_1^{Riem} \to \mathbf{Vect}$ 和 $Z : \mathbf{Bord}_d^{Riem} \to \mathbf{Vect}$ 都被假定为强的 （按照前文所述的含义，即对于所有$X, Y \in \mathsf{ob}$（$\mathbf{Vect}$），相干映射 ϵ 和$\mu_{X,Y}$ 都是同构）。然而，仅仅保持配边／向量空间的张量积结构，并不足以定义真正符合物理的量子力学或量子场理论：至少还必须保持时间演化的匕首结构 （它推广了线性变换的厄米伴随运算，在有限维

情形下也称为共轭转置），以及向量空间的紧结构 （它推广了对有限维向量空间取对偶的运算）。在此设定下，我们称**Vect** 为*dagger* 范畴[53][54]，意指它配备了一个对合反变自函子 $\dagger$:**Vect** $\to$ **Vect**，也就是说，一个从**Vect** 到自身的函子，它会交换每个态射的源和目标:

$$\forall\left(f:X\to Y\right)\in\hom\left(\mathbf{Vect}\right),\qquad\exists\left(f^{\dagger}:Y\to X\right)\in\hom\left(\mathbf{Vect}\right),\tag{129}$$

并反转复合的方向:

$$\forall\left(f:X\to Y\right),\left(g:Y\to Z\right)\in\hom\left(\mathbf{Vect}\right),\qquad\left(\left(g\circ f\right)^{\dagger}:Z\to X\right)=\left(f^{\dagger}\circ g^{\dagger}:Z\to X\right),\tag{130}$$

且在对象上作用为恒等态射:

$$\forall X\in\mathrm{ob}\left(\mathbf{Vect}\right),\qquad X^{\dagger}=X,\qquad\text{and}\qquad\left(id_{X}^{\dagger}:X\to X\right)=\left(id_{X}:X\to X\right),\tag{131}$$

并且它是对合的，意味着它的作用等同于其自身的逆函子:

$$\forall\left(f:X\to Y\right)\in\hom\left(\mathbf{Vect}\right),\qquad\left(\left(f^{\dagger}\right)^{\dagger}:X\to Y\right)=\left(f:X\to Y\right).\tag{132}$$

由于 **Vect** 也是一个对称幺半范畴，我们理想上希望匕首结构 $\dagger$ 与张量积结构 $\otimes$相容，这意味着:

$\forall(f\colon X\to Y)\,,\ (g\colon Z\to W)\ \in$同态集 **(Vect)** ,

$$\left(\left(f\otimes g\right)^{\dagger}:Y\otimes W\to X\otimes Z\right)=\left(f^{\dagger}\otimes g^{\dagger}:Y\otimes W\to X\otimes Z\right),\tag{133}$$

以此方式保持与对称幺半结构的定义性自然同构相容，即结合子同构 α:

$\forall X,\ Y,\ Z \in \mathsf{ob}\,(\mathbf{Vect})$,

$$\left(\alpha^{\dagger}_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)\right) = \left(\alpha^{-1}_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)\right), \quad (134)$$

左、右单位元同构 λ:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathbf{Vect}), \qquad \left(\lambda^{\dagger}_{X} : X \to I \otimes X\right) = \left(\lambda^{-1}_{X} : X \to I \otimes X\right), \quad (135)$$

以及 ρ:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathbf{Vect}), \qquad \left(\rho^{\dagger}_{X} : X \to X \otimes I\right) = \left(\rho^{-1}_{X} : X \to X \otimes I\right), \quad (136)$$

以及对称/编织同构 σ:

$$\forall X, Y \in \mathrm{ob}\,(\mathbf{Vect}), \qquad \left(\sigma^{\dagger}_{X,Y} : Y \otimes X \to X \otimes Y\right) = \left(\sigma^{-1}_{X,Y} : Y \otimes X \to X \otimes Y\right). \quad (137)$$

对于向量空间（分别是有限维向量空间），厄米伴随运算（分别是共轭转置运算）显然为 **Vect**/**FdVect** 赋予了典范匕首结构。对于配边范畴 $\mathbf{Bord}_1^{Riem}$和 $\mathbf{Bord}_d^{Riem}$，『时间反演』运算（即反转配边的定向）产生了相容的匕首结构。同样，对于数据结构与计算范畴 $\mathcal{T}$，先前讨论的图灵机演化和超图重写这两种情形都存在显而易见的匕首结构（因为对于任意给定的图灵机规则，总能找到一个具有相同签名、可反转其演化的图灵机规则；对于任意给定的超图重写系统，也总能交换定义重写规则的单态射跨度中的 L 和 R 对象，从而得到同一演化的时间反演版本）。

另一方面，我们也将**FdVect** （有限维向量空间范畴）称为紧闭 [55][56] 对称幺半范畴，作为一种简便说法，表示每个对象 $X \in \mathsf{ob}\,\mathbf{(FdVect)}$ 都有一个相应的对偶对象 $X^* \in \mathsf{ob}\,\mathbf{(FdVect)}$，且该对偶对象在典范同构意义下唯一，并配备一对形式如下的态射 η_X 和 ε_X：

$$(\eta_X : I \to A^* \otimes A), (\varepsilon_A : A \otimes A^* \to I) \in \mathrm{hom}\,(\mathbf{FdVect}), \quad (138)$$

分别称为单位 和余单位 态射，并满足以下一对相干条件（有时称为拉拽条件）：

$\forall X \in \mathrm{ob}\,(\mathbf{FdVect})$,

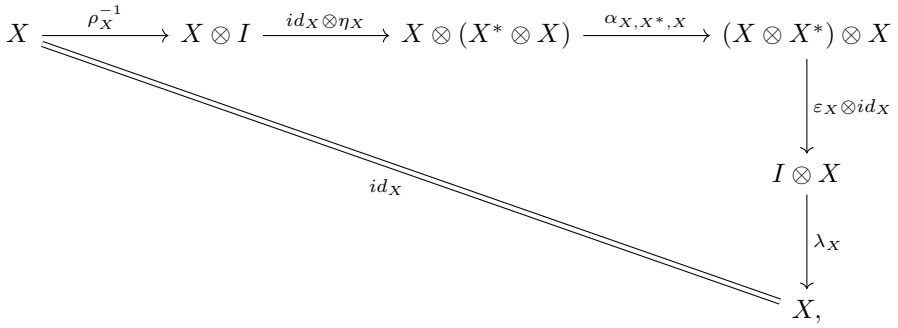
$$\left(\lambda_X \circ \left((\varepsilon_X \otimes id_X) \circ \left(\alpha_{X,X^*,X} \circ \left((id_X \otimes \eta_X) \circ \rho_X^{-1}\right)\right)\right) : X \to X\right) = \left(id_X : X \to X\right), \quad (139)$$

and:

$\forall X \in$ 上（**FdVect**），

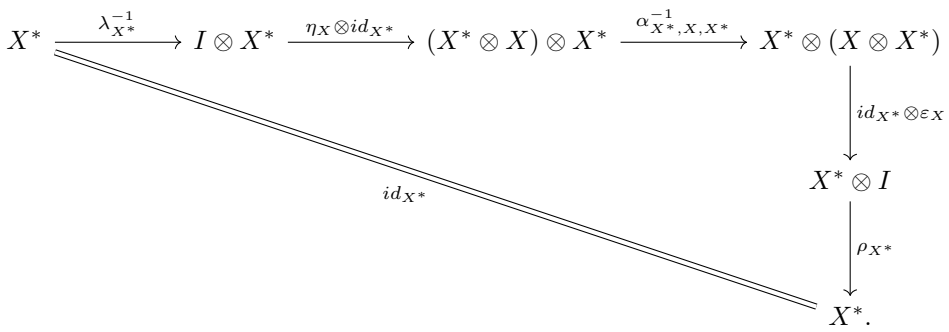
$$\left(\rho_{X^*} \circ \left((id_{X^*} \otimes \varepsilon_X) \circ \left(\alpha^{-1}_{X^*,X,X^*} \circ \left((\eta_X \otimes id_{X^*}) \circ \lambda^{-1}_{X^*}\right)\right)\right) : X^* \to X^*\right) = \left(id_{X^*} : X^* \to X^*\right). \quad (140)$$

我们可以用图表的方式重新表述这两个拉拽条件，即以下一对图表对所有 $X \in$ ob**(FdVect)** 都可交换：



(141)

and:



(142)

此外，如果存在一种匕首结构 †，使其以如下方式与紧结构相容

即单位与余单位态射 η 和 ε 可以通过 dagger 运算彼此关联（有限维向量空间范畴及其线性同构正是如此），换言之，如果对于所有对象 $X \in \mathbf{ob(FdVect)}$，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varepsilon_X^\dagger} & X \otimes X^* \\ & \searrow^{\eta_X} & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{X,X^*}} \\ & & X^* \otimes X, \end{array} \tag{143}$$

i.e:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\left(\mathbf{FdVect}\right), \qquad \left(\sigma_{X,X^*} \circ \varepsilon_X^\dagger : I \to X^* \otimes X\right) = \left(\eta_X : I \to X^* \otimes X\right), \tag{144}$$

接着，我们将该对称幺半范畴描述为*dagger* 紧致。对于有限维向量空间，对偶向量空间（即在线性形式的空间上定义逐点加法和数乘所得的向量空间）使**FdVect** 具有典范紧致结构[57][58]；对于**Vect**中的无限维向量空间，对偶空间同样存在，不过其性质本质上不那么“良好”（因为此处的选择公理意味着，对偶空间的维数总是严格大于原空间的维数），且满足的相容条件较少。在拓扑量子场论中，自由度的数量（因此态空间的维数）总是有限的。从超曲面 $\partial_{in}(M)$到超曲面 $\partial_{out}(M)$、形状为 M的过程的传播子，即:

$$Z\left(M\right) : Z\left(\partial_{in}\left(M\right)\right) \to Z\left(\partial_{out}\left(M\right)\right), \tag{145}$$

由函子 Z **:Bord**$_d^{Riem} \to$ **Vect** 生成，可以用对偶空间表述为:

$$Z\left(M\right) : \mathbb{C} \to Z\left(\partial\left(M\right)\right) = Z\left(\partial_{out}\left(M\right)\right) \otimes Z\left(\partial_{in}\left(M\right)\right)^*, \tag{146}$$

即以关联函数 或 n点函数的形式。对于超图范畴及子超图包含映射，每个超图都有一个对偶（它显然与匕首结构相容），其构造方式是交换它的顶点集 V和超边集 E，即如果:

$$H = \langle V = \{v_i \,|i \in I_v\}, E = \{e_i \,|i \in I_e, e_i \subseteq V, e_i \neq \emptyset\}\rangle, \tag{147}$$

那么：

$$H^* = \langle V^* = E, E^* = \{\{e_i \,|v_m \in e_i\} \,|m \in I_v\}\rangle\,, \tag{148}$$

其中， I_v 和 I_e 分别是顶点和超边的指标集。其他数据结构与计算范畴（例如图灵机状态与转移范畴）也很可能存在相应的对偶结构；但即便存在，目前也尚未发现其明确形式。

正如我们已经证明的，在普通范畴中，变形顺序复合结构 $\circ$ 可用于刻画和量化计算可约性；而在对称幺半范畴中，变形并行复合结构／张量积 $\otimes$可用于刻画和量化多计算可约性。鉴于这种将计算复杂性理论与量子力学、多重计算复杂性理论与量子场论联系起来的形式对偶／伴随，完全可以设想，物理理论固有的其他各种代数性质与结构，最终也会在抽象计算理论中拥有相当自然且纯粹以复杂性理论为基础的对应物。例如，匕首结构的变形

† 匕首对称幺半范畴或许能够为刻画某些类别的（多重）计算的不可逆性提供一些手段（这里的不可逆性是指：对于原则上完全可逆的计算，在实践中逆转该计算所面临的计算难度）。这一概念当然与（多重）计算不可约性本身在概念上有着深刻联系；而匕首紧范畴中紧结构的变形 η， ε 或许有助于量化在由一个或多个多元多值函数组成的多重计算中，将输出/值与输入/自变量互换所涉及的计算难度（例如，这种多重计算可由张量网络或幺半范畴弦图表示）。这些令人兴奋的可能性仍有待未来研究，以下总结性评论将对其作进一步详细说明。

5 总结性评论

在本文的整个过程中，我们一直致力于建立一种系统化的方法，使范畴的抽象语法 能够被赋予具体的计算语义：其中所有对象都解释为数据结构，所有态射都解释为计算，并且每个态射都附带与其底层计算的时间复杂度相对应的某些元数据

，以及用于定义这些时间复杂度在复合下如何变化的代数。我们已经证明，可以通过定义一个从数据结构与计算范畴到离散余边界范畴（由零维流形与离散配边／区间构成）的映射来实现这一点；在这种映射下，给定计算的不可约性取决于该映射在顺序复合下保留时间复杂度可加性的程度（即其函子性）；而给定多重计算的多重计算不可约性（通过高维流形与离散配边的情形来描述，此时两个范畴都具有额外的对称幺半结构）则取决于该映射在并行／张量积复合下保留时间复杂度可加性的程度（即其对称幺半函子性）。这一扩展利用了对称幺半范畴能够为描述多路系统、分支图以及非确定性计算的一般代数结构提供便捷组合语义这一事实。通过这一做法，我们实际上勾勒出了一种可能的新扩展，它拓展了范畴论与幺半范畴论的标准方法：态射的复合（无论顺序进行还是并行进行）都附带由计算复杂性理论的约束所产生的额外代数结构。这一新形式体系带来了许多值得深入研究和探索的方向，下面我们将指出其中几个。

首先，尽管传统计算复杂性理论往往将研究范围局限于具有非常简单且定义明确的代数约束的复杂性类（例如 P、EXP、NP 等），但这种范畴论形式体系，以及为本文目的而开发的显式计算工具，有望使人们能够对先验代数结构远不那么丰富的计算复杂性类进行系统且实证的研究。此外，通过将其扩展到幺半范畴，该形式体系还使人们能够严谨地研究多重计算复杂性理论。这种理论与普通的非确定性复杂性理论有着根本区别：在标准的非确定性复杂性类（如 NP）中，尽管计算的非确定性意味着人们不可避免地必须考虑由不同单路／确定性计算构成的多路系统，但该复杂性类最终只关注该系统某一条分支上的时间复杂度（尽管事先未必知道这条分支究竟是哪一条）。另一方面，多重计算复杂性理论研究多路系统本身的计算复杂度，具体而言，研究其分支图的张量积结构（该结构编码了整个多路系统复杂的分支与合并行为）；如前所述，这一理论既涉及状态演化函数的复杂性理论性质，也涉及状态

等价函数的性质，以及二者之间相互作用的性质，而这一点尤为关键。据作者所知，可能存在的多计算复杂性类基本上仍未得到探索，是未来计划研究的一个重要主题。

接下来，本文所呈现的全部分析都只关注单路／多路演化结构，而未考虑因果性；然而，对于超图重写[59][60] （事实上，对于非确定性图灵机演化也是如此，例如先前分析的非确定性二状态、二颜色图灵机，其演化过程的一部分如图17所示的 多路径演化因果图 所示），确实存在一种自然的因果语义，它允许通过显式偏序对这一概念进行形式化编码：只有在另一个转移／重写事件此前已经发生后，某个转移／重写事件才适用。正如多路演化图可以被解释为自由生成一个对称幺半范畴，多路演化因果图（由表示转移／重写事件的演化边，以及表示这些转移／重写事件之间因果关系的因果边共同构成）也可以被解释为自由生成一个弱2-范畴[61], ，其中2-胞腔表示因果关系。这些2-胞腔也配备了自身的张量积运算，通常记作 $\otimes_C$；该运算满足由 Coecke 和 Lal 在因果范畴[62], 背景下定义的 偏幺半结构公理，并允许对类空分离（因果独立）事件之间的因果关系进行并行复合，但不允许对类时分离（因果相关）事件之间的因果关系进行并行复合；后者只能按顺序复合。这引出了一个引人入胜的可能性：我们或许能够为离散余边界范畴 $\mathcal{B}$ 赋予第二种（部分）幺半结构，并据此考察所得映射 $Z' : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ 的2-函子性，以此作为扩展多重计算不可约性定义的途径，使其也能纳入某种内在的因果复杂性，而不只是演化的复杂性（实质上是考察 Z' 对表示系统因果结构的2-胞腔的顺序复合与并行复合造成多大程度的扭曲）。这一工作的目标是将因果不可约性这一概念形式化：对于因果不可约的多路系统，若不明确追踪多路演化图所有分支中各个转移／重写事件之间的因果关系，就无法预先得知其完整因果结构。

如上一节所述，（多）计算复杂性理论与范畴量子力学／函子量子场论之间的形式对偶／伴随关系还具有各种特征，或许能为这一形式体系带来更多纯粹从计算复杂性理论出发的扩展。例如，人们常常认为，原则上可逆的计算（例如密码学中的单向函数）在实践中的不可逆性

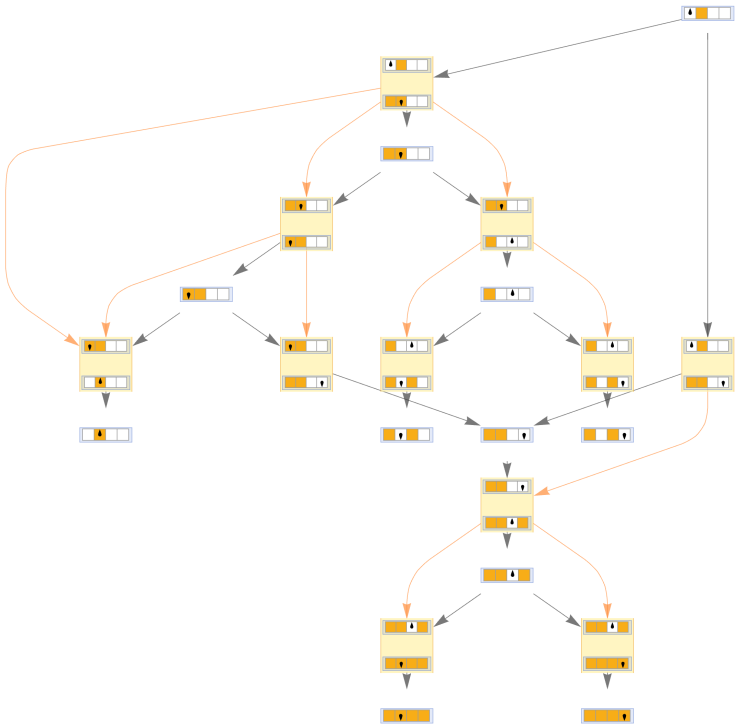


图17：一个多路径演化因果图，对应于一台由规则2506和3506的图灵机转移函数（并行）复合构成的2状态、2颜色图灵机的非确定性演化；该演化从单带状态 $\{0,1,0,0\}$ 开始，共进行3步。灰色边为通常的演化边，橙色边则分别表示两个转移之间的因果关系。

只是计算不可约性的副产物，但这种假设暗中预设了正向演化与反向演化的不可约性之间存在相容条件，而这一条件对于某些系统类别未必成立。通过为我们的范畴 $\mathcal{T}$ 配备对合 dagger 结构 $\dagger$，并运用范畴量子力学的方法考察映射 Z' 对该结构的影响，我们或许能够以相对精细的方式将演化的不可约性与反演的不可约性区分开来。与此密切相关的是，在多个多元多值函数的复合中，交换自变量／输入与值／输出的不可约性；对于张量网络或幺半范畴弦图（其中这种交换操作以逆变／协变指标的升降来编码），通常认为这类操作在计算上是平凡的，但对于反演操作不可约的计算，情况未必如此。为范畴 $\mathcal{T}$ 配备一个紧结构，其单位／余单位为 η/ε，并观察紧结构在 Z' 作用下如何发生扭曲，或许可以用更有意义的方式量化这些操作的复杂度。

然而，传统的多路系统形式主义并未充分利用匕首紧范畴中可用的紧结构，因为多路系统中的转移/事件传统上是单参数但可能有多个取值的（也就是说，状态演化函数通常接收单个状态作为输入，并输出一个可能的后继状态列表）。另一方面，全局-局部 多路系统将转移/事件提升为真正的多参数函数（因此，在多路系统的张量网络/弦图表示中，它们是真正的符号张量）：具体做法是有效地将状态“打散”为其组成“标记”（例如，对于超图重写系统，将状态打散为单个超边；对于图灵机，则打散为单个带位置），然后按需将其重新组装，以应用特定的转移/事件。“全局-局部”一词在此指的是标记具有局部性，而事件具有全局性；因此，多路等价函数作用于事件层面，而非状态层面。图18展示了一个全局-局部多路径演化因果图的示例，它对应于前文所述的同一台非确定性二状态二色图灵机；与之相关的全局-局部支状图见图19。请注意，在给定的全局-局部支状图中，有些标记在空间上彼此分离（即它们对应于纸带的不同区域），另一些标记则在“分支”上彼此分离（即它们对应于纸带的同一区域，但分别位于多路系统的两个不同分支上）。因此，与此前讨论的支状图不同，全局-局部支状图实际上编码了两种不同的张量积结构：从多路系统继承而来的标准对称幺半结构，以及一种“空间”张量积结构（它实际上与上文所述的因果张量积结构 $\otimes_C$ 相同）。这两种张量积结构之间的相容条件尚不明确（例如，尚不清楚它们在某些特殊情况下是否构成一个rig 范畴，尽管这种可能性不大），这仍是未来的研究课题。请注意，标记的顺序是否重要（如图灵机的纸带状态），还是不重要（如超图中的超边），对应于范畴的“空间”部分是对称幺半还是仅为幺半的问题。颇为令人振奋的是，正如多路张量积结构使我们能够量化多重计算复杂度，可以设想，“空间”张量积结构（在得到更深入的理解后）或许能使我们量化空间复杂度，从而考察任意（多重）计算中围绕（例如）空间复杂度与时间复杂度之间权衡的问题。此前，Arsiwalla[64][65] 在 Shulman 的凝聚同伦类型论[66]框架下，对多路系统、“空间性”概念、高阶范畴与类型论之间的关系进行了细致研究。最后，认识到正交性 （独立性）

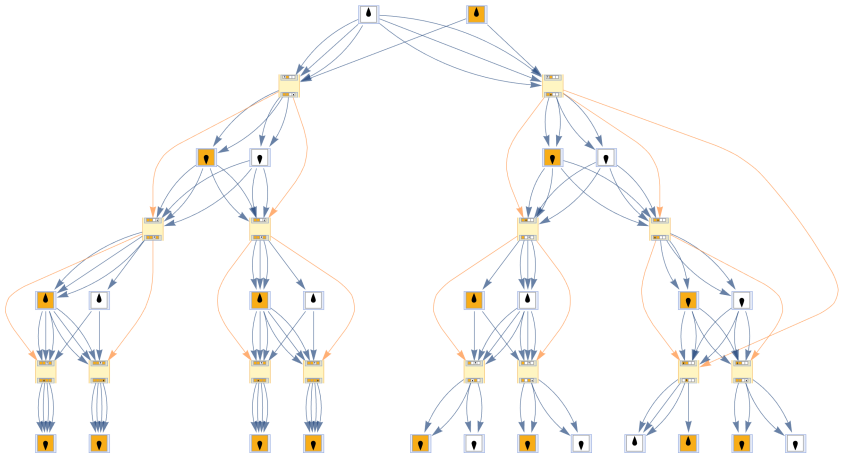


图18：一个“全局-局部”多路径演化因果图，对应于由规则2506和3506的图灵机转移函数（并行）复合构造出的二状态、二颜色图灵机的非确定性演化，该演化从单带状态 $\{0,1,0,0\}$ 开始，历经3步；橙色的边表示转移之间的因果关系，而每条灰色的边则表示单个“标记”（带位置）摄入单次转移或从中排出。

即状态演化的复杂度与状态等价之间存在的正交关系（因而计算不可约性与多重计算不可约性之间也存在这种关系），会带来若干概念上的后果。例如，Wolfram[2] 所倡导的热力学第二定律的计算诠释认为，熵增是计算不可约性的结果：可逆计算的推进可能会产生“加密”其初始条件细节的效果（因此，即使原则上计算可逆，实际上要实现逆转也可能代表一个难度任意高的密码分析问题）。然而，将这一观点与“正交性”原则结合起来表明，在任何给定的多重计算中，至少应存在两种不同的熵概念：一种本质上源于计算，另一种本质上源于多重计算。标准的熵热力学描述，本质上是粗粒化非单射性的一种度量（即在粗粒化函数的作用下，有多少个不同的微观状态被映射到同一个宏观状态）；而在经典力学中，由于刘维尔定理，以及位置/动量值与可能的演化历史之间存在一一对应关系，这一定义可以证明等价于另一种基于可能演化轨迹的定义（即有多少条不同的历史分支会导向同一个粗粒化宏观状态）。然而，对于具有更复杂分支与合并结构的更一般的多路系统，这种对应关系未必成立，因此两种熵定义会有所不同（尽管在量子引力背景下，许多例如纠缠熵的计算可能默认它们等价[67][68][69][70]）。这种消歧所带来的种种影响，仍值得进一步探讨

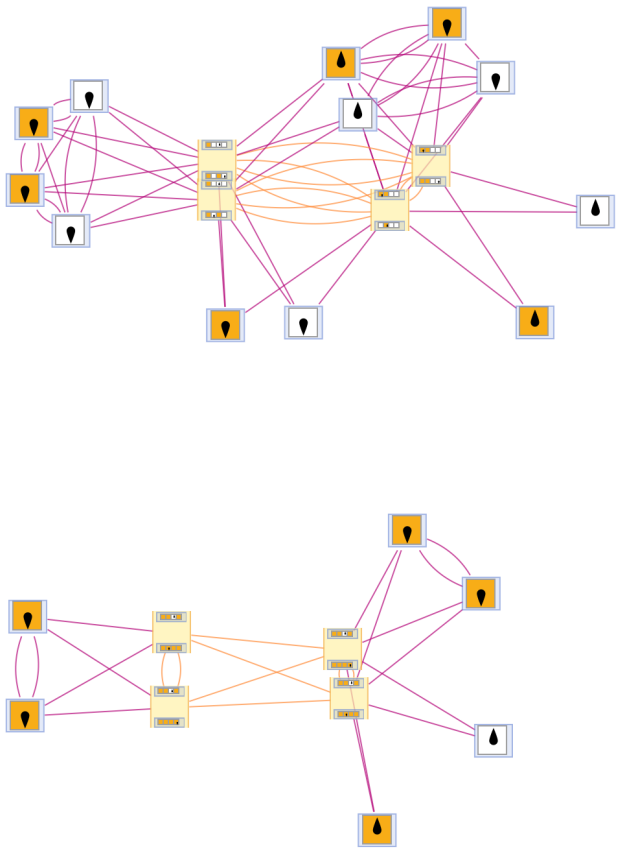


图19：与由规则2506和3506的转移函数并行复合构造的二状态、二颜色图灵机的非确定性演化所对应的全局-局部多路演化因果图的默认“叶状分解”相关联的相应“全局-局部”分支图，经过3步后，呈现出“空间”和“分支”张量积结构的混合。

未来研究的课题。

致谢

作者谨向 Mohamed Barakat、Nicolas Behr、Matteo Capucci、Bob Coecke、Fabrizio Genovese、Manojna Namuduri、Stephen Wolfram 和 Yorick Zeschke 致谢，感谢他们在本作品所述思想孕育发展的不同阶段，进行了种种富有启发性且见解深刻的讨论。作者还要感谢 James Boyd，他在早期的一篇博客文章中为“多重计算不可约性”一词命名；也感谢 Juan Arturo Silva-Ordaz，他促使作者比自己自愿选择的程度更深入地思考等价函数的复杂性。

参考文献

[1] S. Wolfram (1985), “理论物理中的不可判定性与难解性”, 《物理评论快报》**54**(8)：735–738。https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.54.735。

[2] S. Wolfram (2002), 《一种新科学》。伊利诺伊州尚佩恩：Wolfram Media, Inc. https://www.wolframscience.com.

[3] J. Gorard (2018), “减速定理：物理系统中计算不可约性的下界”, *Complex Systems* **27** (2)：177–185。https://www.complex-systems.com/abstracts/ v27_i02_a05/.

[4] A. M. Turing (1937), “论可计算数及其在判定问题中的应用”, 《伦敦数学学会会刊》**S2-42**(1)：250–265。https://londmathsoc. onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.230.

[5] M. R. Garey and D. S. Johnson(1979), 《计算机与难解性：*NP*完全性理论指南》。加利福尼亚州旧金山：W. H. Freeman。ISBN：978-0716710455。

[6] J. E. Hopcroft, R. Motwani and J. D. Ullman(2013), 《自动机理论、语言与计算导论》（第3版）。伦敦：培生。ISBN：978-1292039053。

[7] H. Zenil, F. Soler-Toscano and J. J. Joosten (2012), 《计算不可约性与不可预测性的实证考察》, 《心灵与机器》**22**(3)：149–165。https://link.springer. com/article/10.1007/s11023-011-9262-y。

[8] H. Zwirn and J-P. Delahaye (2013), 《不可预测性与计算不可约性》, 《不可约性与计算等价性：*Wolfram*《一种新科学》问世十年后》, H. Zenil（编）：273–295。柏林，海德堡：施普林格。https://link.springer.com/chapter/10.1007/ 978-3-642-35482-3_19。

[9] D. Reisinger, T. Martin, M. Blankenship, C. Harrison, J. Squires and A. Beavers(2013), 《通过二维元胞自动机探索 Wolfram 的计算不可约性概念》, 不可约性与计算等价性：*Wolfram*《一种新科学》出版十年后，H. Zenil（编）：263–272。柏林、海德堡：施普林格。https://link.springer.com/chapter/10.1007/ 978-3-642-35482-3_18。

[10] S. Mac Lane (1998)，工作数学家的范畴论，《数学研究生教材》**5**（第2版）。柏林、海德堡：施普林格。ISBN：0-387-98403-8。[11] J. Milnor (1962)，“配边理论综述”，*L'Enseignement Math´ematique Revue Interna-tional* **8**：16–23。https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001:1962:8::12[12] J. F. Adams (1974)，稳定同伦与广义同调。美国伊利诺伊州芝加哥：芝加哥大学出版社。ISBN：978-0202361406。[13] S. Mac Lane(1963)，“自然结合律与交换律”，*Rice Institute Pamphlet - RiceUniversity Studies* **49(4)**：28–46。https://scholarship.rice.edu/handle/1911/62865。[14] J. C. Baez (2006)，“量子困境：范畴论视角”，量子引力的结构基础，D. Rickles、S. French 和 J. T. Saatsi（编）：240–366。牛津：牛津大学出版社。https://arxiv.org/abs/0811.2280。

[15] M. Atiyah(1988)，《三维和四维流形的新不变量》，赫尔曼·外尔的数学遗产：纯数学研讨会论文集 **48**: 258–299.https://archive.org/details/mathematicalheri0000symp/page/285/mode/2up.

[16] M. Atiyah (1988)，《拓扑量子场论》，《数学出版物》´高等科学研究所 ´学报**68**(68)：175–186。https://link.springer.com/article/10.1007/ BF02698547。[17] G. B. Segal (1988)，《共形场论的定义》，理论物理中的微分几何方法，K. Bleuler、M. Werner（编）**250**：165–171。https://link.springer.com/ chapter/10.1007/978-94-015-7809-7_9。[18] O. Goldreich(2008)，《计算复杂度：概念视角》。剑桥：剑桥大学出版社。ISBN：978-0521884730。[19] C. H. Papadimitriou (1993)，《计算复杂度》。伦敦：培生。ISBN：978-0201530827。[20] N. Jacobson (2009)，《基础代数学 II》（第 2 版）。纽约州米尼奥拉：多佛出版社。ISBN：978-0486471877。[21] R. E. Stong (1968)，《配边理论札记》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社。ISBN：978-0691649016。

[22] S. Wolfram (2020), 《一类有潜力表征基础物理学的模型》, *Complex Systems* **29**(2)：107–536。https://www.complex-systems.com/abstracts/v29_i02_a01/。

[23] J. Gorard (2020), 《Wolfram 模型的一些相对论和引力性质》, *ComplexSystems* **29**(2)：599–654。https://www.complex-systems.com/abstracts/v29_i02_a03/。

[24] J. Gorard(2020), 《Wolfram 模型的一些量子力学性质》, *Complex Systems***29**(2)：537–597。https://www.complex-systems.com/abstracts/v29_i02_a02/。

[25] M. O. Rabin and D. Scott (1959), 《有限自动机及其判定问题》, *IBM*《研究与开发杂志》**3**(2)：114–125。https://ieeexplore.ieee.org/document/5392601。

[26] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla (2020), 《ZX 演算与扩展超图重写系统 I：范畴量子信息论的多路方法》, *arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2010.02752。

[27] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla (2021), 《ZX 演算与扩展 Wolfram 模型系统 II：用于量子电路简化的快速图解推理》, *arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2103.15820。

[28] G. M. Kelly (1964), 《关于自然结合性、交换性等的相干性 MacLane 条件》, 《代数杂志》 **1**(4)：397–402。https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/0021869364900183。

[29] G. M. Kelly (1982), 富化范畴论基本概念, 伦敦数学会讲义系列。剑桥：剑桥大学出版社。ISBN：978-0521287029。

[30] J. C. Baez and M. Stay (2011), 《物理学、拓扑学、逻辑学与计算：一块罗塞塔石碑》, 《物理学中的新结构》, B Coecke（编）, 《物理学讲义》**813**：95–172。https://arxiv.org/abs/ 0903.0340。

[31] A. Joyal and R. Street(1993), "编织张量范畴", 《数学进展》 **102** (1)：20–78。https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870883710558。

[32] A. Joyal and R. Street (1986), 《辫子幺半范畴》, 麦考瑞数学报告(860081)。http://web.science.mq.edu.au/~street/JS1.pdf。

[33] V. chari and A. Pressley (1995), 《量子群指南》。剑桥：剑桥大学出版社。ISBN：978-0521558846。

[34] M. Aguiar and S. Mahajan(2010), 幺半函子、物种与霍普夫代数，CRM 专著丛书 **29**。密歇根州安娜堡：美国数学会。ISBN：978-0821847763。

[35] K. S. Booth and C. J. Colbourn (1977), "与图同构问题多项式等价的问题"，滑铁卢大学计算机科学系技术报告 **CS-77-04**。https://cs.uwaterloo.ca/research/tr/1977/CS-77-04.pdf。

[36] J. Köbler, U. Schöning and J. Torán(1993)，图同构问题：其结构复杂性。巴塞尔：Birkh¨auser。ISBN：978-0817636807。

[37] J. Gorard (2016), "唯一性树：一种解决图同构问题的可能多项式方法"，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/1606.06399。

[38] H. Ehrig, M. Pfender and H. J. Schneider (1973), 《图文法：一种代数方法》，《第*14*届开关与自动机理论年度研讨会 *IEEE* 会议论文集》：167–180。https://ieeexplore.ieee.org/document/4569741。

[39] H. Ehrig, K. Ehrig, U. Prange and G. Taentzer(2006), 《代数图变换基础》，理论计算机科学专著：EATCS 丛书。柏林，海德堡：施普林格。ISBN：978-3642068317。

[40] A. Kissinger (2014), "有限矩阵是（†-）超图范畴的完备对象"，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/1406.5942。

[41] B. Fong (2015), "装饰余跨"，范畴理论与应用 **30** (33)：1096–1120。https://arxiv.org/abs/1502.00872。

[42] B. Fong(2016), 《开放互联系统的代数》，牛津大学哲学博士论文。https://arxiv.org/abs/1609.05382。

[43] A. Habel, J. Müller and D. Plump (2001), "双推出图变换再探"，计算机科学中的数学结构 **11** (5)：637–688。https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-structures-in-computer-science/article/abs/doublepushout-graph-transformation-revisited/AF02050525390437E1DF746DE4459926.

[44] S. Lack and P. Sobociński(2004), “黏合范畴”，软件科学与计算结构基础国际会议，《计算机科学讲义》**2987**：273–288。https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-24727-2_20。

[45] A. Kissinger (2011)，《过程图：幺半范畴的自动图重写及其在量子计算中的应用》，哲学博士论文，牛津大学。https://arxiv.org/ abs/1203.0202。

[46] A. Kissinger (2008)，《dagger-对称幺半范畴中经典结构的图重写系统》，理学硕士论文，牛津大学。https://www.cs.ox.ac.uk/people/bob.coecke/Aleks. pdf。

[47] A. Kissinger (2009)，《通过图重写与计算机代数探索量子理论》，智能计算机数学。*CICM 2009*，J. Carette、L. Dixon、C. S. Coen、S. M. Watts（编）：90–105。https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-02614-0_12。

[48] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla(2021)，《利用多路因果结构对弦图进行快速自动推理》，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2105.04057。

[49] S. Abramsky and B. Coecke (2004)，“量子协议的范畴语义”，第*19*届 *IEEE* 计算机科学逻辑研讨会论文集。芬兰图尔库：415–425。https: //ieeexplore.ieee.org/document/1319636。

[50] S. Abramsky and B. Coecke (2008)，“范畴量子力学”，《量子逻辑与量子结构手册》，K. Engesser、D. M. Gabbay、D. Lehmann（编）：261–323。爱思唯尔。https://arxiv.org/abs/0808.1023。

[51] U. Schreiber (2009)，“来自 n-函子的代数局域量子场论”，《数学物理通讯》**291**：357–401。https://arxiv.org/abs/0806.1079。

[52] J. C. Baez and J. Dolan (1995)，“高维代数与拓扑量子场论”，《数学物理杂志》 **36**：6073–6105。https://arxiv.org/abs/q-alg/9503002。

[53] M. Burgin(1970)，《带对合的范畴以及自然数集范畴中的对应》，《莫斯科数学会汇刊》**22**：161–228。http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=235。

[54] J. Lambek (1999), 《带对合的有序范畴中的图表追踪》, 纯粹与应用代数杂志**143**(1–3): 293–309。https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S0022404998001157。

[55] M. G. Kelly and M. L. Laplaza (1980), "紧闭范畴的相干性", 纯粹与应用代数杂志 **19**: 193–213. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ 0022404980901012.

[56] S. Doplicher and J. Roberts(1989), "紧群的新对偶理论", 数学创新 **98**: 157–218. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01388849.

[57] P. Selinger (2011), "有限维希尔伯特空间是伴随紧闭希尔伯特空间的完备对象", 理论计算机科学电子札记 **270** (1): 113-119. https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066111000119.

[58] M. Hasegawa, M. Hofmann and G. Plotkin(2008), "有限维向量空间是带迹对称幺半范畴的完备对象", 计算机科学的支柱, A. Avron, N. Dershowitz, A. Rabinovich (编). 《计算机科学讲义》**4800**: 367–385. 柏林, 海德堡: 施普林格. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-78127-1_20.

[59] J. Gorard (2020), 《算法因果集与 Wolfram 模型》, *arXiv* 预印本: 链接: https://arxiv.org/abs/2011.12174。

[60] J. Gorard (2021), 《通过 Wolfram 模型演化对广义相对论中的柯西问题进行超图离散化》, *arXiv* 预印本: https://arxiv.org/abs/2102.09363。

[61] J. Bénabou (1967), 《双范畴导论》, 中西部范畴研讨会报告: 1–77。https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0074299。

[62] B. Coecke and R. Lal(2013), 《因果范畴: 相对论性交互过程》, 物理学基础 **43**(1): 458–501。https://arxiv.org/abs/1107.6019。

[63] N. Johnson and D. Yau (2021), 《双幺半范畴、 E_n-幺半范畴与代数K-理论》, *arXiv* 预印本: https://arxiv.org/abs/2107.10526。

[64] X. D. Arsiwalla and J. Gorard(2021), 《Wolfram 模型重写系统生成的前几何空间作为同伦类型》, *arXiv* 预印本: https://arxiv.org/abs/2111.03460。

[65] X. D. Arsiwalla, J. Gorard and H. Elshatlawy (2021), 《多路（非确定性）重写系统中的同伦作为 n重范畴》，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/ 2105.10822。

[66] M. Shulman(2017), 《同伦类型论：空间逻辑》，数学与物理学中的新空间，G. Catren、M. Anel（编）。https://arxiv.org/abs/1703.03007。

[67] R. Shah and J. Gorard (2019), 《量子元胞自动机、黑洞热力学与量子复杂性定律》，*Complex Systems* **28** (4)：393–410。https://www.complex-systems. com/abstracts/v28_i04_a01/。

[68] L. Susskind (2016), 《计算复杂度与黑洞视界》，《物理学进展》**64**(24)：44–48。https://arxiv.org/abs/1402.5674。

[69] D. Stanford and L. Susskind (2014), 《复杂性与冲击波几何》，《物理评论*D*》**90**(12)：126007。https://arxiv.org/abs/1406.2678。

[70] A. R. Brown, L. Susskind and Y. Zhao(2017), 《量子复杂性与负曲率》，《物理评论*D*》**95**(4)：045010。https://arxiv.org/abs/1608.02612。